Міністерство освіти і науки України
Кам’янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка
Фізико-математичний факультет

Кфедра математики

Дипломна робота магістра
на тему: **Інтераційні методи розв’язування інтегральних та інтегро-функціональних рівнянь**

Виконала:
Студентка II курсу магістратури
Групи М1-М18
Спеціальності 014 Середня освіта (Математика)
Шелест Тетяна Анатоліївна

Керівник:
Кріль С.О., кандидат фізико-математичних наук, доцент

Рецензент:
Теплінський Ю.В., доктор фізико-математичних наук, профессор

м. Кам’янець-Подільський - 2019 року

Зміст

***ВСТУП*…………………………………………………………………4**

***РОЗДІЛ І. НЕЛІНІЙНІ ІНТЕГРАЛЬНІ РІВНЯННЯ*…………..…………….9**

§1. Нелінійні інтегральні оператори……………………………………….9

1.1. Основні поняття теорії нелінійних операторів………………………..*9*

1.2. Оператори Урисона із значеннями в просторі С……………………..…12

1.3. Оператори Гаммерштейна із значеннями в просторі L_q……………….15

1.4. Неперервність оператора Урисона із значеннями в просторі L_q………17

1.5. Повна неперервність операторів Урисона із значеннями в просторах L_q…………………………………………………………………………...19

§2. Існування і єдиність розв'язку……………………………..……..20

2.1. Постановка задачі…..…………………………………………………20

2.2. Рівняння з операторами, що задовольняють умову Ліпшиця……………21

2.3. Рівняння з цілком неперервними операторами…………………………..22

2.4. Рівняння з асимптотично лінійними операторами……………………..24

РОЗДІЛ ІІ. ЗБІЖНІСТЬ ІТЕРАЦІЙНИХ МЕТОДІВ У ВИПАДКУ РІЗНИХ ТИПІВ ОПЕРАТОРІВ……………………………………………..26

§3. Збіжність методу для рівнянь з монотонними операторами…………26

3.1. Монотонні оператори……………………………………………………26

3.2. Збіжність проекційно-ітеративного методу для рівнянь з монотонними операторами в гільбертовому просторі…………………………………...26

3.3. Частковий випадок……………………………………………………30

3.4. Застосування методу до рівняння першого роду………………………31

§4. Обгрунтування методу для рівнянь з цілком неперервним оператором……………………………………………………………………34

4.1. Застосовність проекційно-ітеративного методу до рівняння з цілком неперервним оператором………………………………………………..34

4.2. Достатні умови збіжності в гільбертовому просторі…………………..38

§5. Збіжність методу для рівнянь з гладкими операторами………………42

5.1. Про одну ознаку збіжності проекційно-ітеративного методу……………42

5.2. Обгрунтування збіжності методу для рівнянь з гладкими операторами…………………………………………………………………...47

§6. Обгрунтування методу для рівнянь зі слабкою нелінійністю………..51

§7. Модифікований проекційно-ітеративний метод………………………55

7.1. Опис методу……………………………………………………………55

7.2. Достатні умови збіжності……………………………………………..56

7.3. Оцінки похибок……………………………………………………….…..61

7.4. Реалізація методу……………………………………………………62

7.5. Умови застосування методу………………………………………..63

РОЗДІЛ ІІІ. УМОВИ ЗБІЖНОСТІ ПРОЕКЦІЙНО-ІТЕРАТИВНОГО МЕТОДУ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ НЕЛІНІЙНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ ТА ІНТЕГРО-ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ……………………………66

§8. Розв'язування нелінійних інтегро-різнецевих рівнянь з нелінійним оператором Урисона методом послідовних наближень…………………..66

8.1. Метод послідовних наближень для інтегро-функціональних рівнянь із нелінійним оператором Урисона та із сталим відхиленням…………………66
8.2. Застосування ітераційного методу до рівнянь із лінійним відхиленням..68
8.3. Метод послідовних наближень для інтегро-функціональних рівнянь з довільним відхиленням…………………………………………………………70
§9. Розв'язування інтегро-функціональних рівнянь з малою нелінійністю методом осереднення функціональних поправок та проекційно-ітеративним методом……………………………………………………..72
9.1. Загальна схема методу………...…………………………………………72
9.2. Достатні умови збіжності……………………………………………..75
9.3. Обчислювальна схема методу……………………………………….....83
9.4. Метод осереднення функціональних поправок у випадку сталого відхилення…………………………………………………………………...84
9.5. Обчислювальна схема методу………………………………………....86
ВИСНОВОК……………………………………………………………...88
ЛІТЕРАТУРА………………………………………………………………89

ВСТУП

Математичними моделями багатьох задач природознавства та техніки є різні класи диференціальних, інтегральних, інтегро-диференціальних, функціонально-диференціальних рівнянь та їх систем. В наш час існують різні методи дослідження і побудови розв'язків таких рівнянь, - як точні так і наближені методи. Найбільш широким класом щодо застосування є ітераційні методи. Ці методи дозволяють отримувати прості обчислювальні алгоритми розв'язування різних типів згаданих вище операторних рівнянь.

Основним і досить простим із ітераційних методів є метод послідовних наближень, який з точки зору функціонального аналізу вкладається в загальну схему і приводить до принципу стислих відображень, який вперше сформулювали С.Банах і Р.Каччіополі. Ідея методу послідовних наближень стосовно операторного рівняння

$$x = f + Tx, \tag{1}$$

де T - обмежений оператор, що діє в банаховому просторі X, полягає в тому, що наближені розв'язки визначаються по формулі

$$x_к = f + Tx_{к-1}, \ k = 1,2,3,..., x_0 \in X. \tag{2}$$

метод (2) буде збіжним тоді і тільки тоді, коли виконується умова

$$\rho(T) = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\|T^k\|} < 1, \tag{3}$$

де T - тотожний оператор в X, $\rho(T)$ - спектральний радіус оператора T.

В ряді випадків для збіжності методу послідовних наближень необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова (3). Найпростішою ознакою збіжності методу (2) є умова

$$q = \|\mathrm{T}\| < 1 \tag{4}$$

Для нелінійних операторних рівнянь виду

$$x = Tx \tag{5}$$

метод послідовних наближень може бути успішно застосований в тому випадку, коли T - оператор стиску, тобто задовольняє умову Ліпшиця

$$\|Tx - Ty\| \leq q\|x - y\|, \ \forall x, \ y \ \in X \tag{6}$$

зі сталою $q < 1$.

Обмежена область застосування методу послідовних наближень і дуже повільна збіжність в ряді випадків були стимулом створення методів, які прискорюють збіжність ітераційних процесів і розширюють область їх застосування, а також суттєво зменшують кількість обчислень. До них відноситься метод осереднення функціональних поправок, проекційно-ітеративний метод та його різні варіанти і модифікації.

Метою магістерської роботи є розробка і дослідження методів ітераційного типу наближеного розв'язання деяких типів нелінійних інтегральних рівнянь, зокрема рівнянь з монотонними, цілком неперервними, гладкими операторами.

Наукова новизна роботи полягає в тому, що дано обґрунтування можливості застосування відомих ітераційних методів, - зокрема методу осереднення функціональних поправок, проекційно-ітеративного методу та деяких його модифікацій до нелінійних інтегральних та інтегро-функціональних рівнянь. Крім згаданих методів також приведено ряд обчислювальних схем цих методів.

В другому розділі досліджено загальні умови збіжності методу послідовних наближень, методу осереднення функціональних поправок та проекційно-ітеративного методу до згаданих вище нелінійних рівнянь. Особлива увага приділяється проекційно-ітеративному методу, як найбільш ефективному. Зокрема, стосовно рівняння

$$x = Tx \tag{7}$$

в якому $T : X \to X$ - нелінійний неперервний оператор і $x \in X$ - шуканий елемент. Це рівняння в силу співвідношення

$$x = u + v, \ u = Px \in U, \ v = Qx \in V, \ \forall x \in X \tag{8}$$

рівносильне системі рівнянь

$$u = PT(u + v); \quad v = QT(u + v), \tag{9}$$

Ідея одного варіанту проекційно-ітеративного методу стосовно рівняння (7) полягає в тому, що наближенні розв'язки цього рівняння будуються згідно формул

$$z_k = x_{k-1} + w_k, w_k \in U, x_k = Tz_k \qquad (10)$$

$$P(x_k - z_k) = \Theta, k = 1, 2, 3, \dots, x_0 \in X \qquad (11)$$

Для визначення елемента w_k в силу цих формул отримуємо рівняння

$$w_k = PT(x_{k-1} + w_k) - Px_{k-1}$$

Можна розглядати і інші варіанти методу, зокрема такий алгоритм

$$u_k = PT(u_k + v_{k-1}), \qquad v_k = QT(u_k + v_{k-1});$$

$$z_k = u_k + v_{k-1}, \qquad x_k = u_k + v_k,$$

який є одним з можливих методів розв'язування системи рівнянь (9).

В другому розділі, розглянуто питання збіжність ітераційних методів у випадку різних типів інтегральних операторів.

В третьому розділі дипломної роботи досліжуються умови збіжності роекційно-ітеративного методу розвязування нелінійних інтегральних та інтегро-функціональних рівнянь. Так, наприклад, в §8 розглядається алгоритм розвязування інтегро-різнецевих рівнянь з нелінійним оператором Урисона методом послідовних наближень.

$$y(x) - p(x)y(x-\Delta) = f(x) + \int_a^b K(x,t)y(t)dt + \varepsilon \int_a^b M\big(x, t, y(t)\big)dt,$$

$$x \in [a, b], \qquad (12)$$

де Δ - стале запізнення, ε - малий параметр, *f(x)* - відома, а $y(x)$ - шукана функція з простору $L_2(a,b)$. (Як частковий можливий випадок, коли V(x;t;y(t)) = G(x;t) Φ(t;y(t))). Припустимо, що розв'язок рівняння (12) можна будувати по іншому варіанту методу послідовних наближень. Суть його в тому, що припускають, що наближення $y_{k-1}(x)$ побудовано. Виконуючи ітерацію

$$z_k(x) = f(x) + \int_a^b K(x,t)y_{k-1}(t)dt + \varepsilon \int_a^b M\big(x, t, y_{k-1}(t)\big)dt \qquad (13)$$

і розв'язуючи різницеве рівняння

$$y_к(x)\text{-}p(x)y_к(x\text{-}\Delta)=z_к,\ x\epsilon\ [a,b],\ y_к(x)\ =\ 0,\ x\notin[a,b] \qquad (14)$$

знаходимо наближення $y_к(x)$. Початкове наближення $y_0(x)$ можна задати безпосередньо або визначити з рівняння (14), задавши в ньому функцію $z_0(x)$ з простору $L_2(a,b)$.

Такий варіант методу може застосовуватись і в тих випадках, коли метод послідовних наближень не є збіжним, тому що умова того, що оператор $W= K +\varepsilon$ не є оператором стиску є більш загальною ніж аналогічна умова для оператора L.

Останній параграф роботи присвячений проблемі розв'язування інтегро-функціональних рівнянь з малою нелінійністю методом осереднення функціональних поправок та проекційно-ітеративним методом.

Зокрема, ідея останнього методу стосовно рівняння (12) полягає в тому, що виходячи з деякого початкового наближення $y_0(x)$ наступне наближення

визначаємо з формули

$$y_k(x)-p(x)y_k\big(x-\Delta(x)\big)=f(x)+\int_a^b K(x,t)z_k(t)dt+$$
$$\varepsilon\int_a^b G(x,t)\Phi\big(t,y_{k-1}(t)\big)dt, \qquad (15)$$
$$x\epsilon[a,b],\ y_k(x)=0, x\notin[a,b]$$

в якій

$$z_k(x)=y_{k-1}(x)+w_k(x),\ \ w_k(x)=\sum_{j=1}^n a_j^k\eta_j(x), x\epsilon[a,b] \qquad (16)$$

а невідомі коефіцієнти a_j^k=$a_j^k(n)$ знаходимо з умови

$$\int_a^b r_k(x)\varphi_i(x)dx=0,\ i=\overline{1,n} \qquad (17)$$

де

$$r_k=f(x)+\int_a^b K(x,t)\,z_k(t)dt-z_k(x)+p(x)z_k\big(x-\Delta(x)\big)+$$
$$+\int_a^b G(x,t)\Phi\big(t,y_{k-1}(t)\big)dt, \qquad (18)$$

В ролі початкового наближення будемо брати розв'язки різницевого рівняння

$y_0(x)\text{-}p(x)y_0(x\text{-}\Delta(x))= S_0(x),\ x\epsilon[a,b],\ y_0(x)=0,\ x\notin[a,b]$ (19)

в якому S_0 (x) - деяка фіксована функція з $L_2(a,b)$; в частковому випадку, S_0 (x)=0 або S_0 (x)=f(x).

Система функцій $\{\eta_i(x)\}$визначається з рівняння

$$\eta_i(x) - p(x)\eta_i\big(x - \Delta(x)\big) = \varphi_i(x), \qquad x \in (a,b),$$

$$\eta_i(x) = 0, x \notin (a,b), \quad i = \overline{1,n} \qquad (9.14)$$

де система функцій$\{\varphi_i(x)\}\epsilon L_2(a,b)$ задана і лінійно незалежна.

В ролі значень функції $\eta_i(x)$, $i = \overline{1,n}$ в точках $c_s = a + s\Delta$ будемо брати середнє арифметичне односторонніх границь, якщо вони існують, а в точках x = $a,\ x=b$ - односторонні границі справа і зліва відповідно.

В дипломній роботі також наведені обчислювальні схеми досліджуваних ітераційних методів, більш зручні для безпосередніх практичних обчислень і подальшої реалізації на ЕОМ. Показано, що ці схеми еквівалентні вихідним методам.

ВИСНОВОК

Магістерська робота складається зі вступу, трьох розділів, висновків та списку літератури. У вступі дано загальну характеристику проекційно-ітеративного методу та різних його узагальнень, обгрунтовано актуальність досліджень, а також коротко розкрито структуру роботи.

Перший розділ роботи, що носить допоміжний характер, присвячений нелінійним інтегральним рівнянням. Зокрема, розглянуто інтегральні рівняння з операторами Урисона та Гаммерштейна в просторах C та L_q. Приведено властивості цих рівнянь та умови існування і єдиності розв’язку.

В другому розділі розглянуто питання збіжності ітераційних методів для операторних рівнянь з монотонними та гладкими операторами. Особливу увагу приділено проекційно-ітераційному методу та різним його варіантам і модифікаціям. Приведено достатні умови збіжності, оцінки похибок наближень. Запропоновано обчислюванні схеми методів.

Умови збіжності проекційно-ітеративного методу розв’язування нелінійних інтегральних та інтегро-функціональних рівнянь розглянуто в третьому розділі роботи. Крім проекційно-ітерактивного методу та його узагальнень запропоновано також метод послідовних наближень та метод осереднення функціональних поправок, які можна розглядати як часткові випадки проекційно-ітераційного методу. Для інтегро-функціональних рівнянь розглянуто випадки, коли відхилення аргументу є сталим та деякою диференційованою функцією. В ряді випадків приведено ілюстративні приклади, які підтверджують ефективність дослідних в роботі методів.

ЛІТЕРАТУРА

1. Лучка А.Ю. Проекционно-итеративные методы. –К.: Наукова думка, 1993. С. 170-223.
2. Красносельский М.А., Вайнико Г.М., Забрейко П.П. и др. Интегральные уравнения. - М.: Наука, 1968. С. 368-414.
3. Верлань А.Ф., Сизиков В.С. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. Справочное пособие. - К.: Наукова думка, 1986. С. 189-203.
4. Красносельский М.А., Вайнико Г.М., Забрейко П.П. и др. Приближенное решение операторных уравнений. - М.: Наука, 1969. -456 с.
5. Криль С.О. Решение интегро-функциональных уравнений с малой нелинейностью проекционно-итеративным методом. - К., 1987, Препринт/АН УССР. Ин-т математики, 1987. - 17, 35 с.
6. Кріль СО. Розв'язування інтегро-функціональних рівнянь нестаціонарним проекційно-ітеративним методом / Збірник наукових праць Кам'янець-Подільського державного педагогічного університету. - Кам'янець-Подільський: Інформаційно-видавничий відділ, 1997.-С50-54.
7. Курпель Н.С Проекційно-ітеративні методи розв'язання операторних рівнянь. - К.: Наук, думка, 1968. - 244 с.
8. Лучка А.Ю. Критерії збіжності проекційно-ітеративного методу для нелінійних рівнянь. - К.,1982. Препринт/АН УРСР. Ін-т математики, 1982.-24, 54 с.
9. Лучка А.Ю. Кріль СО. Побудова наближених розв'язків лінійних інтегро-різницевих рівнянь. - К., 1987. Препринт/АН УРСР. Ін-т математики, 1987. - 14, 36 с.
10. Лучка А.Ю. Кріль СО. Побудова розв'язків інтегро-функціональних рівнянь проекційно-ітеративним методом. В кн.: Динамічні системи і