

Міністерство освіти і науки України  
Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка  
Фізико-математичний факультет  
Кафедра математики

**Дипломна робота**  
**магістра**  
з теми: **«Гібридні інтегральні перетворення Лежандра-  
(Конторовича-Лебєдєва) в задачах математичної  
фізики»**

Виконав:  
студент VI курсу Мб1-М17 групи  
спеціальності: 014 Середня освіта  
(Математика)  
Ліфантьєв Віталій Олегович  
Керівник:  
Доктор фізико-математичних  
наук, професор Конет І.М.  
Рецензент:  
Кандидат фізико-математичних наук,  
доцент Пилипюк Т.М.

Кам'янець-Подільський – 2018 р.

## Зміст

Вступ.....	3
§1. Гібридне інтегральне перетворення Лежандра 1-го роду-(Конторовича-Лебедєва) на полярній осі та його застосування .....	5
§2. Гібридне інтегральне перетворення (Конторовича-Лебедєва) 1-го роду – Лежандра на полярній осі .....	16
§3. Гібридне інтегральне перетворення Лежандра - (Конторовича-Лебедєва) на двоскладному інтервалі .....	29
§4. Гібридне інтегральне перетворення (Конторовича-Лебедєва)-Лежандра на двоскладному інтервалі та його застосування.....	36
§5. Гібридне інтегральне перетворення Лежандра 2-го роду – (Конторовича-Лебедєва) на полярній осі .....	45
§6. Гібридне інтегральне перетворення (Конторовича - Лебедєва) 2-го роду – Лежандра на полярній осі .....	52
Висновки.....	58
Список використаних джерел.....	59

## Вступ

З точки зору математики метод інтегральних перетворень еквівалентний методу власних функцій, але він має і суттєві переваги. До цих переваг слід віднести, у першу чергу, стандартну техніку обчислень, а також можливість подання розв'язку задачі у різних формах. Це особливо важливо у застосуваннях, коли необхідно отримувати розв'язки в зручному для розрахунків вигляді як для малих, так і для великих значень аргументів. Нарешті, при наявності значної кількості таблиць прямих та обернених перетворень техніка розв'язання задачі значно спрощується і прискорюється. Але звернемо увагу на те, що для методу інтегральних перетворень характерні такі самі обмеження, що і для методу відокремлення змінних. Його можна застосувати тільки для лінійних диференціальних рівнянь з лінійними крайовими умовами. Але є спроби його використання для розв'язання деяких нелінійних крайових задач.

У цьому контексті особливої уваги заслуговує досить поширений у другій половині ХХ століття для вивчення стану композитних об'єктів метод кусково-сталіх фізико-технічних характеристик. Але його застосування приводить до диференціальних рівнянь із сингулярними коефіцієнтами типу  $\delta$ -функції Дірака та її похідних, тому одержати точні розв'язки відповідних задач математичної фізики практично неможливо. Ці труднощі можна обійти, якщо здійснити моделювання фізичного процесу, який досліджується, методом гібридних диференціальних операторів. Останнє вимагає відповідного математичного апарату. Зокрема, виникає необхідність в побудові таких інтегральних перетворень, які б давали можливість алгебраїзації диференціальних рівнянь з кусково-неперервними коефіцієнтами. Перетворення вказаного типу одержали назву гібридних інтегральних перетворень. В середині минулого століття з'явилися роботи Я.С. Уфлянда та його учнів, в яких класичні інтегральні перетворення Фур'є, Фур'є-Бесселя, Лежандра поширюються на випадок складених областей. Подальший розвиток теорія гібридних інтегральних перетворень знайшла у працях М.П. Ленюка та

його учнів Зокрема, за найбільш загальних обмежень на структури диференціальних операторів, крайових умов та умови спряження побудовано гібридні інтегральні перетворення типу Фур'є-Бесселя, Вебера, Ганкеля 1-го й 2-го роду, Лежандра – (Конторовича-Лебедева).

**Об'єкт дослідження:** гібридні інтегральні перетворення Лежандра – (Конторовича – Лебедева) в задачах математичної фізики.

**Предмет дослідження:** гібридні інтегральні перетворення Лежандра – (Конторовича – Лебедева) в задачах статички, квазістатички, динаміки.

**Мета роботи:** Дослідити гібридні інтегральні перетворення Лежандра – (Конторовича – Лебедева), систематизувати інформацію про них.

**Завдання роботи.** Дослідити:

1. Гібридне інтегральне перетворення Лежандра 1-го роду-(Конторовича-Лебедева) на полярній осі та його застосування.

2. Гібридне інтегральне перетворення (Конторовича-Лебедева) 1-го роду –Лежандра на полярній осі.

3. Гібридне інтегральне перетворення Лежандра (Конторовича-Лебедева) на двоскладному інтервалі.

4. Гібридне інтегральне перетворення (Конторовича-Лебедева)-Лежандра на двоскладному інтервалі та його застосування.

5. Гібридне інтегральне перетворення Лежандра 2-го роду – (Конторовича- Лебедева) на полярній осі.

6. Гібридне інтегральне перетворення (Конторовича - Лебедева) 2-го роду –Лежандра на полярній осі.

## **Висновки**

У дипломній роботі методом дельта-подібних послідовностей побудовано нові класи гібридних інтегральних перетворень Лежандра - (Конторовича - Лебедева), одержано теореми про інтегральні зображення функцій обмеженої варіації, встановлено теореми про інтегральні перетворення відповідних гібридних диференціальних операторів. Запроваджені інтегральні перетворення застосовані до розв'язання сингулярних крайових задач математичної фізики (статики, квазістатики ) в неоднорідних областях.

### Список використаних джерел

1. Ахиезер Н.И. Лекции об интегральных преобразованиях. –Харьков: ВШ, 1984.- 120с.
2. Березанский Ю.М. Разложение по собственным функциям самоспряженных операторов.-К.: Наук. думка, 1965.- 798с.
3. Быблив О.Я., Ленюк М.П. Гибридные интегральные преобразования Вебера для кусочно-однородной полярной оси // Изв. вузов. Математика.- 1987.- 8.- С.3-11.
4. Блажевський С.Г., Ленюк М.П. Термопружний стан багатощарових симетричних тіл. –К.: Ін-т математики НАН України, 2000.- 130с.
5. Боли Б., Узйнер Дж. Теория температурных напряжений.- М.: Мир, 1964.- 517с.
6. Брычков Ю.А., Прудников А.П. Интегральные преобразования.- М.: Наука, 1977.- 286с.
7. Буряк Я.Й., Галапац Б.П., Гнідець Б.М. Фізико-механічні процеси в електропровідних тілах.- К.: Наук. думка, 1978.-230с.
8. Вірченко Н.О. Основні методи розв'язання задач математичної фізики. К.: КПІ, 1997.- 370с.
9. Галицын А.С., Жуковский А.Н. Интегральные преобразования и специальные функции в задачах теплопроводности.- К.: Наук. Думка, 1976.- 284с.
10. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.- М.: Наука, 1971.- 1108с.
11. Грей И.С., Метьюз Г.Б. Функции Бесселя и их приложения в физике и технике.- М.: Изд-во иностран. лит., 1949.- 386с.
12. Громик А.П., Конет І.М. Нестационарна задача теплопроводності для тонких циліндрично-ізотопних кругових пластин // Доповіді НАН України – 1999, № 9.-С.50-54.

13. Громик А.П., Конет І.М. Нестационарна крайова задача теорії теплопровідності тонких циліндрично-ізотропних кругових пластин // Доповіді НАН України – 1999, № 10.- С.16-20.

14. Данейка В.С., Сергиенко И.В., Скопецкий В.В. Модели и методы решения задач с условиями сопряжения.- К.: Наук. думка, 1998.- 614с.

15. Диткин В.А., Прудников А.П. Интегральные преобразования и операционное исчисление.- М.: Наука, 1974.-542с.

16. Дульнев Г.Н., Заричняк Ю.П. Теплопроводность смесей и композиционных материалов.- Л.: Энергия, 1974.- 264с.

17. Зарубин В.С. Инженерные методы решения задач теплопроводности.- М.: Энергоатомизат., 1983.- 327с.

18. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел.- М: Наука, 1964.- 488с.

19. Карташов Э.М. Аналитические методы в теплопроводности твердых тел.- М: В.Ш, 1979.- 415с.

20. Князев П.П. Интегральные преобразования.- Минск: Высшая школа, 1968.- 197с.

21. Ковалевский В.И., Бойков Г.П. Методы теплового расчета экранной изоляции.- М.: Энергия, 1974.- 199с.

22. Коляно Ю. М. Температурные поля и напряжения в телах с разрывными параметрами // Инж. физ. журн.- 1987.- 53.-С.860-867.

23. Комаров Г.Н. О термонапряженном состоянии многослойного цилиндра // Тепловые напряжения в элементах конструкций.-К.: Вып. 9, 1970.- С. 37-43.

24. Конет І.М., Ленюк М.П., Нікітіна О.М. Деякі узагальнення інтегральних перетворень типу Мелера –Фока.- К.: 1998.- 56.- (Препринт/НАН України. Ін-т математики: 98.6).

25. Конет І.М., Ленюк М.П. Напружений стан тонких пластинок. Частина 1.- Кам'янець-Подільський: К-ПДП, 1997.- 136с.

26. Конет І.М. Стаціонарні та нестаціонарні температурні поля в ортотропних сферичних областях.- К.: Ін-т математики НАН України, 1998.- 209с.

27. Конет І.М., Ленюк М.П. Стаціонарні та нестаціонарні задачі теплопровідності для багат шарових ортотропних клиновидних циліндрично-кругових областей.- Чернівці: Рута, 2000.- 136с.

28. Конет І.М., Ленюк М.П. Стаціонарні та нестаціонарні температурні поля в циліндрично-кругових областях.- Чернівці: Прут, 2001.- 312с.

29. Конет І.М., Ленюк М.П. Температурні поля в кусково-однорідних циліндричних областях.- Чернівці: Прут, 2004.- 276с.

30. Конет І.М. Ленюк М.П. Інтегральні перетворення типу Мелера-Фока.- Чернівці: Прут, 2002.- 248с.

31. Конет І.М., Нікітіна О.М. Інтегральне перетворення, породжене на полярній осі  $r \geq 0$  узагальненим диференціальним оператором Лежандра // Сучасні проблеми математики: Матеріали Міжнародної наукової конференції. Частина 4.- Чернівці: Рута, 1998.- С.47-50.

32. Конет І.М., Мозолюк А.І. Скінчене гібридне інтегральне перетворення типу Ганкеля 1-го роду – Лежандра 2-го – Фур'є із спектральним параметром // Крайові задачі для диференціальних рівнянь: Зб. наук. пр.- Чернівці: Прут, 2001.- Вип. 7.-С.98-110.

33. Конет І.М., Ленюк М.П. Обчислення деяких класів невластних інтегралів методом гібридних інтегральних перетворень Лежандра-Вебера // Збірник наук пр.. Кам'янець-Подільський: К-П ДПШ, 1993.- С. 42-57.

34. Конет І.М., Ленюк М.П. Підсумування деяких класів функціональних рядів методом інтегральних перетворень // Зб. наук. Пр.. Кам'янець-Подільського держ. пед. ун-ту. Серія фізико-математична. Випуск 3.- Кам'янець-Подільський: К-П ДПУ, 1997.- С. 40-46.

35. Коваленко А.Д. Термопругость.- К.: ВШ.,1975.-216с.

36. Кошляков Н.С., Глинер З.Б., Смирнов М.М. Уравнения в частных производных математической физики.- М.: ВШ.,1970.- 712с.

37. Коляно Ю.М. Методы теплопроводности и термоупругости неоднородного тела.- К.: Наук. думка, 1992.- 280с.

38. Коваленко А. Д. Основы термоупругости.- К.:Наук. думка, 1970.- 304с.

39. Ленюк М. П. Интегральные преобразования с разделенными переменными (Фурье, Хенкеля).- К.: 1983.-60с-(Препринт/АН УССР. Ин-т математики; 83.4).

40. Ленюк М. П. Интегральные преобразования с разделенными переменными (Вереба,Фурье-Бесселя, Лежандра-Фурье).-К.:1983.-56с.- (Препринт/АН УССР. Ин-т математики; 83.18).

41. Ленюк М.П., Романович Т.Н., Шинкарик Н.И. Гибридные интегральные преобразования. Т. 1. –К.: Ин-т математики НАМ Украины, 1994.-264с.

42. Ленюк М. П. Температурні поля в плоских кусково-однорідних ортотропних областях. –К.: Ін-т математики НАН України, 1997.- 188с.

43. Лыков А. В. Теория теплопроводности.- М.:ВШ., 1967.-600с.

44. Марченко В.М. Температурные поля и напряжения в конструкции летательных аппаратов. – М.: Машиностроение, 1965.- 299с.

45. Мелан З., Паркус Г. Термоупругие напряжения, вызываемые стационарными температурными полями.- М.: Физматгиз., 1968.- 167с.

46. Могилевский Б. М., Чудновский А.Ф. Теплопроводность полупроводников.-М.: Наука, 1972.- 536с.

47. Ніколайчук Н.М. Гібридне інтегральне перетворення Лежандра 1-го роду – (Конторовича - Лебедева) // Збірник матеріалів наукових досліджень студентів та магістрантів Кам'янець-Подільського державного університету. Фізико-математичні науки. –Випуск 3. –Кам'янець-Подільський : Видавець ПП Звойленко Д. Г., 2006.–С.45-54.

48. Паркус Г. Неустановившиеся температурные напряжения. – М.: Физматгиз., 1963.- 251с.

49. Подстригач Я.С., Ломакин В.А., Коляно Ю.М. Термоупругость тел неоднородной структуры.- М.: Наука, 1984.- 368с.
50. Сергиенко И.В., Скопецкий В.В., Дейнека В.С. Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах.- К.: Наук. думка, 1991.- 432с.
51. Снеддон Н. Преобразование Фурье.- М.: Изд-во иностран.лит., 1995. – 668с.
52. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений.- М.: Физматгиз., 1959.- 468с.
53. Титчмарш Е.Ч. Введение в теорию интегралов Фурье.- М.- л.: Гостехиздат, 1948. – 480с.
54. Титчмарш Е.Ч. Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка.-М.: Изд-во иностр. лит., 1966.- Т.1. – 278с.
55. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики.- М.: Наука, 1972.- 735с.
56. Трантер К. Дж. Интегральные преобразования в математической физике. – М.: Гостехтеориздат., 1956. – 204с.
57. Харламов А.Г. Теплопроводность высокотемпературных изоляторов. М.: Атомиздат., 1979. – 100с.
58. Уфлянд Я.С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. – Л.: Наука, 1967. – 402с.
59. Шилов Г.Е. Математический анализ. Второй специальный курс. – М.: Наука, 1965. -328с