Міністерство освіти і науки України

Кам’янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка

Фізико-математичний факультет

Кафедра математики

Дипломна робота

магістра

з теми: **«Сумісне найкраще наближення функцій різних класів»**

Виконала:
студентка II курсу М1-М19 групи
спеціальності: 014 Середня освіта
(Математика)
Юрковська Вікторія Володимирівна

Керівник:
Сорич В.А., кандидат
фізико-математичних наук, доцент
кафедри математики

Рецензент:
Гудима У.В., кандидат
фізико-математичних наук, доцент
кафедри математики

Кам’янець-Подільський – 2020 р.

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК ОСНОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

$\forall$ – квантор загальності: «для кожного», «для будь-якого»;

$\exists$ – квантор існування: «існує»;

$x \in A$ – елемент *x* належить множині *A*;

$x \notin A$ – елемент *x* не належить множині *A*;

$A \cup B$ – об’єднання множин *A* і *B*;

$A \cap B$ – перетин множин *A* і *B*;

N – множина всіх натуральних чисел;

Z – множина всіх цілих чисел;

R – множина всіх дійсних чисел;

C – множина всіх комплексних чисел;

$\sup\limits_{x \in A} F(x)$ – точна верхня межа значень функціонала *F* на множині *A*;

$ess\sup$ – суттєва точна верхня межа;

$sign\,\alpha$ – величина, що дорівнює 1, якщо $\alpha > 0$, дорівнює -1, якщо $\alpha < 0$ і дорівнює 0, якщо $\alpha = 0$;

$\|\bullet\|_X$ – норма в лінійному нормованому просторі;

U_p – одинична куля в просторі L_p, $p = 1$, $p = \infty$;

U_p^o – множина вигляду: $U_p^o = \left\{ \varphi \in U_p : \int\limits_{-\pi}^{\pi} \varphi(t)\,dt = 0 \right\}$;

$\mathrm{Re}\,Z$ – дійсна частина комплексного числаz;

$\mathrm{Im}\,Z$ – уявна частина комплексного числаz;

C – простір неперервних 2π-періодичних функцій f з нормою

$\|f\|_C = \max\limits_{0\le x\le 2\pi}|f(t)|$;

L_p – простір 2π-періодичних вимірних і суттєво обмежених (при $p=\infty$) або сумовних у p-ому степені функцій $(1\le p\le\infty)$ з нормою

$$\|f\|_{L_p} = \begin{cases} \left(\int\limits_0^{2\pi} |f(t)|^p\, dt\right)^{\frac{1}{p}}, \ 1\le p<\infty, \\ \operatorname{ess}\sup\limits_{t\in[0;2\pi]} |f(t)|, \ p=\infty; \end{cases}$$

$S[f]$ – ряд Фур'є функції f;

$S_n(f)$ – сума Фур'є функції f;

t_n – тригонометричний поліном порядку n;

t_n^* – многочлен найкращого наближення функції f в лінійному нормованому просторі X;

$p_n(f;x)$ – відхилення від функції її часткових сум Фур'є S_{n-1};

$E_n(f)_X$ – найкраще наближення функції тригонометричними поліномами порядку n-1 у метриці простору X;

$E_n(\Re)_X$ – найкраще наближення множини $\Re\subset X$ тригонометричними поліномами порядку n-1 у метриці простору X;

$E_{n,m}(\Re)_X$ – найкраще сумісне наближення функцій f множини $\Re\subset X$ та їх похідних $f_{\beta_i}^{\psi_i}(\bullet)$ тригонометричними многочленами степеня n-1 у метриці простору X;

$B_{r,r}(t)$ – ядра Бернуллі $r\in N$;

$B_{r,\beta}(t)$ – узагальнені ядра Бернуллі:

$$B_{r,\beta}(t)=\sum_{k=1}^{\infty}k^{-r}\left(\cos\left(kt-\frac{\beta\pi}{2}\right)\right),\ r>0,\ \beta\in R;$$

$P^{q}(t)$ – ядра Пуассона $(0<q<1)$

$$P^{q}(\mathrm{t}) = \sum_{k=1}^{\infty} q^{k}\cos kt\ ;$$

$P_{\beta}^{q}(t)$ – узагальнені ядра Пуассона:

$$P_{\beta}^{q}(\mathrm{t}) = \sum_{k=1}^{\infty} q^{k}\cos\left(kt-\frac{\beta\pi}{2}\right),\ 0<q<1, \beta\epsilon R;$$

$(f*g)(x)$ – згортка функцій f і g

$$(f*g)(x)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi}f(x-t)g(t)dt;$$

$f^{r}(\bullet)=f_{r}^{(r)}(\bullet)-r$ – та похідна функції f;

$f_{\beta}^{q}-(q,\beta)$ – похідна функції $f(\bullet)$ в сенсі О.І. Степанця:

$$f_{\beta}^{q}(\mathrm{x}) = \sum_{k=1}^{\infty} q^{-k}(a_{k}(\mathrm{f})\cos\left(kx+\frac{\beta\pi}{2}\right) + b_{k}(\mathrm{f})\sin\left(kx+\frac{\beta\pi}{2}\right));$$

$f_{\beta}^{\psi}(\bullet)-(\psi,\beta)$ – похідна функції $f(\bullet)$ в сенсі О.І. Степанця;

$W_{\beta,p}^{r}$– класи Вейля-Надя:

$$W_{\beta p}^{r}=\left\{f\in L_{p}:\left\|f_{\beta}^{(r)}\right\|_{p}\le 1\right\},\ r>0,\ \beta\in R,\ p=1,\ p=\infty;$$

$P_{\beta,p}^{q}$– класи 2π-періодичних функцій вигляду, які записують у вигляді згортки: $f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi}\varphi(x+t)\bullet P_{p}^{q}(t)dt$; p=1,p = ∞;

$L_{\beta}^{\psi}\mathfrak{R}$ – класи 2π-періодичних функцій вигляду:

$$L_{\beta}^{\psi}\mathfrak{R}=\left\{f\in L: f_{\beta}^{\psi}(\bullet)\in\mathfrak{R},\ \mathfrak{R}\in L\right\};$$

$C^{\psi}_{\beta}\mathfrak{R}$ – класи неперервних 2π-періодичних функцій вигляду: $C^{\psi}_{\beta}\mathfrak{R} = L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{R} \cap C$.

ВСТУП

Теорія наближення набуває широкого застосування на сучасному етапі розвитку математики. Ідеї цієї галузі математики активно проникають в інші розділи науки, особливо прикладної спрямованості.

Систематичні дослідження традиційних задач теорії наближення (теорії апроксимації) почали проводитись з 30-х років минулого століття. Під впливом робіт Б. Надя, С.М. Нікольського, С.Б. Стєчкіна, В.К. Дзядика, А.І. Ахієзера, Н.П. Корнейчука, А.В. Єфімова, О.І. Степанця, С.А. Теляковського та ін. сформувалося також поняття (ψ,β) – похідної, що визначається для даної функції f заданою послідовністю чисел $\psi=\psi(k)$, $k=1,2,...$, та числами $\beta\in R$. Звичайна r-та, $r=1,2,...$, похідна періодичної функції при цьому є окремим випадком (ψ,β) – похідної при $\psi(k)=k^{-r}$ і $\beta=r$. Окремими випадками (ψ,β) – похідних є похідні в розумінні Вейля-Надя, (q,β) – похідні $(0<q<1,\ \beta\in R)$ та інші.

Метою даної роботи є одержання нових результатів про точні значення сумісних найкращих наближень тригонометричними поліномами класів Вейля-Надя та класів інтегралів Пуассона в рівномірній та інтегральній метриках.

Відповідно до мети роботи, виділимо наступні **завдання**:

- Дослідити задачу найкращого сумісного наближення функцій f(x) $\epsilon\ P^{q}_{\gamma,p}$ та їх $(q_i,\ \gamma_i)$ похідних у поєднанні з функціями g(x) $\epsilon\ W^{r}_{\beta,p}$ та їх (r_i,β_i) –похідних тригонометричними многочленами степеня не вище за $n-1$ p=(1;∞).

- Обчислити точні значення найкращих сумісних наближень класів періодичних функцій, що задаються за допомогою згорток із ядрами Пуассона та ядрами Бернуллі, в метриках просторів C і L.

Для досягнення поставлених завдань використовуються наступні **методи наукового дослідження**:

1. Аналіз наукових праць із розглядуваної тематики.

2. Узагальнення попередньо отриманих результатів.

3. Отримання та обгрунтування справедливості нових тверджень, використовуючи вже відомі результати.

4. Систематизація наукових відомостей з даної теми.

Об’єктом дослідження даної роботи є вивчення апроксимаційних властивостей запроваджених О.І. Степанцем класів періодичних функцій.

Наукова новизна отриманих результатів полягає в наступному:

1) знайдені точні значення величин найкращих сумісних наближень лінійних комбінацій функцій та їх похідних на класах породжених сумою ядер Бернуллі та Пуассона;

2) встановлено нові достатні умови того, що сума сумовних ядер задовольняє умову Надя N_n^* .

Практичне значення роботи, полягає в тому, що запропоновані в ній методи та прийоми можуть бути використані при дослідженні різноманітних питань сумісного найкращого наближення функцій. Разом із сказаним вище, дипломна робота носить теоретичний характер.

Апробація результатів дослідження. Основні результати дослідження викладені у доповіді на звітній науковій конференції студентів та магістрантів Кам’янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка (2020р.)

Публікації. Основні результати в стислому вигляді опубліковано в роботі «Сумісне найкраще наближення функцій різних класів” (Збірник наукових праць студентів та магістрантів Кам’янець-Подільського національного університеті імені Івана Огієнка).

Структура роботи. Дипломна робота, обсягом 50 друкованих аркушів, складається з переліку основних позначень, вступу, чотирьох параграфів загальновідомих в теорії наближення фактів, та які становлять основу для викладу результатів дипломної роботи, одного параграфа(п’ятого), в якому міститься виклад результатів наукових пошуків по темі роботи, висновків та списку використаних джерел.

У першому та другому параграфі: «Класи функцій Вейля-Надя» та «Класи функцій породжені ядрами Пуассона. Інтеграли Пуассона» — розкриваються основні погляди на сучасні підходи до класифікації функцій на основі їх «диференційовних» властивостей.

У третьому та четвертому параграфі: «Відношення порядку для $\left(\psi, \overline{\beta}\right)$ – похідних» та «Короткий огляд результатів та історичні відомості. Постановка задачі» — вводяться аналіз наукових праць та запозичені, в основному, із робіт О.І. Степанця та Н.М. Сорич відношення порядку між $\left(\psi_i, \overline{\beta_i}\right)$ – похідними, що дозволяють вказати аналоги «молодших» похідних для функцій із досліджуваних класів.

У п’ятому параграфі: «Сумісне найкраще наближення функцій різних класів» — приведене основне із завдань досліджуваної задачі — знаходження точного значення величини найкращого сумісного наближення різних класів функцій.

ВИСНОВКИ

В дипломній роботі розглянута задача знаходження точних значень величин

$$E_{n,m}\left(u_\infty^0\right)_C = \sup_{\varphi\in u_\infty^0} \inf_{t_{n-1,l}} \left\| \Sigma_{n,m}\left(\varphi; t_{n-1,l}; x\right)\right\|_C ,$$

$$E_{n,m}\left(u_1^0\right)_L = \sup_{\varphi\in u_1^0} \inf_{t_{n-1,l}} \left\| \Sigma_{n,m}\left(\varphi; t_{n-1,l}; x\right)\right\|_L ,$$

які називаються величинами сумісного найкращого наближення суми класів $W_{\beta,\infty}^r$ та $P_{\gamma,\infty}^q$ $\left(W_{\beta,\infty}^r \text{ та } P_{\gamma,1}^q\right)$ в метриках просторів *C(L)*.

Основний результат дипломної роботи можна записати у вигляді

Теорема. Нехай $0 \le r_1 \le r_2 \le \ldots \le r_{m_1} < r$, $0 < q < q_1 \le q_2 \le \ldots \le q_{m_2} \le 1$, $\beta, \beta_i, \gamma, \gamma_i \in R$ $i = \overline{1,m}$. Якщо виконується одна з умов:

1) $r - r_i \equiv \beta - \beta_i \equiv \gamma - \gamma_i \equiv 1 \pmod 4$, $i = \overline{1,m}$;

2) $r - r_i \equiv \beta - \beta_i \equiv \gamma - \gamma_i \equiv 3 \pmod 4$, $i = \overline{1,m}$;

3) $r - r_i \equiv \beta - \beta_i \equiv \gamma - \gamma_i \equiv 0 \pmod 4$, $i = \overline{1,m}$;

4) $r - r_i \equiv \beta - \beta_i \equiv \gamma - \gamma_i \equiv 2 \pmod 4$, $i = \overline{1,m}$;

5) $0 < r - r_i \le 1$, $r - r_i + 4s \le \beta - \beta_i \le 2 - r + r_i + 4s$, $s \in Z$; $\gamma - \gamma_i \equiv 1 \pmod 4$, $i = \overline{1,m}$;

6) $r - r_i \equiv \beta - \beta_i \equiv 1 \pmod 4$, $\gamma - \gamma_i \equiv 0 \pmod 4$, $i = \overline{1,m}$;

7) $r - r_i \equiv \beta - \beta_i \equiv 3 \pmod 4$, $\gamma - \gamma_i \equiv 2 \pmod 4$, $i = \overline{1,m}$;

8) $0 < r - r_i \le 1$, $4s \le \beta - \beta_i \le r - r_i + 4s$, $s \in Z$; $\gamma - \gamma_i \equiv 0 \pmod 4$, $i = \overline{1,m}$;

9) $0 < r - r_i \le 1$, $4s + 2 \le \beta - \beta_i \le r - r_i + 2 + 4s$, $s \in Z$; $\gamma - \gamma_i \equiv 2 \pmod 4$, $i = \overline{1,m}$;

10) $0 < r - r_i \le 1$, $4s + 2 - r + r_i \le \beta - \beta_i \le 2 + 4s$, $s \in Z$; $\gamma - \gamma_i \equiv 0 \pmod 4$, $i = \overline{1,m}$;

11) $0 < r - r_i \le 1$, $4s + 2 - r + r_i \le \beta - \beta_i \le 4 + 4s$, $s \in Z$; $\gamma - \gamma_i \equiv 2 \pmod 4$, $i = \overline{1,m}$;

тоді при кожному натуральному n має місце включення $K \in N_n^*$, де $K = K(t) = \left(\sum_{i=1}^{m_1} n^{-r_i} B_{r-r_i,\beta-\beta_i}(t)\right)\sigma_{i,1} + \left(\sum_{i=1}^{m_2} q_i^n P_{\gamma-\gamma_i}^{\frac{q}{q_i}}(t)\right)\sigma_{i,2}$, та виконуються рівності

$$E_{n,m}\left(u_\infty^0\right)_C = E_{n,m}\left(u_1^0\right)_L = \frac{1}{\pi}E_n(K)_L = \|K * sign\sin n(\bullet)\|_C =$$

$$= \frac{4}{\pi}\left|\frac{1}{n^r}\sum_{i=1}^{m_1}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\sin\left[(2\nu+1)\theta_n\pi - \frac{\beta-\beta_i}{2}\pi\right]}{(2\nu+1)^{r-r_i+1}}\sigma_{i,1} + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{m_2}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{q^{(2\nu+1)n}}{2\nu+1}\sin\left[(2\nu+1)\theta_n\pi - \frac{\gamma-\gamma_i}{2}\pi\right]\sigma_{i,2}\right|$$

де $\theta_n \in [0,1)$ є єдиним коренем рівняння

$$\frac{1}{n^r}\sum_{i=1}^{m_1}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\cos\left[(2\nu+1)\theta_n\pi - \frac{\beta\bullet\beta_i}{2}\pi\right]}{(2\nu+1)^{r-r_i}}\sigma_{i,1} + $$

$$+ \sum_{i=1}^{m_2}\sum_{\nu=0}^{\infty} q^{(2\nu+1)n}\cos\left[(2\nu+1)\theta_n\pi - \frac{\gamma-\gamma_i}{2}\pi\right]\sigma_{i,2} = 0 .$$

Список використаних джерел:

1. Степанец А.И. Классификация и приближение периодических функций /А.И. Степанец. – К.: Наук. Думка, 1987. – 268 с.

2. Степанец А.И. Методы теории приближений: В 2 ч. /А.И. Степанец. – К.: Ин-т математики НАН Украины, 2002. – ч. 1. – 427 с.

3. Favard J. Sur l'approximation des fonctions periodiynes par des polynomes trigonometriqnes / J. Favard // C. R. Acad. Sci. – 1936. – 203. – p. 1122-1124.

4. Ахиезер Н.И. О наилучшем приближении тригонометрическими суммами дифференцируемых периодических функций / Н.И. Ахиезер, М.Г. Крейн // Докл. АН СССР. –1937. – 15, №3. – с. 107-112.

5. Nagy B. Uber gewisse Extremalfragen bei tranformierten trigonometrischen Entwicklungen, I. Periodisher Fall / B. Nagy // Berichte der math. – phys. Kl. Acad. der Wiss. zu Leipzig. – 1938. – 90. – p. 103-134.

6. Никольский С.М. Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем / С.М. Никольский // Изв. АН СССР, сер. матем. – 1946. – 10. – с. 207-256.

7. Дзядык В.К. О наилучшем приближении на классе периодических функций, имеющих ограниченную S-ю производную $(0<S<1)$ / В.К. Дзядык // Изв. АН СССР, сер. матем. – 1953. – 17. – с. 135-162.

8. Дзядык В.К. О наилучшем приближении на классах периодических функций, определяемых интегралами от линейной комбинации абсолютно монотонных ядер / В.К. Дзядык // Матем. заметки. – 1974. – 16, №5. – с. 691-701.

9. Крейн М.Г. К теории наилучшего приближения периодических функций / М.Г. Крейн // Докл. АН СССР – 1938. – 18, №4-5. – с. 245-249.

10. Бушанский А.В. О наилучшем в среднем гармоническом приближении некоторых функций / А.В. Бушанский // Исследования по теории приближения функций и их приложения. – К.: Ин-т математики АН УССР, 1978. – с. 29-37.

11. Степанец А.И. Приближение суммами Фурье и наилучшие приближения на классах аналитических функций / А.И. Степанец, А.С. Сердюк // Укр. мат. турн. – 2000. – 52, №3. – с. 375-395.

12. Сорич В.А. Наилучшее совместное приближение функций и их производных / В.А. Сорич. – К. 1989. – с. 3-54. – (Препринт / Ін-т математики АН УРСР; 89.19)

13. Сорич В.А. Найкраще наближення лінійної комбінації ядер Пуассона / В.А. Сорич, Н.М. Сорич // Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації: зб. наук. пр. за матеріалами всеукр. наук.-метод. конф. – Кам’янець-Подільський: Кам’янець-Подільський держ. Ін-т., 2004. – с. 60-69.

14. Зигмунд А. Тригонометрические ряды: в 2 т. / А. Зигмунд – М.: Мир, 1965 – т. 1., – 615 с.

15. Ахиезер Н.И. Лекции по теории аппроксимации / Н.И. Ахиезер. – М. – Л.: ГИТТЛ, 1947, – 323 с.

16. Корнейчук Н.П. Экстремальные задачи теории приближения / Н.П. Корнейчук. – М.: Наука, 1976. – 320 с.

17. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: в 3т. / Г.М. Фихтенгольц. – М.: Наука, 1966 – т. 3. – 607 с.

18. Сорич В.А. Найкраще наближення суми функцій різних класів/ В.А.Сорич, Н.М.Сорич // Наук.пр.Кам’янець-Подільського нац. ун-ту імені Івана Огієнка : зб.за підсумками звіт.наук.конф.викл., докторантів і асп.:вип.16,у 3 т. – Кам’янець- Подільський: Кам’янець-Подільський національний університет,2017.-Т.2-С.70-75.