Міністерство освіти і науки України
Кам’янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка
Фізико-математичний факультет
Кафедра математики

Дипломна робота

магістра

з теми: **«Задача найкращої у розумінні опуклих функцій одночасної апроксимації кількох елементів лінійного нормованого простору множиною цього простору з додатковим обмеженням»**

Виконала:
студентка 2 курсу M1-M18 групи
спеціальності: 014 Середня освіта (Математика)
Гудзь Мар’яна Анатоліївна

Керівник:
Гнатюк В.О., доцент кафедри математики, кандидат фізико-математичних наук, доцент

Рецензент:
Щирба В.С., професор кафедри інформатики,
кандидат фізико-математичних наук, доцент

Кам’янець-Подільський – 2019 р.

ЗМІСТ

ВСТУП

В роботі досліджується задача найкращої у розумінні опуклих функцій одночасної апроксимації кількох елементів лінійного нормованого простору множиною цього простору з додатковим обмеженням операторного типу.

Актуальність теми. Питаннями заміни одних математичних об'єктів іншими, які є близькими у тому або іншому розумінні до об'єктів, що замінюються, і простішими для вивчення та використання, займається теорія апроксимації, яка є важливою галуззю математики.

Серед класичних проблем теорії апроксимації є проблеми, пов'язані з наближеним поданням функцій з допомогою більш простих функцій (многочленів, раціональних дробів і т.п.).

Однією з перших задач, розв'язання якої послужило початком розвитку теорії наближень (теорії апроксимації) була така задача: потрібно серед усіх поліномів виду

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k t^{k-1}$$

знайти такий поліном

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^* t^{k-1},$$

що

$$\max_{t\in[-1,1]} \left| t^n + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^* t^{k-1} \right| = \min_{(\alpha_1,\alpha_2)} \left| t^n + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k t^{k-1} \right|, \tag{0.1}$$

яка була поставлена у розв'язана ще у 50-х роках XIX століття відомим математиком П. Л. Чебишовим.

Далі ця задача узагальнювалась. Розглядались інші задачі наближення функцій алгебраїчними поліномами, тригонометричними поліномами, раціональними функціями тощо в різних метриках.

Потім було помічено, що всі ці задачі вкладаються у наступну єдину схему: знайти

$$\inf_{g\in V}\|g-x\|, \tag{0.2}$$

де x – фіксований елемент лінійного нормованого простору X, а V – фіксована множина цього простору, тобто потрібно знайти відстань від точки x до множини V.

Якщо для деякого $g^* \in V$ виконується рівність

$$\|g^*-x\| = \inf_{g\in V}\|g-x\|,$$

то цей елемент g^* називається елементом найкращого наближення елемента x множиною V або екстремальним елементом для величини (0.2).

Задача відшукання величини (0.2) досліджувалась і досліджується багатьма авторами, а основні результати її дослідження підсумовано у працях Н.І. Ахієзера [1], В.І. Бердишева, Л.В. Петрак [2], В.К. Дзядика [3], М.П. Корнєйчука [4], П.-Ж. Лорана [5], О.І. Степанця [6, 7], В.М. Тихомирова [8] та інші.

Результати дослідження задач відшукання величин (0.1), (0.2) узагальнювались на задачі найкращого одночасного наближення кількох елементів (див., наприклад, [9-12]).

В різних розділах математики уже давно виникли екстремальні задачі теорії наближення множинами, в тому числі підпросторами, з додатковими обмеженнями, як правило, нерівностями. Такі задачі розглядались, зокрема, у працях [13-15]. Однак, у цих працях недостатня увага приділяється екстремальним задачам з обмеженнями операторного типу.

Відомо, що розв’язування задач оптимального керування зводиться до проблеми моментів, яка в свою чергу зводиться до деякої задачі наближення. Якщо керування вибирати не з симетричної множини, а з довільної опуклої множини, то можна отримати задачі наближення у, так званій, «викривленій» метриці (див., наприклад, [15-19]). Серед таких задач – задача найкращого наближення у розумінні передморми, сублінійного функціонала, функціонала повільного зростання, опуклого неперервного функціонала тощо.

Природно виникає ідея розгляду задачі найкращого у розумінні деяких «викривлених метрик», зокрема опуклих функцій, одночасного наближення кількох елементів лінійного нормованого простору множиною цього простору з додатковим обмеженням операторного типу, яка б охоплювала окремі задачі наближення, про які йшла мова вище, і дослідження якої дозволило б єдиним чином отримувати результати для того кола задач, які включаються у її постановку як частинні випадки.

Така задача розглядається у магістерській роботі. Вона полягає в наступному.

Нехай X, X_1 – лінійні над полем дійсних чисел нормовані простори, $P_i, i = \overline{1, m}$, - неперервні невід’ємні опуклі функції, задані на X, $x_i, i = \overline{1, m}$, - елементи простору X, A – лінійний ненульовий неперервний оператор, що діє з X в X_1, a_0 – фіксований елемент простору X_1, G_1 – опуклий замкнений конус з вершиною в точці 0 простору X_1, G – непорожня опукла замкнена множина простору X,

$$D = \{x: x \in X, Ax - a_0 \in G_1\}.$$

Припускається, що

$$\{x: x \in G, Ax - a_0 \in intG_1\} \neq \emptyset.$$

Задачею найкращої у розумінні опуклих функцій $P_i, i = \overline{1, m}$, одночасної апроксимації елементів $x_i, i = \overline{1, m}$, лінійного нормованого простору X множиною $G \subset X$ з додатковим обмеженням $Ax - a_0 \in G_1$ операторного типу називається задача відшукання величини

$$\alpha_{G\cap D}(\{x_i\}_{i=1}^{m}) = \inf_{x\in G\cap D}\ \max_{1\le i\le m} P_i\,(x-x_i) = \inf_{\substack{x\in G,\\ Ax-a_0\in G_1}}\ \max_{1\le i\le m} P_i\,(x-x_i)\,. \quad (0.3)$$

Якщо існує елемент $x^* \in G \cap D$ такий, що

$$\alpha^*_{G\cap D}(\{x_i\}_{i=1}^{m}) = \inf_{x\in G\cap D}\ \max_{1\le i\le m} P_i\,(x-x_i) = \inf_{\substack{x\in G,\\ Ax-a_0\in G_1}}\ \max_{1\le i\le m} P_i\,(x-x_i) =$$

$$= \max_{1\le i\le m} P_i\,(x^*-x_i),$$

то його називають екстремальним елементом для величини (0.3).

Метою роботи є встановлення еквівалентних форм запису задачі (0.3), властивостей множини її допустимих розв'язків та цільової функції, умов існування екстремального елемента; деяких властивостей опуклих конусів лінійного нормованого простору та спряжених з ними конусів; отримання двоїстих подань конуса внутрішніх напрямків для опуклого замкненого конуса лінійного нормованого простору, конус внутрішніх напрямків для множини D, похідної за напрямком цільової функції задачі відшукання величини (0.3), конуса внутрішніх напрямків деякої лебегової множини цільової функції цієї задачі; встановлення необхідних, достатньої умов та критеріїв екстремального елемента для величини (0.3).

Об'єктом дослідження є задача найкращої у розумінні опуклих функцій одночасної апроксимації кількох елементів лінійного нормованого простору множиною цього простору з додатковим обмеженням операторного типу.

Предметом дослідження є проблеми, що стосуються задачі найкращої у розумінні опуклих функцій одночасної апроксимації кількох елементів лінійного нормованого простору множиною цього простору з додатковим обмеженням операторного типу (встановлення властивостей множини її допустимих розв'язків та цільової функції, умов існування екстремального елемента; отримання двоїстого подання конуса внутрішніх напрямків для опуклого замкненого конуса лінійного нормованого простору; встановлення необхідних, достатніх умов та критеріїв екстремального елемента для розглядуваної задачі тощо).

Задачами дослідження є:

- отримання еквівалентних форм запису задачі відшукання величини (0.3);
- дослідження властивостей множини допустимих розв'язків та цільової функції задачі відшукання величини (0.3);
- встановлення умов існування екстремального елемента для задачі відшукання величини (0.3);
- дослідження властивостей конусів лінійного нормованого простору та спряжених з ним конусів;
- отримання двоїстого подання конуса внутрішніх напрямків для опуклого замкненого конуса лінійного нормованого простору; двоїстого подання конуса внутрішніх напрямків для множини D; двоїстого подання похідної за напрямком цільової функції задачі відшукання величини (0.3); двоїстого подання конуса внутрішніх напрямків для деякої лебегової множини цільової функції задачі відшукання величини (0.3);
- встановлення необхідних, достатніх умов та критеріїв екстремального елемента для задачі відшукання величини (0.3).

При дослідженні розглядуваної в роботі задачі використовувались методи математичного, функціонального та опуклого аналізів у поєднанні з методами теорії екстремальних задач, теорії оптимізації та теорії апроксимації.

Наукова новизна отриманих результатів. Результати роботи є новими і полягають у наступному:

1) отримано еквівалентні форми запису задачі відшукання величини (0.3);

2) досліджено властивості множини допустимих розв'язків та цільової функції задачі відшукання величини (0.3);
3) встановлено умови існування екстремального елемента для задачі відшукання величини (0.3);
4) досліджено властивості конусів лінійного нормованого простору та спряжених з ним конусів;
5) отримано двоїсте подання:
   - конуса внутрішніх напрямків для опуклого замкненого конуса лінійного нормованого простору;
   - конуса внутрішніх напрямків для множини D;
   - похідної за напрямком цільової функції задачі відшукання величини (0.3);
   - конуса внутрішніх напрямків для деякої лебегової множини цільової функції задачі відшукання величини (0.3);
6) встановлено:
   - необхідні умови екстремального елемента для задачі відшукання величини (0.3);
   - достатню умову екстремального елемента для задачі відшукання величини (0.3);
   - критерії екстремального елемента для задачі відшукання величини (0.3).

Практичне значення отриманих результатів. Магістерська робота має теоретичний характер. Її результати можуть бути використані для подальшого розвитку теорії найкращої несиметрничної одночасної апроксимації кількох елементів лінійного нормованого простору множиною цього простору з додатковим обмеженням операторного типу, дослідження задач оптимізації, побудови збіжних чисельних методів розв'язування відповідних задач апроксимації та оптимізації.

Апробація результатів роботи. Результати роботи доповідались на засіданні студентської проблемної групи «Найкраще рівномірне наближення компактнозначних відображень», яка функціонує при кафедрі математики. Окремі з них доповідались на науковій конференції студентів та магістрантів фізико-математичного факультету Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка за підсумками науково-дослідної роботи у 2018-2019 навчальному році.

Структура роботи. Робота складається зі вступу, трьох розділів, висновків та опису використаних джерел.

У першому розділі роботи розглянуто постановку задачі, еквівалентні форми її запису, властивості множини її допустимих розв'язків, цільової функції, встановлено умови існування екстремального елемента для задачі відшукання величини (0.3).

У другому розділі досліджено властивості конусів лінійного нормованого простору та спряжених з ними конусів; отримано двоїсте подання конуса внутрішніх напрямків для опуклого замкненого конуса лінійного нормованого простору; двоїсте подання конуса внутрішніх напрямків для множини D; двоїсте подання похідної за напрямком цільової функції задачі відшукання величини критеріїв екстремального елемента для задачі відшукання величини (0.3); двоїсте подання конуса внутрішніх напрямків для деякої лебегової множини цільової функції задачі відшукання величини (0.3).

У третьому розділі з урахуванням результатів, отриманих у перших двох розділах, встановлено необхідні, достатні умови та критерії екстремального елемента для задачі відшукання величини (0.3).

ВИСНОВКИ

В магістерській роботі:

1) отримано еквівалентні форми запису задачі відшукання величини (0.3);
2) досліджено властивості множини допустимих розв'язків та цільової функції задачі відшукання величини (0.3);
3) встановлено умови існування екстремального елемента для задачі відшукання величини (0.3);
4) досліджено властивості конусів лінійного нормованого простору та спряжених з ним конусів;
5) отримано двоїсте подання:
   - конуса внутрішніх напрямків для опуклого замкненого конуса лінійного нормованого простору;
   - конуса внутрішніх напрямків для множини D;
   - похідної за напрямком цільової функції задачі відшукання величини (0.3);
   - конуса внутрішніх напрямків для деякої лебегової множини цільової функції задачі відшукання величини (0.3);

6. встановлено:
   - необхідні умови екстремального елемента для задачі відшукання величини (0.3);
   - достатню умову екстремального елемента для задачі відшукання величини (0.3);
   - критерії екстремального елемента для задачі відшукання величини (0.3).

7. Сформульовано та доведено низку допоміжних тверджень, які мають самостійне значення.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Ахиезер Н.И. Лекции по теории аппроксимации / Н.И. Ахиезер. — М. : Наука, 1965. — 407 с.
2. Бердышев В.И. Аппроксимация функций, сжатие численной информации, приложения / В.Н. Бердышев, Л.В. Петрак. – Екатеринбург: УрО РАН, 1999. – 297 с.
3. Дзядык В.К. Введение в теорию равномерного приближения функций / В.К. Дзядык. — М. : Наука, 1977. — 510 с.
4. Корнейчук Н.П. Экстремальные задачи теории приближения / Н.П. Корнейчук. — М. : Наука, 1976. — 320 с.
5. Лоран П.-Ж. Аппроксимация и оптимизация / П.-Ж. Лоран. — М. : Мир, 1975. — 496 с.
6. Степанец А.И. Методы теории приближений / А.И. Степанец. — Киев : Ин-т математики НАН Украины, 2002. — Ч.I. — 427 с.
7. Степанец А.И. Методы теории приближений / А.И. Степанец. — Киев. : Ин-т математики НАН Украины, 2002. — Ч.II. — 468 с.
8. Тихомиров В.М. Некоторые вопросы теории приближений / В.М. Тихомиров. — М. : Изд-во Моск. ун-та, 1976. — 307 с.
9. Tanimoto S.A. Characterization of best simultaneous approximations / S.A. Tanimoto // J. Approximation Theory. – 1989. - №59. – P. 359-361.
10. Tanimoto S.A. On best simultaneous approximation / S.A. Tanimoto // Math. Japonica. – 1998. – 48, №2. – P. 275-279.
11. Гнатюк Ю.В. Найкраще рівномірне наближення сім’ї неперервних на компакті функцій / Ю.В. Гнатюк // Укр. мат. журн. – 2002.-54, №11. – С. 1574-1580.
12. Гнатюк Ю.В. Алгоритми найкращого одночасного рівномірного наближення сім’ї неперервних на компакті функцій чебишовським підпростором / Ю.В. Гнатюк // Укр. мат. журн. – 2003. – 55, №2. – С. 291-307.

13. Корнейчук Н.П. Аппроксимация с ограничениями / Н.П. Корнейчук, А.А. Лигун, В.Г. Доронин. – Киев: Наукова думка, 1982. – 250 с.

14. Гольштейн Е.Г. Теория двойственности в математическом программировании и ее приложения / Е.Г. Гольштейн. — М. : Наука, 1971. — 351 с.

15. Гнатюк В.О. Найкраща рівномірна апроксимація компактнозначного відображення елементами множини однозначних відображень, які є селекторами опуклозначного відображення / В.О. Гнатюк, Ю. В. Гнатюк, У. В. Гудима // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки: зб.наук. праць / Кам'янець-Подільський національний університет, Інститут кібернетики імені В.М. Глушкова Національної академії наук України; [редкол.: В.В. Скопецький (відп. ред.) та ін.] – Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет, 2008. – Вип. 1. – С. 51-60.

16. Демьянов В.Ф., Приближенные методы решения экстремальных задач / В.Ф. Демьянов, А. М. Рубинов. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1968. – 178 с.

17. Гнатюк В.А. Общие свойства наилучшего приближения по выпуклой непрерывной функции / В.А. Гнатюк, В.С. Щирба // Укр. мат. журн. – 1982. – 4, №5. – С. 608-613.

18. Гнатюк Ю.В. Двоїсті співвідношення для задачі найкращої за дробово-опуклою функцією наближення кількох елементів та критерії елемента найкращого наближення / Ю.В. Гнатюк // Доп. НАН України. – 1995. - №6. – С. 23-26.

19. Гнатюк Ю.В. Основні властивості задачі найкращого одночасного наближення кількох елементів / Ю.В. Гнатюк / Укр. мат. журн. – 1996. – 48, №9. – С. 1183-1193.

20. Гудима У.В. Задача найкращого у розумінні сім'ї опуклих функцій рівномірного відновлення функціональної залежності, заданої неточно з допомогою опуклозначного багатозначного відображення / У.В. Гудима,

В.О. Гнатюк // Математичне та комп’ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки. — 2016. — Випуск 13. — С. 56-67.

21. Пшеничный Б.Н. Выпуклый анализ и экстремальные задачи / Б.Н. Пшеничный. – М.: Наука, 1980. – 320 с.
22. Гудима У.В. Опуклий аналіз : навчальний посібник / У.В. Гудима, В.О. Гнатюк. – Кам’янець-Подільський: Кам’янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2019. – 112 с.
23. Данфорд Н. Линейные операторы. Общая теория / Н. Данфорд, Дж.Т. Шварц. – М.: ИЛ, 1962. – 896 с.
24. Кадец В.М. Курс функционального анализа : Учебное пособие для студентов механико-математического факультета / В.М. Кадец. – Х.: ХНУ имени В.Н. Каразина, 2006. – 607 с.
25. Гудима У.В. Найкраща рівномірна апроксимація неперервного компактнозначного відображення множинами неперервних однозначних відображень / У.В. Гудима // Укр. мат. журн. — 2005. — 57, № 12. — С. 16011619.
26. Гнатюк Ю.В. Критерії екстремального елемента та його єдиності для задачі найкращої рівномірної апроксимації неперервного компактнозначного відображення множинами однозначних відображень / Ю.В. Гнатюк, У.В. Гудима // Доп. НАНУ, 2005 — №6 — С.19-23.