Міністерство освіти і науки України
Кам’янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка
Фізико-математичний факультет
Кафедра математики

Дипломна робота магістра

на тему:

“Наближення сумами Рогозинського на класах цілих функцій”

Виконав: студент ІІ курсу, групи М1–М19р
напряму підготовки
014(Середня освіта)Математика
Венгер Назарій Володимирович
Керівник: **Ковальська І. Б.,** кандидат
фізико-математичних наук,
доцент, доцент кафедри математики
Рецензент: Сорич В. А., кандидат
фізико-математичних наук,
доцент, доцент кафедри математики

Кам’янець-Подільський – 2020 р.

Зміст

Вступ 3
Розділ I. Основні класи функцій 8
1.1 Класи диференційовних функцій 8
1.2 Класи Вейля-Надя 12
1.3 Класи $L\beta\psi\mathfrak{N}$ 13
1.4 ψ-Інтеграли періодичних функцій 17
Розділ 2. Наближення цілих функцій сумами Рогозинського 24
2.1 Лінійні методи підсумовування рядів Фур'є 24
2.2 Множини $M0, M\infty, Mc$ 26
2.3 Множини F 32
2.4 Наближення сумами Рогозинського на класах цілих функцій 37
Висновки 41
Список використаної літератури 43

Вступ

Наближення функцій — це знаходження для даної функції f функції g з деякого визначеного класу, яка в певному розумінні близька до f і така, що дає її наближене представлення. Існує багато різних варіантів задачі про наближення функцій, що змінюються в залежності від того, які функції наближують, які функції використовують для наближення, як будується функція наближення до g, що розуміють, коли говорять, що функція g є близькою до f.

В наш час в теорії наближень прийнято розглядати три типи задач, які певною мірою відповідають основним хронологічним етапам розвитку дослідження.

Кожна задача формується в довільному лінійному нормованому просторі X. Будемо говорити про них, як про задачі I, II, і III.

Задача I. Наближення фіксованого елемента$x \in X$ фіксованою множиною F з X. В ролі міри наближення природно взяти величину

$$E(x, F) = inf_{u \in F} \|x - u\|, \tag{1}$$

яка в подальшому буде називатися найкращим наближенням елемента x множиною F. (Звичайно, величина (1) є не що інше, як відстань $\rho(x, F)$ елемента x до множини F). В ролі апроксимаційної множини в роботі будуть розглядатися підпростори (скінченної або нескінченної розмірності).

Якщо існує елемент $u_0 \in F,$ який реалізує в (1) точну нижню межу, тобто такий, що

$$E(x, F) = \|x - u_0\|$$

то елемент u_0 називається елементом найкращого наближення для x в множині F.

Тут зразу виникають деякі питання, які відносяться до задачі I:

1. Чи існує для довільного x з X в множині F елемент найкращого наближення? Зрозуміло, що для позитивної відповіді на це питання необхідно в будь-якому випадку, щоб F була

замкнена.

Множину F, яка має таку властивість, що для довільного $x \in X$ в ній існує ближній елемент, називають іноді множиною існування.

2. Якщо для довільного $x \in X$ ближній елемент в множині F існує, то чи буде він єдиним?

Відповідь на це питання може залежати як від структури F, так від метрики простору X.

3. Які характеристичні властивості елемента найкращого наближення? Мова йде про необхідні та достатні умови, яким повинен задовольняти ближній до xелемент в множині F. Якщо множина F є множина існування і ближній до x елемент, в ній єдиний, то кожному елементу $x \in X$ відповідає єдиний ближній до нього в множині F елемент $u = P(x)$. Цим заданий деякий оператор P (оператор найкращого наближення), який відображає X в F. В загальному випадку даний оператор не є адитивним. Тому представляє інтерес поряд з величиною (1) розглядати також міру наближення, яка задається вибором лінійного оператора A $(AX \subset F)$ і вимірюється величиною $\|x - Ax\|$.

Можна вважати, що оператор A визначає деякий лінійний метод наближення елементів $x \in X$ множиною F. Цей лінійний метод ми також будемо означати через A.

<u>**Задача II.**</u> Наближення фіксованої множини $M \subset X$ фіксовано множиною F того ж простору X.

Якщо виходити з наближення (1) елемента x множиною F, то міру наближення в задачі II можна означити так:

$$\mathrm{E(M,F)} = \mathrm{sup}_{\mathrm{x \in M}} \mathrm{E(x,F)} = \mathrm{sup}_{\mathrm{x \in M}} inf_{u \in F} \|x - u\|$$

Елемент $x_0 \in M$ (**якщо він** існує), для якого

$$E(x_0, F) = E(M, F)$$

називають екстремальним (в даному випадку найбільш віддаленим елементом в М відносно F).

В конкретних випадках задача II може полягати в тому, щоб точно виразити (або хоча б оцінити) величину (2) через характеристики, за допомогою яких задана множина М. Практичний сенс задачі II можна бачити в тому, що значення величини (2) дозволяє вказувати гарантовану оцінку похибки наближення довільного елемента з М з допомогою F. Якщо ж наближення здійснюється з допомогою лінійного оператора А, то нас буде цікавити точна верхня межа

$$sup_{x\in M}\|x-Ax\|, \tag{3}$$

а також велична

$$\varepsilon(M,F)=\mathrm{sup}_{\mathrm{x}\in\mathrm{M}}inf_{u\in F}\|x-U\| \tag{4}$$

де точна нижня межа береться по всіх лінійних операторах А, які відображають X в F.

Можна сказати, що величина (4) характеризує найкраще лінійне наближення множини М елементами множини F.

Лінійний оператор $\tilde{A}(\tilde{A}\in Ax)$ (якщо він існує), який реалізує в (4) точну нижню межу, тобто такий, що

$$\boldsymbol{sup_{x\in M}\left\|x-\widetilde{A}x\right\|=\varepsilon(M,F)},$$

визначає найкращий для М лінійний метод наближення.

Оскільки А є оператором з X в F, то

$$(\forall x\in X)\colon\|x-Ax\|\geq E(M,F)$$

і значить,

$$sup_{x\in M}\|x-Ax\|\geq E(\boldsymbol{M},\boldsymbol{F})$$

а оскільки це справедливо для довільного лінійного оператора $A(Ax\subset F)$, то

$$E(M,F)\geq\varepsilon(M,F). \tag{5}$$

Якщо при цьому існує лінійний оператор – метод $\widetilde{A}$, що

$$\boldsymbol{sup_{x\in M}\left\|x-\widetilde{A}x\right\|=\varepsilon(M,F)},$$

то, можна сказати, що лінійний оператор $\widetilde{A}$ реалізує на множині M верхню межу найкращих наближень елементами множини F.

Круг задач I і II можна розширити, якщо розглядати наближення елемента x або множини M з X деякою розширеною послідовністю апроксимуючих множин:

$$F_1\subset F_2\subset\cdots\subset F_n\subset\cdots, \tag{6}$$

де індекс п може відповідати, наприклад, розмірності множини F_n. З включень (6) і визначення величини E (x, F) випливає, що $\forall x\in X$

$$E(x,F_1)\geq E(x,F_2)\geq\cdots\geq E(x,F_n)\geq\cdots,$$

значить, для довільної множини M с X

$$E(x,F_1)\geq E(x,F_2)\geq\cdots\geq E(x,F_n)\geq\cdots,$$

Тепер можна говорити про вивчення числових послідовностей

$$E(x,F_n)\ \text{та}\ E(M,F_n),$$

а конкретно, про вияснення точної, або хоча б порядкової оцінки наближення їх при $n\to\infty$.

Аналогічні задачі при апроксимації послідовністю множин (6) можна поставити для величин (3) і (4).

Задача III. Найкраще наближення множини $M\subset X$ заданим класом множин {F} з X.

Мається на увазі, що заданий клас в деякому розумінні «рівноцінних» множин F, наприклад, підпросторів однієї і тієї ж розмірності, і треба вибрати ту х них, яка найменше з них відхиляється від $M.$ Таким чином, мова йде про вибір для M найкращої апроксимаційної множини.

В 1936 році А.М. Колмогоров поставив задачу обчислення величин

$$d_n(M,X)=inf_{F_n}E(M,F_n\quad(n=1,2,\cdots), \tag{7}$$

де точна нижня межа береться по всіх підпросторах F_n розмірності $n.$ Для центрально-симетричних множин М (тобто таких, що з $x \in M$ випливає, що $—x$ Є М) величина $d_n(M,X)$ отримала назву поперечника по Колмогорову множини М в просторі Х. Вона рівна половині найменшої «ширини» множини М і характеризує мінімальну похибку, яку можна забезпечити, наближаючи М всіма можливими n - вимірними просторами.

Мета даної роботи — дослідити при $n \to \infty$ асимптотичну поведінку величини наближення цілих функцій сумами Рогозинського в інтегральній метриці.

Відповідно до мети роботи, виділимо наступні **завдання**:

- дослідити класи цілих функцій;
- дослідити наближення сумами Рогозинського на класах цілих функцій;

Для виконання поставлених завдань використовуються наступні методи **наукового дослідження:**

1. Огляд наукових праць із розглядуваної теми.
2. Аналіз попередньо отриманих результатів.
3. Обґрунтування справедливості нових тверджень, використовуючи уже відомі результати.
4. Систематизація наукових відомостей з даної теми.

Об'єктом дослідження роботи – є асимптотична оцінка верхніх граней відхилень сум Рогозинського від ф-інтегралів в метриці простору L_p.

Висновки

На даний час теорія наближень є однією із областей математики, що найбільш інтенсивно розвиваються. Багато суттєвих результатів отримано такими ученими як А.М. Колмогоров, С.М. Нікольський, Б. Надь, В.К. Дзядик, Н.Н. Корнійчук, С.Б. Стечкін, С.А. Теляковський, А.В. Єфімов, А. І. Степанець та ін.

В даній роботі розв'язується задача наближення класу $L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$ цілих функцій $f(\cdot)$ за допомогою лінійного методу, що носить назву сум Рогозинського в метриці простору L_p.

Дипломна робота складається із вступу і двох розділів. Перший розділ містить чотири пункти. У них вводяться основні поняття та твердження, спираючись на які, розв'язується дана задача. У пункті «Класи диференційованих функцій» вводяться класи функцій, що допускають звичайне диференціювання. У пункті «Класи Вейля-Надя» означається похідна у розумінні Вейля-Надя та вводяться класи функцій, диференційовних у розумінні Вейля-Надя. У пункті 3 розглядаються більш узагальненні операції диференціювання. Також для заданої функції $f(\cdot)$ будуються її наближення у вигляді послідовних поліномів $P_n(\cdot)$, де $n \in \mathbb{N}$. Пункт 4 «$\bar{\psi}$- інтеграли періодичних функцій» містить поняття ф-інтеграла та $\bar{\psi}$ - похідної функції.

Другий розділ теж складається з чотирьох пунктів. Пункт 1 «Лінійні підсумовування рядів Фур'є» містить означення деяких лінійних методів, що носять назву методів підсумовування рядів Фур'є, приклади цих методів, а також у ньому розглядаються апроксимуючі властивості цих методів та питання насичення лінійних методів підсумовування рядів Фур'є. У пункті 2 «Множини M_0, M_∞, M_c» вводиться поняття про множини M_0, M_∞, M_c. Також доводиться критерій належності функції $\phi \in M$ до множин M_0, $M_{от}$, M_c.
Пункт 3 «Множини F» за властивостями множини F доводиться, що $\psi \in M$ належить множині F. У пункті 4 здійснюються основні дослідження

наближеннями сумами Рогозинського $\overline{\psi}$-інтегралів, які породжують цілі функції. Отримані асимптотичні оцінки для верхніх граней відхилень сум Рогозинського від ф-інтегралів в метриці простору L_p . Результатом дипломної роботи є:

Теорема 1. Нехай $\pm\psi_1, \pm\psi_2 \in F_0$ і $1 \leq p, s \leq \infty$. Тоді, якщо $f \in L^{\overline{\psi}}L_p$, то справедлива нерівність

$$\|\rho_n(f,x)\| \leq 4\pi E_n\left(f^{\overline{\psi}}\right)_p \left(\frac{c_1}{n^2}\sum_{k=1}^{n-1} k^2\overline{\psi}(k) + c_2\sum_{k=1}^{n-1}\overline{\psi}(k)\right),$$

де $E_n(\varphi)_p = inf\|\varphi(\cdot) - t_{n-1}(\cdot)\|_p, t_{n-1} \in T_{n-1}, c_1$ i c_2 - сталі, що не залежать від p і s.

Нехай $\varepsilon_n(K) = sup\{\|\rho_n(\varphi,x)\|_s,\ \varphi \in K\}, A_n = \sup\{c_1\sum_{k=1}^{n-1} k^2\overline{\psi}(k)B_k(K)_s\}$,

$$B_k(K)_s = sup\left\{\left\|\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x-t)\cos \mathrm{kt}\,\mathrm{dt}\right\|, \varphi \in K\right\}, \text{де}$$

К - деякий клас функцій. Використовуючи теорему 1 і розглядаючи верхні грані всіх частин $\|\rho_n(f,x)\|_s$ *отримуємо:*

$$\varepsilon_n\left(L^{\overline{\psi}}, S_p^0\right)_S = sup_{f\in L^{\overline{\psi}}, S_p^0}\|\rho_n(f,x)\|_s = sup_{f\in L^{\overline{\psi}}, S_p^0}\left\|\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^{\overline{\psi}}(x-t)\Psi(t)dt\right\|_s =$$

$$= \frac{A_n(S_p^0)}{n^2} + \bar{\psi}(n)B_n\left(S_p^0\right)_s + O(1)\sum_{k=n+1}^{\infty}\bar{\psi}(k), \quad 1 \leq p, s \leq \infty$$

В прийнятих позначеннях справедлива така теорема.

Теорема 2. Нехай $\pm\psi_1, \pm\psi_2 \in F_0$. Тоді

$$\varepsilon_n\left(L^{\overline{\psi}}, S_p^0\right) = \frac{A_n(S_p^0)_s}{n^2} + \overline{\psi}(n)B_n\left(S_p^0\right)_s + O(1)\sum_{k=n+1}^{\infty}\overline{\psi}(k), 1 \leq p, s \leq \infty,$$

де $S_p^0 = \{\varphi: \|\varphi\|_p \leq 1,\ \varphi \perp 1\}$,

$$\bar{\psi}(k) = \sqrt{\psi_1(k)^2 + \psi_2(k)^2}$$

Список використаної літератури

1. *Ахизер Н.И.* Лекции по теории аппроксимации / *Н.И. Ахизер.* - М.: Наука, 1965. - 407 с.
2. *Бари Н.К.* Тригонометрические ряди / *Н.К. Бари.* - М.: Физматгиз, 1961.- 936 с.
3. *Валле-Пусен ПІ. (Vallee-Poussin Ch.-J. de la)* Sur les polynomes d'approximation et la representation approchee d'un angle / *Ш. Валле- Пусен.* Bull. Acad. Sci. Belg. - 1910. N2 12. - P.804 - 844.
4. *Гаврилюк В.Т.* Вопросьі насьщения линейньїх методов / *В.Т. Гаврилюк* // Укр. мат. журн. - 1991. - 43, №23. - С.291 - 308.
5. *Дзядьік В.К.* Введение в теорию равномерного приближения функций / В. *К. Дзядьїк.* - М.: Наука, 1977 -510 с.
6. *Джексон Д. (Jackson D.)* On approximation by trigonometric sums and polynomials / *Д. Джексон (D.Jackson).*Trans. Amer. Math. Soc. - 1912. - 14.- P.491-515.
7. *Ефимов А.В.* Линейньїе методьі приближения непрерьівньїх периодических функций / *А.В. Ефимов.* Мат. сб. - 1961. - 54, N21. - С. 51-90.
8. *Зигмунд А. (Zygmund A.)* Тригонометрические ряди: В 2-х Т. / *А.Зигмунд.* - М.: Мир, 1965. - Т.2.- 53 8 с.
9. *Колмогоров А.Н.* Zur Grossenordnung des Restliedes Fouriershen Reihen differenzierbaren Funktionen / *А.Н. Колмогоров.* Ann. Math. - 1935. 36. - S.521-526.
10. *Колмогоров А.Н.* Елементи теорії функціонального аналізу / *А.Н.Колмогоров , С.В.Фомін.* - Київ: Вища школа, 1974. - 456 с.
11. *Корнейчук Н.П.* Зкстремальньїе задачи теории приближения / *Н.П.Корнейчук.* - М.: Наука, 1976. - 320 с.
12. *Надь Б. (Nady B.)* Sur une classe generate де procedes де summation pour les Series де Fourier / *Б. Надь (B. Nady).* Hung. Acta Math. - 1948. 1, N 3. -P.14-62.

13. *Надь Б. (Nady B.)* Uber geuisse Extremalfragen bei transformierten trigonometrischen Entwicklungen / *Б. Надь (B. Nady).* Ber. Acaд. dtsch. wiss. - 1938. 90. P.103- 134.

14. *Натансон И.П.* Теория функций вещественной переменной / *И.П.Натансон.* - М.: Наука, 1974. - 480 с.

15. *Никольський С.М.* Приближение функий многих переменньї и теоремы вложения / *С.М. Никольський.* - М.: Наука, 1969. - 480 с.

16. *Никольський С.М.* Об асимптотическом поведеним остатка при приближении функий, удовлетворяющих условию Липшица, сумами Фейера */ С.М. Никольський.* Изв. АН СССР. Сер. мат. - 1940. 4, N26. - С.501 -508.

XI.Пинкевич В.Т. О порядке остаточного члена ряда Фурье функций, дифференцируемьх в смьісле Вейля / *В.Т. Пинкевич.* Изв. АН СССР. Сер. мат. - 1940. - 4, N25. - С.521 - 528.

18. *Рисе М. (Riesz M.)* Sur les fonctions conjuguees / *M. Рисе (M. Riesz)* Math. Z.- 1927.-27.-P.218-244.

19. *Рогозинський В. (Rogosinski W.)* Uber die Abschenitte trigonometrischer Reihen / *В. Рогозинський (W.Rogosinski).* Math. Ann. - 1925. 95. — S. 110 — 135.

20. *Степанец А.И.* Асимптотические представлення уклонений ередних Зигмунда от дифференцируемьх периодических функций / *А.И.Степанец.* - Киев.: Ин-т математики АН УССР, 1982. - С. 96 - 116.

21. *Степанец А.И.* Классификация и приближение периодических функций / *А.И. Степанец.* - Киев: Наук, думка, 1987. - 268 с.

22. *Степанец А.И.* Класові периодически функций и приближение их злементов суммаими Фурье / *А.И. Степанец.* - Киев, 1983. -57 с. (препринт / АН УССР. Ин-т математики;. № 10)

23. *Степанец А.И.* Методи теории приближения / *А.И. Степанец.* - Киев: Ин-т математики НАН Украиньї, 2002. - Ч. Ы. - 427 с.

24. *Степанец А.И.* Уклонения сумм Фурье на класах бесконечно

диффеpенциpуемыi̇ функций / *А.И. Степанец* // Укp. мат. жуpн. - 1984.

- 36, N 26. - С.750 - 758

25. *Стечкин С.Б.* Оценка остатка pяда Фуpье для диффеpенциpуемыi̇ функий / *С.Б. Стечкин.* Тp. Мат. ин-та АН УССP. 1980. - 145. - С. 126

- 151.

26. *Теляковский С.А.* О ноpмах тpигонометpических полиномов и пpиближении дифеpенциpуемыi̇ функций линейныi̇ми сpедствами их pядов Фуp'є. 1. / *С.А Теляковский.* Тp. Мат. ин-та АН СССP. 1961. - 62. -С. 61-97.
27. *Тиман А.Ф.* Теоpия пpиближения функций действительного пеpеменного / *А.Ф. Тиман.* -М.: Физматгиз, 1960. - 624 с.
28. *Тихомиpов В.М.* Некотоpыi̇е вопpосыi̇ теоpии пpиближения / *В.М.Тихомиpов.* -М.: Изд-во Моск. ун-та, 1976. - 307 с.
29. *Чебьшев П.Л.* Вопpосыi̇ о наименьших величинах, связанныi̇е с пpиближенныi̇м пpедставлением функций / *П.Л. Чебьшев.* - М.; Л.: Изд-во АН СССP. 1947.-Т. 2 . - С . 151 -235.