МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КАМ'ЯНЕЦЬ-ПОДІЛЬСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ІВАНА ОГІЄНКА
ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ
КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ

Дипломна робота магістра
з теми:

«Задача найкращого зваженого рівномірного відновлення неточно заданої за допомогою абстрактних функцій функціональної залежності елементами опуклої множини з додатковим обмеженням, що задається системою многогранних множин, які неперервно змінюються»

Виконав: магістрант 2 курсу,
M1-M17z групи
Спеціальності 014 Середня освіта
(Математика)
Саранчук Сергій Борисович

Керівник: **Гудима У.В.,**
кандидат фізико-математичних наук,
доцент

Рецензент: **Сорич В.А,**
кандидат фізико-математичних наук,
доцент

м. Кам'янець-Подільський – 2018 р.

ЗМІСТ

ВСТУП

Робота присвячена дослідженню задачі найкращого зваженого рівномірного відновлення неточно заданої за допомогою абстрактних функцій функціональної залежності елементами опуклої множини з додатковим обмеженням, що задається системою многогранних множин.

Актуальність теми. Теорія наближення функцій – один із напрямків, що інтенсивно розвивається в теорії функції. Ідеї та методи теорії наближення є відправним пунктом досліджень в ряді питань обчислювальної математики, зокрема, теорія наближень є фундаментом багатьох чисельних методів.

Теорія наближень оформилась у змістовну теорію в XX сторріччі, хоча перші її результати були одержані П.Л.Чебишовим в 1853 і 1857 роках. Він ввів одне з основних понять – поняття найкращого наближення полінома і отримав ряд результатів [1,с.23-51].

Також одним із перших результатів є теорема Вейєрштрасса, відповідно до якої кожну неперервну функцію можна наблизити в рівномірній метриці як завгодно добре алгебраїчними многочленами досить високого степеня.

Згодом у працях багатьох відомих математиків було вивчено інші випадки постановки задачі про найкраще наближення функцій, які відрізнялися вибором міри відхилення і апроксимуючої множини. До таких робіт відносяться роботи А.А. Маркова, Д. Джексона, С.Н. Бернштейна, Валле-Пуссена, Хаара, А.М. Колмогорова, С.М. Нікольського та інші.

У працях низки авторів основні теореми чебишовського поліноміального наближення були узагальнені та модифіковані на випадок, коли коефіцієнти поліномів задовольняють додатковим лінійним або нелінійним залежностям. Задачі з лінійними зв’язками вивчалися у роботах Є.Я. Ремеза і В.Д. Коромисліченка [2], Б. Брозовського [3] та ін.

Випадок опуклих зв’язків типу нерівностей досліджував Є.Я. Ремез [4].

Є.Г. Гольштейн (див., наприклад, [5]) розглянув досить загальну задачу найкращого наближення з обмеженням у дійсному та комплексному просторах $C(S)$, яка охоплює як лінійні, так і опуклі зв'язки.

До задач про найкраще рівномірне наближення функцій з нелінійними зв'язками належить, зокрема, задача про найкраще рівномірне наближення дійснозначної неперервної функції в обмеженому діапазоні, яка була розглянута у працях [6], [7]. Г.С. Смірнов і Р.Г. Смірнов [8-10] поширили результати, отримані в цих роботах, на випадок рівномірного наближення комплекснозначної функції.

Питання існування та характеризації полінома найкращого наближення векторної неперервної функції при наявності обмежень розглядаються також у праці [11]. Апроксимації з обмеженнями присвячена, зокрема, монографія М.П. Корнійчука, А.О. Лігуна, В.Г. Дороніна [12].

Важливий клас задач теорії наближення утворюють задачі одночасного наближення кількох або нескінченної кількості елементів. До задач одночасного наближення кількох елементів можна віднести задачу Штейнера, задачу відшукання чебишовського центра системи точок, задачу одночасного наближення функції та її похідної, основні результати дослідження якої отримано О.І. Степанцем, та інші.

З єдиних позицій задачі найкращої одночасної апроксимації кількох елементів лінійного нормованого простору опуклими множинами цього простору розглядаються у працях [5], [13], [14], [15].

У даній роботі розглядається задача найкращого зваженого рівномірного відновлення неточно заданої за допомогою абстрактних функцій функціональної залежності елементами опуклої множини з додатковим обмеженням, що задається системою многогранних множин, яка полягає у наступному: Нехай X – лінійний над полем дійсних чисел нормований простір, S – компакт, s – його елементи, $C(S,X)$ – лінійний над полем дійсних чисел нормований простір однозначних відображень g

компакту S в X, неперервних на S, з нормою $\|g\| = \max\limits_{s \in S} \|g(s)\|$, $a_i \in C(S, X)$, $i = \overline{1,n}$, $b_j \in C(S, X)$, $j = \overline{1,k}$, $b(s) = co\{b_1(s), ..., b_k(s)\}$,

$$D = \{g \in C(S, X) : g(s) \in b(s), s \in S\},$$

тобто $g(s) = \sum\limits_{j=1}^{k} \alpha_j b_j(s)$, де $\alpha_j \in R$, $j = \overline{1,k}$, $\alpha_j \geq 0$, $j = \overline{1,k}$, $\sum\limits_{j=1}^{k} \alpha_j = 1$; $V \subset C(S, X)$, $C(S)$ – лінійний над полем дійсних чисел нормований простір неперервних на S дійснозначних функцій φ з нормою $\|\varphi\| = \max\limits_{s \in S} |\varphi(s)|$, $\omega_i \in C(S)$, $i = \overline{1,n}$, $\omega_i(s) > 0$, $s \in S$ ($\omega_i, i = \overline{1,n}$, – вагові функції).

Задачею найкращого зваженого рівномірного відновлення неточно заданої за допомогою абстрактних функцій $a_i \in C(S, X)$, $i = \overline{1,n}$ функціональної залежності елементами опуклої множини $V \subset C(S, X)$ з додатковим обмеженням, що задається системою многогранних множин $b(s) = co\{b_1(s), ..., b_k(s)\}$, $s \in S$, будемо називати задачу відшукання величини

$$\alpha_{\{a_i\}_{i=1}^n}^{\{\omega_i\}_{i=1}^n}(V \cap D) = \inf_{g \in V \cap D} \max_{1 \leq i \leq n} \max_{s \in S} \left(\omega_i(s) \|g(s) - a_i(s)\|\right) =$$

$$= \inf_{g \in V \cap D} \max_{s \in S} \max_{1 \leq i \leq n} \left(\omega_i(s) \|g(s) - a_i(s)\|\right). \qquad (0.1)$$

Якщо існує елемент $g^* \in V \cap D$ такий, що

$$\alpha_{\{a_i\}_{i=1}^n}^{\{\omega_i\}_{i=1}^n}(V \cap D) = \max_{1 \leq i \leq n} \max_{s \in S} \left(\omega_i(s) \|g^*(s) - a_i(s)\|\right),$$

то його будемо називати екстремальним елементом для величини (0.1).

Мета, об’єкт, предмет і задачі дослідження.

Метою роботи є розглянути властивості множини D, довести деякі теореми існування та єдиності екстремального елемента, встановити необхідні, достатні умови та критерії екстремальності елемента для задачі відшукання величини (0.1).

Об'єктом дослідження є задача найкращого зваженого рівномірного відновлення неточно заданої за допомогою абстрактних функцій функціональної залежності елементами опуклої множини з додатковим обмеженням, що задається системою многогранних множин.

Предметом дослідження є проблеми теорії наближення, що стосуються задачі найкращого зваженого рівномірного відновлення неточно заданої за допомогою абстрактних функцій функціональної залежності.

Задачами дослідження величини є:

- З'ясування властивостей множини D.
- Дослідження питань існування та єдиності екстремального елемента для величини (0.1).
- Встановлення необхідних, достатніх умов та критеріїв екстремального елемента для величини (0.1).

Наукова новизна отриманих результатів.

Результати роботи є новими і полягають у наступному:

1. Встановлено властивості множини $b(s)$, $s \in S$, та множини D.

2. Доведено теореми існування та єдиності екстремального елемента для величини (0.1).

3. Встановлено необхідні, достатні умови та критерії екстремального елемента для величини (0.1).

Практичне значення отриманих результатів. Результати, представлені в дипломній роботі, можуть бути використані для подальшого розвитку теорії найкращої одночасної рівномірної апроксимації кількох абстрактних функцій та побудови чисельних методів її розв'язання.

Апробація результатів дипломної роботи. Результати роботи доповідались на звітній конференції студентів і магістрантів за підсумками НДР у 2017-2018 навчальному році, 10-11 квітня 2018 р., м. Кам'янець-Подільський та частково висвітлені у статті, поданій у Вісник Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка. Фізико-математичні науки, випуск 11.

Структура дипломної роботи. Робота складається з вступу, двох розділів, висновків та списку використаних джерел.

У першому розділі дипломної роботи встановлено, що *для* $s \in S$ множини $b(s)$, є опуклими, обмеженими та замкненими множинами, відображення $b: S \to b(s)$ є неперервним по $s \in S$ у розумінні метрики Хаусдорфа, множина D є опуклою множиною простору $C(S, X)$.

Доведено деякі теореми існування та єдиності екстремального елемента для величини (0.1).

У другому розділі встановлено необхідні, достатні умови та критерій екстремального елемента для величини (0.1).

ВИСНОВКИ

У роботі розглядалась задача найкращого зваженого рівномірного відновлення неточно заданої за допомогою абстрактних функцій функціональної залежності елементами опуклої множини з додатковим обмеженням, що задається системою многогранних множин, які неперервно змінюються. Для цієї задачі встановлено властивості множини D. У випадку, коли V є замкненою локально компактною множиною (компактною множиною, скінченновимірним підпростором) простору $C(S,X)$ доведено, що екстремальний елемент для задачі відшукання величини (1.3) існує.

Встановлено умови при яких множина екстремальних елементів для величини (1.3) не є порожньою та екстремальний елемент для розглядуваної задачі єдиний.

У другому розділі доведено необхідні умови загального виду, які є також достатніми у випадку, коли V є Γ– множиною відносно кожного свого елемента, які ґрунтуються на теорії конусів допустимих та граничних напрямків.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Чебышов П.Л. Теория механизмов, известных под названием параллелограммов / П.Л.Чебышов // Собр. соч. – М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1948. – Т.2. – С.23-51.
2. Ремез Е.Я. Задача Вл. Маркова для полиномов системы функций Чебышева и понятие регулярной Т-системы / Е.Я. Ремез, В.Д. Коромысличенко // Докл. АН СССР. – 1960.– 135, №2. – С. 266-269.
3. Brosowski B. Über Tschebyscheffsche Approximationen mit linearen Nebenbedingungen / B. Brosowski // Math. Z. – 1965. – 88, №2. – P.105-128.
4. Ремез Е.Я. Общие вычислительные методы чебышевского приближения / Е.Я. Ремез. – Киев: Изд-во АН СССР. – 1957. – 454с.
5. Гольштейн Е.Г. Теория двойственности в математическом программировании и ее приложения / Е.Г. Гольштейн. – М.: Наука, 1971. – 352с.
6. Taylor G.D. On approximation by polynomials having restricted ranges / G.D. Taylor // I. SIAM J. Numer. Anal. – 1968. – Vol. 5. – P. 258-268.
7. Shi Y. The limits of a Chebyshev-type theory of restricted range approximation / Y. Shi // J. Approximation Theory. – 1988. – 53. – P.41-53.
8. Smirnov G.S. Best uniform restricted ranges approximation of complex-valued functions / G.S. Smirnov, R.G. Smirnov // C.R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada-1997. – 19, № 2. – P. 58-63.
9. Smirnov G.S. Best uniform approximation of complex-valued functions by generalized polynomials having restricted ranges / G.S. Smirnov, R.G. Smirnov // J. Approximation theory. – 1999. – 100, №2. – P. 284-303.
10. Smirnov G.S. Kolmogorov-type theory of best restricted approximations of complex-valued functions / G.S. Smirnov, R.G. Smirnov // E. J. Approx. – 2000. – 6, №3. – P. 309-326.
11. Коцюбинська Т.В. Характеризація елемента найкращого наближення з

обмеженнями / Т.В. Коцюбинська // Вісник Київ. ун-ту. Серія: Математика. Механіка. – 2003. – № 10. – С.106-113.

12. Корнейчук Н.П. Аппроксимация с ограничениями / Н.П. Корнейчук, А.А. Лигун, В.Г. Доронин. – Киев: Наук. думка, 1982. – 252 с.
13. Гнатюк Ю.В. Двоїсті співвідношення для задачі найкращої за дробово-опуклою функцією наближення кількох елементів та критерії елемента найкращого наближення / Ю.В. Гнатюк // Доп. НАН України. – 1995. – №6. – С.23-26.
14. Гнатюк Ю.В. Основні властивості задачі найкращого одночасного наближення кількох елементів / Ю.В. Гнатюк // Укр. мат. журн. – 1996. – 48, №9. – С.1183-1193.
15. Гнатюк В.О. Найкраща рівномірна апроксимація компактнозначного відображення елементами множини однозначнних відображень, які є селекторами опуклозначного відображення / В.О. Гнатюк // Математичне та комп’ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки: зб. наук. праць / Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова Національної академії наук України, Кам’янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка. – Кам’янець-Подільський: Кам’янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2009. – Вип. 2. – С. 23-36.
16. Борисович Ю.Г. Многозначные отображения / Ю.Г. Борисович, Б.Д. Гельман, А.Д. Мышкис, В.В. Обуховский // Итоги науки и техн. / ВИНИТИ. Мат. анализ. – 1982. – 19. – С.127-231.
17. Корнейчук Н.П. Экстремальные задачи теории приближения / Н.П. Корнейчук . – М.: Наука, 1976. – 320 с.
18. Канторович Л. В. Функциональный анализ / Л. В. Канторович, Г. П. Акилов. – М.: Наука, 1984. – 752 с.
19. Давидов М. О. Курс математичного аналізу / М. О. Давидов. – К.: Вища школа, 1978. – Ч.ІІ. – 392 с.
20. Данфорд Н. Линейные операторы. Общая теория / Н. Данфорд, Дж. Т. Шварц. – М.: ИЛ, 1962. – 896с.

21. Иосида К. Функциональный анализ / К. Иосида. – М.: Мир, 1967. – 624 с.
22. Лоран П.-Ж. Аппроксимация и оптимизация / П.-Ж. Лоран. – М.: Мир, 1975. – 496 с.
23. Канторович Л. В. Функциональный анализ / Л. В. Канторович, Г. П. Акилов. – М.: Наука, 1977. – 742 с.
24. Гнатюк Ю. В. Критерії екстремального елемента та його єдиності для задачі найкращої рівномірної апроксимації неперервного компактнозначного відображення множинами однозначних відображень / Ю. В. Гнатюк, У. В. Гудима // Доп. НАНУ, 2005 – №6 – С.19-23.