

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КАМ'ЯНЕЦЬ – ПОДІЛЬСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ІВАНА ОГІЄНКА
ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ
КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ

Дипломна робота магістра

з теми:

**“Поведінка розв’язків систем диференціальних рівнянь
в околі інваріантного тору”**

Виконала: студентка II курсу,

Мб1-М17з групи

Спеціальності 014 Середня освіта

(Математика)

Вовк Юлія Ігорівна

Керівник: **Авдеюк П. І.**,

кандидат фізико-математичних наук,

доцент

Рецензент: **Кріль С. О.**,

кандидат фізико-математичних наук,

доцент

м. Кам'янець-Подільський – 2018 року

Зміст	
ВСТУП	3
РОЗДІЛ 1. ТЕОРЕМИ ІСНУВАННЯ ТА ЄДИНОСТІ РОЗВ'ЯЗКІВ.....	7
РОЗДІЛ 2. ФУНКЦІЯ ГРІНА-САМОЙЛЕНКА ТА ІНВАРІАНТНИЙ ТОР	17
РОЗДІЛ 3. ІНВАРІАНТНІ ТОРИ НЕЛІНІЙНИХ СИСТЕМ.....	27
РОЗДІЛ 4. ПОВЕДІНКА РОЗВ'ЯЗКІВ В ОКОЛІ ТОРУ	42
ВИСНОВОКИ.....	59
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....	60

ВСТУП

В даній роботі поставлено задачу з'ясувати умови існування та єдиності розв'язків злічених систем диференціальних рівнянь та дослідити поведінку розв'язків злічених систем диференціальних рівнянь в околі інваріантного тору.

Актуальність теми. Питання, що виникають в різних галузях механіки, фізики, техніки викликали необхідність вивчення систем диференціальних рівнянь. Зокрема, багато задач теорії динамічної стійкості коливань пружних систем, викликаних дією вібраційного параметричного навантаження, зводяться до інтегро-диференціальних рівнянь. Застосування варіанта метода Бубнова-Гальоркіна доводить розв'язання цих рівнянь до нескінченної системи звичайних диференціальних рівнянь. Основою дослідження нескінченних систем диференціальних рівнянь послужила теорема про однозначність розв'язку задачі Коші для зліченої системи диференціальних рівнянь, яку довів А.Н. Тихонов. К.П.Персідський [22,23] довів теорему існування та єдиності розв'язку зліченої системи диференціальних рівнянь, дослідив стійкість розв'язків нескінченної системи диференціальних рівнянь у повному лінійному нормованому просторі. Згодом визначились отакі напрямки у дослідженнях нескінченних систем диференціальних рівнянь: загальна теорія злічених систем, стійкість розв'язків, теорія характеристичних чисел злічених систем, зліченні системи диференціальних рівнянь у частинних похідних, диференціальні рівняння у нормованих просторах, інваріантні многовиди злічених систем диференціальних рівнянь. Впорядкування результатів, отриманих в теорії нескінченних систем диференціальних рівнянь було проведено в монографії К.Г.Валеєва та О.А.Жаутикова [8]. Також слід відмітити збірник праць К.П. Персідського [18].

Теорія інваріантних тороїдальних многовидів та її методи використовуються для знаходження та дослідження поведінки розв'язків систем диференціальних рівнянь. Питання існування тороїдальних многовидів, структури траєкторій на многовидах та в їх околах розглянуті в працях

В.І. Арнольда [4], М.М. Боголюбова [5], Ю.О. Мітропольського [6], А.М. Самойленка [27-48], О.Б. Ликової [15], Ю. Мозера, та цілої низки інших.

Ефективним апаратом для наближеної побудови умовно-періодичних рухів, що заповнюють інваріантні тори є асимптотичні методи Крилова-Боголюбова-Митропольського. Плідний підхід до теорії збурення інваріантних тороїдальних многовидів динамічних систем, пов'язаний з використанням функції Гріна для лінеаризованої задачі, було запропоновано А.М. Самойленко [22]. Зазначений підхід дозволив з єдиної та загальної точки зору викласти теорію збурення як гладких, так і недиференційовних інваріантних тороїдальних многовидів динамічних систем та дав теореми існування таких многовидів. В роботі [24] було з'ясовано характер поведінки розв'язків, що починаються в околі тору, інваріантного відносно даної системи диференціальних рівнянь, у припущенні, що тор є експоненціально стійким. Тобто, було вказано умови при яких довільна траєкторія з малого околу тору τ_m притягується до відповідної траєкторії на τ_m за експоненціальним законом. Отримані умови співпадають з умовами, вказаними в [22], що гарантують збереження при малих збуреннях експоненціально стійкого інваріантного тору. Очевидний зв'язок цих досліджень з дослідженнями стійкості інваріантних торів, проведених методом інтегральних многовидів [5,15]. Підхід, запропонований А.М. Самойленко, викликав низку досліджень в напрямку вивчення питань існування та властивостей гладкості функції Гріна задачі про інваріантні тори, звідність в околі інваріантних торів, експоненціальної стійкості, експоненціального розщеплення та ін. Серед праць вказаних напрямків необхідно відмітити роботи А.М. Самойленко [21-38], А.М. Самойленко та В. Л. Кулика [29-31]. В роботах Ю.В. Теплінського [32-44] розглянуті питання існування інваріантних торів лінійної і нелінійної злічених систем диференціальних рівнянь.

Теореми існування інваріантних тороїдальних многовидів були доведені в роботах А.М. Самойленко і Ю.В. Теплінського [32-37] для систем диференціальних рівнянь. На підставі цих результатів в роботах

Ю.В. Теплінського та П.І. Авдеюка [42-44] досліджувалися питання існування інваріантних тороїдальних многовидів злічених систем диференціальних рівнянь, залежність функції Гріна задачі про інваріантний тор від параметра, поведінка розв'язків злічених систем диференціальних рівнянь, умови диференційованості функції Гріна, розглянуті умови, при яких будь-яка траєкторія з малого околу тору притягується до відповідної траєкторії на торі у разі нелінійної і квазілінійної систем диференціальних рівнянь.

Метою роботи є з'ясування поведінки розв'язків систем диференціальних рівнянь в околі інваріантного тору.

Об'єктом дослідження є функція Гріна-Самойленка задач про інваріантні тори.

Предметом дослідження є проблеми теорії інтегральних многовидів, які допомагають дослідженню існування та єдиності розв'язків злічених систем диференціальних рівнянь.

Задачами дослідження є:

- теореми існування та єдиності розв'язків;
- функція Гріна-Самойленка;
- інваріантні тори нелінійних злічених систем;
- дослідження поведінки розв'язків злічених систем диференціальних рівнянь в околі інваріантного тору.

Наукова новизна отриманих результатів. Результати роботи мають дослідницький характер та полягають в наступному:

- з'ясовано умови існування та єдиності розв'язків;
- розглянуто функцію Гріна-Самойленка;
- розглянуто інваріантні тори нелінійних злічених систем;
- досліджено поведінку розв'язків злічених систем диференціальних рівнянь в околі інваріантного тору.

Практичне значення отриманих результатів. Дипломна робота має теоретичний характер. Її результати, а також запропоновані методи та

прийоми можуть бути використані для подальшого дослідження розв'язків злічених систем диференціальних рівнянь.

Структура роботи. Робота складається із вступу, чотирьох частин, висновків та списку використаних джерел.

У першому розділі розглянуто загальні питання теорії інтегральних многовидів, зокрема, поняття многовиду, з'ясовано найпростіші задачі теорії інтегральних многовидів, наведено запис інтегрального многовида в стандартній формі.

У другому розділі розглянуто умови існування та властивості інтегральних многовидів. Наведено умови стійкості інтегральних многовидів, з'ясовано найпростіші властивості інтегральних многовидів. Дано доведення теореми існування одновимірного інтегрального многовиду.

У третьому розділі наведено поняття інваріантного тору, показано відшукування цього тору для нелінійних злічених систем диференціальних рівнянь.

Четвертий розділ присвячений дослідженню поведінки розв'язків злічених систем диференціальних рівнянь в околі інваріантного тору.

ВИСНОВОКИ

В роботі розглянуто основні положення теорії інтегральних многовидів. Наведено теореми існування та єдиності розв'язків зчисленних систем диференціальних рівнянь. Розглянуто поняття функції Гріна-Самойленка та інваріантного тору, теореми існування та основні властивості інтегрального многовиду систем нелінійних диференціальних рівнянь в стандартній формі. Викладено основні результати, що відносяться до дослідження інтегральних многовидів нелінійних диференціальних рівнянь, близьких до точно інтегровних. Розглянуто нелінійну зліченну систему диференціальних рівнянь та проведено дослідження поведінки розв'язків цієї системи в околі інваріантного тору.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Авдеюк П.И. О поведении решений квазилинейной счетной системы в окрестности инвариантного тора // П.И. Авдеюк // Асимптотическое интегрирование дифференциальных уравнений - Киев: Ин-т математики АН УССР, 1985. – С.3-8.
2. Авдеюк П.И. О существовании инвариантных торов счетных систем дифференциальных уравнений // П.И. Авдеюк // Некоторые вопросы теории асимптотических методов нелинейной механики - Киев: Ин-т математики АН УССР, 1986. – С.4-12.2.
3. Арнольд В. И. Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике // В. И.Арнольд УМН. 1962.2. - 18, вып. 6. - С. 91-192.1.
4. Арнольд В. И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. / В. И.Арнольд - М.: Наука, 1979. - 304 с.
5. Боголюбов Н.Н., Метод интегральных многообразий в нелинейной механике / Н.Н. Боголюбов, Ю.А. Митропольский // Труды междунар. симп. по нелинейным колебаниям.- Киев: Ин-т математики АН УССР, 1963.. - С. 93-154.
6. Боголюбов Н.Н. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. / Н.Н. Боголюбов , Ю.А. Митропольский.- М.: Наука, 1974. - 504 с.
7. Боголюбов Н.Н. Метод ускоренной сходимости в нелинейной механике. / Н.Н. Боголюбов, Ю.А. Митропольский, А.М. Самойленко - Киев: Наук, думка, 1969. - 244 с.
8. Валеев К.Г., Бесконечные системы дифференциальных уравнений. / К.Г. Валеев О.А. Жаутыков.- Алма-Ата: Наука, 1974. - 412 с.
9. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц / Ф.Р. Гантмахер– М.: Наука, 1967.- 575 с.
10. ГДалецкий Ю.Л. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве./ Ю.Л. Далецкий, М.Г Крейн.- М.: Наука, 1970. - 536 с.

11. Колмогоров А.Н. Общая теория динамических систем и классическая механика / А.Н. Колмогоров // Международный конгресс в Амстердаме. - М.: Физматгиз, 1961. - С. 187-208.
12. Крейн М.Г. Лекции по теории устойчивости решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. / М.Г. Крейн - Киев, 1964. - 188 с.
13. Кулик В. Л. К вопросу о зависимости функции Грина задачи об инвариантном торе от параметра / В. Л. Кулик // УМЖ. - 1978. - 30, №4. - С. 544-551.
14. Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения./ А.М. Ляпунов - ГИТТЛ, 1950. 471 с.
15. Митропольский Ю.А. Интегральные многообразия в нелинейной механике. / Ю.А.Митропольский, О.Б. Лыкова - М.: Наука, 1972.2. - 412с.
16. Митропольский Ю.А. К вопросу о структуре траекторий на тороидальных многообразиях / Ю.А.Митропольский, А.М. Самойленко // Докл. АН УССР. - 1964. - 8. - С. 984-985.
17. Перестюк Н.А. Инвариантные множества одного класса разрывных динамических систем / Н.А. Перестюк // УМЖ. - 1984. - 36, №1. – С. 63-69.
18. Персидский К.П. Бесконечные системы дифференциальных уравнений. / К. П. Персидский Дифференциальные уравнения в нелинейных пространствах. - Алма-Ата: Наука, 1976. - 247 с.
19. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. / Л.С. Понтрягин - М.: Наука, 1970. - 332 с.
20. Пуанкаре А. О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. / А. Пуанкаре - М.-Л.: ОГИЗ ГИТТЛ, 1947. – 390с.
21. Самойленко А.М. К вопросу о структуре траекторий на торе / А.М. Самойленко // УМЖ. - 1964. - 16, №6 - С. 769-782.1.
22. Самойленко А.М. О сохранении инвариантного тора при возмущении / А.М. Самойленко // Изв. АН СССР. Сер. матем - 1970. - 34, ЛГ6.]

- С. 1219-1240.
23. Самойленко А.М. О приведении динамической системы в окрестности гладкого инвариантного тора к каноническому виду / А.М. Самойленко // Изв. АН СССР. Там же. 1972.1. 35, №1. С. 209-232.2.
 24. Самойленко А.М. Об экспоненциальной устойчивости инвариантного тора динамической системы / А.М. Самойленко // Дифференц. уравнения. - 1975. - №5. - С. 820 - 834.
 25. Самойленко А.М. О приводимости системы обыкновенных дифференциальных уравнений в окрестности гладкого интегрального многообразия / А.М. Самойленко // УМЖ. - 1966. - 18, №6. - С. 41-64.
 26. Самойленко А.М. Исследование динамической системы в окрестности квазипериодической траектории / А.М. Самойленко // - Киев, 1990. В 43 с- (Препр. /АН УССР. Ин-т математики, 90.35).
 27. Самойленко А.М. Исследование динамической системы в окрестности инвариантного тороидального многообразия / А.М. Самойленко // УМЖ. - 1991. - 42, Л/Ч. - С. 530-537.
 28. Самойленко А.М. Элементы математической теории многочастотных колебаний. Инвариантные торы. / А.М. Самойленко - М.: Наука, 1987. - 302 с.
 29. Самойленко А.М., Кулик В.Л. О непрерывности функции Грина задачи об инвариантном торе / А.М. Самойленко, В.Л. Кулик // УМЖ. - 1978. - 30, №6. - С. 779-782.2.
 30. Самойленко А.М. Множества инвариантных торов линейных расширений динамических систем / А.М. Самойленко, В.Л. Кулик // Докл. АН УССР. Сер. А. - 1984. - №8. С. 15-19.
 31. Самойленко А.М. Расщепляемость линейных расширений динамических систем на торе / А.М. Самойленко, В.Л. Кулик // Докл. АН УССР. Сер.А.- 1984. - №12.1.- С. 23-27.
 32. Самойленко А.М. Функция Грина задачи об инвариантных торах счетных систем дифференциальных уравнений / А.М. Самойленко,

- Ю.В. Теплинский // Докл. АН УССР. Сер. А. - 1981. - №1 - С. 26-30.
33. Самойленко А.М. Об инвариантных торах счетных систем дифференциальных уравнений. / А.М. Самойленко, Ю.В. Теплинский, Цыгановский И.С. - Киев, 1982.2. - 43 с. - (Препр. /АН УССР. Ин-т математики; 82.2.30).
34. Самойленко А.М., Теплинский Ю.В. Об инвариантных торах дифференциальных систем с импульсами в пространстве ограниченных числовых последовательностей / А.М. Самойленко, Ю.В. Теплинский // Дифференц уравнения. - 1985. - 21, №8. - С. 1353-1361.
35. Самойленко А.М. Об устойчивости инвариантного тора нелинейной счетной системы уравнений / А.М. Самойленко, Ю.В. Теплинский // Докл. АН УССР. Сер. А. - 1991. - №7. - С. 31-32.2.
36. Самойленко А.М. Счетные системы дифференциальных уравнений / А.М. Самойленко, Ю.В. Теплинский – К.: Ин-т математики, 1993. – 308 с.
37. Самойленко А. М., Теплінський Ю. В. Елементи математичної теорії еволюційних рівнянь у банахових просторах /Самойленко А. М., Теплінський Ю. В. // праці Ін-ту математики НАН України. Математика та її застосування. - 2008. –Т72. - 496 с.
38. Теплинский Ю.В. Об инвариантных торах и приводимости счетных систем / Ю.В. Теплинский // Дифференц. уравнения. - 1979. - 15, N4. – С.759-761.
39. Теплинский Ю.В. К вопросу о приводимости счетных систем дифференциальных уравнений с квазипериодическими коэффициентами / Ю.В. Теплинский // УМЖ. - 1979. – 31, №4. - С. 463-465.
40. Теплинский Ю.В. Об инвариантных торах счетных систем дифференциальных уравнений / Ю.В. Теплинский // Докл. АН УССР. Сер. А. - 1978. - №9. - С. 796-800.
41. Теплинский Ю.В. Об инвариантных торах линейных систем дифференциальных уравнений в пространстве M / Ю.В. Теплинский // УМЖ. - 1982.2. - 35, №2.1.- С. 194-199.

42. Теплинский Ю.В., Авдеюк П.И. О зависимости функции Грина задачи об инвариантном торе линейной дифференциальной системы уравнений в пространстве M от параметра / Ю.В. Теплинский, П.И. Авдеюк // Приближенные методы анализа нелинейных колебаний. - Киев: Ин-т математики АН УССР, 1984. - С. 120-128.
43. Теплинский Ю.В., Авдеюк П.И. Об экспоненциальной устойчивости инвариантного тора нелинейной счетной системы дифференциальных уравнений / Ю.В. Теплинский, П.И. Авдеюк // УМЖ. - 1990. - 42, №2.2. - С. 401-405.
44. Теплинский Ю.В., Авдеюк П.И. Редукция задачи о существовании инвариантного тора бесконечной дифференциальной системы к конечному случаю / Ю.В. Теплинский, П.И. Авдеюк // УМЖ. – 1991. - 43, №9, - С. 1251-1255.