Міністерство освіти і науки України

Кам’янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка

Фізико-математичний факультет

Кафедра математики

Дипломна робота

магістра

з теми: **«Задача найкращої зваженої рівномірної раціональної апроксимації неперервної на компакті функції з додатковими обмеженнями типу нерівностей на чисельники апроксимуючих функцій»**

Виконала:

студентка II курсу Mb1-M17z групи спеціальності 014 Середня освіта (Математика)

Савчук Ірина Русланівна

Керівник:

Гнатюк В.О., професор кафедри математики, кандидат фізико-математичних наук, доцент

Рецензент:

Щирба В.С., професор кафедри інформатики, кандидат фізико-математичних наук, доцент

Кам’янець-Подільський – 2018 р.

ЗМІСТ

ВСТУП

Робота присвячена задачі найкращої відносно компактної підмножини S компакта Ω зваженої рівномірної раціональної апроксимації неперервної на Ω функції з додатковим обмеженням на чисельники апроксимуючих функцій типу нерівності.

Актуальність теми. Теорія наближення є однією з галузей математики, яка найбільш інтенсивно розвивається. Її ідеї та методи проникають в різні розділи математичної науки, особливо прикладних напрямків, є відправною точкою досліджень багатьох питань обчислювальної математики. Вона вивчає питання щодо наближеного подання одних математичних об'єктів іншими, зазвичай більш простої природи.

Однією з центральних галузей теорії наближення є теорія наближення функцій, в якій розглядається задача відшукання для даної функції іншої функції з деякого заданого класу, яка в тому чи іншому сенсі задає наближене подання заданої функції.

Теорія наближення функцій бере свій початок у працях П.Л. Чебишева, який ввів одне з основних понять теорії наближення – найкраще наближення і ще у 50-х роках XIX століття поставив задачу про найкраще рівномірне наближення неперервної на відрізку $[c,d]$ дійснозначної функції a множиною V алгебраїчних поліномів g степеня, що не перевищує n, тобто задачу відшукання величини

$$\inf_{g\in V}\max_{s\in[c,d]}|g(s)-a(s)|. \qquad (0.1)$$

Одним із перших і важливих результатів теорії наближення є також теорема Вейєрштраса, відповідно до якої кожну неперервну на сегменті функцію можна наблизити у рівномірній метриці з наперед заданою точністю алгебраїчним поліномом достатньо високого степеня.

Пізніше розглядались й інші задачі про найкраще наближення за допомогою алгебраїчних, тригонометричних поліномів тощо в метриках різних просторів.

Згодом прийшли до загальної постановки задачі найкращого наближення елемента a лінійного нормованого простору X множиною $V \subset X$, тобто задачі відшукання величини

$$\inf_{g \in V} \|g - a\|. \qquad (0.2)$$

Основні результати задач, про які йшла мова вище, в тому числі задач (0.1), (0.2) підсумовано у працях Н.І.Ахієзера [1], В.К. Дзядика [2], М.П. Корнєйчука [3-6], П.-Ж. Лорана [7], О.І Степанця [8-11], В.М. Тихомирова [12] та ін.

Реалізуючи ідею про те, що задана функція повинна наближатись як можна краще за допомогою простіших функцій в задачах відшукання величини типу (0.1) в ролі апроксимаційного апарату стали вибирати раціональні функції.

Виявилось, що в багатьох випадках використання замість многочленів раціональних функцій при тій же кількості параметрів дає можливість досягнути кращої точності, тобто понизити максимальне значення похибки.

Оскільки обчислювальні машини легко можуть підраховувати значення раціональних функцій, то в багатьох випадках раціональні наближення мають переваги перед наближеннями многочленами.

Задача про найкраще раціональне наближення неперервної на компакті функції розглядалась у багатьох працях (див., наприклад, [1, 2], [13-16]).

Актуальними в теорії наближення є задачі найкращого рівномірного наближення неперервної на компакті функції не відносно всього компакта, а лише відносно деякої його замкненої множини (найкраще рівномірне наближення у розумінні передднорми) (див., наприклад, [7]), задачі найкращої рівномірної апроксимації неперервних на компакті функцій множинами, елементи яких задовольняють додатковому обмеженню (змінюються у заданому діапазоні) (див., наприклад, [7], [17-21]).

Відомо, що з метою надання деяким відстаням, що фігурують у задачі наближення, більшої ваги у порівнянні з іншими відстанями використовується вагова функція (див., наприклад, [22,23]).

Природно виникає ідея розгляду такої задачі найкращої рівномірної раціональної апроксимації неперервної на компакті функції, яка б певною мірою охоплювала окремі задачі наближення, про які йшла мова вище (задачі найкращого рівномірного наближення відносно деякої замкненої множини компакта; задачі найкращого рівномірного наближення функції множинами, елементи яких задовольняють деякому додатковому обмеженню; задачі найкращої зваженої рівномірної апроксимації), і дослідження якої дозволило б єдиним чином отримувати результати для того кола задач, які включаються у її постановку як частинні випадки.

Одна з таких задач розглядається у дипломній роботі і полягає у наступному.

Нехай Ω – компакт, S і T – компактні підмножини Ω; $C(\Omega)$, $C(S)$, $C(\mathrm{T})$ – лінійні над полем дійсних чисел нормовані простори неперервних на Ω, S, T дійснозначних функцій g, h, ψ з нормами $\|g\| = \|g\|_{C(\Omega)} = \max\limits_{\theta\in\Omega}|g(\theta)|$, $\|h\|_{C(\mathrm{S})} = \max\limits_{s\in \mathrm{S}}|h(s)|$, $\|\psi\|_{C(\mathrm{T})} = \max\limits_{t\in \mathrm{T}}|\psi(t)|$ відповідно; $C_{|\cdot|}^{+}(\Omega) = \{g \in C(\Omega):\ \ |g(\theta)| > 0, \theta \in \Omega\}$, $C^{+}(\Omega) = \{g \in C(\Omega): g(\theta) > 0, \theta \in \Omega\}$, $U \subset C(\Omega)$,
$V \subset C_{|\cdot|}^{+}(\Omega)$, $\omega \in C^{+}(\Omega)$ (ω – вагова функція), $f \in C(\Omega)$, $c \in C(T)$; $A = \{u \in C(\Omega): u(t) \le c(t), t \in T\}$.

Задачею найкращої відносно множини S зваженої рівномірної апроксимації функції f відношеннями $\frac{u}{v}$ функцій $u \in U$ та $v \in V$ (раціональної апроксимації) з додатковим обмеженням на чисельники u типу нерівності $u(t) \le c(t)$, $t \in T$, ($u \in A$), будемо називати задачу відшукання величини

$$E_{\omega}^{*}\left(f;\frac{U\cap A}{V}\right) = \inf_{\substack{u\in U\cap A,\\ v\in V}} \sup_{s\in S}\left(\omega(s)\left|\frac{u(s)}{v(s)} - f(s)\right|\right). \qquad (0.3)$$

Якщо існують $u^* \in U \cap A,\ v^* \in V$ такі, що

$$\max_{s\in S}\left(\omega(s)\left|\frac{u^*(s)}{v^*(s)} - f(s)\right|\right) = E_\omega^*\left(f, \frac{U\cap A}{V}\right) = \inf_{\substack{u\in U\cap A,\\ v\in V}} \max_{s\in S}\left(\omega(s)\left|\frac{u(s)}{v(s)} - f(s)\right|\right),$$

то елемент $\frac{u^*}{v^*}$ називається елементом найкращого відносно множини S зваженого рівномірного наближення неперервної на компакті Ω функції f відношеннями $\frac{u}{v}$ функцій $u \in U$ та $v \in V$ з додатковим обмеженням типу нерівності $u(t) \le c(t),\ t \in T$, на чисельники u або просто екстремальним елементом для величини (0.3).

Мета, об'єкт, предмет і задачі дослідження

Метою роботи є доведення теорем існування екстремального елемента для задачі відшукання величини (0.3) та наслідків, що випливають з цих теорем; встановлення умов існування екстремального елемента для деякої задачі найкращої відносної зваженої рівномірної раціональної апроксимації в дійсній області неперервної функції з додатковим обмеженням типу нерівності на чисельники; встановлення критерію оптимальності допустимого розв'язку задачі (0.3) шляхом перевірки його на оптимальність для деякої приєднаної задачі оптимізації в просторі $C(\Omega)\times C(\Omega)$, цільовою функцією якої є різниця двох опуклих функцій; доведення екстремальності елемента для величини (0.3) у випадку, коли $V \subset C^+(\Omega)$, шляхом перевірки його на екстремальність для деякої приєднаної задачі оптимізації в просторі $C(\Omega)\times C(\Omega)$ з опуклою цільовою функцією; розгляд властивостей та отримання виразу для похідної за напрямком задачі оптимізації, приєднаної до задачі (0.3), у випадку, коли $V \subset C^+(\Omega)$; отримання подання конуса внутрішніх напрямків для деякої лебегової множини цільової функції задачі, приєднаної до задачі (0.3), у випадку, коли $V \subset C^+(\Omega)$; доведення необхідних умов і критеріїв екстремальності елемента для величини (0.3) у випадку, коли $V \subset C^+(\Omega)$, сформульованих у термінах конусів допустимих напрямків; встановлення критерію колмогоровського типу екстремальності елемента для задачі відшукання величини (0.3) у випадку, коли $V \subset C^{+}(\Omega)$; доведення низки допоміжних тверджень, які становлять і самостійний інтерес.

Об'єктом дослідження є задача найкращої відносної зваженої рівномірної раціональної апроксимації неперервної на компакті функції з додатковим обмеженням на чисельники типу нерівності, тобто задача (0.3).

Предметом дослідження є проблеми існування екстремального елемента для задачі відшукання величини (0.3) та проблеми характеризації її екстремального елемента.

Задачами дослідження є:

1. Довести теореми існування екстремального елемента для задачі найкращої відносно множини зваженої рівномірної раціональної апроксимації неперервної на компакті функції з додатковим обмеженням типу нерівності на чисельники та наслідки, що випливають з цих теорем.

2. Встановити умови існування екстремального елемента для деякої задачі типу (0.3) в дійсній області.

3. Встановити критерій оптимальності допустимого розв'язку задачі (0.3) шляхом перевірки його на оптимальність для деякої приєднаної задачі оптимізації в просторі $C(\Omega) \times C(\Omega)$, цільовою функцією якої є різниця двох опуклих функцій.

4. Довести екстремальність елемента для величини (0.3) у випадку, коли $V \subset C^{+}(\Omega)$ шляхом перевірки його на оптимальність для деякої приєднаної задачі оптимізації в просторі $C(\Omega) \times C(\Omega)$ з опуклою цільовою функцією.

5. Розглянути властивості та отримати вираз для похідної за напрямком задачі оптимізації, приєднаної до задачі (0.3), у випадку, коли $V \subset C^{+}(\Omega)$.

6. Отримати подання конуса внутрішніх напрямків для деякої лебегової множини цільової функції задачі, приєднаної до задачі (0.3), у випадку, коли $V \subset C^{+}(\Omega)$.

7. Довести необхідну умову та критерій екстремальності елемента для величини (0.3) у випадку, коли $V \subset C^{+}(\Omega)$, сформульовані у термінах конусів допустимих напрямків.

8. Встановити критерій колмогоровського типу екстремальності елемента для задачі відшукання величини (0.3) у випадку, коли $V \subset C^{+}(\Omega)$.

9. Довести низку допоміжних тверджень.

При розв'язуванні поставлених задач у магістерській роботі використовувалися загальні методи математичного аналізу, функціонального аналізу, опуклого аналізу у поєднанні з методами теорії апроксимації, теорії екстремальних задач, основаними на теорії конусів допустимих напрямків.

Наукова новизна отриманих результатів.

Результати роботи є новими і полягають у наступному:

1. Доведено теореми існування екстремального елемента для задачі найкращої відносно множини зваженої рівномірної раціональної апроксимації неперервної на компакті функції з додатковим обмеженням типу нерівності на чисельники та наслідки, що випливають з цих теорем.

2. Встановлено умови існування екстремального елемента для деякої задачі типу (0.3) в дійсній області.

3. Встановлено критерій оптимальності допустимого розв'язку задачі (0.3) шляхом перевірки його на оптимальність для деякої приєднаної задачі оптимізації в просторі $C(\Omega) \times C(\Omega)$, цільовою функцією якої є різниця двох опуклих функцій.

4. Доведено екстремальність елемента для величини (0.3) у випадку, коли $V \subset C^{+}(\Omega)$ шляхом перевірки його на оптимальність для деякої приєднаної задачі оптимізації в просторі $C(\Omega) \times C(\Omega)$ з опуклою цільовою функцією.

5. Розглянуто властивості та отримано вираз для похідної за напрямком задачі оптимізації, приєднаної до задачі (0.3), у випадку, коли $V \subset C^{+}(\Omega)$.

6. Отримано подання конуса внутрішніх напрямків для деякої лебегової множини цільової функції задачі, приєднаної до задачі (0.3), у випадку, коли $V \subset C^{+}(\Omega)$.

7. Доведено необхідну умову та критерій екстремальності елемента для величини (0.3) у випадку, коли $V \subset C^{+}(\Omega)$, сформульовані у термінах конусів допустимих напрямків.

8. Встановлено критерій колмогоровського типу екстремальності елемента для задачі відшукання величини (0.3) у випадку, коли $V \subset C^{+}(\Omega)$.

9. Доведено низку допоміжних тверджень.

Практичне значення отриманих результатів. Дипломна робота має теоретичний характер. Її результати, а також запропоновані методи та прийоми досліджень, що стосуються дослідження задачі відшукання величини (0.3), можуть бути використані для подальшого розвитку теорії наближень, побудови збіжних числових методів розв'язування задачі відшукання величини (0.3) та інших задач, які вкладаються у схему її постановки.

Апробація результатів роботи. Результати роботи доповідались на засіданнях студентської проблемної групи «Найкраще рівномірне наближення компактнозначних відображень», яка функціонує при кафедрі математики. Окремі з них доповідались на науковій конференції студентів та магістрантів фізико-математичного факультету Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка за підсумками науково-дослідної роботи у 2017-2018 навчальному році.

Структура роботи. Робота складається з вступу, трьох розділів, висновків та опису використаних джерел.

У першому розділі роботи розглянуто постановку задачі відшукання величини (0.3); введено деякі поняття та допоміжні твердження.

У другому розділі встановлено теореми існування екстремального елемента для величини (0.3) у випадку апроксимації неперервних на абстрактному компакті функцій та наслідки з них; розглянуто умови існування екстремального елемента для деякої задачі найкращої відносної зваженої рівномірної раціональної апроксимації в дійсній області неперервної функції з додатковими обмеженнями типу нерівності на чисельники.

У третьому розділі розглянуто деякі допоміжні твердження, що стосуються простору, який є декартовим квадратом лінійного нормованого простору, та простору, спряженого з ним; з урахуванням результатів розділу 2, доведено критерій екстремальності елемента для задачі відшукання величини (0.3), оснований на результатах дослідження цієї задачі; встановлено критерій екстремальності елемента для задачі відшукання величини (0.3) у випадку, коли $V \subset C^{+}(\Omega)$; розглянуто властивості та отримано вираз для похідної за напрямком задачі оптимізації, приєднаної до задачі (0.3), у випадку, коли $V \subset C^{+}(\Omega)$; доведено необхідну умову і критерій екстремальності елемента для величини (0.3) у випадку, коли $V \subset C^{+}(\Omega)$, сформульовані у термінах конусів допустимих напрямків; встановлено критерій колмогоровського типу екстремальності елемента для задачі відшукання величини (0.3) у випадку, коли $V \subset C^{+}(\Omega)$.

ВИСНОВКИ

В магістерській роботі:

1. Доведено теореми існування екстремального елемента для задачі найкращої відносно множини зваженої рівномірної раціональної апроксимації неперервної на компакті функції з додатковим обмеженням типу нерівності на чисельники та наслідки, що випливають з цих теорем.

2. Встановлено умови існування екстремального елемента для деякої задачі типу (1.5) в дійсній області.

3. Встановлено критерій оптимальності допустимого розв’язку задачі (0.3) шляхом перевірки його на оптимальність для деякої приєднаної задачі оптимізації в просторі $C(\Omega) \times C(\Omega)$, цільовою функцією якої є різниця двох опуклих функцій.

4. Доведено екстремальність елемента для величини (1.5) у випадку, коли $V \subset C^{+}(\Omega)$ шляхом перевірки його на оптимальність для деякої приєднаної задачі оптимізації в просторі $C(\Omega) \times C(\Omega)$ з опуклою цільовою функцією.

5. Розглянуто властивості та отримано вираз для похідної за напрямком задачі оптимізації, приєднаної до задачі (1.5), у випадку, коли $V \subset C^{+}(\Omega)$.

6. Отримано подання конуса внутрішніх напрямків для деякої лебегової множини цільової функції задачі, приєднаної до задачі (1.5), у випадку, коли $V \subset C^{+}(\Omega)$.

7. Доведено необхідну умову та критерій екстремальності елемента для величини (3.5) у випадку, коли $V \subset C^{+}(\Omega)$, сформульовані у термінах конусів допустимих напрямків.

8. Встановлено критерій колмогоровського типу екстремальності елемента для задачі відшукання величини (3.5) у випадку, коли $V \subset C^{+}(\Omega)$.

9. Доведено низку допоміжних тверджень.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Ахиезер Н.И. Лекции по теории апроксимации / Н.И. Ахиезер. — М.: Наука, 1965. — 407 с.
2. Дзядык В.К. Введение в теорию равномерного приближения функций / В.К. Дзядык. — М.: Наука, 1977. — 510 с.
3. Корнейчук Н.П. Экстремальные задачи теории приближения / Н.П. Корнейчук. — М.: Наука, 1976. — 320 с.
4. Корнейчук Н.П. Аппроксимация с ограничениями / Н.П. Корнейчук, А.А. Лигун, В.Г. Доронин. — Киев: Наукова думка, 1982. — 250 с.
5. Корнейчук Н.П. Точные константы в теории приближения / Н.П. Корнейчук. — М.: Наука, 1987. — 422 с.
6. Корнейчук Н.П. Сплайны в теории приближения / Н.П. Корнейчук. — М.: Наука, 1984. — 350 с.
7. Лоран П.-Ж. Аппроксимация и оптимизация / П.-Ж. Лоран. — М.: Мир, 1975. — 496 с.
8. Степанец А.И. Равномерное приближения тригонометрическими полиномами / А.И. Степанец. — Киев: Наукова думка, 1981. — 339 с.
9. Степанец А.И. Классификация и приближение периодических функций / А.И. Степанец. — Киев: Наукова думка, 1987. — 268 с.
10. Степанец А.И. Методы теории приближений / А.И. Степанец. — Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. — Ч.I. — 427 с.
11. Степанец А.И. Методы теории приближений / А.И. Степанец. — Киев.: Ин-т математики НАН Украины, 2002. — Ч.II. — 468 с.
12. Тихомиров В.М. Некоторые вопросы теории приближений / В.М. Тихомиров. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1976. — 307 с.
13. Коллатц Л. Теория приближений. Чебышевские приближения и их приложения / Л. Коллатц, В. Крабс. — М.: Наука, 1978. — 272 с.
14. Гудима У.В. Найкраща рівномірна раціональна апроксимація неперервного компактнозначного відображення відношенням опуклих

скінченновимірних множин однозначних відображень / У.В. Гудима, Ю.В. Гнатюк, В.О. Гнатюк // Проблеми теорії наближення та суміжні питання: зб. наук. пр. Ін-ту математики НАН України. – К.: Ін-т математики НАН України, 2007. – Т. 4, № 1. – С. 73-92.

15. Гнатюк Ю.В. Питання існування екстремального елемента для задачі найкращої рівномірної раціональної апроксимації компактнозначного відображення / Ю.В. Гнатюк, В.О. Гнатюк, У.В. Гудима // Проблеми теорії наближення функцій та суміжні питання: зб. наук. пр. Ін-ту математики НАН України. – К.: Ін-т математики НАН України, 2007. – Т. 4, № 1. – С. 49-65.

16. Гнатюк Ю.В. Апроксимація компактнозначного відображення відношеннями елементів двох множин однозначних відображень / Ю.В. Гнатюк, У.В. Гудима, В.О. Гнатюк // Математичне та комп’ютерне моделювання: зб. наук. пр. Серія фізико-математичні науки. – Кам’янець-Подільський: Кам’янець-Подільський нац. ун-т, 2008. – Вип. 1. – С. 61-70.

17. Taylor G. D. Approximation by polynomials having restricted ranges / G. D. Taylor // I. SIAM J. Numer. Anal. — 1968. — Vol. 5. — P. 258–268.

18. Taylor G. D. On approximation by functions having restricted ranges / G. D. Taylor // J. Math. Anal. Appl. — 1969. — Vol. 27. — P. 241–248.

19. Shi Y. G. The limits of a Chebyshev-type theory of restricted range approximation / Y. G. Shi // J. Approxim. Theory. — 1988. — Vol. 53, № 1. — P. 41–53.

20. Smirnov G. S. Best uniform restricted ranges approximation of complexvalued functions / G. S. Smirnov, R. G. Smirnov // C.R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada. — 1997. — Vol. 19, № 2. — P. 58–63.

21. Гудима У.В. Задача найкращої у розумінні сім’ї опуклих функцій рівномірної апроксимації компактнозначного відображення множиною однозначних відображень з додатковим обмеженням, що задається системою замкнених куль / У.В. Гудима, В.О. Гнатюк // Математичне та комп'ютерне моделювання. Сер. : Фізико-математичні науки. - 2014. - Вип. 11. - С. 30-46.

22. Вакал Л.П. Аналітична обробка даних на основі чебишовської апроксимації / Л.П. Вакал, А.О. Каленчук-Порханова // Математичні машини і системи. — 2006. — № 2. — С. 15-24.

23. Вакал Л.П. Генетичні алгоритми для чебишовської апроксимації / Л.П. Вакал // Комп'ютерні засоби, мережі та системи. — 2013. — № 12. — С. 20-26.

24. Канторович Л.В. Функциональный анализ / Л.В. Канторович, Г.П. Акилов. — М.: Наука, 1977. — 742 с.

25. Люстерник Л.А. Краткий курс функционального анализа / Л.А. Люстерник, В.И. Соболев. — М.: Высшая школа, 1982. — 272 с.

26. Гудима У.В. Задача найкращого у розумінні зваженої відстані від точки до множини рівномірного відновлення функціональної залежності, заданої неточно з допомогою багатозначного відображення / У.В. Гудима, В.О. Гнатюк // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки: зб. наук. праць. — Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2015. — Вип. 12. — С. 37-55.