Міністерство освіти і науки України

Кам’янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка

фізико-математичний факультет

кафедра математики

Дипломна робота магістра

з теми « Задача лінійного програмування в просторі, спряженому до лінійного нормованого простору, зі зліченною кількістю лінійних обмежень та додатковим обмеженням на норми допустимих розв'язків »

Виконала: студентка ІІ курсу, групи Mb1-M17

спеціальності 014. Середня освіта (Математика)

Галкіна Лілія Григорівна

Керівник: кандидат фізико-математичних наук,

доцент Гнатюк В.О.

Рецензент: кандидат фізико-математичних наук,

доцент Щирба В.С.

Кам’янець-Подільський – 2018р.

ЗМІСТ

ВСТУП 3

РОЗДІЛ 1. Задача лінійного програмування зі зліченною кількістю лінійних обмежень та додатковим обмеженням на норми допустимих розв'язків, підзадача цієї задачі, двоїсті до них задачі та співвідношення двоїстості 9

1.1. Постановка задачі. Властивості множини допустимих та оптимальних розв'язків підзадачі досліджуваної задачі, цільової функції цих задач, існування оптимального розв'язку підзадачі розглядуваної задачі 9

1.2. Властивості множини допустимих розв'язків задачі (1.1) - (1.3), існування оптимального розв'язку цієї задачі. Критерії існування допустимих розв'язків задач (1. 4) 15

1.3. Задачі, двоїсті до задач (1.4) та (1.1) - (1.3). Зв'язки між двоїстими задачами. Співвідношення двоїстості. 25

РОЗДІЛ 2. Чисельні методи розв'язання задач (1.4) та (1.31) 41

2.1. Задача лінійного програмування з нескінченною кількістю 41

обмежень, еквівалентна задачі відшукання величини (1.16) 41

2.2 Умова існування оптимального розв'язку задачі відшукання 44

величини (1.16), двоїстої до підзадачі (1.4) задачі (1.31) 44

2.3. Чисельний метод одночасного розв'язування двоїстих задач 54

(1.4) та (1.16) 54

2.4. Збіжність чисельного методу розв'язування задач (1.4) та (1.16) 62

2.5. Чисельний метод розв'язування задачі (1.31) та його збіжність 69

ВИСНОВКИ 72

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ 73

ВСТУП

Робота присвячена задачі лінійного програмування в просторі, спряженому до лінійного нормованого простору, зі зліченною кількістю лінійних обмежень та додатковим обмеженням на норми допустимих розв'язків

Актуальність теми. Останнім часом постановкам, математичним моделям і методам розв'язування задач лінійного програмування, в яких, внаслідок неточного описання розглядуваних проблем, розмитості вимог щодо дотримання встановлених обмежень, граничні значення змінних визначені неточно, відомі лише діапазони їх значень, приділяється значна увага (див., наприклад, [1, 2]). В цих задачах на змінні часто накладаються двосторонні обмеження і вони можуть приймати, як додатні, так і від'ємні значення.

Задачі лінійного програмування з двосторонніми та іншими обмеженнями на змінні, які можуть приймати як додатні, так і від'ємні значення, виникають також при наближеному розв'язуванні екстремальних задач, в тому числі й задач найкращого наближення, різного роду методами, зокрема методами їх лінеаризації (див., наприклад, [3 - 6]), методами найшвидшого спуску (див., наприклад, [7 - 10]) тощо. Серед таких задач зустрічаються також задачі лінійного програмування з нескінченною кількістю обмежень (див., наприклад, [7 - 10]).

Переважна кількість цих задач зводиться до задачі лінійного програмування в просторі, спряженому до лінійного нормованого простору, зі зліченною кількістю лінійних обмежень та додатковим обмеженням на норми допустимих розв'язків, яка полягає у наступному.

Нехай X – лінійний нормований простір, u, x_i, i = 1, 2, ..., – вектори простору X, X^* – простір, спряжений з X. Ставиться задача відшукання

$$sup\ f(u) \qquad (0.1)$$

за умов

$$f(x_i) = c_i,\ i = 1, 2,..., \qquad (0.2)$$

$$\|f\| \leq \rho, \qquad (0.3)$$

де $f \in X^*$, $c_i \in R$, $i = 1, 2,...$, $\rho > 0$.

Підзадачами задачі (0.1) - (0.3) будемо називати задачі відшукання

$$sup\ f(u) \qquad (0.4)$$

за умов

$$f(x_i) = c_i,\ i = \overline{1, n} \qquad (0.5)$$

$$\|f\| \leq \rho, \qquad (0.6)$$

Зрозуміло, що результати загального характеру, які будуть отримані внаслідок дослідження задачі (0.1) - (0.3), становлять самостійний інтерес. Їх можна використати для отримання відповідних результатів дослідження задач, які вкладаються у схему постановки задачі (0.1) - (0.3), в тому числі й для задач лінійного програмування, про які йшла мова вище. Ці результати можуть бути основою для побудови збіжних чисельних методів розв'язування задач лінійного програмування з додатковими обмеженнями на норми їх допустимих розв'язків.

Мета, об'єкт, предмет і задачі дослідження.

Метою роботи є: встановити властивості множин допустимих та оптимальних розв'язків підзадачі (0.4) - (0.6) задачі (0.1) - (0.3), цільової функції цих задач, існування оптимального розв'язку задачі (0.4) - (0.6); довести рівності множини допустимих розв'язків задачі (0.1) - (0.3) та перетину множин допустимих розв'язків задач (0.4) - (0.6), встановити властивості множини допустимих розв'язків задачі (0.1) - (0.3), існування оптимального розв'язку цієї задачі; довести критерії існування допустимих розв'язків задач (0.4) - (0.6) та (0.1) - (0.3); побудувати задачі, двоїсті до задач (0.4) - (0.6), (0.1) - (0.3), встановити зв'язки між двоїстими задачами, в тому числі співвідношення двоїтості; побудувати задачу лінійного програмування з нескінченною кількістю обмежень, еквівалентну задачі (0.4) - (0.6); побудувати чисельні методи одночасного розв'язування задач (0.4) - (0.6), (0.1) - (0.3) та двоїстих до них задач, довести збіжності цих методів, встановити низку допоміжних тверджень, які представляють і самостійний інтерес.

Об'єктом дослідження є задача лінійного програмування в просторі, спряженому до лінійного нормованого простору, зі зліченною кількістю лінійних обмежень та додатковим обмеженням на норми допустимих розв'язків.

Предметом дослідження є проблеми теорії екстремальних задач та чисельних методів їх розв'язування стосовно задачі лінійного програмування в просторі, спряженому до лінійного нормованого простору, зі зліченною кількістю лінійних обмежень та додатковим обмеженням на норми допустимих розв'язків.

Задачами дослідження є:

1. Встановлення властивостей множин допустимих та оптимальних розв'язків підзадачі (0.4) - (0.6) задачі (0.1) - (0.3), цільової функції цих задач, існування оптимального розв'язку задачі (0.4) - (0.6).

2. Доведення рівності множини допустимих розв'язків задачі (0.1) - (0.3) та перетину множин допустимих розв'язків задач (0.4) - (0.6), встановлення властивостей множини допустимих розв'язків задачі (0.1) - (0.3), існування оптимального розв'язку цієї задачі.

3. Доведення критеріїв існування допустимих розв'язків задач (0.4) - (0.6) та (0.1) - (0.3).

4. Побудова задач, двоїстих до задач (0.4) - (0.6), (0.1) - (0.3), встановлення зв'язків між двоїстими задачами, в тому числі співвідношенн двоїтості.

5. Побудова задачі лінійного програмування з нескінченною кількістю обмежень, еквівалентної задачі (0.4) - (0.6).

6. Побудова чисельних методів одночасного розв'язування задач (0.4) - (0.6), (0.1) - (0.3) та двоїстих до них задач, доведення збіжності цих методів.

7. Встановлення низки допоміжних тверджень.

При розв'язуванні поставлених задач у дипломній роботі використовувалися загальні методи математичного аналізу, функціонального аналізу, опуклого аналізу, теорії екстремальних задач, теорії ігор, теорії лінійного програмування, методів оптимізації тощо.

Наукова новизна отриманих результатів.

Результати є новими і полягають у наступному:

1. Встановлено властивості множин допустимих та оптимальних розв'язків підзадачі (0.4) - (0.6) задачі (0.1) - (0.3), цільової функції цих задач, існування оптимального розв'язку задачі (0.4) - (0.6).

2. Доведено рівності множини допустимих розв'язків задачі (0.1) - (0.3) та перетину множин допустимих розв'язків задач (0.4) - (0.6), встановлено властивості множини допустимих розв'язків задачі (0.1) - (0.3), існування оптимального розв'язку цієї задачі.

3. Доведено критерії існування допустимих розв'язків задач (0.4) - (0.6) та (0.1) - (0.3).

4. Побудовано задачі, двоїсті до задач (0.4) - (0.6), (0.1) - (0.3), встановлено зв'язки між двоїстими задачами, в тому числі співвідношеннями двоїтості.

5. Побудовано задачу лінійного програмування з нескінченною кількістю обмежень, еквівалентну задачі (0.4) - (0.6).

6. Побудовано чисельні методи одночасного розв'язування задач (0.4) - (0.6), (0.1) - (0.3) та двоїстих до них задач, доведено збіжності цих методів.

Практичне значення отриманих результатів. Отримані в дипломній роботі результати мають як теоретичне, так і практичне значення. Вони, а також запропоновані в роботі методи та прийоми досліджень, що стосуються задачі лінійного програмування в просторі, спряженому до лінійного нормованого простору, зі зліченною кількістю лінійних обмежень та додатковим обмеженням на норми допустимих розв'язків, можуть бути використані для подальшого дослідження екстремальних задач, в тому числі й задач найкращого наближення, тощо.

Запропонований у роботі чисельний метод, який оснований на ідеї методу січної площини розв'язування задачі опуклого програмування, можна використовувати для одночасного розв’язування двоїстих задач.

Апробація результатів роботи. Результати роботи доповідались на звітній конференції студентів і магістрантів за підсумками НДР у 2017-2018 навчальному році, 10-11 квітня 2018 р., м. Кам’янець-Подільський та на засіданнях студентської проблемної групи «Найкраще рівномірне наближення компактнозначних відображень», яка функціонує на кафедрі математики.

Структура роботи. Робота складається зі вступу, двох розділів, висновків та опису використаних джерел.

У першому розділі розглянуто постановку задачі лінійного програмування в просторі, спряженому до лінійного нормованого простору, зі зліченною кількістю лінійних обмежень та додатковим обмеженням на норми допустимих розв'язків та деякі допоміжні твердження, що стосуються цієї задачі.

Зокрема, розглянуто:

- властивості множини допустимих та оптимальних розв'язків підзадачі досліджуваної задачі, цільової функції цих задач, існування оптимального розв'язку підзадачі розглядуваної задачі;

- властивості множини допустимих розв'язків задачі (1.1) - (1.3), існування оптимального розв'язку цієї задачі. Критерії існування допустимих розв'язків задач (1. 4);

- задачі, двоїсті до задач (1.4) та (1.1) - (1.3). Зв'язки між двоїстими задачами. Співвідношення двоїстості.

Другий розділ присвячено чисельним методам розв'язання задач (1.4) та (1.31).

Зокрема, розглянуто:

- задачу лінійного програмування з нескінченною кількістю обмежень, що еквівалентна задачі відшукання величини (1.16);

- умову існування оптимального розв'язку задачі відшукання величини (1.16), двоїстої до підзадачі (1.4) задачі (1.31);

- чисельний метод одночасного розв'язування двоїстих задач (1.4) та (1.16);

- збіжність чисельного методу розв'язування задач (1.4) та (1.16);

-чисельний метод розв'язування задачі (1.31) та його збіжність.

ВИСНОВКИ

В дипломній роботі:

1. Встановлено властивості множин допустимих та оптимальних розв'язків підзадачі (0.4) - (0.6) задачі (0.1) - (0.3), цільової функції цих задач, існування оптимального розв'язку задачі (0.4) - (0.6).

2. Доведено рівності множини допустимих розв'язків задачі (0.1) - (0.3) та перетину множин допустимих розв'язків задач (0.4) - (0.6), встановлено властивості множини допустимих розв'язків задачі (0.1) - (0.3), існування оптимального розв'язку цієї задачі.

3. Доведено критерії існування допустимих розв'язків задач (0.4) - (0.6) та (0.1) - (0.3).

4. Побудовано задачі, двоїсті до задач (0.4) - (0.6), (0.1) - (0.3), встановлено зв'язки між двоїстими задачами, в тому числі співвідношення двоїтості.

5. Побудовано задачу лінійного програмування з нескінченною кількістю обмежень, еквівалентну задачі (0.4) - (0.6).

6. Побудовано чисельні методи одночасного розв'язування задач (0.4) - (0.6), (0.1) - (0.3) та двоїстих до них задач, доведено збіжності цих методів.

7. Встановлено низку допоміжних тверджень, які представляють і самостійний інтерес.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Зак Ю.А. Задачи нечеткого линейного программирования с двухсторонними ограничениями и параметрами целевых функций и ограничений в виде нечетких множеств / Ю.А. Зак // Системні дослідження та інформаційні технології. − 2018. − №2. − С. 111 − 123.

2. Шведов А.С. Нечеткое математическое программирование: Краткий обзор / А.С. Шведов // Проблемы управления. − 2017. − №3. − С. 2 − 10.

3. Белобров П.К. К задаче выпуклого чебышевского приближения в нормированном пространстве / П.К. Белобров // Учёные записки Казанского гос. ун-та. – 1965. – Т. 125, кн. 2. – С. 3 – 6.

4. Зуховицкий С.И. Линейное и выпуклое программирование / С.И. Зуховицкий, Л.И. Авдеева. – М.: Наука. – 1967. – 460с.

5. Гнатюк В.О. Чисельний метод відшукання полінома найкращого наближення / В.О. Гнатюк // ДАН УРСР. Сер. А. − 1970. − №2. − С. 116 − 120.

6. Гнатюк В.А. Алгоритм для одновременного решения прямой и двойственной задач выпуклого программирования в банаховом пространстве / В.А. Гнатюк // Кибернетика. − 1975. − №1. − С. 102 − 107.

7. Гнатюк Ю.В. Модифікація методу Ремеза для апроксимації компактнозначного відображення чебишовським підпростором з обмеженням, що задається системою замкнутих куль/ Ю.В. Гнтюк // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки : зб. наук. праць / Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова Національної академії наук України, Кам’янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка. — Кам’янець-Подільський : Кам’янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2009. — Вип. 2. − С. 37.

8. Гудима У.В. Модифікація методу січних площин на випадок апроксимації компактнозначного відображення скінченновимірним підпростором з додатковим обмеженням, що задається системою замкнутих куль / У.В. Гудима // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: фізико-математичні науки: зб. наук. праць / Інститут кібернетики імені В.М. Глушкова Національної академії наук України, Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка. – Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2009. – Вип. 2. – С. 72 – 84.

9. Гнатюк В.О., Модифікація методу січних площин на випадок задачі відшукання чебишовської точки системи опуклих обмежених замкнених множин, які неперервно змінюються, відносно скінченновимірного підпростору / В.О. Гнтюк // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки : зб. наук. праць / Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова Національної академії наук України, Кам’янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка. — Кам’янець-Подільський : Кам’янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2009. — Вип. 2. – С. 37.

10. Гнатюк В.О. Метод січної площини розв'язування задачі найкращої у розумінні опуклої ліпшіцевої функції рівномірної апроксимації неперервного компактнозначного відображення скінченновимірним підпростором / В.О. Гнатюк, Ю.В. Гнатюк. // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки : зб. наук. праць / Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова Національної академії наук України, Кам’янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка. — Кам’янець-Подільський : Кам’янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2009. — Вип. 6. – С. 56.

11. Пшеничный Б.Н. Необходимые условия экстремума / Б.Н. Пшеничный. – М.: Наука. – 1982. – 143с.

12. Гольштейн Е.Г. Теория двойственности в математическом программировании и ее приложения / Е.Г. Гольштейн. – М.: Наука, – 1971. – 351с.

13. Иоффе А.Д. Теория экстремальных задач / А.Д. Иоффе, В.М. Тихомиров. – М.: Наука. – 1974. – 408с.

14. Люстерник Л.А. Краткий курс функционального анализа / Л.А. Люстерник, В.И. Соболев. – М.: Высшая школа, 1982. – 271с.

15. Колмогоров А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. – М.: Наука, – 1976. – 543с.

16. Фань Цзи. Теоремы о минимаксе / Цзи Фань // Бесконечные антагонистические игры. – М.: Физматгиз, 1963. – С. 31-39.

17. Kelly J.E. The „Cutting plane” methods for solving convex programs / J.E. Kelly // SIAM J. — 1960. — 8, № 2. — P. 83.

18. Юдин Д.Б. Линейное программирование: теория, методы и приложения / Д.Б. Юдин, Е.Г. Гольштейн. – М.: Наука. – 1969. – 424с.

19. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа / Л.Д. Кудрявцев. – М.: Дрофа, 2003. – Т.1. – 704с.

20. Иосида К. Функциональный анализ / К. Иосида. — М.: Мир, 1967. — 624 с.

21. Люстерник Л.А. Элементы функционального анализа / Л.А. Люстерник, В.И. Соболев. – М.: Наука, – 1965. – 520с.