

Міністерство освіти та науки України  
Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка  
Фізико-математичний факультет  
Кафедра математики

## **Дипломна робота магістра**

з теми:

### ***"Інтегральні перетворення Ганкеля в задачах математичного аналізу"***

Виконала студентка II курсу,  
Мб1-М17z групи  
спеціальності 014.04 Середня освіта  
(Математика)

**Кошевка Валерія В'ячеславівна**

Науковий керівник: доктор фізико-  
математичних наук, професор

**Конет І. М.**

Рецензент: кандидат фізико-  
математичних наук, доцент

**Кріль С.О.**

2018 р.

## ЗМІСТ

ВСТУП.....	3
Розділ 1. Інтегральні перетворення Ганкеля 1-го роду в задачах математичного аналізу.....	5
§ 1. Підсумовування функціональних рядів методом інтегрального перетворення Ганкеля 1-го роду на однорідному сегменті.....	5
§ 2. Підсумовування функціональних рядів методом інтегрального перетворення Ганкеля 1-го роду на двоскладовому сегменті.....	13
§3. Підсумовування функціональних рядів методом інтегрального перетворення Ганкеля 1-го роду на трискладовому сегменті.....	36
Розділ 2. Інтегральні перетворення Ганкеля 2-го роду в задачах математичного аналізу.....	45
§ 1. Підсумовування функціональних рядів методом інтегрального перетворення Ганкеля 2-го роду на однорідному сегменті.....	45
§ 2. Підсумовування функціональних рядів методом інтегрального перетворення Ганкеля 2-го роду на двоскладовому сегменті.....	52
§3. Підсумовування функціональних рядів методом інтегрального перетворення Ганкеля 2-го роду на трискладовому сегменті.....	73
ВИСНОВКИ.....	83
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....	84

## ВСТУП

Актуальні задачі сучасної теорії рівнянь математичної фізики, зокрема теорії теплопровідності, приводять до крайових задач для диференціальних рівнянь з частинними похідними не тільки в однорідних областях, коли коефіцієнти рівнянь є неперервними, але й в кусково-однорідних і неоднорідних областях, коли коефіцієнти рівнянь є кусково-сталими чи кусково-неперервними [13, 19, 28, 30, 31, 32, 33].

Окрім методу відокремлення змінних [26], одним з важливих і ефективних методів вивчення лінійних крайових задач математичної фізики є метод інтегральних перетворень, який дає можливість побудувати в аналітичному вигляді розв'язки тих чи інших крайових задач через їх зображення у вигляді деякого інтегралу або функціонального ряду [1, 5, 6, 7, 14, 17, 18, 27, 34, 35, 37, 38].

Відомо, що елементи машин і механізмів, які перебувають під впливом температурного поля, зазвичай знаходяться в короткочасному стаціонарному режимі, на який вони виходять після стрибкоподібного температурного або силового навантаження. Вивчення їх фізико-технічних характеристик приводить до задач математичної фізики кусково-однорідних середовищ [3, 4, 15, 16, 29, 40].

Для таких задач ефективним методом їх дослідження виявився метод гібридних інтегральних перетворень, які породжені гібридними диференціальними операторами, коли на кожній компоненті зв'язності кусково-однорідного середовища розглядаються або ж різні диференціальні оператори, або диференціальні оператори того ж самого вигляду, але з різними наборами коефіцієнтів [10 – 12, 20 – 23, 28].

Практика показує, що у багатьох випадках величини, які характеризують стаціонарний режим, зображаються поліпараметричними функціональними

рядами, які можуть умовно збігатися навіть тоді, коли зображають аналітичну функцію.

Тому виникає природне бажання замінити функціональний ряд його результатом збіжності, тобто функцією, що особливо важлива при інженерних розрахунках. Таким чином, ми приходимо до важливої і складної задачі математичного аналізу — підсумовування функціональних рядів. Одним із методів розв'язання таких задач є поєднання методів функцій Коші та методів інтегральних і гібридних інтегральних перетворень.

У дипломній роботі методом інтегральних і гібридних інтегральних перетворень Ганкеля підсумовано нові класи функціональних рядів, загальні члени яких утримують алгебраїчні функції та функції Бесселя.

## ВИСНОВКИ

При найбільш загальних обмеженнях методом скінченних інтегральних перетворень Ганкеля 1-го роду (розділ 1) і Ганкеля 2-го роду (розділ 2) підсумовано нові класи поліпараметричних функціональних рядів, загальні члени яких утворюють алгебраїчні функції та функції Бесселя. Як наслідки одержано деякі суми, часткові варіанти яких відомі у довідковій математичній літературі з розглянутого розділу математичного аналізу.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Ахиезер Н.И. Лекции об интегральных преобразованиях Н.И. Ахиезер. — Харьков: ВШ, 1984. — 120 с.
2. Березанский Ю.М. Разложения по собственным функциям самосопряженных операторов / Ю.М. Березанский. — К.: Наук. думка, 1965. — 798 с.
3. Блажевський С.Г. Термопружний стан багаточарових симетричних тіл / С.Г. Блажевський, М.П. Ленюк. — К.: Ін-т математики НАН України, 2000. — 130 с.
4. Боли Б. Теория температурных напряжений / Б. Боли, Дж. Уэйнер. — М.: Мир, 1964. — 517 с.
5. Бычков Ю. А. Интегральные преобразования / Ю.А. Бычков, А.П. Прудников. — М.: Наука, 1977. — 286 с.
6. Вірченко Н.О. Основні методи розв'язання задач математичної фізики / Н.О. Вірченко. — К.: КПІ, 1997. — 370 с.
7. Галицын А. С. Интегральные преобразования и специальные функции в задачах теплопроводности / А.С. Галицын, А.Н. Жуковский. — К.: Наук. думка, 1976. — 284 с.
8. Градштейн И. С. Таблицы интегралов, сум, рядов и произведений / И.С. Градштейн, И. М. Рыжик. — М.: Наука, 1971. — 1108 с.
9. Грей Э. Функции Бесселя и их приложения в физике и технике / Э. Грей, Г.Б. Метьюз. — М.: ИЛ, 1949. — 386 с.
10. Громик А.П. Стаціонарні задачі теплопровідності в кусково-однорідних просторових середовищах / А.П. Громик, І. М. Конет. — Кам'янець-Подільський: Абетка-Світ, 2008. — 120 с.
11. Громик А.П. Нестационарні задачі теплопровідності в кусково-однорідних просторових середовищах / А.П. Громик, І. М. Конет. — Кам'янець-Подільський: Абетка - Світ, 2009. — 120 с.

12. Громик А.П. Температурні поля в кусково-однорідних просторових середовищах / А.П. Громик, І.М. Конет, М.П. Ленюк. — Кам'янець-Подільський: Абетка-Світ, 2011 – 200 с.
13. Дейнека В.С. Модели и методы решения задач с условиями сопряжения / В.С. Дейнека, И. В. Сергиенко, В.В. Скопецкий. К.: Наук. думка, 1998. – 614 с.
14. Диткин В. А. Интегральные преобразования и операционное исчисление/ В.А.Диткин, А.П. Прудников. — М.: Наука, 1974. – 542 с.
15. Зарубин В.С. Инженерные методы решения задач теплопроводности / В.С. Зарубин. — М.: Энергоатомиздат., 1983. – 327 с.
16. Карслоу Г. Теплопроводность твердых тел / Г. Карслоу, Д. Егер — М.: Наука, 1964. – 488 с.
17. Карташов Э.М. Аналитические методы в теплопроводности твердых тел / Э. М. Карташов. — М.: ВШ, 1979. – 415 с.
18. Князев П.П. Интегральные преобразования / П.П. Князев. — Минск: ВШ, 1968. – 197 с.
19. Колено Ю.М. Методы теплопроводности и термоупругости неоднородного тела / Ю.М. Колено. — К.: Наук. думка, 1992. – 280 с.
20. Конет І.М. Стаціонарні та нестационарні температурні поля в ортотронних сферичних областях / І.М. Конет. — К.: Ін-т математики НАН України, 1998. – 209 с.
21. Конет І.М. Стаціонарні та нестационарні задачі теплопровідності для багат шарових ортотронних клиновидних циліндрично-кругових областей / І.М. Конет, М.П. Ленюк. — Чернівці: Рута, 2000. – 136 с.
22. Конет І.М. Стаціонарні та нестационарні температурні поля в циліндрично-кругових областях / І.М. Конет, М.П. Ленюк. — Чернівці: Прут, 2001. – 312 с.
23. Конет І.М. Температурні поля в кусково-однорідних циліндричних областях / І.М. Конет, М.П. Ленюк. — Чернівці: Прут, 2004. – 276 с.

24. Конет І.М. Інтегральні перетворення типу Мелера-Фока / І.М. Конет, М.П. Ленюк. — Чернівці: Прут, 2002. — 248 с.
25. Конет І.М. Інтегральні перетворення та диференціальні рівняння з узагальненим оператором Лежандра / І. М. Конет. — Кам'янець-Подільський: Абетка-Світ, 2007. — 136 с.
26. Кошляков Н.С. Уравнения в частных производных математической физики / Н.С. Кошляков, Э.Б. Глинер, М.М. Смирнов. — М.: ВШ, 1970. — 712 с.
27. Ленюк М.П. Интегральные преобразования с разделенными переменными (Фурье, Ханкеля) / М.П. Ленюк. — К., 1983. — 60 с. — (Препр./АН УССР. Ин-т математики; 83.4)
28. Ленюк М.П. Температурні поля в плоских кусково-однорідних ортотропних областях / М.П. Ленюк. — К.: Ін-т математики НАН України, 1997. — 188 с.
29. Лыков А.В. Теория теплопроводности / А.В. Лыков. — М.: ВШ, 1967. — 600 с.
30. Мелан Э. Термоупругие напряжения, вызываемые стационарными температурными полями / Э. Мелан, Г. Паркус. — М.: Физматгиз., 1968. — 167 с.
31. Паркус Г. Неустановившееся температурные напряжения / Г. Паркус. — М.: Физматгиз., 1963. — 251 с.
32. Подстригач Я. С. Термоупругость тел неоднородной структуры / Я.С. Подстригач, В.А. Ломакин, Ю.М. Колено. — М.: Наука, 1984. — 368 с.
33. Сергиенко И.В. Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах / И. В. Сергиенко, В.В. Скопецкий, В.С. Дейнека. — К.: Наук. думка, 1991. — 432 с.
34. Снеддон Н. Преобразования Фурье / Н. Снеддон. — М.: ИЛ, 1955. — 668 с.
35. Титчмарш Е.Ч. Введение в теорию интегралов Фурье / Е.Ч. Титчмарш. — М. — Л.: Гостехиздат., 1948. — 480 с.



36. Тихонов А.Н. Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. — М.: Наука, 1972. — 735 с.
37. Грантер К. Дж. Интегральные преобразования в математической физике / К. Дж. Грантер. — М.: Гостехтеориздат., 1956. — 204 с.
38. Уфлянд Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости / Я. С. Уфлянд. — Л.: Наука, 1967. — 402 с.
39. Шилов Г.Е. Математический анализ. Второй специивльный курс / Г. Е. Шилов. — М.: Наука, 1965. — 328 с.
40. Шилин Г. Ф. Инженерные алгоритмы решения стационарных задач теплопроводности в составних телах / Г. Ф. Шилов. — Иркутск: ИГУ, 1983. — 115 с.