Міністерство освіти і науки України

Кам’янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка

Фізико-математичний факультет

Кафедра математики

Дипломна робота магістра

на тему:

“ Оцінка відхилень нескінченно-диференційовних функцій від їх сферичних сум Рісса в інтегральній метриці”

Виконав: студент ІІ курсу, групи М1–М19р
напряму підготовки
014(Середня освіта)Математика
Роля Андрій Володимирович
Керівник: **Ковальська І. Б.,** кандидат
фізико-математичних наук,
доцент, доцент кафедри математики
Рецензент: Сорич В. А., кандидат
фізико-математичних наук,
доцент, доцент кафедри математики

Кам’янець-Подільський – 2020 р

Зміст

Вступ

Основна задача теорії наближення полягає в тому, щоб на основі заданих властивості даної функції, встановити властивості її апроксимаційних характеристик. У випадку наближення 2π –періодичних функцій такими характеристиками виступають швидкості збіжності рядів Фур'є, найкращі наближення тригонометричними поліномами, наближення поліномами, які породжуються лінійними методами підсумовування рядів Фур'є, наближення інтерполяційними поліномами. Функції з однаковими апріорними властивостями об'єднуються в класи і тоді факти, встановлені для даного класу, відносять і до кожного його представника. При цьому з'являється можливість формувати нові задачі тепер вже для цілих класів функцій. Це – задачі про найкращі наближення, наближення лінійними методами.

Перші результати по оцінках відхилення сум Фур'є від заданих неперервних функцій були одержані ще в період становлення теорії наближення функцій. В 1909 р. (А. Лебег) довів, що

$$\delta_n(f,x) = |f(x) - S_{n(}(f,.x)| \leq |\ln n + 3| E_n(f) \qquad (1)$$

Де $E_n(f)$- найкраще наближення функції $f(x)$ тригонометричними поліномами $T_n(x)$ порядку не вище n в рівномірній метриці:

$$E_n(f) = \inf\max = ||f(x) - T_n(\mathrm{x})||c_{2\pi} = \inf\max|f(x) - T_n(x)|$$

В поєднанні з теоремами Джексона про оцінки величин $E_n(f)$ нерівність Лебега містить більшу частину ранніх результатів по оцінках величин $\delta_n(f,x)$ і не втрачає свого значення і в наш час: вона є точною по порядку r, обмеженою, припустимо, одиницеєю, то

$$E_n(f) < \frac{\pi}{2\pi^r}$$

І тоді з (1) одержуємо

$$\delta_n(f,x) < \frac{\pi(\ln n + 3)}{2n^r}$$

В 1935 р .А.Н.Колмогоров розглянув величину

$$\varepsilon(W^r; S_n) = sup_{f \in w}||f(x) - S_n(f;x)||c_{2\pi}$$

Де W^r клас 2π- періодичних ф-й, r-ті похідні яких (r - ціле, $r \geq 1$) майже скрізь задовільняють умов$|f^{(r)}(x)| \leq 1$. Він показав що

$$\mathcal{E}(W^r; S_n) = \frac{4}{\pi^2}\frac{\ln n}{n^r} + O\left(\frac{1}{n^r}\right), n \to \infty$$

Тобто знайшов асимптотично точну рівність для величин $\varepsilon(W^r; S_n)$. Наступний суттєвий крок в цьому питанні належить С.М.Нікольському, який узагальнив ці результати на класи $W^r H^a 2\pi$ –періодичних функцій *f(x),* в яких існують і є неперервними похідні до r-го порядку r≥0 включно , причому

$$|f^{(r)}(x) - f^{(r)}(x')| \leq |x - x'|^a, 0 < a \leq 1,$$

І на більш загальні класи $W^r H_{(t)}$, які визначаються опуклими модулями неперервності ω(t). Нікольський вирішив аналогічну задачу і для випадку, коли замість сум $S_n(f; x)$ беруться суми Фейєра $\sigma_n(f; x)$.

Дослідження А.Н. Колмогорова і С.М. Нікольського поклали початок новому напряму в теорії наближення функції і в теорії підсумування рядів Фур'є. Результати цих досліджень поширювали на більш загальні класи функцій, а в ролі наближених агрегатів розглядали тригонометричні поліноми $U_n(f; x)$, породжені різними методами U_n підсумовування рядів Фур'є.

Задача про відшукання асимптотичних рівностей для величин

$$\mathcal{E}(m; U_n) = \sup||f(x) - U_n||c_{2\pi}$$

Де m – фіксований клас неперервних функцій, стала однією з найбільш важливих в теорії наближення функцій підсумовування рядів Фур'є, її називають задачею Колмогорова - Нікольського і, якщо в явному вигляді знайдена така функція $\varphi(n) = \varphi(m; U_n; n)$, для якої

$$\mathcal{E}(m; U_n) = \varphi(n) + 0\big(\varphi(n)\big), n \to \infty,$$

то говорять, що розв'язана задача Колмогорова – Нікольського для класу функцій m і методу U_n .

Над цією задачею для різних класів функцій і різних методів підсумовування рядів Фур'є працювали Б.Надь, С.Б.Стечків, С.А.Теляковський, А.В.Єфімов, Н.П.Корнійчук, О.І.Степанець та інші відомі математики.

Мета даної роботи — знайти точні порядкові оцінки, верхніх граней відхилень нескінченно – дифененційовних функцій від їх сум Рісса, в метриці простору L_p.

Відповідно до мети роботи, виділимо наступне завдання:

- дослідити наближення нескінченно – диференційованих функцій сумами Рісса;

Для виконання поставлених завдань використовуються наступні методи наукового дослідження:

1. Огляд наукових праць із розглядуваної теми.

2. Аналіз попередньо отриманих результатів.

3. Обґрунтування справедливості нових тверджень, використовуючи уже відомі результати.

4. Систематизація наукових відомостей з даної теми.

Об’єктом дослідження роботи – є дослідження поведінки відхилень від сум Рісса.

Висновок

Основна задача теорії наближення полягає в тому, щоб на основі заданих властивостей даної функції, встановити властивості її апроксимаційних характеристик. У випадку наближення 2π –періодичних функцій такими характеристиками виступають швидкості збіжності рядів Фур'є, найкращі наближення тригонометричними поліномами, наближення поліномами, які породжуються лінійними методами підсумовування рядів Фур'є, наближення інтерполяційними поліномами.

Дипломна робота складається із вступу і двох розділів. Перший розділ містить п'ять пунктів. У них вводяться основні поняття та твердження, спираючись на які, розв'язується дана задача, класи диференційовних функцій,

спряжені функції і їх класи. Множини $\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{\psi}}^{\boldsymbol{\beta}}, \boldsymbol{L}_{\beta}^{\psi}$, $\boldsymbol{\psi}$ – інтеграли періодичних функційМножини $\boldsymbol{M}_{\mathbf{0}}, \boldsymbol{M}_{\infty}$ **і** $\boldsymbol{M}_{\mathrm{c}}$,лінійні методи підсумовування рядів Фур`є.

Другий розділ містить інформацію про наближення нескінченно – дифененційовних функцій сумами Рісса і підсумком є теорема.

Теорема: *Нехай* $\Psi \in \mathrm{M}_{\infty}$ *і функція*

$$\Phi_n(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k^{(n)} \cos\left(kt + \frac{\beta\pi}{2}\right), \quad \rho_k^{(n)} = \begin{cases} \dfrac{n^{2\delta} - (n^2 - k^2)}{n^{2\delta}} \ \Psi(k), \\ \Psi(k), \qquad k \geq n \end{cases}$$

$$1 \leq k \leq n-1$$

така, що добуток$f_n(t) = \Phi_n(t) n^2$ *є рівномірно обмежений пери всіх* $n \in N\ i\ t \in R$. *Зокрема, нехай* $\Psi \in \mathrm{M}'_{\infty}$. *Тоді якщо* $1 \leq p, s \leq \infty\ i\ f \in L_{\beta,p}^{\Psi}$, то $\forall\, n \in N$

$$\mathrm{C}_{p,s}^{(2)} n^{-2\delta} \leq \varepsilon_n\left(L_{\beta,p}^{\Psi}\right)_s \leq C_{p,s}^{(1)} n^{-2\delta}$$

де $C_{p,s}^{(2)}\ i\ C_{p,s}^{(1)}\ i$ *- сталі які залежать тільки від* $p\ i\ s$.

Література

1. *Банах С.* Курс функціонального аналізу (лінійні операції): Посібник для інструкції та пед. Інститутів. – Київ: Рад. шк. 1948.-216 с.
2. *Дзядик В.К.* Введение в теорию равномерного приближения функцій полиномами. – Москва: Наука, 1997.-512 с.
3. *Жук В.В., Натансон Г.И.* Тригонометрические ряд Фурье и елемент теории аппроксимации: учебное пособие. –Ленинград: изд. Ин-та, 1983.-188с.
4. *Колмогоров А.*М., Фомін С.В. Елементи теорії функцій і функціонального аналізу. –Київ: Вища школа, 1974. -456 с.
5. *Корейчук Н.*П. задачи теории приближения. -Москва: Наука, 1976-320 с.
6. *Степанец А.*И. Класификация и приближение периодических функций. –Киев: Наукова думка, 1987. -268с.
7. *Степанец А.*И. Метод теории приближений. –Киев: Ин-т математики НАН , 2002.-Ч.1. -427 с.
8. *Тимман А.*Ф.орія приближення функцій действительного переменного. –Москва: Физматгиз, 1960. 624с.
9. *Тихомиров В.*М. Некотор
10. *Фихтенгольц Г.М.* Лурс дифференнциального и інтегрального исчисления. –Москва: Наука, 1970, -Т.3. -656 с.
11. *Алхиезер Н.*И. Лекции по теории аппроксимации.
12. *Бари Н.К.* Тригонометрические ряд – Москва: Физматгиз, 1961. -936 с.
13. *Зигмунд А.*Тригонометрические ряд –Москва: Мир, 1965. –Т.2. – 538 с.
14. *Натасон И.*Б. Теорія функции вещественной переменной. – Москва: Наука, 1974. -480с.