Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка
Фізико-математичний факультет
Кафедра математики

Дипломна робота магістра

з теми: «**Формула Мангольдта та динаміка наближення ψ-функції Чебишова**»

Виконала: студентка 2 курсу групи Mb1-M17 спеціальності 014 Середня освіта (Математика)
Кучер Олеся Леонідівна
Керівник:
Кріль С. О., кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри математики, доцент.
Рецензент:
Ковальська І. Б., кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри математики, доцент.

м. Кам'янець-Подільський – 2018 року

ЗМІСТ

ВСТУП

В своєму знаменитому мемуарі Ріман досліджував досить просте питання із області арифметики, — скільки існує простих чисел, які не перевищують деякого, наперед заданого натурального числа? Чи існує загальний закон чи загальна формула, які б дали змогу обійтися без прямих підрахунків? Використовуючи найрозвинутіший математичний апарат свого часу (зокрема теорію функції комплексної змінної та комплексне інтегрування) Ріман взявся за цю проблему. Крім того, для своїх потреб він придумав математичний об'єкт, який поєднує в собі математичну глибину та витонченість одночасно. В кінці першої третини своєї статті він висловив деяку здогадку відносно цього об'єкту, а далі відмітив: «Хотілося б, звичайно, мати строге доведення цього факту, але після декількох недовгих та безрезультативних спроб я відклав пошуки такого доведення, оскільки це не було потрібно для безпосередніх цілей моїх досліджень». Цей вислів залишився майже непомітним на протязі десятиліть. Але потім, в силу ряду причин, він поступово заволодів уявою дослідників, поки не досяг статусу одержимості для видатних математиків всього світу.

Ця думка Рімана пізніше стала називатись гіпотезою Рімана. Вона залишалася нав'язливою ідеєю протягом всього XX століття та залишається такою ж і по нинішній день, відкинувши та спростувавши всі без винятку спроби довести її.

Одна з основних ідей в оригінальній роботі Рімана полягає в використанні методу комплексного інтегрування. Загальний метод, за допомогою якого можна обґрунтувати формули для функції Чебишева $\psi(x)$ та функції $\pi(x)$, що характеризує розподіл простих чисел, був відкритий Ріманом і коротко описаний у згаданому вище мемуарі (правда міркування Рімана потребують деяких несуттєвих уточнень). Основна ідея доведення полягає в тому, що використовуючи інтегральне перетворення, яке в сучасній літературі називають перетворенням Рімана-Мелліна.

Тобто відкидаються члени ряду Діріхле, тобто ряду $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}$ при $n \geq x$. Оскільки при $\sigma > 1$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \Lambda(n) n^{-s} = -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)},$$

то результат набере вигляду

$$\psi_0(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \left[-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right] \cdot \frac{x^s}{s} ds$$

при $a > 1$.

Після того, як Адамар обґрунтував формулу для $\xi(s)$, Мангольдт довів основну формулу Рімана

$$J(x) = Li(x) - \sum_{\rho} Li(x^{\rho}) - \ln 2 + \int_x^{\infty} \frac{dt}{t(t^2-1)\ln t}, \quad (x > 1) \qquad (1)$$

Мангольдт також переробив цю формулу в більш просту форму, яка практично уточнила початкові міркування Рімана (1) у подальшому розвитку теорії. Ця проста форма (1) може бути отримана таким чином.

Основна ідея Рімановий міркувань щодо формули (1), — це обернена залежність

$$\ln \zeta(s) = \int_0^{\infty} x^{-s} dJ\,(x), \qquad (2)$$

а потім використовується той факт, що

$$\prod\left(\frac{s}{2}\right)\pi^{-1/2}(s-1)\zeta(s)=\frac{1}{2}\prod_{\rho}\left(1-\frac{s}{\rho}\right) \quad (3)$$

для вираження $\ln\zeta(s)$ через елементарні функції і корені ρ. Величина $\ln\zeta(s)$ має логарифмічні особливості для всіх коренів ρ, а як функція комплексної змінної є дуже складною за межами півплощини $\mathrm{Re}\,\mathrm{s}>1$. З іншого боку, похідна $-\zeta'(s)/\zeta(s)$ є аналітичною у всій площині для полюсів в коренях ρ, полюсі 1 та нулях — $2n$. Це наводить на думку, щоб почати не з величини (2), а з її похідної.

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}=-\int_{0}^{\infty}x^{-s}(\ln x)dJ(x). \quad (4)$$

Міра $(\ln x)dJ(x)$ є точковою мірою, яка набирає значення $\ln(p^n)\cdot(1/n)$ для степенів простих чисел p^n і значення 0 в усіх інших точках. Таким чином, вона може бути записана як міра Стілтьєса $d\psi(x)$, де $\psi(x)$ є функцією зі скачками, яка починається з 0 і має скачок $\ln(p^n)\cdot(1/n)=\ln p$ на кожному степені простого числа p^n. Іншими словами

$$\psi(x)=\sum_{p^n<x}\ln p$$

крім випадків, коли x є степенем простого числа; на скачках в точках виду $x=$

$=p^n$ величина ψ задана, зазвичай, як середнє арифметичне між лівосторонньою та правосторонньою границями, тобто $\psi(x)=\frac{1}{2}[\psi(x-\epsilon)+\psi(x+\epsilon)]$. Ця функція $\psi(x)$ вже була розглянута Чебишовим, який назвав її псі-функцією $\psi(x)$ і який довів, між іншим, що теорема про кількість простих чисел по суті така ж, як і твердження, що $\psi(x)\sim x$ з відносною похибкою, яка прямує до нуля при $x\to\infty$. З точки зору теорії функції $\psi(x)$ формула (4) набирає вигляду

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \int_0^\infty x^{-s} d\psi(x). \qquad (5)$$

Іншими словами, якщо замість J розглядати функцію $\psi(x)$ у вихідній формулі (2), то незручна щодо досліджень функція $\ln \zeta(s)$ замінюється більш простішою функцією $-\zeta'(s)/\zeta(s)$.

Аналогічні міркування, завдяки яким Ріман перейшов від формули (2) до формули (1) для $J(x)$ можуть бути застосовані в тій же мірі, щоб перейти від формули (5) до нової формули для $\psi(x)$. Найпростішим варіантом основного результату Рімана є його формула

$$dJ = \left(\frac{1}{\ln x} - \sum_\rho \frac{x^{\rho-1}}{\ln x} - \frac{1}{x(x^2-1)\ln x}\right)dx, \qquad (x > 1)$$

яка дає

$$d\psi = (\ln x)dJ = \left(1 - \sum_\rho x^{\rho-1} - \sum_\rho x^{-2n-1}\right)dx, \qquad (x > 1)$$

звідси шляхом відповідного інтегрування отримуємо:

$$\psi(x) = x - \sum_\rho \frac{x^\rho}{\rho} + \sum_n \frac{x^{-2n}}{2n} + \text{const}, \qquad (x > 1) \qquad (6)$$

Це і є Мангольдтове переформулювання результату (1), згадане вище. (Значення константи розглянуто більш детально в даній роботі. Передбачається, у формулі Мангольдта (6), як і у формулі Рімана (1), що члени суми по ρ беруться в порядку зростання $|Im\,\rho|$; ці суми збігаються лише умовно, тому порядок їх комплектування є дуже важливим).

Дипломна робота складається зі вступу, одинадцяти параграфів, висновків та списку використаної літератури. В роботі розглядаються псі-функція

Чебишова, Мангольдове представлення псі-функції Чебишова. В дев’ятому параграфі розглядається асимптотичний закон розподілу простих чисел. Останні параграфи роботи пересвячені динаміці наближень псі – функції Чебишова.

ВИСНОВКИ

В роботі розглядається ψ-функції Чебишова та формула Мангольдта для цієї функції.

Основна частина дипломної роботи присвячено дослідженню формули Мангольдта, — як основної формули для ψ-функції Чебишова. При цьому здійснено детальне обґрунтування цієї формули і паралельно розглянуто питання щільності розподілу нетривіальних нулів на критичній прямій та динаміка наближення псі-функції.

При обґрунтуванні формул, що фігурують в дипломній роботі ефективно використовується метод комплексного інтегрування, основні ідеї якого були запропоновані Б. Ріманом в його мемуарі «Про число простих чисел, що не перевищують заданої величини».

Одна з основних ідей в оригінальній роботі Рімана полягає в використанні методу комплексного інтегрування. Загальний метод, за допомогою якого можна обґрунтувати формули для функції Чебишева $\psi(x)$ та функції $\pi(x)$, що характеризує розподіл простих чисел, був відкритий Ріманом і коротко описаний у згаданому вище мемуарі (правда міркування Рімана потребують деяких несуттєвих уточнень). Основна ідея доведення полягає в тому, що використовуючи інтегральне перетворення, яке в сучасній літературі називають перетворенням Рімана-Мелліна.

Тобто відкидаються члени ряду Діріхле, тобто ряду $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^s}$ при $n \geq x$. Оскільки при $\sigma > 1$

$$\sum_{n=2}^{\infty}\Lambda(n)n^{-s} = -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)},$$

то результат набере вигляду

$$\psi_0(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \left[-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right] \cdot \frac{x^s}{s} ds$$

при $a > 1$.

Коли перенесли вертикальний шлях інтегрування вліво на нескінченність, то отримали для $\psi_0(x)$ представлення у вигляді суми у полюсах функції $\left[-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right]\frac{x^s}{s}$. Полюс $\zeta(s)$ у точці $s=1$ дав x; полюс $\frac{1}{s}$ в точці $s=1$ дав $-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$, а кожний нуль ρ функції $\zeta(s)$, незалежно від того, тривіальний він чи ні, дав $-\frac{x^\rho}{\rho}$.

З десятого параграфа ми можемо зробити невеличкий висновок стосовно динаміки наближення псі-функції Чебишова Мангольдтовим представлення: чим більше береться нулів ρ , то тим точніший результат і менша похибка наближення для перши простих чисел та їх степенів.

Дана робота науково наповнена та точна. Влучно підібрані наукові методи та вміло використані при підготовці та виконані роботи.

Дипломна робота має змістовний вступ та логічний зв'язок між параграфами даної роботи.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Ахиезер П.Ч. Лекции по теории апроксимации / П.Ч. Ахиезер. — М. : Наука, 1965. — 408 с.
2. Бухштаб А.А. Теория чисел / А.А. Бухштаб. — М. : Просвещение, 1966. — 384 с.
3. Виноградов И.М. Основы теории чисел / И.М. Виноградов. — Изд-во: «Лань», 2009. — 176 с.
4. Воронин С.М. Дзета-функция Римана / С.М. Воронин, А. А. Карацуба. — М. : Физматлит, 1994. — 376 с.
5. Грэхем Р. Конкретная математика / Р. Грэхем, Д.Кнут, О. Паташник. — М.: МИР, 1998. — 703 с.
6. Дербишир Д. Простая Одержимость. Бернхард Риман и величайшая нерешенная проблема в математике / Д. Дербишир. — М.:АСТРЕЛЬ, 2010. — 464 с.
7. Дэвенпорт Г. Мультипликативная теорія чисел / Г. Дэвенпорт. — М. : Наука, 1971. — 200 с.
8. Зудилин В.В. Об иррациональности значений дзета-функции / В.В. Зудилин. — Изд-во: мех.-мат. фак-та МГУ, 2001. — часть 2, с. 127-135.
9. Карацуба А.А. Основы аналитической теории чисел / А.А. Карацуба. — М. : Наука, 1975. — 183 с.
10. Прахар К. Распределение простых чисел / К.Прахар. — М. : МИР, 1967. — 500 с.
11. Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного / И. И. Привалов. — 13-е изд. — М. : Наука, 1984. — 432 с.
12. Риман Б. О числе простых чисел, не превышающих данной величины : сочинения / Б.Риман. — М. : ОГИЗ, 1948. — 543 с.

13. Титчмарш Е.К. Теория дзета-функции Римана / Титчмарш Е.К. — М. : ИЛ, 1953. — 409 с.
14. Чебишов П.Л. Об определении числа простих чисел, не превосходящих данной величины : избранные труды / П.Л. Чебишов. — М. : Академия наук СРСР, 1988. — 926 с.
15. Aleksandar Ivic. The Riemann Zeta-Function: The Theory of the Riemann Zeta-Function wih Applications. John Wiley & Sons, 1985.
16. Booker A. R., "Turing and the Riemann Hypothesis," Notices Amer.Math. Soc., vol. 53, no. 10, 2006, pp. 1208–1211.
17. Conrey J. B., "The Riemann Hypothesis," Notices Amer. Math. Soc.,vol. 50, no. 3, 2003, pp. 341–353.
18. Edward H.M. Riemann' s Zeta Function / H.M. Edward. — Acad. Press, 1974. — 317 p.
19. Ivic A., The Riemann Zeta-Function, Wiley and Sons, 1985.
20. Korolev M. A., "On small values of the Riemann zeta-function at Gram points", Sb. Math., 205:1 (2014), 63–82
21. Littlewood J. E., "The Riemann Hypothesis," in: A Scientist Speculates,I. J. Good, ed., Basic Books, 1962, New York, pp. 390–391.
22. Odlyzko A.M., On the distribution of spacings between zeros of the Zeta function, Math. Comp., Vol. 48, No. 177 (1987), 273-308.
23. Patterson S. J. An Introduction to the Theory of the Riemann ZetaFunction.Cambridge University Press, 1995.
24. Selberg A., "The zeta-function and the Riemann hypothesis," in C. R. Dixi`eme Congr`es Math. Scandinaves, Copenhague 1946, pp. 187–200.