Міністерство освіти і науки України
Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка
фізико-математичний факультет
кафедра математики

Дипломна робота магістра

з теми «**Наближення аналітичних функцій сумами Зігмунда в метриці L_p**»

Виконала: студентка 2 курсу, групи М1-М19р,
спеціальності 014 Середня освіта (Математика)
Поян Анастасія Євгенівна
Керівник Ковальська І.Б., кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри математики
Рецензент Сорич В. А., кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри математики

Кам'янець-Подільський – 2020 р.

ЗМІСТ

ВСТУП

В багатьох областях математики важливу роль відіграють задачі про заміну більш складних об'єктів менш складними. В більшості таких випадків дуже корисним є знання основних методів, результатів і задач теорії наближення.

Основна задача теорії наближення полягає в тому, щоб на основі заданих властивостей даної функції, встановити властивості її апроксимаційних характеристик. У випадку наближення 2π-періодичних функцій такими характеристиками виступають швидкості збіжності рядів Фур'є, найкращі наближення тригонометричними поліномами, наближення поліномами, які породжуються лінійними методами підсумовування рядів Фур'є, наближення інтерполяційними поліномами. Функції з однаковими апріорними властивостями об'єднуються в класи і тоді факти, встановлені для даного класу, відносяться і до кожного його представника. При цьому з'являється можливість формулювати нові задачі тепер вже для цілих класів функцій. Це - задачі про найкращі наближення, наближення лінійними методами.

В наш час в теорії наближень прийнято розглядати три типи задач, які певною мірою відповідають основним хронологічним етапам розвитку досліджень.

Кожна задача формулюється в довільному лінійному нормованому просторі X. Будемо говорити про них, як про задачі I, II і III.

<u>Задача I.</u> Наближення фіксованого елемента $x \in X$ фіксованою множиною F з X. В ролі міри наближення природно взяти величину

$$\mathrm{E}(\mathrm{x},\mathrm{F}) = \inf_{\mathrm{u}\in\mathrm{F}} \left|\left|\mathrm{X}-\mathrm{u}\right|\right| \quad (1)$$

яка в подальшому буде називатися найкращим наближенням елемента x множиною F. (Звичайно, величина (1) є не що інше, як відстань $\rho(\mathrm{x},\mathrm{F})$ елемента x від множини F. Але ми з самого початку будемо користуватися апроксимаційною термінологією). В ролі апроксимаційної множини F в роботі будуть розглядатись підпростори (скінченої або нескінченної розмірності).

Якщо існує елемент $u_0 \in F$, який реалізує в (1) точну нижню межу, тобто такий, що

$$||x_0 - u_0|| = E(x, F), \qquad (1)$$

то u_0 називається елементом найкращого наближення для x в множині F.

Тут зразу виникають деякі питання, які відносяться до задачі I:

1.Чи існує для довільного x з X в множині F елемент найкращого наближення? Зрозуміло, що для позитивної відповіді на це питання необхідно в будь-якому випадку, щоб F була замкнена.

Множину F, яка має таку властивість, що для довільного x ∈ X в ній існує ближній елемент, називають іноді множиною існування.

2.Якщо для довільного x ∈ X ближній елемент в множині F існує , то чи буде він єдиним?

Відповідь на це питання може залежати як від структури F, так і метрики простору X.

3.Які характеристичні властивості елемента найкращого наближення? Мова йде про необхідні та достатні умови, яким повинен задовольняти ближній до x елемент в множин F. Якщо множина F є множина існування і ближній до x елемент в ній єдиний, то кожному елементу x ∈ X відповідає єдиний ближній до нього в множині F елемент $\mathrm{u} = \mathrm{P}(\mathrm{x})$. Цим заданий деякий оператор P (оператор найкращого наближення), який відображає X в F. В загальному випадку даний оператор не є адитивним. Тому представляє інтерес поряд з величиною (1) розглядати також міру наближення, яка задається вибором лінійного оператора $A(AX \subset F)$ і вимірюється величиною $\|x - Ax\|$.

Можна вважати, що оператор A визначає деякий лінійний метод наближення елементів $x \in X$ множиною F. Цей лінійний метод ми також будемо означати через A.

<u>Задача II</u>. Наближення фіксованої множини $M \in X$ фіксованою множиною F того ж простору X.

Якщо виходити з наближення (1) елемента x множиною F, то міру наближення в задачі II можна означити так:

$$E(M,F) = \sup_{x \in M} E(x,F) = \sup_{x \in M} \inf_{U \in F} ||x - U|| \tag{2}$$

Елемент $x_0 \in M$ (якщо він існує), для якого

$$E(x_0, F) = E(M, F)$$

називають екстремальним (в даному випадку найбільш віддаленим) елементом в M відносно F.

В конкретних випадках задача II може полягати в тому, щоб точно виразити (або хоча б оцінити) величину (2) через характеристики, за допомогою яких задана множина M. Практичний сенс задачі II можна бачити в тому, що значення величини (2) дозволяє вказувати гарантовану оцінку похибки наближення довільного елемента з M з допомогою F. Якщо ж наближення здійснюється з допомогою лінійного оператора A, то нас буде цікавити точна верхня межа

$$\sup_{x \in M} \big||x - Ax|\big| \tag{3}$$

а також величина

$$\varepsilon(M,F) = \inf_{AX \subset F} \sup_{x \in M} \big||x - Ax|\big| \tag{4}$$

де точна нижня межа береться по всіх лінійних операторах A, які відображають X в F.

Можна сказати, що величина (4) характеризує найкраще лінійне наближення множини M елементами множини F.

Лінійний оператор $\tilde{A}(\tilde{A} \in Ax)$ (якщо він існує), який реалізує в (4) точну нижню межу, тобто такий, що

$$\sup_{x \in M} \left\| x - \tilde{A}x \right\| = \varepsilon(M, F),$$

визначає найкращий для M лінійний метод наближення. Оскільки A є оператором з X в F, то

$$(\forall x \in X) \colon \left| |x - Ax| \right| \geq E(M, F),$$

і, значить,

$$\sup_{x \in M} \left| |x - Ax| \right| = E(M, F),$$

а оскільки це справедливо для довільного лінійного оператора $A(Ax \subset F)$, то

$$\varepsilon(M, F) \geq E(M, F) \tag{5}$$

Якщо при цьому існує лінійний оператор – метод $\tilde{A}$, що

$$\sup_{x \in M} \left\| x - \tilde{A}x \right\| = E(M, F),$$

то, можна сказати, що лінійний оператор $\tilde{A}$ реалізує на множині M верхню межу найкращих наближень елементами множини F.

Круг задач I і II можна розширити, якщо розглядати наближення елемента x або множини M з X деякою розширеною послідовністю апроксимуючих множин:

$$F_1 \subset F_2 \subset \ldots \subset F_n \subset \ldots, \tag{6}$$

де індекс n може відповідати, наприклад, розмірності множини F_n. З включень (6) і визначення величини $E(x, E)$ випливає, що $\forall x \in X$

$$E(x, F_1) \geq E(x, F_2) \geq \ldots \geq E(x, F_n) \geq \ldots,$$

а значить, для довільної множини $M \subset X$

$$E(M, F_1) \geq E(M, F_2) \geq \ldots \geq M(x, F_n) \geq \ldots,$$

Тепер можна говорити про вивчення числових послідовностей $E(x, F_n)$ та $M(x, F_n)$, а конкретно, про вияснення точної, або хоча б порядкової оцінки наближення їх при $n \to \infty$.

Аналогічні задачі при апроксимації послідовністю множин (6) можна поставити для величини (3) і (4).

<u>Задача III.</u> Найкраще наближення множини $M \subset X$ заданим класом множин $\{F\}$ з X.

Мається на увазі, що заданий клас в деякому розумінні «рівноцінних» множин F, наприклад, підпросторів однієї і тієї ж розмірності, і треба вибрати ту з них, яка найменше з них відхиляється від M. Таким чином, мова йде про вибір для **M** найкращої апроксимаційної множини.

В 1936 р. А.М. Колмогоров поставив задачу обчислення величин

$$d_n(M, X) = \inf_{Fn} E(M, F_n)(n = 1,2, \dots), \tag{7}$$

де точна нижня межа береться по всіх підпросторах F_n розмірності $n.$ Для центральносиметричних множин M (тобто таких, що з $x \in M$ випливає, що -x ∈ M) величина $d_n(M, X)$ отримала назву поперечника по Колмогорову множини M в просторі X. Вона рівна половині найменшої «ширини» множини M і характеризує мінімальну похибку, яку можна забезпечити, наближаючи M всіма можливими n-вимірними просторами.

Систематичні дослідження методів, які дають можливість єдиним чином розв'язувати традиційні задачі теорії наближення для великих об'єднань функцій, почали проводити у 80-х роках минулого століття. Тоді і сформулювалося поняття (ψ, β)-похідної, яка визначається для даної функції f заданою послідовністю чисел $\psi = \psi(k), k = 1,2, \dots,$ і числами $\beta \in R.$

Послідовності $\psi(k)$ які ведуть до означень похідних, можуть бути довільними. Але, в багатьох випадках досить обмежитися тільки опуклими вниз послідовностями (множини яких позначаються через M). Довільна сумовна (або неперервна) 2π-періодична функція f обов'язково має (ψ, β)-похідну, яка залишається сумовною (неперервною) і при цьому $\psi \in M.$ До того ж, якщо через L_β^ψ позначити множину періодичних функцій, у яких при заданих ψ і β існують (ψ, β)-похідні, то буде справедлива рівність

$$\cup_{\psi \in M} L_\beta^\psi = L,$$

де через L позначено множину 2π-періодичних інтегровних на періоді функцій. Ця рівність означає, що за допомогою поняття (ψ, β)-похідних можна класифікувати весь спектр функцій з L. Оскільки загальна частина всіх множин L_{β}^{ψ} при $\psi \in M$ складається з одних тригонометричних поліномів, то при такій класифікації кожна функція $f \in M$ попадає тільки до «своїх» множин L_{β}^{ψ}, і лише поліноми залишаються незмінними - вони містяться в кожній з таких множин.

Мета даної дипломної роботи – отримати асимптотичні оцінки для верхніх граней відхилень аналітичних функцій з класів $L_{\beta,p}^{\psi}$ від їх сум Зігмунда в метриці L_{p}.

Відповідно до мети роботи, виділимо наступні **завдання**:

- дослідити різні лінійні методи підсумовування рядів Фур'є, їх побудову та апроксимаційні властивості;
- дослідити наближення аналітичних функцій сумами Зігмунда в метриці L_p.

Для досягнення поставлених завдань використані такі методи дослідження:

-аналіз наукових праць теорії наближення з даної теми;

-узагальнення результатів по досліджуваній темі, отриманих раніше;

-встановлення та обґрунтування справедливості нових асимптотичних співвідношень та їх взаємозв'язку з відомими результатами;

-систематизація наукових результатів з теми дослідження.

Об'єктом дослідження роботи – є поведінка верхніх граней відхилень аналітичних функцій з класів $L_{\beta,p}^{\psi}$від їх сум Зігмунда в метриці L_{p}.

Практичне значення отриманих результатів. Результати дипломної роботи носять теоретичний характер. Практичне значення роботи полягає в тому, що її результати, а також запропоновані в ній прийоми дослідження можуть бути використані при вивченні властивостей функцій та їх класів, питань теорії наближення та теорії підсумовування рядів Фур'є, математичного аналізу.

ВИСНОВКИ

У даній дипломній роботі досліджувалася поведінка верхніх граней відхилень аналітичних функцій з класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ від їх сум Зігмунда в метриці L_p.

Дипломна робота складається із вступу та двох розділів. У вступі розглянута коротка історія виникнення задач теорії наближень, які формулюються в довільному лінійному нормованому просторі X. Формулюється мета даної дипломної роботи, відповідно до мети виділено наступні завдання:

- дослідити різні лінійні методи підсумовування рядів Фур'є, їх побудову та апроксимаційні властивості;
- дослідити наближення аналітичних функцій сумами Зігмунда в метриці L_p.

Для досягнення поставлених завдань використані такі методи дослідження:

-аналіз наукових праць теорії наближення з даної теми;

-узагальнення результатів по досліджуваній темі, отриманих раніше;

-встановлення та обґрунтування справедливості нових асимптотичних співвідношень та їх взаємозв'язку з відомими результатами;

-систематизація наукових результатів з теми дослідження.

В І-розділі розглядаються: лінійні методи підсумування рядів Фур'є; константи Лебега класичних лінійних методів; класи диференціальних функцій; класи Вейля-Надя; спряжені множини і їх класи, множини L^{ψ}_{β}, L^{ψ}_{β}; $\overline{\psi}$ -інтеграли періодичних функцій.

В ІІ-розділі отримуються основні результати роботи, які сформульовані в теоремі 2.3.2.

Теорема 2.3.2. *Нехай* $1 \leq p, s \leq \infty$ і $\psi \in \mathfrak{D}_q, 0 < q < 1, \psi(k) > 0$*Тоді при* $n \to \infty$

$$\mathfrak{H}_n(L^{\psi}_{\beta,p})_S = \frac{\psi(n)}{n^a}\left(q^{-n}\mathfrak{H}_n(L^{q}_{\beta,p})_S + O(1)\frac{\varepsilon n}{(1-q)^2}\right)$$

де $\varepsilon_n = \sup_{k\geq n}\left|\frac{\psi(k+1)}{\psi(k)} - q\right|, \alpha\ O(1)$ – *величини рівномірно обмежені відносно* $n, p, s, q, \psi(k)$ *і* β_k

Величини $q^{-n}\mathfrak{H}_n(L^{q}_{\beta,p})_S$ *і* $q^{-n}\mathfrak{H}_n(C^{q}_{\beta,p})_C$ *при* $n \to \infty$ *є обмеженим зверху і знизу деякими додатними числами, що залежать лише від* q*,*p *і* s.

СИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. *Ахнезер Н.И.* Лекции по теории апроксимации.

2. *Банах С.* Курс функціонального аналізу (лінійні операції): Посібник для ін-тів та пед. ін-тів. - Київ: Рад. шк., 1948. - 216 с

3. *Бари Н.К.* Тригонометрические ряды: — М.: Физматгиз, 1961. -936 с.

4. *Дзядик В.К.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. - Москва: Наука, 1977. - 512 с.

5. *Жук В.В., Натансон Г.И.* Тригонометрические рядi Фурье и злементы теории аппроксимации: учебное пособие. - Ленинград: изд. ин-та, 1983.- 188 с.

6. *ЗиґмундА.* Тригонометрические ряды.: В 2 т. М.: Мир, 1965. - Т.2. - 538 с. Тригонометрические ряды. - М.: Л.: ГОНТИ, 1939. - 323 с.

7. *Колмогоров А.М., Фомін С.В.* Елементи теорії функцій і функціонального аналізу. - Київ: Вища школа, 1974. - 456 с.

8. *Корнейчук Н.П.* Зкстремальньїе задачи теории приближения. - Москва: Наука, 1976.-320 с.

9. *Натансон И.Б.* Теория функции вещественной переменной. - М.: Наука, 1974.-480 с.

10. *Степанец А.И.* Классификация и приближение периодических функций. - Киев: Наук, думка, 1987. - 268 с.

11. *Степанец А.И.* Методi теории приближений. - Киев: Ин-т математики НАН Украиньї, 2002. - Ч. 1. - 427 с.

12. *Степанец А.И., Кушпель А.К.* Наилучшие приближения и поперечники классов периодических функций. - Киев, 1984. - 44 с. - (Препринт; АН УССР. Ин-т математики: № 15)

13. *Тимман А.Ф.* Теория приближения функций действительного переменного. — Москва: Физматгиз, 1960. - 624 с.

14. *Тихомиров В.М.* Некоторьiе вопросi теории приближения. - Москва: изд-во Моск. ун-та, 1976. - 307 с.

15. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. - Москва: Наука, 1970, - Т. 3. - 656 с.

16. *Bochner S.* Summation of multiple Fourier series by spherical means // Trans. Amer. Soc. - 1936. - 40, № 2 - с 175-207.

17. *Generalized moment representations and Pade approximants.* - Теорія наближення функцій та її застосування: Праці Інституту математики НАН України. - К.: Інститут математики НАН України, 2000, Т.31. - с 144-160.

18. *Riesz M.* Sur les functions conjuguees // Math. Z. - 1927. - 27. - P. 218-244.*Rogosinski W.* Uberdie absehenitte frigonometrischer reihen // Math. Arm. - 1925. -95. -S.l 10-135.