Міністерство освіти і науки України
Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка
Фізико-математичний факультет
Кафедра математики

ДИПЛОМНА РОБОТА

магістрантки

з теми: **«Сумісне наближення класів диференційовних функцій деякими лінійними насиченими методами»**

Виконала:
студентка II курсу М1-М19 групи
спеціальності 014. Середня освіта
(Математика)
Колодій Галина Олександрівна
Керівник:
Сорич Н.М., кандидат
фізико-математичних наук, доцент
кафедри математики
Рецензент:
Сорич В.А., кандидат
фізико-математичних наук, доцент
кафедри математики.

Кам'янець-Подільський — 2020 р.

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК ОСНОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

L^0 — множина сумовних функцій $f \in L(0,2\pi)$) з середнім значенням на періоді, що дорівнює нулю: $\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt = 0$;

A^r — множина функцій $f \in L(0,2\pi)$, для яких існують та є абсолютно неперервними похідні до $(r-1)$-го $(r \in N)$ порядку включно;

$S[f] = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx)$ — ряд Фур'є функції f;

$a_k(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx dx$, $b_k(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx dx$;

$B_r^{\beta}(t) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^r} cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right)$ — ядро Вейля-Надя;

W_{β}^{r} — множина функцій$f(\cdot)$, для яких їхній ряд Фур'є має вигляд

$S[f] = \frac{a_0(f)}{2} + \int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x-t)B_r^{\beta}(t)dt$, при цьому $\varphi(x) = f_{\beta}^{r}(x)$ — (r,β)-похідна в сенсі Вейля-Надя функції f(x);

L_{β}^{ψ} — множина функцій $f(x)$, для яких їхній ряд Фур′є має вигляд

$S[f] = \frac{a_0(f)}{2} + \int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x-t)\Psi_{\beta}(t)dt$, де $\Psi_{\beta}(t) = \sum_{k=1}^{\infty}\psi(k)\cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right)$, при цьому $\varphi(x) = f_{\beta}^{\psi}(x)$ — (ψ,β) – похідна в сенсі Степанця функції f(x);

$C_{\beta}^{\psi}\mathfrak{N}$ — клас функцій $f \in C_{\beta}^{\psi}$, в якому $f_{\beta}^{\psi} \in \mathfrak{N}$;

$\Lambda = \left\|\lambda_k^{(n)}\right\|$, $n = 0,1,...$, $k = 0,1,\dots,n$, — довільна нескінченна трикутна матриця чисел;

$U_n(f;x;\Lambda) = \frac{a_0}{2}\lambda_0^{(n)} + \sum_{k=1}^{n}\lambda_k^{(n)}(a_k\cos kx + b_k\sin kx)$ $(a_k = a_k(f)$, $b_k = b_k(f)$ − коефіцієнти Фур′є функції f) — ядро оператора (методу) Λ;

$S_n(f;x)$— частинна сума порядку n ряду Фур'є функції f;

$V_{n-p}^{n}(f;x) = \frac{1}{p}\sum_{k=n-p+1}^{n} S_k(f;x)$ — суми Валле-Пуссена;

$Z_n^{(s)}(f;x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1}\left[1 - \left(\frac{k}{n}\right)^s\right](a_k\cos kx + b_k\sin kx)$ — суми Зігмунда;

T_m — простір тригонометричних поліномів порядку не більше m;

U_1^0 — одинична куля в просторі L^0;

$L_{\beta,1}^{\psi}$ — множина функцій із L_{β}^{ψ}, для яких $\varphi(x)\epsilon U_1^0$;

U_M^0 — одинична куля в просторі сумовних $2\pi -$ періодичних суттєво обмежених функцій;

$C_{\beta,\infty}^{\psi}$ — множина неперервних функцій із класу L_{β}^{ψ}, для яких $\varphi(x)\epsilon U_M^0$;

$f = h * g = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h(x-t)g(t)dt$ – згортка функції $h(\cdot)$ із ядром $g(t)$.

ВСТУП

Магістерська робота присвячена дослідженню сумісного наближення класів диференційованих функцій деякими лінійними насиченими методами.

В даній роботі буде розв'язуватися задача сумісного наближення класів диференційовних по Степанцю функцій насиченими методами такими, як сумами Фейєра та суми Зігмунда на тих класах, коли насичення уже відбулося, тобто будуть досліджуватись асимптотичні поведінки при $n \to \infty$ величин

$$\mathcal{E}_{n,m}(U_M^0, Z_n^s) = \sup_{\varphi \in U_M^0} \left\| \sum_{i=1}^{m} |f_i(x) - Z_n^s(f_i; x)| \right\|_C$$

де $f_i = \varphi * \Psi_i$, $\Psi_i(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_i(k) \cos\left(kt - \frac{\beta_i}{2}\pi\right)$, причому послідовності $k^\delta \psi_i(k)$ $(\delta > s,\ i = \overline{1;m})$ — монотонно спадні до нуля і опуклі донизу; та

$$\mathcal{E}_{n,m}(U_1^0, Z_n^s) = \sup_{\varphi \in U_1^0} \max_{|\alpha_i|=1} \left\| \sum_{i=1}^{m} \alpha_i (f_i(x) - Z_n^s(f_i; x)) \right\|_1 ,$$

якщо послідовності $k^\delta \psi_i(k)$ $(\delta > s+1,\ i = \overline{1;m})$ — монотонно спадні до нуля і опуклі донизу.

При s = 1 із асимптотисної поведінки величин $\mathcal{E}_{n,m}(U_M^0, Z_n^s)$ та $\mathcal{E}_{n,m}(U_1^0, Z_n^s)$ одержимо розв’язки задачі сумісного наближення для сум Фейєра.

Метою даної дипломної роботи є отримання розв’язків задачі сумісного наближення класів диференційованих функцій сумами Фейєра та Зігмунда в рівномірній та інтегральній метриках.

Відповідно до мети роботи, виділимо наступні **завдання**:

- Дослідити різні лінійні насичені методи для розв’язання задачі сумісного наближення;
- Розв’язати задачу сумісного наближення класів диференційовних по Степанцю функцій насиченими методами

такими, як сумами Фейєра та суми Зігмунда на тих класах, коли насичення уже відбулося.

Для досягнення поставлених завдань використані такі методи дослідження:

- аналіз наукових праць з даної теми;
- узагальнення результатів з теми, що досліджується, які були отримані раніше;
- отримання та обґрунтування справедливості нових тверджень та їх взаємозв'язку з відомими результатами;
- систематизація наукових відомостей з даної теми.

Об'єктом дослідження даної роботи є вивчення величини сумісного наближення класів диференційовних по Степанцю функцій сумами Зігмунда та Фейєра.

Наукова новизна отриманих результатів полягає в наступному: Задача сумісного наближення сумами Зігмунда при настанні насичення як і сумами Фейєра розглянута на класах диференційовних по Степанцю функцій, які є узагальненням класів Вейля-Надя, тому і одержані результати є новими.

Практичне значення отриманих результатів. Результати дипломної роботи носять теоретичний характер. Практичне значення роботи полягає в тому, що її результати та методи можуть використанні при дослідженні питань сумісного наближення функцій іншими лінійними насиченими методами.

Апробація результатів дослідження. Основні результати дослідження викладені у доповіді на звітній науковій конференції студентів та магістрантів Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка (2020р.) а також подані до друку.

Структура роботи. Дипломна робота, містить 65 друкованих аркушів та складається з: переліку основних позначень, вступу, чотирьох параграфів відомих в теорії фактів, які становлять основу для викладу результатів дипломної роботи, двох параграфів (п'ятого і шостого), в яких подається виклад результатів дипломного дослідження, висновків та списку використаних джерел.

В першому параграмі «Класи диференційованих функцій» подається інформація про ряд Фур'є $S[f]$, спряжений до нього ряд $\tilde{S}[f]$, класи Вейля Надя, класи $L_{\beta}^{\psi}\mathfrak{N}$, класи $L_{\bar{\beta}}^{\psi}\mathfrak{N}$.

Другий параграф «Лінійні методи підсумування рядів Фур'є» містить відомості про лінійні методи підсумовування рядів Фур'є та про класи насичення для сум Фейєра та Зігмунда.

В третьому параграфі «Задача сумісного наближення» викладена суть однієї з основних задач теорії наближення — задачі Колмогорова-Нікольського.

В четвертому параграфі наведені допоміжні твердження.

П'ятий параграф «Сумісне наближення сумами Фейєра та Зігмунда в рівномірній метриці»та шостий параграф «Задача сумісного наближення сумами Зігмунда та Фейєра в інтегральній метриці» — це центральна частина дослідження даної теми. Тут розв'язана задача сумісного наближення класів диференційовних по Степанцю функцій сумами Зігмунда та Фейєра.

ВИСНОВКИ

В даній дипломній роботі розв'язували задачу сумісного наближення класів диференційовних по Степанцю функцій насиченими методами такими, як сумами Фейєра та суми Зігмунда на тих класах, коли насичення уже відбулося.

Основною метою роботи було отримання розв'язків задачі сумісного наближення класів диференційованих функцій сумами Фейєра та Зігмунда в рівномірній та інтегральній метриках.

Одержані результати досліджень містяться в таких теоремах:

Теорема 1. Нехай послідовності $\psi_i(k)$ такі, що $k^\delta\psi_i(k)$ — опуклі донизу і монотонно спадні до нуля ($\delta > s$), $\beta_i \in R$, $\nu_i = \left\{\frac{\beta_i}{2}\right\}$, $i = \overline{1,m}$. Тоді якщо $\nu_i \in \left[0;\frac{1}{2}\right]$, $i = \overline{1,m}$; або ж $\nu_i \in [\frac{1}{2};1)$, $i = \overline{1,m}$ при $n \to \infty$ справедлива асимптотична рівність

$$\mathcal{E}_{n,m}(U_M^0; Z^s{}_n) =$$

$$= \frac{1}{\pi n^s}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{\infty}k^s\psi_i(k)\cos(kt-\nu_i\pi) - C^*\right|dt + \mathcal{O}(1)\sum_{i=1}^{m}\psi_i(n),$$

де C^* — стала найкращого наближення в метриці L підінтегральної функції, $\mathcal{O}(1)$ – величина, рівномірно обмежена по n, ν_i.

Як було зауважено, що при $s = 1$ одержимо асимптотичну поведінку диференційовних функцій сумами Фейєра в рівномірній метриці у випадку настання насичення, а саме можемо вказати асимптотику виразу

$$\mathcal{E}_{n,m}(U_M^0, \sigma_n) = \sup_{\varphi\in U_M^0}\left\|\sum_{i=1}^{m}|f_i(x) - \sigma_n(f_i;x)|\right\|_C,$$

де $f_i = \varphi * \Psi_i$, $\Psi_i(t) = \sum_{k=1}^{\infty}\psi_i(k)\cos\left(kt - \frac{\beta_i\pi}{2}\right)$, причому послідовності $k^\delta\,\psi_i(k)$ ($\delta > 1$, $i = \overline{1;m}$) — монотонно спадні до нуля і опуклі донизу.

Теорема 2. Нехай послідовності $\psi_i(k)$ такі, що $k^\delta\psi_i(k)$ — опуклі донизу і монотонно спадні до нуля ($\delta > 1$), $\beta_i \in R$, $\nu_i = \left\{\frac{\beta_i}{2}\right\}$, $i = \overline{1,m}$. Тоді при $\nu_i \in \left[0;\frac{1}{2}\right]$, $i=\overline{1,m}$; або ж $\nu_i \in [\frac{1}{2};1)$, $i=\overline{1,m}$ при $n \to \infty$ справедлива асимптотична рівність

$$\mathcal{E}_{n,m}(U_M^0;\sigma_n) =$$
$$= \frac{1}{\pi n}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{\infty} k\psi_i(k)\cos(kt-\nu_i\pi) - C^*\right| dt + \mathcal{O}(1)\sum_{i=1}^{m}\psi_i(n),$$

де вирази C^* та $\mathcal{O}(1)$ мають той самий зміст, що у теоремі 1.

Асимптотична поведінка величини, що характеризує сумісне наближення сумами Зігмунда класів $L_{\beta,1}^{\psi}$ в інтегральній метриці у випадку настання насичення, одержана у наступному твердженні.

Теорема 3. Нехай послідовності $\psi_i(k)$ такі, що $k^{\delta}\psi_i(k)$ — опуклі донизу і монотонно спадні до нуля ($\delta > s+1$), $\beta_i \in R$, $\nu_i = \left\{\frac{\beta-\beta_i}{2}\right\}$, $i=\overline{1,m}$. Тоді якщо $\nu_i \in \left[0;\frac{1}{2}\right]$, $i=\overline{1,m}$; або ж $\nu_i \in [\frac{1}{2};1)$, $i=\overline{1,m}$, то при $n \to \infty$ справедлива асимптотична рівність

$\mathcal{E}_{n,m}(U_1^0;Z_n^s)_1 = \frac{1}{\pi n^s}\int_{-\pi}^{\pi}|\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{\infty} k^s\psi_i(k)\cos(kt-\nu_i\pi) - C^*|dt + \mathcal{O}(1)\sum_{i=1}^{m}\psi_i(n)$

де C^* — стала найкращого наближення в метриці L підінтегральної функції, $\mathcal{O}(1)$ — величина, рівномірно обмежена по n, ν_i.

Аналогічно при $s=1$ із теореми 3 одержимо асимптотичну поведінку при $n \to \infty$ величини, що характеризує сумісне наближення класів диференційовних функцій сумами Фейєра в інтегральній метриці у випадку настання насичення.

Теорема 4. Нехай послідовності $\psi_i(k)$ такі, що $k^{\delta}\psi_i(k)$ — опуклі донизу і монотонно спадні до нуля ($\delta > 2$), $\beta_i \in R$, $\nu_i = \left\{\frac{\beta_i}{2}\right\}$, $i=\overline{1,m}$. Тоді якщо $\nu_i \in \left[0;\frac{1}{2}\right]$, $i=\overline{1,m}$; або ж $\nu_i \in [\frac{1}{2};1)$, $i=\overline{1,m}$, при $n \to \infty$ справедлива асимптотична рівність

$\mathcal{E}_{n,m}(U_1^0;\sigma_n)_1 = \frac{1}{\pi n}\int_{-\pi}^{\pi}|\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{\infty} k\psi_i(k)\cos(kt-\nu_i\pi) - C^*|dt + \mathcal{O}(1)\sum_{i=1}^{m}\psi_i(n)$,

де C^* — стала найкращого наближення в метриці L підінтегральної функції, $\mathcal{O}(1)$- величина, рівномірно обмежена по n.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Бушев Д. В. Приближение классов непрерывных периодических функций сумами Зугмунда / Д. К. Бушев. – К., 1984. – с.62 – (Препринт / Ин-т математики АН УССР, 84. 56).

2. Задерей Н.Н. Одновременное приближение периодических функций и их производных сумами Валле-Пуссена / Н.Н. Задерей. — К.: Ин-т математики АН УССР, 1981. — 32 с. — (Препринт, АН УССР, Ин-т математики, 81.24).

3. Зигмунд А.Тригонометрические ряды: в 2 т. / А. Зигмунд. — М.: Мир, 1965. Т.1. — 1965. — 663 с.

4. Корнейчук Н. П. Экстремальные задачи теории приближения. / Н. П. Корнейчук. М.: Наука, 1976. — 320с.

5. Люстерник Л.А. Элементы функционального анализа. / Л. А. Люстерник , В. И. Соболь // М.: Наука, 1965.

6. Натансон И. П. Теория функций переменной / И. П. Натансон // К.: Наука, 1974, – 480 с.

7. Никольский С.М. Асимптотическая оценка остатка при приблежении сумами Фурье // Докл. АН СССР. 1941.-22, №6.-ст. 386-389.

8. Никольский С.М. Ряд Фурье функции с данным модулем непрерывности / С.М. Никольский // ДАН СРСР. — 1946. Т.52. — 1946. — С. 191-194.

9. Пинкевич В.Т. О порядке остаточного члена ряда Фурье функций, дифференцируемых в смысле Вейля / В.Т. Пинкевич // Изв. АН СССР. — 1940. — Т.4, №6. — с. 521-528.

10. Пугач Г. П. Сумісне наближення класів Вейля-Надя сумами Фейєра // Збірник наукових праць студентів та магістрантів Кам'янець–Подільського національного університету імені Івана Огієнка. – Кам'янець-Подільський: К – ПНУ ім. І. Огієнка, 2011. – Вип. 5. – с. 125 – 126.

11. Сорич Н. М. Одновременное приближение функций и их производных сумами Фейера / Н. М. Сорич. – К., 1985 – с.16. – (Препринт / Ин-т математики АН УССР, 85. 27).

12. Сорич Н.М. Совместное приближение периодических функций и их производных сумами Фурье. / Н. М. Сорич, А. И. Степанец // Мат. заметки. – 1984. – 36, №6. – с. 873 – 882.

13. Степанец А.И. Методы теории приближений. Киев: Ин-т математики НАНУ, 2002–Т.1.

14. Степанец А.И. Равномерные приближения тригонометрическими полиномами / А.И. Степанец. — К.: Наук. думка, 1981. — 340 с.

15. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: в 3-х томах / Г. М. Фихтенгольц. — М.: Наука, 1962. Т.3. — 1966. 656с.

16. Kolmogoroff A. Zur Grossenordnung des Restgliedes Fouriershen Reigen differenzierbaren Functionen – Ann. Math., 1935, 36, № 2, p.521-526.

17. Fejer l. Trigonometrische Reihen und Potenzreihen mit mehrfach monotoner Koeffizientenfolge.- Trans. Am. Math. Soc., 1936, 39, p.18-59.