Міністерство освіти і науки України
Кам’янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка
Фізико-математичний факультет
Кафедра математики

ДИПЛОМНА РОБОТА

магістрантки

з теми: **«Задача Колмогорова-Нікольського для інтегралів Пуассона сумами Валле-Пуссена»**

Виконала:
студентка ІІ курсу М1-М19 групи
спеціальності 014. Середня освіта
(Математика)
Кілімнік Тетяна Казимирівна
Керівник:
Сорич В. А., кандидат
фізико-математичних наук, доцент
кафедри математики
Рецензент:
Ковальська І. Б., кандидат
фізико-математичних наук, доцент
кафедри математики.

Кам’янець-Подільський — 2020 р.

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК ОСНОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

$\forall$ — квантор загальності: "для кожного", "для будь-якого";

$\exists$ — квантор існування: "існує";

$x \in A$ — елемент x належить множині A;

$x \notin A$ — елемент x не належить множині A;

$A \cup B$ — об'єднання множин A і B;

$A \cap B$ — перетин множин A і B;

$A \subset B$ — множина A міститься в множині B;

N — множина всіх натуральних чисел;

Z — множина всіх цілих чисел;

R — множина всіх дійсних чисел;

C — множина всіх комплексних чисел;

$\sup\limits_{x \in A} F(x)$ — точна верхня межа значень функціонала F на множині А;

$ess\ sup$ — суттєва точна верхня межа;

$\|\cdot\|_x$ — норма в лінійному нормованому просторі;

Rez — дійсна частина комплексного числа;

ImZ — уявна частина комплексного числа;

C — простір неперервних 2π – періодичних функцій f з нормою $\|f\|_C = \max\limits_{0 \le t \le 2\pi} |f(t)|$;

L_p — простір 2π – періодичних вимірних і суттєво обмежених (при $p = \infty$) або сумовних у p–ому степені функцій $(1 \le p \le \infty)$з нормою

$$\|f\|_{L_p} = \begin{cases} \left(\int\limits_0^{2\pi} |f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}, 1 \le p \le \infty \\ \operatorname{ess\,sup}\limits_{0 \le t \le 2\pi} |f(t)|,\ p = \infty \end{cases};$$

$S(f)$ — ряд Фур'є функції f;

$a_k(f), b_k(f)$ — коефіцієнти ряду Фур'є;

$S_n(f)$ — частинна сума ряду Фур'є функції f;

$\sigma_n(f)$ — суми Фейєра функції f;

$V_{n,p}(f)$ — суми Валле-Пуссена;

$D_n(t)$ — ядро Діріхле;

$\Lambda = \left(\lambda_k^{(n)}\right), k = 0,1,2,\dots,n; \quad n = 0,1,2,\dots$ — довільна нескінченна трикутна матриця чисел;

$\rho_n(f;x)$ — відхилення від функції $f(\cdot)$ її часткових сум Фур'є S_{n-1};

B_β^r — ядра Вейля-Надя: $B_\beta^r = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^r} \cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right), (r > 0), \ \beta \in R$;

$f^{(r)}(\cdot) = f_r^r(\cdot)$ — r–та похідна функції f;

$f_\beta^{(\psi)}(\cdot)$ — (ψ, β) похідна функції f;

$f_{\overline{\beta}}^{(\psi)}(\cdot)$ — $(\psi, \overline{\beta})$ похідна функції f;

$f^{\overline{\psi}}(\cdot)$ — $\overline{\psi}$ – похідна функції f;

$I_\beta^r(\varphi)$ — інтеграл Вейля-Надя функції φ;

$I_\beta^q(\varphi; x)$ — інтеграл Пуассона функції φ;

$P_\beta^q(t)$ — ядро Пуассона;

$I_{\overline{\beta}}^{(\psi)}(\varphi)$ — $(\psi, \overline{\beta})$ – інтеграл функції φ;

$I^{\overline{\psi}}(\varphi)$ — $\overline{\psi}$ – інтеграл функції φ;

W_p^r — класи Соболєва: $W_p^r = \left\{f \in L_p^r \colon \|f^r\|_p \le 1\right\}, 1 \le p \le \infty$;

$W_{\beta,p}^r$ — класи Вейля-Надя: $W_{\beta,p}^r = \left\{f \in L_p^r \colon \left\|f_\beta^r\right\|_p \le 1\right\}, r > 0, \beta \in R$, $1 \le p \le \infty$;

$L_{\overline{\beta},p}^{\psi}$ — класи вигляду: $L_{\overline{\beta},p}^{\psi} = \left\{f \in L_p \colon \left\|f_{\overline{\beta}}^{(\psi)}\right\|_p \le 1\right\}$;

$L_{\overline{\beta}}^{\psi}\mathfrak{R}$ — класи вигляду: $L_{\overline{\beta}}^{\psi}\mathfrak{R} = \left\{f \in L \colon f_{\overline{\beta}}^{(\psi)} \in \mathfrak{R}\right\}$;

$C_\beta^\psi\mathfrak{R}$ — класи неперервних функцій вигляду: $C_\beta^\psi\mathfrak{R} = L_{\overline{\beta}}^{\psi}\mathfrak{R} \cap C$;

L_p^ψ — класи вигляду: $L_p^\psi = \left\{f \in L \colon \left\|f^\psi\right\|_p \le 1\right\}$;

$L^{\overline{\psi}}\mathfrak{R}$ — класи функцій вигляду: $L^{\overline{\psi}}\mathfrak{R} = \left\{f \in L \colon f^{\overline{\psi}} \in \mathfrak{R}\right\}, \mathfrak{R} \subset L$.

ВСТУП

Робота присвячена дослідженню швидкості наближення сумами Валле-Пуссена на класах періодичних функцій, що задаються за допомогою згорток із фіксованими твірними ядрами в метриці простору L_1.

Напрям, пов'язаний з вивченням наближень періодичних функцій за допомогою різноманітних лінійних методів підсумовування рядів Фур'є розвинувся у численних роботах: А. Лебега, Валле-Пуссена, Л. Фейєра, А.М.Колмогорова, С. М. Нікольського і ряду інших математиків.

У 1935 році А. М. Колмогоров розглянув величину

$$\varepsilon_n(W_\infty^r)_\text{C} = \sup\|f - S_n(f;x)\|_c, \qquad f \in W_\infty^r, \qquad r \in N$$

і показав, що

$$\varepsilon_n(W_\infty^r;\, S_n)_c = \frac{4\ \ln n}{\pi^2 n^r} + O\left(\frac{1}{n^r}\right), n \to \infty.$$

Наступний істотний крок у розв'язанні задач такого типу належить С.М.Нікольському, який дослідив верхні грані відхилень функцій від їх лінійних методів наближення на класах $W^r H^\alpha$ функцій, у яких r-та дробова похідна в розумінні Вейля належить множині H^α

$$H^\alpha = \{\varphi \in C|\ \ |\varphi\,(t) - \varphi\,(t_1)| \le |t - t_1|^\alpha,\ 0 < \alpha \le 1\}$$

та поширив ці результати на більш широкі класи $W^r H_\omega$, функцій, що задаються мажорантою $\omega(t)$ модулів неперервності їх r-х похідних $\omega(f^r; t)$. Зокрема С. М. Нікольський встановив, що $\forall r \ge 0$ і $0 < \alpha \le 1$ справедлива рівність

$$\varepsilon_n(W^r H^\alpha, S_n) = \frac{2^{\alpha+1} \ln n}{\pi^2 n^{r+\alpha}} \cdot \int_0^{\pi/2} t^\alpha \sin t\, dt + O\big(n^{-(r+\alpha)}\big).$$

Результати А. М. Колмогорова і С. М. Нікольського поклали початок новому напрямку в теорії наближення функцій та підсумовування їх рядів Фур'є. Їх результати поступово збагачувалися новими дослідженнями, як на більш загальних класах функцій, так і на випадки, коли у ролі агрегату наближення виступають тригонометричні поліноми $U_n(f;x)$, що породжуються різноманітними лінійними методами підсумовування рядів Фур'є.

У 80-90-х роках двадцятого сторіччя О. І. Степанцем був запропонований новий підхід до класифікації періодичних функцій що базувався на поняттях (ψ, β)-похідної та $\bar{\psi}$-інтеграла, який дозволив здійснювати досить тонку класифікацію надзвичайно широких множин періодичних функцій. На вказаних класах функцій було отримано розв'язки цілого ряду задач теорії наближення, які до цього були відомі для класів Вейля-Надя. При цьому отримані результати для вказаних класів з одного боку мають загальний характер, а з іншого – дають цілу низку нових невідомих раніше результатів, які на відомих раніше класах отримати неможливо.

Ідея наближення полягає в тому, щоб на базі даних властивостей функції (наприклад, її гладкісних характеристик) отримати властивості апроксимаційних характеристик при заміні більш складних об'єктів дослідження менш складними. Для періодичних функцій та їх класів такими простішими об'єктами, зокрема, виступають тригонометричні многочлени порядку n.

Суми Валле-Пуссена вирізняються серед інших лінійних методів наближення своєю простотою задання та чудовими апроксимаційними властивостями. Поєднання їх, очевидно, послужило тому, що ці суми і, зокрема, їх частковий випадок – суми Фейєра – вивчалися в різноманітних напрямках на протязі багатьох десятиріч провідними спеціалістами по теорії функцій.

Одним із важливіших напрямків при цьому є задача Колмогорова-Нікольського по відшуканню асимптотичних рівностей для величини

$$\varepsilon_n(\mathfrak{R}; U_n) = \sup_{f \in \mathfrak{R}} \| f\ (x) - \ U_n\ (f; x) \|_X,$$

де $\mathfrak{R}$ — фіксований клас 2π- періодичних функцій, X-простір неперервних або сумовних функцій. Якщо в явному вигляді знайдена функція $\varphi(n) =$

$\varphi(\mathfrak{R}; U_n)$ така, що при $n \to \infty$ $\varepsilon_n(\mathfrak{R}; U_n) = \varphi(n) + o(n)$ то кажуть, що задача Колмогорова-Нікольського розв'язана для класу $\mathfrak{R}$ і методу U_n в метриці простору X.

Мета даної дипломної роботи — розглянути задачу Колмогорова-Нікольського для класу інтегралів Пуассона $C^q_{\beta,1}$, що складається із функцій $f(\cdot)$ вигляду:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(x - t\,) P^q_\beta\,(t) dt,$$

де $\|\varphi\|_1 \leq 1$, а

$$P^q_\beta(t) = \sum_{k=1}^{\infty} q^k \cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right)$$

— ядро Пуассона. При цьому метою роботи є одержання нових результатів по знаходженню асимптотичної рівності для верхніх меж наближення сумами Валле-Пуссена лінійної комбінації $F(x)$-інтегралів Пуассона в метриці простору L. А саме, знайти верхню межу вигляду

$$\mathcal{E}_{n,m}\left(C^q_{\beta,1}; V_{n,p}\right)_L = \sup_{f \in C^q_{\beta,1}} \left\| \sum_{i=1}^{m} q_i^{n-p+1} \left(f^{(q_i)}_{\beta_i}(x) - V_{n,p}\left(f^{(q_i)}_{\beta_i}; x\right)\right)\right\|_L$$

Відповідно до мети роботи, виділимо наступні **завдання**:

— дослідити різні лінійні методи підсумовування рядів Фур'є, їх побудову та апроксимаційні властивості;

— знайти асимптотичну при $n \longrightarrow \infty$ рівність для верхніх меж величин сумісного наближення лінійної комбінації інтегралів Пуассона сумами Валле-Пуссена в задачі Колмогорова-Нікольського на класах функцій, які допускають аналітичне продовження до функцій, аналітичних в смузі фіксованої ширини.

Для досягнення поставлених завдань використані такі методи дослідження:

— аналіз наукових праць теорії наближення з даної теми;

— узагальнення результатів по досліджуваній темі, отриманих раніше;

— встановлення та обґрунтування справедливості нових асимптотичних співвідношень та їх взаємозв'язку з відомими результатами;

— систематизація наукових результатів з теми дослідження.

Об'єктом дослідження роботи є апроксимаційні властивості класів 2π-періодичних функцій, що зображуються за допомогою згорток із фіксованими твірними ядрами, а саме ядрами Пуассона, при дослідженні задачі Колмогорова-Нікольського для методу Валле-Пуссена.

Наукова новизна отриманих результатів. Новизна отриманих результатів дипломної роботи в наступному:

Отриманий розв'язок задачі Колмогорова-Нікольського на класах $(q;\beta)$ – диференційовних функцій і зокрема на класах інтегралів Пуассона при наближенні їх лінійної комбінації сумами Валле-Пуссена в метриці простору L_1.

Практичне значення отриманих результатів. Результати дипломної роботи носять теоретичний характер. Практичне значення роботи полягає в тому, що її результати, а також запропоновані в ній прийоми дослідження можуть бути використані при вивченні властивостей гладких функцій та їх класів, питань теорії наближення та теорії підсумовування рядів Фур'є, математичного аналізу.

Апробація результатів дослідження. Основні результати пошуків дипломної роботи викладені у повідомленні студентської наукової конференції (за підсумками НДР у 2020 році).

Структура роботи. Дипломна робота, містить 58 друкованих аркушів, та складається з: переліку основних позначень, вступу, трьох параграфів тексту пошуків результатів дипломного дослідження, висновків, та списку використаних джерел.

У першому параграфі описані класи диференційовних функцій: класи Вейля-Надя; $\bar{\psi}$-похідні та $\bar{\psi}$-інтеграли в сенсі О. І. Степанця; інтеграли Пуассона з точки зору сучасних поглядів розбиття функцій на класи, за їх диференціальними властивостями, запропонованими О. І. Степанцем. Інтеграли Пуассона в дипломній роботі виступають основним об’єктом дослідження.

Другий параграф дипломної роботи містить матеріал оглядового характеру та висвітлює загальні положення що стосуються побудови, методів підсумовування та підходів до отримання апроксимаційних результатів як з точки зору загальних лінійних методів так і конкретних лінійних середніх рядів Фур’є. Тут же висвітлені результати досліджень цього напрямку :як класичні (А. Лебег, Джексон, А. М. Колмогоров, С. М. Нікольський, О.І.Степанець та інші), так і отримані в останні роки (А. С. Сердюк, В.І.Рукасов, В. А. Сорич, Н. М. Сорич, В. В. Дрозд, І. В. Соколенко) та інші.

Центральна частина досліджень даної теми міститься у третьому параграфі "Задача Колмогорова-Нікольського для інтегралів Пуассона сумами Валле-Пуссена".

Тут розв’язана задача Колмогорова-Нікольського для класу інтегралів Пуассона $C^q_{\beta,1}$, що складається із функцій

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(x-t)P^q_\beta(t)dt,$$

де $\|\varphi\|_1 \le 1$, а

$$P^q_\beta(t) = \sum_{k=1}^{\infty} q^k \cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right)$$

— ядро Пуассона.

ВИСНОВКИ

У даній дипломній роботі досліджено апроксимаційні властивості класів 2π-періодичних функцій, що зображаються за допомогою згорток із фіксованими твірними ядрами, а саме

$$P_\beta^q(t) = \sum_{k=1}^{\infty} q^k \cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right)$$

ядрами Пуассона, при дослідженні задачі Колмогорова-Нікольського для методу Валле-Пуссена.

Основною метою дослідження є розв'язання задачі Колмогорова-Нікольського для класу інтегралів Пуассона $C_{\beta,1}^q$, та отримання нових результатів щодо знаходження асимптотичної рівності в метриці простору L для всіх верхніх меж наближення сумами Валле-Пуссена лінійної комбінації $F(x)$-інтегралів Пуассона.

Основні результати досліджень дипломної роботи містяться у двох теоремах:

<u>Теорема 1.</u> Нехай $0 < q < q_1 \le q_2 \le \cdots \le q_m \le 1$, а $\beta, \beta_i \in R$ $(i = \overline{1,m})$, $n, p \in N$. Тоді при $n - p \to \infty$ має місце асимптотична рівність

$$\mathcal{E}_{n,m}\left(C_{\beta,1}^q; V_{n,p}\right)_L = \sup_{f \in C_{\beta,1}^q} \left\| \sum_{n,m}(f;x) \right\|_L = \frac{2q^{n-p+1}}{\pi^2 p} \cdot$$

$$\cdot\left(\int_0^{2\pi} \sqrt{A^2(t) + B^2(t)}\,dt + O(1) \cdot \frac{1}{n-p+1} \begin{cases} \dfrac{q}{q_1 - q}, & p = 1 \\ \dfrac{q \cdot q_1^2}{(q_1 - q)^3} & p = 2,3,\ldots \end{cases}\right),$$

де

$$A(t) = \sum_{i=1}^{m} z_i^2(t) \cdot z_i^*(pt) \cos\left(2\theta_i(t) + \frac{\beta_i \pi}{2} - \delta_i(t)\right),$$

$$B(t) = \sum_{i=1}^{m} z_i^2(t) \cdot z_i^*(pt) \sin\left(2\theta_i(t) + \frac{\beta_i \pi}{2} - \delta_i(t)\right),$$

$$z_i(t)=\left(1-2\frac{q}{q_i}\cos t+\left(\frac{q}{q_i}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}};\;\; z_i^*(t)=\left(1-2\left(\frac{q}{q_i}\right)^p\cos t+\left(\frac{q}{q_i}\right)^{2p}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

$$\theta_i(t)=arctg\,\frac{\frac{q}{q_i}\sin t}{1-\frac{q}{q_i}\cos t};\;\; \delta_i(t)=arctg\,\frac{\left(\frac{q}{q_i}\right)^p\sin t}{1-\left(\frac{q}{q_i}\right)^p\cos t},$$

$O(1)$ — величина, рівномірно обмежена по $n, p, q_i, \beta, \beta_i$.

Якщо в теоремі 1 розглянути випадок, коли $p\to\infty, n-p\to\infty$, то одержимо

<u>Теорема 2.</u> Нехай $0<q<q_1\le q_2\le\cdots\le q_m\le 1$, а $\beta,\beta_i\in R$ $(i=\overline{1,m})$, $n,p\in N$. Тоді при $n-p\to\infty, p\to\infty$ має місце асимптотична рівність

$$\mathcal{E}_{n,m}\left(C^q_{\beta,1};V_{n,p}\right)_L=\frac{2q^{n-p+1}}{\pi^2 p}\cdot$$

$$\cdot\left(\sqrt{A_*^2(t)+B_*^2(t)}dt+O(1)\frac{qq_1}{(q_1-q)^2(n-p+1)}+O(1)\left(\frac{q}{q_i}\right)^p\frac{1}{n-p+1}\right),$$

де

$$A_*(t)=\sum_{i=1}^m\left(\left(g_i^2(t)-h_i^2(t)\right)\cos\frac{\beta_i\pi}{2}-2g_i(t)\cdot h_i(t)\sin\frac{\beta_i\pi}{2}\right),$$

$$B_*(t)=\sum_{i=1}^m\left(\left(g_i^2(t)-h_i^2(t)\right)\sin\frac{\beta_i\pi}{2}+2g_i(t)\cdot h_i(t)\cos\frac{\beta_i\pi}{2}\right),$$

функції $g_i(t)$ та $h_i(t)$ – мають той самий зміст, що і у теоремі 1

$$g_i(t)=\sum_{k=0}^\infty\left(\frac{q}{q_i}\right)^k\cos kt=\frac{1-\frac{q\cos t}{q_i}}{1-2\frac{q}{q_i}\cos t+\left(\frac{q}{q_i}\right)^2};$$

$$h_i(t)=\sum_{k=0}^\infty\left(\frac{q}{q_i}\right)^k\sin kt=\frac{\frac{q\sin t}{q_i}}{1-2\frac{q}{q_i}\cos t+\left(\frac{q}{q_i}\right)^2}.$$

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Бари Н. К. Тригонометрические ряды / Н. К. Бари. – М.: Физматгиз, 1961. – 936 с.

2. Габисония О. Д. О приближении функций многих переменных целыми функциями // Изв.вузов , Математика. – 1965. – 45,№ 2, – С. 30-35.

3. Ефимов А. В. О приближение периодических функций сумами Валле-Пуссена / А. В. Ефимов. – // Изв. АН СССР, сер. матем. – 1959. – 23, №5. – С. 737-770.

4. Ефимов А. В. О приближении периодических функций суммами Валле-Пуссена .II // Изв.АН СССР Сер. мат. – 1960. – 24,№3. – С. 431-468.

5. Зигмунд А. Тригонометрические ряды: в 2 т. / А. Зигмунд. – М.: Мир, 1965. – Т. 1. – 615 с.

6. Никольский С. М. Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем / С. М. Никольский // Изв. АН СССР, сер. мат. – 1946. – 10, – 207-256.

7. Никольский С. М. Ряд Фурье функции с заданным модулем непрерывности // Докл. АН СССР. – 1946,52.191-193 с.

8. Рукасов В. И. Приближение сумами Валле-Пуссена классов аналитических функций / В. И. Рукасов // Укр. мат. журн. – 2003. – 55, №6. – С. 806-816.

9. Рукасов В. И., Новиков О. А. Приближение аналитических функций суммами Валле-Пуссена// Ряди Фур’є: теорія і застосування / Праці Інституту математики НАН України Т.20. – К.: Ін-т математики НАН України ,1998. – С. 228-241.

10. Сердюк А. С. Наближення інтегралів Пуассона сумами Валле-Пуссена / А. С. Сердюк // Укр. мат. журн. – 2004. – 56, №1. – С. 97-107.

11. Сорич В. А. Наилучшее одновременное приближение периодических функций и их производных тригонометрическими полиномами// Укр. мат. журн.-1984. – Т.36.№6. – С. 791-797.

12. Сорич В. А. Сумісне наближення сумами Фур’є деяких класів аналітичних функцій / Сорич В. А., Сорич Н. М. // Наук. праці Кам’янець-Подільського нац. ун-ту ім. Івана Огієнка: зб. за підсумками звіт. наук. конф. викл., докторантів і асп., вип. 8, у 5 т. – Кам’янець-Подільський: Кам’янець-Подільський нац. ун-т, 2009. – Т. 1. – С. 160-162.

13. Сорич В. А., Сорич Н. М. Сумісне наближення інтегралів Пуассона сумами Валле-Пуссена //Тези доповідей Міжнародної конференції «Теорія наближення функцій та її застосування», присвячена 70-річчю з дня народження члена-кореспондента НАН України, професора О. І. Степанця (1942-2007) (28 травня – 3 червня 2012р.). – Кам’янець-Подільський. Україна. – С. 101-102.

14. Сорич Н. Н. Одновременное приближение периодических функций и их производных суммами Фурье и Валле-Пуссена в метрике L// Укр. мат. журн. – 1985. – Т.37.№2. – С. 205-211.

15. Степанец А. И. Классификация и приближение периодических функций / А. И. Степанец. – К.: Наук. думка, 1987. – 268 с.

16. Степанец А. И. Методы теории приближений: в 2 ч. / А. И. Степанец. К.: Ин-т математики НАН Украины, 2002, – ч. 1. – 427 с.

17. Степанец А. И. Одновременное приближение периодических функций и их производных суммами Фурье //Докл.АН СССР. – 1980. – 254, – №3. – С. 543-544.

18. Стечкин С. Б. Оценка остатка ряда Фурье для дифференцируемых функций / С. Б. Стечкин // Труды МИ АН СССР. – 1980. – 145. – 126-151 с.

19. Теляковский С. А. Приближение дифференцируемых функций суммами Валле- Пуссена // Докл. АН СССР-1958. – 121,№3. – С. 426-429.

20. Теляковский С. А. Приближение функций, дифференцируемых в смысле Вейля, суммами Валле-Пуссена // Докл. АН СССР – 1960. – 131,№2. – С. 259-262.

21. Тиман А. Ф. Обобщение некоторых результатов А. Н. Колмогорова и С. М. Никольського // Докл.АН СССР–1951. –81, №4. – С. 509-511.

22. Тиман А. Ф. Теория приближения функций действительного переменного М.: Физматгиз, 1960. – 624 с.

23. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления / Г. М. Фихтенгольц – Т. 3. – М.: Наука, 1966. – 186 с.

24. Kolmogoroff A. Zur Grossennordnung des Restgliedes Fourierschen Reihtn differenzierbarer Funktionen //Ann.Math. – 1936. – 37.№2. – P.107-110.