Міністерство освіти і науки України
Кам’янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка
Фізико-математичний факультет
Кафедра математики

Дипломна робота магістра

з теми: **«Функція Гріна-Самойленка задачі про інваріантні тори злічених систем диференціальних рівнянь»**

Виконав: студент II курсу, групи М1-М19р
Спеціальності 014 Середня освіта (Математика)
Лобунько Владислав Андрійович

Науковий керівник: **Авдеюк П.І. ,**
кандидат фізико-математичних наук, доцент

Рецензент: **Кріль С.О. ,**
кандидат фізико-математичних наук, доцент

Кам’янець-Подільський, 2020

ЗМІСТ

ВСТУП

Дослідженню тороїдальних многовидів, структури траєкторій на многовидах та в їх околах присвячено праці В.І. Арнольда [4], М.М. Боголюбова [5], Ю.О. Мітропольського [6], А.М. Самойленка[27-48], О.Б. Ликової [17], та багатьох інших математиків.

Асимптотичні методи Крилова-Боголюбова-Митропольського є ефективним апаратом для наближеної побудови умовно-періодичних рухів, що заповнюють інваріантні тори. Один із підходів до теорії збурення інваріантних тороїдальних многовидів динамічних систем, пов'язаний з використанням функції Гріна для лінеарізованої задачі, було запропоновано А.М. Самойленко [28]. Цей підхід дозволив з єдиної та загальної точки зору викласти теорію збурення як гладких так і недифференційовних інваріантних тороїдальних многовидів динамічних систем та дав теореми існування таких многовидів. У статті [30] було з'ясовано характер поведінки розв'язків, що починаються в околі тора, інваріантного відносно даної системи диференціальних рівнянь, у припущенні, що тор є експоненціально стійким. Тобто було вказано умови при яких довільна траєкторія з малого околу тора τ_m притягується до відповідної траєкторії на τ_m за експоненціальним законом. Отримані умови співпадають з умовами, вказаними в [28], що гарантують збереження при малих збуреннях експоненціально стійкого інваріантного тора. Очевидний зв'язок цих досліджень з дослідженнями стійкості інваріантних торів, проведених методом інтегральних многовидів [5,17]. Підхід, запропонований А.М. Самойленко, викликав низку досліджень в напрямку вивчення питань існування та властивостей гладкості функції Гріна задачі про інваріантні тори, звідність в околі інваріантних торів, експоненціальної стійкості, експоненціального розщеплення та ін. Серед праць вказаних напрямків необхідно відмітити роботи А.М. Самойленко

[27-38], Ю.О. Мітропольського [17-20], А.М. Самойленко та В.Л. Кулика [39-41], В.Л. Кулика [14]. В роботах Ю.В. Теплінського [49-54] розглянуті питання існування інваріантних торів лінійної і нелінійної зліченних систем диференціальних рівнянь.

Поштовхом до дослідження нескінчених систем диференціальних рівнянь послужила теорема про однозначність розв'язку задачі Коші для зліченної системи диференціальних рівнянь, яку довів А.Н. Тіхонов. К.П.Персідський [22,23] довів теореми існування та единості розв'язку зліченної системи диференціальних рівнянь, дослідив стійкість розв'язків нескінченої систем диференціальних рівнянь у повному лінійному нормованому просторі. Згодом визначились декілька напрямків у дослідженнях зліченних систем диференціальних рівнянь: загальна теорія зліченних систем, стійкість розв'язків, теорія характеристичних чисел зліченних систем, зліченні системи диференціальних рівнянь у частинних похідних, диференціальні рівняння в нормованих просторах, інваріантні многовиди зліченних систем диференціальних рівнянь. Систематизація результатів, отриманих в теорії нескінченних систем диференціальних рівнянь була проведена в монографії К.Г.Валеева та О.А.Жаутикова [8]. Слід також відмітити збірник праць К.П. Персідського [24].

Для зліченних систем диференціальних рівнянь в роботах А.М.Самойленко і Ю.В. Теплінського [44-48], були доведені теореми існування інваріантних тороїдальних многовидів. На основі цих результатів в роботах Ю.В. Теплінського та П.І. Авдеюка [53-56] досліджувалися питання існування інваріантних тороїдальних многовидів зліченних систем диференціальних рівнянь, залежність функції Гріна-Самойленка задачі про інваріантний тор від параметра, умови диференційованості функції Гріна-Самойленка, розглянуті умови, при яких будь-яка траєкторія з малого околу тора притягується до відповідної траєкторії на торі у випадку нелінійної та квазілінійної систем диференціальних рівнянь.

Мета роботи. Стосується вказаних вище досліджень, зокрема дослідити умови існування, найпростіші властивості функції Гріна-Самойленко задачі про інваріантні тори.

Актуальність теми. Багато задач науки та техніки направлено на дослідження поведінки фізико-механічних об’єктів, функція стану яких визначається системами алгебраїчних, диференціальних та інтегральних рівнянь. Із зрозумілих причин розвинуті методи дослідження систем з простою математичною моделлю, та ще й з прямою постановкою задачі, коли визначається функція стану системи, що перебуває в заданому зовнішньо-динамічному середовищі. Задачі керування, спостереження, дослідження динаміки систем за неповної інформації про них вивчені менше. Особливо це стосується динаміки систем з розподіленими параметрами. Проблеми тут починаються з вибору, побудови та ідентифікації параметрів моделі і зростають при розв’язанні початково-крайових задач таких систем.

Об'єктом дослідження. Є необхідні та достатні критерії існування нетривіальних обмежених на всій осі розв’язків неоднорідних лінійних розширень та функції Гріна-Самойленка.

Матеріалом дослідження є функція Гріна – Самойленка $G_0(\tau, \varphi)$ задачі про інваріантний тор.

Апробація роботи. Основні спостереження та результати дослідження викладені в наукових доповідях та повідомленнях на студентській науковій конференції за підсумками НДР у Кам'янець-Подільському національному університеті імені Івана Огієнка.

Структура роботи. Робота складається із вступу, трьох частин, висновку та списку використаної літератури.

У вступі обґрунтовується вибір теми та актуальність обраної для дослідження проблеми, мета та завдання роботи, вказана наукова новизна отриманих результатів дослідження, їх теоретичне і практичне значення, описана апробація наукової роботи.

У першій частині «Загальні питання теорії систем диференціальних рівнянь» розглянуто загальні питання теорії нескінчених систем диференціальних рівнянь, зокрема, поняття матриціанта.

Розглядається система диференціальних рівнянь виду

$$\frac{dX}{dt} = P(t)X,$$

де — неперервна матрична функція в деякому інтервалі (*a, b*) зміни аргументу *t*, з'ясовано властивості функції Гріна задачі про обмежені розв'язки, наведено умови існування та єдиності таких функцій.

З'ясували, що матрицант можна представити у вигляді ряду

$$\Omega_{t_0}^{t} = E + \int_{t_0}^{t} P(t)dt + \int_{t_0}^{t} P(t)dt \int_{t_0}^{t} P(t_1)dt_1 + ...,$$

який збігається абсолютно й рівномірно в будь-якому замкненому інтервалі, в якому функція *P(t)* неперервна.

Наведено деякі властивості матрицанту.

1^0 $\qquad \Omega_{t_0}^{t} = \Omega_{t_0}^{t}\Omega_{t_0}^{t_1} \qquad (t_{0,}t_{1,}t \subset (a,b)).$

2^0 $\qquad \Omega_{t_0}^{t}(P+Q) = \Omega_{t_0}^{t}(P)\Omega_{t_0}^{t_1}(S)$,

де $S = [\Omega_{t_0}^{t}(P)]^{-1}Q\Omega_{t_0}^{t}(P).$

$3°$ $\qquad \ln\left|\Omega_{t_0}^{t}(P)\right| = \int_{t_0}^{t} S_p P dt$

4^0 Якщо $A = \|a_{ik}\|_1^n = const$, то $\Omega_{t^0}^{t}(A) = e^{A(t-t_0)}$.

$5°$ Якщо $mod\,P(t) \le Q(t)$, то $mod\,\Omega_{t_0}^{t}(P) \le \Omega_{t_0}^{t}(Q)$ $(t > t_0)$.

6^0 $\qquad \mathrm{mod}\,\Omega_{t_0}^{t}(P) \le (\frac{1}{n}e^{nh(t)} + \frac{n-1}{n})E \le e^{nh(t)}E \quad (t > t_0)$, де $h(t) = \int_{t_0}^{t} g(t)dt$,

$g(t) = \max_{1 \le i,k \le n}\{|P_{ik}(t)|\}.$

Для системи рівнянь $\dot{x} = A(t)x + f(t)$ існує функція Гріна задачі про обмежені на всій осі *R* розв'язки, якщо існує неперервна на всій осі *R* матрична функція *C(τ)* така, що функція

$$G(t,\tau) = \begin{cases} \Omega_\tau^t(A)C(\tau), \tau < t, \\ \Omega_\tau^t(A)(C(\tau) - I_n)\tau > t; \end{cases}$$

задовольняє оцінці

$$\|G(t,\tau)\| \le K \exp\{-\gamma_1 |t-\tau|\}$$

де *K, γ – const*>0. При цьому функцію *G(t,τ)* будемо називати функцією Гріна-Самойленко задачі про обмежені розв'язки для системи рівнянь (або просто - ФГС).

Розглянута теорема

Теорема. *Для існування ФГС G(t, τ) необхідно й досить, щоб існувала матрична функція S(t) є* $C^1(R)$*, яка задовольняє умові (1.2.5). Причому у випадку, коли detS(t) ≠ 0, ФГС G(t, τ) буде єдиною і однозначною*.

Інваріантні тори злічених систем диференціальних рівнянь розглянуто у другій частині.

Фундаментальна матриця $\Omega_\tau^t(\varphi)$розв'язків системи рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = P\left(\varphi_t(\varphi)\right)x,$$

де $\varphi = \varphi_t(\varphi)$ - єдиний розв'язок системи рівнянь $\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi)$, $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$ *m*-вимірний вектор, $a(\varphi) = \{a_1(\varphi), \ldots, a_m(\varphi)\}$. Причому $\varphi_0(\varphi) = \varphi$, де φ - довільний сталий вектор з множини R^m.

Функцію

$$G_0(\tau,\varphi) = \begin{cases} \Omega_\tau^0(\varphi)C(\varphi_\tau(\varphi)), & \tau \le 0 \\ \Omega_\tau^0(\varphi)[C(\varphi_\tau(\varphi)) - E], & \tau > 0 \end{cases}$$

називають $G_0(\tau,\varphi)$ функцією Гріна-Самойленко системи рівнянь

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \quad \frac{dx}{dt} = P(\varphi)x \qquad (*)$$

Вкажемо найпростіші властивості ФГС:

$$G_0(0,\varphi) - G_0(+0,\varphi) = E.$$

Якщо $G_t(\tau,\varphi)$ – матриця, яка визначається співвідношенням

$$G_t(\tau,\varphi) = \begin{cases} \Omega_\tau^t(\varphi)C(\varphi_\tau(\varphi)), & t \geq \tau, \\ -\Omega_\tau^t(\varphi)[E - C(\varphi_\tau(\varphi))], & t < \tau. \end{cases}$$

то

$$G_0(\tau,\varphi_t(\varphi)) = G_t(\tau + t,\varphi).$$

Із цієї рівності випливає, що матриця

$$G_0(-t,\varphi_t(\varphi)) = G_t(0,\varphi) = \begin{cases} \Omega_0^t(\varphi)C(\varphi), & t \geq 0, \\ -\Omega_0^t(\varphi)[E - C(\varphi)], & t < 0 \end{cases}$$

складається із розв'язків системи рівнянь, розглянутих відповідно при $t \geq 0$ та $t < 0$.

Покладемо

$$u(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} G_0(\tau,\varphi) f(\varphi_\tau(\varphi)) d\tau,$$

зрозуміло, що $u \in C(\tau_m)$.

Множина

$$x = u(\varphi) = Tf(\varphi), \quad \varphi \in \tau_m,$$

визначає інваріантний тор системи рівнянь

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \quad \frac{dx}{dt} = P(\varphi)x + f(\varphi). \qquad (**)$$

Отже, існування функції Гріна системи рівнянь (*) гарантує існування інваріантного тору системи рівнянь (**) для довільної функції $f \in C(\tau_m)$.

Розглянута теорема: *Нехай* $a \in C_{Lip}(\tau_m)$, $P \in C(\tau_m)$ *і система рівнянь (*) має ФГС* $G_0(\tau,\varphi)$. *Тор* $x = 0$ $\varphi \in \tau_m$ *є єдиним інваріантним тором системи(**) тоді і тільки тоді, коли ця система не має інших функцій Гріна, крім* $G_0(\tau,\varphi)$.

Надано доведення теореми існування єдиного інваріантного тору зліченної системи диференціальних рівнянь.

Крім того, наведена лема: *Нехай функція* $G_0(\tau,\varphi)$ *й тільки вона є ФГС системи рівнянь (2.1.5). Тоді матриця* $C(\varphi) = G_0(0,\varphi)$ *задовольняє рівностям*

$$C(\varphi_t(\varphi)) = \Omega_0^t(\varphi) C(\varphi) \Omega_t^0(\varphi) \quad \forall t \in R, \quad \varphi \in \tau_m,$$

$$C^2(\varphi) = C(\varphi) \quad \forall \varphi \in \tau_m.$$

Третя частина містить дослідження залежності функції Гріна-Самойленко зліченної системи диференціальних рівнянь від параметра.

Розглянуто систему диференціальних рівнянь

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi, p), \quad \frac{dh}{dt} = P(\varphi, p)h, \tag{!}$$

де $\varphi \in m$, $h \in m$, $a(\varphi,p)$, 2π-періодична по φ_i, ($i = 1, 2, ...$) вектор-функція, $P(\varphi,p)$ - 2π- періодична по φ_i, ($i = 1, 2, ...$) нескінчена матриця, $p \in [p_1, p_2]$ — параметр.

Та вкорочену систему рівнянь

$$\frac{dh}{dt} = P(\varphi_t^p(\varphi), p)h, \tag{+}$$

Покладемо

$$\overset{(m)}{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m, 0, 0, \ldots), \quad \varphi_t^p(\overset{(m)}{\varphi}) = \{\varphi_1^p(t, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m, \ \ldots), \ldots\},$$

та розглянемо систему рівнянь виду

$$\frac{dh}{dt} = P(\varphi_t^p(\overset{(m)}{\varphi}), p)h, \tag{++}$$

Матрицант системи рівнянь (+) позначимо $\Omega_\tau^t(p,\ \varphi)$, а матрицант системи (++) — $\Omega_\tau^t(p,\ \overset{(m)}{\varphi})$.

Наведено лема 1: *Нехай система рівнянь (!) така, що*

1. *$P(\varphi,p)$, $a(\varphi,p) \in C_{Lip}(\mathcal{T}_\infty)$ з коефіцієнтами відповідно $\varepsilon(m)$, $\alpha(m)$.*
2. $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \sup\limits_{\varphi} \left| p_{sj}(\varphi, p) \right| \le p^o = const < \infty, \quad s = 1, 2, \dots$
3. $\left\| \Omega_\tau^t(p,\varphi) \right\| \le N \exp\{-\gamma(t-\tau)\},\ N > 0, \gamma > 0, t > \tau$ *причому γ та N не залежать від h, φ, p.*
4. *$\gamma > \alpha(0) + 1$.*

Тоді рівномірно за нормою $\lim \Omega_\tau^o(p,\ \overset{(m)}{\varphi}) = \Omega_\tau^o(p,\ \varphi)$.

Та лема 2. *Нехай система рівнянь (!) така, що*

1. $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \sup\limits_{\varphi} \left| p_{sj}(\varphi, p) \right| \le p^o = const < \infty, \quad s = 1, 2, \dots$
2. $$\left\| a(\varphi, p) - a(\overline{\varphi}, \overline{p}) \right\| \le \alpha_1 \left\| \varphi - \overline{\varphi} \right\| + \alpha_2 \omega(\left| p - \overline{p} \right|),$$
   $$\left\| P(\varphi, p) - P(\overline{\varphi}, \overline{p}) \right\| \le \beta_1 \left\| \varphi - \overline{\varphi} \right\| + \beta_2 \omega(\left| p - \overline{p} \right|),$$
   $$\text{для всіх} \quad \varphi, \overline{\varphi} \in m, \quad p, \overline{p} \in [p_1, p_2]$$
   тут $\omega(z)$ — неперервна не спадна скалярна функція, що визначена на $[0,\ p_2 - p_1]$, $\omega(0) = 0$.
3. *Існує функція Гріна задачі про інваріантні тори $G_o(\tau,\ p,\ \varphi)$, що задовольняє оцінку*
   $$\| G_o(\tau, p, \varphi) \| \le K \exp\{-\gamma / \tau /\}$$
   де K, γ — додатні сталі, що не залежать від τ, φ, $p \in [p_1, p_2]$.

Тоді функція Гріна $G_o(\tau,\ p,\ \overset{(m)}{\varphi})$ системи рівнянь (++) неперервна за сукупністю змінних p, $\overset{(m)}{\varphi}$ для будь-якого натурального m.

На основі лем 1 та 2 сформульована така теорема

Теорема 1. *Нехай система рівнянь (!) така, що при $p \in [p_1,p_2]$*

1. *$P(\varphi,p)$, $a(\varphi,p) \in C_{Lip}(\mathcal{T}_\infty)$ з коефіцієнтами відповідно $\varepsilon(m)$, $\alpha(m)$.*

2. $\sum_{j=1}^{\infty} \sup_{\varphi} \left| p_{sj}(\varphi, p) \right| \le p^{o} = const < \infty, \quad s = 1, 2, \dots$

3. $\left\| \Omega_{\tau}^{t}(p, \varphi) \right\| \le N \exp\{-\gamma(t-\tau)\}, N > 0, \gamma > 0, t > \tau$ *причому γ та N не залежать від h, φ, p.*

4. $\gamma > \alpha(0) + 1$.

5. $$\left\| a(\varphi, p) - a(\overline{\varphi}, \overline{p}) \right\| \le \alpha_1 \left\| \varphi - \overline{\varphi} \right\| + \alpha_2 \omega(\left| p - \overline{p} \right|),$$
$$\left\| P(\varphi, p) - P(\overline{\varphi}, \overline{p}) \right\| \le \beta_1 \left\| \varphi - \overline{\varphi} \right\| + \beta_2 \omega(\left| p - \overline{p} \right|),$$
для всіх $\varphi, \overline{\varphi} \in m, \quad p, \overline{p} \in [p_1, p_2]$
де $\omega(z)$ — неперервна не спадна скалярна функція, що визначена на $[0, p_2 - p_1]$, $\omega(0) = 0$; $\varphi, \overline{\varphi} \in m, \quad p, \overline{p} \in [p_1, p_2]$.

Тоді ФГС задачі про інваріантні тори системи диференціальних рівнянь (!) неперервна за параметром p.

Також, розглянуто систему диференціальних рівнянь

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi, p), \quad \frac{dh}{dt} = P(\varphi, p)h, \tag{!!}$$

де $\varphi \in R^m$, $h \in m$, $a(\varphi,p)$, 2π- періодична по φ_i, ($i = 1, 2, ...$) вектор-функція, $P(\varphi,p)$ - 2π- періодична по φ_i, ($i = 1, 2, ...$) нескінчена матриця, $p \in [p_1, p_2]$ — параметр.

Теорема 2. *Нехай система рівнянь (!!) така, що при $p \in [p_1,p_2]$*

1. *$P(\varphi,p)$, $a(\varphi,p)$ неперервно диференційовані по φ_i, ($i = 1, 2, ..., m$), p.*

2. $\sum_{j=1}^{\infty} \max_{\varphi} \left| p_{sj}(\varphi, p) \right| \le p^{o} = const < \infty, \quad s = 1, 2, \dots$

3. *Існує ФГС задачі про інваріантні тори системи диференціальних рівнянь (!!), що задовольняє нерівність.*

4. $$\sum_{j=1}^{\infty} \max_{\varphi, p} \left| \frac{\partial p_{sj}(\varphi, p)}{\partial \varphi_i} \right| \le p_s < \infty, \quad \sum_{s=1}^{\infty} p_s < \infty,$$
$$\sum_{i=1}^{\infty} \max_{\varphi, p} \left| \frac{\partial p_{ki}(\varphi, p)}{\partial \varphi_i} \right| \le l_k < \infty, \quad \sum_{k=1}^{\infty} l_k < \infty.$$

Тоді ФГС задачі про інваріантні тори системи диференціальних рівнянь (!!) диференційована по параметру p, якщо тільки $\gamma > \alpha$, *де* α *вибираємо за умовою*

$$\left|\left\langle \frac{\partial a(\varphi, p)}{\partial \varphi}\eta, \eta \right\rangle\right| \leq \alpha |\eta|^2, \quad \langle \cdot,\cdot \rangle$$ – евклідів добуток

$$|\eta| = |(\eta_1, \ldots, \eta_m)| = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \eta_i^2}.$$

РОЗДІЛ 1. ЗАГАЛЬНІ ПИТАННЯ ТЕОРІЇ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

1.1. Матрицант

Будемо розглядати систему диференціальних рівнянь виду

$$\frac{dX}{dt} = P(t)X, \tag{1.1.1}$$

де $P(t) = \left\| p_{ik}(t) \right\|_1^n$ — неперервна матрична функція в деякому інтервалі (a, b) зміни аргументу t.

Скористаємося методом послідовних наближень для визначення нормованого розв'язку системи, тобто розв'язку, що перетворюється в одиничну матрицю при $t = t_0$ [t_0 — фіксоване число з інтервалу (a, b)]. Послідовні наближення X_k (k = 0, 1, 2,…) будемо знаходити з рекурентних співвідношень вибираючи як наближення X_0 одиничну матрицю E.

$$\frac{dx_k}{dt} = P(t)X_{k-1} \quad (k = 1,2,\ldots). \tag{1.1.2}$$

Покладемо $X_k(t_0) = E$ (k = 0, 1,2,...), тоді ми зможемо X_k представити у вигляді

$$X_k = E + \int_{t_0}^{t} P(t)X_{k-1}dt \quad (\mathrm{k} = 1,2,\ldots). \tag{1.1.3}$$

Отже,

$$X_0 = E, \quad X_1 = E + \int_{t_0}^{t} P(t)dt, \quad X_2 = E + \int_{t_0}^{t} P(t)dt + \int_{t_0}^{t} P(t)dt \int_{t_0}^{t} P(t_1)dt_1, \ldots,$$

тобто X_k (k = 0, 1, 2, ...) є сума перших $k + 1$ членів матричного ряду

$$E + \int_{t_0}^{t} P(t)dt + \int_{t_0}^{t} P(t)dt \int_{t_0}^{t} P(t_1)dt_1 + \ldots . \tag{1.1.4}$$

Побудуємо мажорантний ряд, для того щоб довести, що цей ряд абсолютно й рівномірно збігається в будь-якій замкнутій частині інтервалу (a, b) і визначає шуканий розв'язок рівняння (1.1.1),.

Визначимо невід'ємні функції $g(t)$ і $h(t)$ в інтервалі (a, b) рівностями

$$g(t) = \max[\,|p_{11}(t)|, |p_{12}(t)|, ..., |p_{nn}(t)|\,], \quad h(t) = \left|\int_{t_0}^{t} g(t)dt\right| \tag{1.1.5}$$

Можна переконатися, що функції $g(t)$, а отже, й $h(t)$ неперервні в інтервалі (a, b).

Всі з n^2 скалярних рядів, на які розпадається матричний ряд, мажоруються рядом

$$1 + h(t) + \frac{nh^2(t)}{2!} + \frac{n^2h^3(t)}{3!} + ... \tag{1.1.6}$$

Дійсно,

$$\left|\left\{\int_{t_0}^{t} P(t)dt\right\}_{i,k}\right| = \left|\int_{t_0}^{t} p_{ik}(t)dt\right| \le \left|\int_{t_0}^{t} g(tdt)\right| = h(t),$$

$$\left|\left\{\int_{t_0}^{t} P(t)dt\int_{t_0}^{t} P(t_1)dt_1\right\}\right| = \left|\sum_{j=1}^{n}\int_{t_0}^{t} P_{ij}(t)dt\int_{t_0}^{t} P_{jk}(t_1)dt_1\right| \le n\left|\int_{t_0}^{t} g(t)dt\int_{t_0}^{t} g(t_1)dt_1\right| = \frac{nh^2(t)}{2}$$

і т.д.

В інтервалі (a, b) ряд (1.1.6) збігається, причому рівномірно в будь-якій замкненій частині цього інтервалу. Звідси випливає, що й матричний ряд збігається в (a, b) й причому абсолютно та рівномірно в будь-якому замкненому інтервалі, що входить в (a, b).

Перевіряємо, почленним диференціюванням, що сума ряду (1.1.4) є розв'язком рівняння; цей розв'язок перетворюється в E при $t = t_0$. Почленне диференціювання ряду допустиме, оскільки ряд, що виходить після диференціювання, відрізняється множником P від ряду (1.1.4) а, отже, як і ряд (1.1.4), є рівномірно збіжним у будь-якій замкненій частині інтервалу (a, b).

Тим самим доведено теорему про існування нормованого розв'язку рівняння. Цей розв'язок будемо позначати через $\Omega_{t_0}^{t}(P)$ або просто $\Omega_{t_0}^{t}$. Будь-який інший розв'язок матиме вигляд

$$X = \Omega_{t_0}^{t} C,$$

де C — довільна стала матриця. Із цієї формули випливає, що будь-який розв'язок, і зокрема нормований, однозначно визначався своїм значенням при $t = t_0$.

Нормований розв'язок $\Omega_{t_0}^{t}$ рівнянь часто називають матрицантом.

З'ясували, що матрицант можна представити у вигляді ряду

$$\Omega_{t_0}^{t} = E + \int_{t_0}^{t} P(t)dt + \int_{t_0}^{t} P(t)dt \int_{t_0}^{t} P(t_1)dt_1 + ..., \tag{1.1.7}$$

який збігається абсолютно й рівномірно в будь-якому замкненому інтервалі, в якому функція $P(t)$ неперервна.

Наведемо деякі властивості матрицанту.

1^0 $$\Omega_{t_0}^{t} = \Omega_{t_0}^{t} \Omega_{t_0}^{t_1} \quad (t_{0,} t_{1,} t \subset (a,b)).$$

Дійсно, оскільки $\Omega_{t_0}^{t}$ й $\Omega_{t_1}^{t}$ — два розв'язки рівняння (1.1.1), то

$$\Omega_{t_0}^{t} = \Omega_{t_1}^{t} C \text{ (C —стала матриця).}$$

Вважаючи що $t = t_1$, одержимо $P = \Omega_{t_0}^{t}$.

2^0 $$\Omega_{t_0}^{t}(P+Q) = \Omega_{t_0}^{t}(P)\Omega_{t_0}^{t_1}(S) \; ,$$

де $S = [\Omega_{t_0}^{t}(P)]^{-1} Q \Omega_{t_0}^{t}(P)$.

Для обґрунтування цієї формули покладемо $X = \Omega_{t_0}^{t}(P)$, $Y = \Omega_{t_0}^{t}(P+Q)$ та $Y=XZ$.

Диференціюючи почленно, знайдемо

$$(P+Q)XZ=PXZ+XdZ/dt.$$

Тоді

$$\frac{dZ}{dt} = X^{-1}QXZ \; ,$$

а, отже, оскільки потрібно, щоб $Z(t_0) = E$, то $Z = \Omega_{t_0}^{t}(X^{-1}QX)$.

Підставивши замість X, Y, Z відповідні матриканти, одержуємо формулу 2°.

3° $$\ln\left|\Omega_{t_0}^{t}(P)\right| = \int_{t_0}^{t} S_p P dt$$

Ця формула випливає з тотожності Якобі, якщо замість *X(t)* підставити $\Omega_{t_0}^{t}(P)$.

4^0 Якщо $A = \|a_{ik}\|_1^n = const$, то $\Omega_{t^0}^{t}(A) = e^{A(t-t_0)}$.

Залучимо такі позначення. Якщо $P = \|p_{ik}\|_1^n$ то через *modP* будемо позначати матрицю $\mathrm{mod}\, P = \| |p_{ik}| \|_1^n$. Крім того, якщо $A = \|a_{ik}\|_1^n$ і $B = \|b_{ik}\|_1^n$ дві дійсні матриці і $a_{ik}<b_{ik}$ $(i, k= 1, 2, ... n)$, то ми будемо писати $A \le B$.

5° Якщо $mod\, P(t) \le Q(t)$, то $mod\,\Omega_{t_0}^{t}(P) \le \Omega_{t_0}^{t}(Q)$ $(t>t_0)$.

Зазвичай матрицю *n*-го порядку, у якої всі елементи дорівнюють одиниці, позначають через *E*: $E = \|1\|$. Розглянемо функцію *g(t).* Тоді $mod\, P(t) \le g(t)\, E$. Звідси в силу 5° $mod\,\Omega_{t_0}^{t}(P) \le \Omega_{t_0}^{t}(g(t)E)$, $(t>t_0)$. Але $\Omega_{t_0}^{t}$ (g(t)*E*) є нормованим розв’язком рівняння

$$\frac{dX}{dt} = g(t)EX\ .$$

Згідно 4° $\Omega_{t_0}^{t}(g(t)I) = e^{h(t)I} \le (1 + h(t) + \frac{nh^2(t)}{2!} + \frac{n^2h^3(t)}{3!} + ...)I$, де $h(t) = \left| \int_{t_0}^{t} g(t)dt \right|$. Тому маємо

6^0 $\mathrm{mod}\,\Omega_{t_0}^{t}(P) \le (\frac{1}{n}e^{nh(t)} + \frac{n-1}{n})E \le e^{nh(t)}E$ $(t>t_0)$, де $h(t)=\int_{t_0}^{t} g(t)dt$,

$g(t) = \max\limits_{1 \le i,k \le n} \{|P_{ik}(t)|\}$.

З'ясуємо тепер, як за допомогою матриціанта визначається загальний розв’язок системи лінійних диференціальних рівнянь із правими частинами

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{k=1}^{n} p_{ik}(t)x_k + f_i(t) \ (i=1,2,\dots n),$$

тут $p_{ik}(t)$, $f_i(t)$ $(i,\ k = 1,\ 2,\ ...,\ n)$ — неперервні функції на інтервалі зміни аргументу *t*. Ввівши стовпцеві матриці («вектори») $x = (x_1,\ x_2,\ ....\ x_n)$ та

$f = (f_1,\ f_2,\ \ldots,\ f_n)$, а також квадратну матрицю $P = \|p_{ik}\|_1^n$, запишемо цю систему так:

$$\frac{dx}{dt} = P(t)x + f(t).$$

Підшукуємо розв’язок цього рівняння у вигляді

$$x = \Omega_{t_0}^{t}(P)z,$$

де z - невідомий стовпець, що залежить від t. Підставимо цей вираз для x, одержимо

$$p\Omega_{t_0}^{t}(P)z + \Omega_{t_0}^{t}(P)\frac{dz}{dt} = P\Omega_{t_0}^{t}(P)z + f(t),$$

звідси

$$\frac{dz}{dt} = [\Omega_{t_0}^{t}]^{-1} f(t).$$

З'інтегрувавши, знаходимо

$$z = \int_{t_0}^{t} \left[\Omega_{t_0}^{t}(P)\right]^{-1} f(\tau)d\tau + c,$$

де z - довільний сталий вектор. Підставимо цей вираз та одержимо

$$x = \Omega_{t_0}^{t}(P)\int_{t_0}^{t}\left[\Omega_{t_0}^{t}(P)\right]^{-1} f(\tau)d\tau + \Omega_{t_0}^{t}(P)c.$$

Нехай t має значення t_0, тоді $x(t_0) = c$. Тому формула набуде вигляду

$$x = \Omega_{t_0}^{t}(P)x(t_0) + \int_{t_0}^{t} K(t,\tau) f(\tau)d\tau,$$

де

$$K(t,\tau) = \Omega_{t_0}^{t}(P)\left[\Omega_{t_0}^{t}(P)\right]^{-1}$$

так звана матриця Коші.

Нехай відома фундаментальна система розв'язків (в інтервалі $a<x<b$): $y_1, y_2, \ldots, y_n$; диференціального рівняння (1.1.1).

Прирівнюємо до нуля такий визначник, в якому y означає шукану функцію:

$$W[y_1, y_2, ..., y_n, y] \equiv \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & ... & y_n & y \\ y_1' & y_2' & ... & y_n' & y' \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & ... & y_n^{(n)} & y^{(n)} \end{vmatrix} = 0 \tag{1.1.8}$$

Розклавши його за елементами останнього стовпчика, ми переконуємось у тому, що рівняння представляє собою однорідне диференціальне рівняння n-го порядку відносно функції y. При підстановці замість y функції y_i $(i = 1, 2, ..., n)$ ми отримуємо визначник з двома рівними стовпчиками. Зрозуміло, він тотожно рівний нулю. Отже, рівняння допускає частковий розв’язок $y_1, y_2, ..., y_n$.

Коефіцієнт при $y^{(n)}$ є $W[y_1, y_2, ..., y_n]$; він, як нам відомо, не перетворюється в нуль в інтервалі (a, b). Розділивши на нього обидві частини рівняння, отримаємо рівняння n-го порядку зі старшим коефіцієнтом, який рівний одиниці, а, по доведеному, таке рівняння однозначно визначається фундаментальною системою. Задача, таким чином, розв’язана.

Запишемо рівняння в розгорнутому вигляді:

$$y^{(n)}\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} -$$

$$- y^{(n-1)}\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \dots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \dots & y_n^{(n)} \end{vmatrix} + \dots$$

$$\dots + (-1)^n y\begin{vmatrix} y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & \dots & y_n'' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \dots & y_n^{(n)} \end{vmatrix} = 0$$

Якщо вихідне рівняння було написане у вигляді:

$$y^{(n)} = p_1 y^{(n-1)} + \dots + p_n y = 0,$$

то порівняння коефіцієнтів дає нам тотожність:

$$p_1 = -\frac{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \dots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \dots & y_n^{(n)} \end{vmatrix}}{W[y_1, y_2, \dots, y_n]}. \tag{1.1.9}$$

Елементарно впевнитись в тому, що визначник в чисельнику є похідна від визначника Вронського, який стоїть в знаменнику. Як відомо, похідна за x визначника, складеного із функції від x, рівна сумі n визначників, в яких у першого в першому рядку функції замінені похідними, а інші не змінені, в другому у другому рядку функції замінені похідними і т. д., у n-му в останньому рядку функції замінені похідними. Використовуючи це правило диференціювання до визначника Вронського, ми отримаємо n-1 перших доданків у вигляді визначників, які мають два однакових рядка, тобто перетворюються в нуль, а останній доданок, відмінний від нуля, і є чисельник у виразі для p_1. Отже, ми маємо:

$$p_1 = -\frac{W'(x)}{W(x)}, \tag{1.1.10}$$

звідки $W(x) = Ce^{-\int_{x_0}^{x} p_1 dx}$.

Подамо сталу через початкове значення $W(x)$ при $x = x_0$; отримаємо остаточно:

$$W(x) = W(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x} p_1 dx}. \tag{1.1.11}$$

Рівняння, яке визначає визначник Вронського (з точністю до сталого множника) через коефіцієнт даного рівняння при $y^{(n-1)}$, носить назву формули Остроградського - Ліувіля.

1.2. Функція Гріна задачі про обмежені розв‘язки

Нехай неоднорідна система рівнянь

$$\dot{x} = A(t)x + f(t) \tag{1.2.1}$$

при кожній неперервній та обмеженій на R векторній функції *f(t)* має єдиний обмежений на R розв'язок *x(t)* й цей розв'язок завжди можна зобразити в такому виді:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t,\tau) f(t) d\tau, \tag{1.2.2}$$

де *G(t, τ)* – функція Гріна задачі про обмежені розв'язки. Ця функція єдина та її можна відобразити у виді

$$G(t,\tau) = \begin{cases} \Omega_0^t(A)C\Omega_\tau^0(A), \tau < t \\ \Omega_0^t(A)(C - I_n)\Omega_\tau^0(A), \tau > t \end{cases}, \tag{1.2.3}$$

де C - стала матриця проектування ($C^2 = C$) на підпростір E^+ уздовж E^-. З обмеженості на всій осі R матричної функції випливає така оцінка для

$$G(t,\tau): \|G(t,\tau)\| \le K \exp\{-\gamma|t-\tau|\}, K, \gamma - const > 0. \tag{1.2.4}$$

Як відомо, для системи рівнянь існує заміна змінних Ляпунова $x = L(t)y$, що перетворює систему до відповідного розщепленого вигляду. Звідси відразу випливає, що матрична функція

$$C(\tau) = \Omega_0^\tau(A)C\Omega_\tau^0(A),$$

де C - матриця проектування, що входить у структуру функції Гріна, має таку властивість:

$$L(\tau)C(\tau)L^{-1}(\tau) \equiv diag\{I_{r^+}, 0\}$$

для всіх $\tau \in R$.

Допустимо тепер, що неоднорідна система рівнянь при кожній неперервній та обмеженій на R функції *f(t)* має хоча б один обмежений на R розв'язок. Звідси, взагалі кажучи, не буде випливати *e*-дихотомічність системи на всій осі R. Виникає питання: чи можна в цьому випадку кожен обмежений на R розв'язок системи представляти у вигляді, що потрібним чином змінює функції $G(t, \tau)$?

Будемо говорити, що для системи рівнянь існує функція Гріна задачі про обмежені на всій осі R розв'язки, якщо існує неперервна на всій осі R матрична функція $C(\tau)$ така, що функція

$$G(t,\tau)=\begin{cases}\Omega_\tau^t(A)C(\tau), \tau<t,\\ \Omega_\tau^t(A)(C(\tau)-I_n)\tau>t;\end{cases} \tag{1.2.5}$$

задовольняє оцінці

$$\|G(t,\tau)\|\le K\exp\{-\gamma_1|t-\tau|\} \tag{1.2.6}$$

де K, γ – $const>0$. При цьому функцію $G(t,\tau)$ будемо називати функцією Гріна-Самойленко задачі про обмежені розв'язки для системи рівнянь (або просто - ФГС).

Теорема. *Для існування ФГС $G(t, \tau)$ необхідно й досить, щоб існувала матрична функція $S(t)$ є $C^1(R)$, яка задовольняє умові (1.2.5). Причому у випадку, коли $\det S(t) \neq 0$, ФГС $G(t, \tau)$ буде єдиною і однозначною.*

Доведення. Необхідність відразу випливає з такого представлення матричної функції $S(t)$:

$$\frac{1}{2}S(t)=\int_t^\infty \Omega_\tau^t(A)(C(\tau)-I_n)(\Omega_\tau^t(A)(C(\tau)-I_n))^*d\tau-\int_{-\infty}^t \Omega_\tau^t(A)C(\tau)(\Omega_\tau^t(A)C(\tau))^*d\tau$$

Можемо впевнитись, безпосередньою перевіркою, у виконанні оцінки.

Доведення достатності здіснимо у два етапи. На першому з'ясуємо якою повинна бути матрична функція $C(\tau)$ у припущенні, що функція задовольняє наведеній оцінці? В другій частині вже безпосередньо продемонструємо вигляд цієї функції таким чином, щоб виконувалася оцінка.

Систему рівнянь, за умовами теореми, перетворимо до необхідного вигляду деякою заміною змінних Ляпунова $x=L(t)y$.

Матрицант $\Omega_\tau^t(A)$ цієї системи рівнянь має вигляд:

$$\Omega_\tau^t(\overline{A}) = \begin{bmatrix} \omega_1(t,\tau) & 0 & 0 \\ 0 & \omega_2(t,\tau) & 0 \\ \omega_3(t,\tau) & \omega_4(t,\tau) & \omega_5(t,\tau) \end{bmatrix}, \qquad (1.2.7)$$

де

$$\omega_1(t,\tau) = \Omega_\tau^t(A^+), \omega_2(t,\tau) = \Omega_\tau^t(A^-),$$
$$\omega_3(t,\tau) = \int_\tau^t \Omega_{t_1}^t(\hat{A}) A_1(t_1) \Omega_\tau^t(A^+) dt_1,$$
$$\omega_4(t,\tau) = \int_\tau^t \Omega_{t_1}^t(\hat{A}) A_2(t_1) \Omega_\tau^t(A^-) dt_1, \omega_5(t,\tau) = \Omega_\tau^t(\hat{A}).$$

І. Допустимо, що матрична функція *C(τ)* задовольняє оцінкам

$$\begin{aligned} &\left\|\Omega_\tau^t(\overline{A}) C(\tau)\right\| \le K \exp\left\{-\gamma_1 |t-\tau|\right\}, \tau \le t, \\ &\left\|\Omega_\tau^t(\overline{A})(C(\tau) - I_n)\right\| \le K \exp\left\{-\gamma_1 |t-\tau|\right\}, t \le \tau, \end{aligned} \qquad (1.2.8)$$

де $K, \gamma_1 - const > 0$.

Запишемо матрицю *C(τ)* в блочному вигляді

$$C(\tau) = \begin{bmatrix} C_{11}(\tau) & C_{12}(\tau) & C_{13}(\tau) \\ C_{21}(\tau) & C_{22}(\tau) & C_{23}(\tau) \\ C_{31}(\tau) & C_{32}(\tau) & C_{33}(\tau) \end{bmatrix} \qquad (1.2.9)$$

відповідно представленню матриціанта.

З оцінок (1.2.8) випливає

$$\left\|\Omega_\tau^t(A^+) C_{12}(\tau)\right\| \le K \exp\left\{-\gamma_1 |t-\tau|\right\}. \qquad (1.2.10)$$

Тоді одержуємо

$$\left\|C_{12}(\tau)\right\| = \left\|\Omega_\tau^t(\overline{A}) \Omega_t^\tau(\overline{A}) C(\tau)\right\| \le K \left\|\Omega_t^\tau(\overline{A})\right\| \exp\left\{-\gamma_1 |t-\tau|\right\} \le K^2 \exp\left\{-(\gamma+\gamma_1)|\tau - t|\right\}, t \le \tau$$

Перейшовши в останній нерівності до границі при $t \to \infty$, одержимо тотожність $C_{12}(\tau) \equiv 0.$ Аналогічно встановлюємо, що $C_{13}(\tau) \equiv 0, C_{21}(\tau) \equiv 0,$ $C_{23}(\tau) \equiv 0$ при всіх t є R.

Покажемо тепер, що $C_n(\tau) \equiv E_r$. - одинична матриця. Дійсно, якщо в деякій точці τ $C_{11}(\tau_0) \neq E_r$, то

$$l\underset{t\to\infty}{im}\left\|\Omega_{\tau_0}^t(A^+)(C_{11}(\tau_0)-E_r)\right\|=0,$$

що неможливо.

Аналогічно має бути $C_{22}(\tau) \equiv 0$, при всіх $\tau \in R$.

З'ясуємо тепер, якими повинні бути функції $C_{31}(\tau), C_{32}(\tau), C_{33}(\tau)$. З оцінок (1.2.8) випливає

$$\begin{aligned}&\left\|\omega_3(t,\tau)+\omega_5(t,\tau)C_{31}(\tau)\right\|\le K\exp\left\{-\gamma_1(t-\tau)\right\},\tau\le t,\\&\left\|\omega_5(t,\tau)C_{31}(\tau)\right\|\le K\exp\left\{-\gamma_1(t-\tau)\right\},t\le\tau.\end{aligned} \tag{1.2.11}$$

Матрична функція $C_{31}(\tau)$ при $\tau \to -\infty$ повинна експоненціально наближатися до деякої обмеженій на R_- функції, а при $\tau \to +\infty$ збігатися до нуля. Покажемо це

При $\tau \in R_-$ одержимо

$$\left\|\omega_5(\tau,0)\omega_3(0,\tau)+C_{31}(\tau)\right\|\le\left\|\omega_5(\tau,0)\right\|\cdot\left\|\omega_3(0,\tau)+\omega_5(0,\tau)C_{31}(\tau)\right\|\le K^2\exp\left\{(\gamma+\gamma_1)\tau\right\},$$

а якщо $\tau \in R_+$, то

$$\left\|C_{31}(\tau)\right\|\le\left\|\omega_5(\tau,0)\right\|\cdot\left\|\omega_5(0,\tau)C_{31}(\tau)\right\|\le K^2\exp\left\{-(\gamma-\gamma_1)\tau\right\}.$$

Переконаємось тепер, що функція $\omega_5(\tau,0),\omega_3(0,\tau)$ є обмеженою на всій півосі R_-

$$\begin{aligned}&\left\|\omega_5(\tau,0)\omega_3(0,\tau)\right\|=\left\|\Omega_0^\tau(\hat{A})\int_\tau^0\Omega_{t_1}^0(\hat{A})A_1(t_1)\Omega_\tau^{t_1}(A^+)dt_1\right\|\le\\&\le K\int_\tau^0\left\|\Omega_{t_1}^\tau(\hat{A})\right\|\cdot\left\|\Omega_\tau^{t_1}(A^+)\right\|dt_1\le K^2\int_\tau^0\exp\left\{2\gamma(\tau-t_1)\right\}dt_1\le\frac{K^2}{2\gamma}\end{aligned} \tag{1.2.12}$$

Встановимо експонентне прямування до нуля при $\tau \to -\infty$ матричної функції $C_{32}(\tau)$, та наближення її до деякої обмеженої на R₊ функції при $\tau \to +\infty$, аналогічно.

Для цього дослідимо поведінку на нескінченності матричної функції $C_{33}(\tau)$. Зважаючи на оцінки (1.2.12), запишемо такі нерівності:

$$\begin{aligned} &\left\|\omega_5(t,\tau)C_{33}(\tau)\right\| \le K\exp\left\{-\gamma_1(t-\tau)\right\}, \tau \le t, \\ &\left\|\omega_5(t,\tau)(C_{31}(\tau)-E_r)\right\| \le K\exp\left\{-\gamma_1(t-\tau)\right\}, t \le \tau. \end{aligned} \tag{1.2.13}$$

Тоді маємо оцінки

$$\begin{aligned} &\left\|C_{33}(\tau)\right\| \le \left\|\omega_5^{-1}(0,\tau)\right\| \cdot \left\|\omega_5(0,\tau)C_{33}(\tau)\right\| \le K^2\exp\left\{(\gamma+\gamma_1)\tau\right\}, \tau < 0, \\ &\left\|C_{33}(\tau)-E_{\hat r}\right\| \le \left\|\omega_5^{-1}(0,\tau)\right\| \cdot \left\|\omega_5(0,\tau)(C_{33}(\tau)-E_{\hat r})\right\| \le K^2\exp\left\{-(\gamma+\gamma_1)\tau\right\}, \tau > 0. \end{aligned} \tag{1.2.14}$$

Отже, для виконання оцінок необхідно, щоб для матричних функцій $C_{31}(\tau), C_{32}(\tau), C_{33}(\tau)$ виконувалися умови

$$\begin{aligned} &\left\|C_{31}(\tau)-F_1(\tau)\right\| \le K\exp\left\{\alpha\tau\right\}, \tau < 0 \\ &\left\|C_{31}(\tau)\right\| \le K\exp\left\{-\alpha\tau\right\}, \tau > 0 \\ &\left\|C_{32}(\tau)\right\| \le K\exp\left\{\alpha\tau\right\}, \tau < 0 \\ &\left\|C_{32}(\tau)-F_2(\tau)\right\| \le K\exp\left\{-\alpha\tau\right\}, \tau > 0 \\ &\left\|C_{33}(\tau)\right\| \le K\exp\left\{\alpha\tau\right\}, \tau < 0 \\ &\left\|C_{31}(\tau)-I_{\hat r}\right\| \le K\exp\left\{-\alpha\tau\right\}, \tau > 0 \end{aligned} \tag{1.2.15}$$

де $K, \alpha = \gamma + \gamma_1 - const > 0,$

$$F_1(\tau) = -\int_\tau^0 \Omega_{t_1}^{\tau}(\hat A)A_1(t_1)\Omega_{\tau}^{t_1}(A^+)dt_1,$$

$$F_2(\tau) = -\int_0^\tau \Omega_{t_1}^{\tau}(\hat A)A_2(t_1)\Omega_{\tau}^{t_1}(A^-)dt_1.$$

2. Щоб показати, що для будь-яких матричних функцій $C_{31}(\tau),\ C_{32}(\tau),$ $C_{33}(\tau)$, які задовольняють оцінкам при досить великому фіксованому $\alpha>0$, виконуються основні нерівності, припустимо

$$C_{11}\equiv E_{r^+}, C_{12}\equiv 0, C_{13}\equiv 0, C_{21}\equiv 0, C_{22}\equiv 0, C_{23}\equiv 0. \qquad (1.2.16)$$

Можливі такі випадки:

1. $0\le\tau\le t$:

$$\left\|\omega_3(t,\tau)+\omega_5(t,\tau)C_{31}(\tau)\right\|\le K\int_\tau^t\left\|\Omega_{t_1}^{\tau}(\hat{A})\right\|\cdot\left\|\Omega_{\tau}^{t_1}(A^+)\right\|dt_1+\left\|\Omega_{\tau}^{t}(\hat{A})\right\|\left\|C_{31}(\tau)\right\|\le$$

$$\le K\int_\tau^t\exp\{-\gamma(t-t_1)-\gamma(t_1-\tau)\}dt_1+K\exp\{-(\gamma-\varepsilon)(t-\varepsilon)\}.$$

2. $\tau\le 0\le t$:

$$\left\|\omega_3(t,\tau)+\omega_5(t,\tau)C_{31}(\tau)\right\|\le$$

$$\le\left\|\int_\tau^0\Omega_{t_1}^{t}(\hat{A})A_1(t_1)\cdot\Omega_{\tau}^{t_1}(A^+)dt_1+\int_0^t\Omega_{t_1}^{t}(\hat{A})A_1(t_1)\cdot\Omega_{\tau}^{t_1}(A^+)dt_1+\Omega_{\tau}^{t}(\hat{A})C_{31}(\tau)\right\|\le$$

$$\le K\left\|\Omega_0^t(\hat{A})\right\|\cdot\left\|\int_\tau^0\Omega_{t_1}^{0}(\hat{A})A_1(t_1)\cdot\Omega_{\tau}^{t_1}(A^+)dt_1+\Omega_{\tau}^{0}(\hat{A})C_{31}(\tau)\right\|+K\int_0^t\left\|\Omega_{t_1}^{t}(\hat{A})\right\|\cdot\left\|\Omega_{\tau}^{t_1}(A^+)\right\|dt_1\le$$

$$\le K\exp\{-(\gamma t+\alpha\tau)\}+K\int_0^t\exp\{-\gamma(t-t_1)-\gamma(t_1-\tau)\}dt_1\le K_\varepsilon\exp\{-(\gamma-\varepsilon)(t-\tau)\}.$$

3. $\tau\le t\le 0$:

$$\left\|\omega_3(t,\tau)+\omega_5(t,\tau)C_{31}(\tau)\right\|\le$$

$$\le\left\|\int_\tau^0\Omega_{t_1}^{t}(\hat{A})A_1(t_1)\cdot\Omega_{\tau}^{t_1}(A^+)dt_1+\Omega_{\tau}^{t}(\hat{A})C_{31}(\tau)-\int_t^0\Omega_{t_1}^{t}(\hat{A})A_1(t_1)\cdot\Omega_{\tau}^{t_1}(A^+)dt_1\right\|\le$$

$$\le\left\|\Omega_0^t(\hat{A})\right\|\cdot\left\|\int_\tau^0\Omega_{t_1}^{0}(\hat{A})A_1(t_1)\cdot\Omega_{\tau}^{t_1}(A^+)dt_1+\Omega_{\tau}^{0}(\hat{A})C_{31}(\tau)\right\|+K\int_t^0\left\|\Omega_{t_1}^{t}(\hat{A})\right\|\cdot\left\|\Omega_{\tau}^{t_1}(A^+)\right\|dt_1\le$$

$$\le K\exp\{-\alpha(t+\tau)\}+K(\exp\{-\gamma(t-\tau)\}-\exp\{\gamma(t+\tau)\})\le K\exp\{-\gamma^*(t-\tau)\}.$$

4. $0<t\le\tau$:

$$\left\|\Omega_{\tau}^{t}(\hat{A})C_{31}(\tau)\right\|\le\left\|\Omega_0^t(\hat{A})\right\|\cdot\left\|\Omega_{\tau}^{0}(\hat{A})\right\|\left\|C_{31}(t)\right\|\le K\exp\{\gamma^*(t-\tau)\}.$$

5. $t\le 0\le\tau$:

$$\left\|\Omega_{\tau}^{t}(\hat{A})C_{31}(\tau)\right\|\le K\exp\{\gamma t-\alpha^*\tau\}\le K\exp\{\gamma^*(t-\tau)\}.$$

З урахуванням обмеженості матричної функції $C_{31}(\tau)$, на R_-, одержуємо

6. $t\le\tau\le 0$

$$\left\|\Omega_\tau^t(\hat{A})C_{31}(\tau)\right\| \le K\left\|\Omega_\tau^t(\hat{A})\right\| \le K\exp\{\gamma(t-\tau)\}.$$

Тепер аналогічно виходять оцінки з матричними функціями $C_{32}(\tau)$, та $C_{33}(\tau)$.

Тоді, якщо взяти матричну функцію

$$\overline{C}(\tau) = \begin{bmatrix} E_{r^+} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ C_{31}(\tau) & C_{32}(\tau) & C_{33}(\tau) \end{bmatrix}, \qquad (1.2.17)$$

у якій блокові матричні функції $C_{3j}(\tau)$, $j=\overline{1,3}$, задовольняють оцінкам при досить великому $\alpha > 0$ (або збігаються на нескінченостях або з нулем, або відповідно з функціями F_1, F_2, E_r, а на скінченому проміжку часу довільні), то ФГС для системи рівнянь:

$$\overline{G}(t,\tau) = \begin{cases} \Omega_\tau^t(\overline{A})\overline{C}(\tau), \tau < t \\ \Omega_\tau^t(\overline{A})(\overline{C}(\tau) - E_r), \tau > t \end{cases} \qquad (1.2.18)$$

буде задовольняти оцінці

$$\left\|\overline{G}(t,\tau)\right\| \le K\exp\{-\gamma|t-\tau|\}, t,\tau \;\epsilon\; R.$$

Звідси відразу випливає, що вибір матричної функції C(τ) у вигляді:

$$C(\tau) = L(\tau)\overline{C}(\tau)L^{-1}(\tau)$$

дозволяє стверджувати виконання оцінки. Що й потрібно було довести.

Зауваження І. З доведення теореми випливає: якщо існує ФГС з оцінкою (1.2.4), то завжди існує фіксована матриця Ляпунова *L(t)* така, що для всіх *C(τ)* має місце рівність

$$L^{-1}(\tau)C(\tau)L(\tau) = \overline{C}(\tau),$$

де *C(τ)* - матриця. У випадку єдиності функції Гріна останній рядок блокових матриць буде відсутній.

Зауваження ІІ. У випадку неоднозначності ФГС *G(t,τ)*, тобто у випадку присутності останнього рядка, не може виконуватися жодна з тотожностей

1) $C^2(\tau) \equiv C(\tau)$,

2) $\Omega_\tau^0(A)C(\tau)\Omega_0^\tau(A) \equiv const$,

3) $\dot{C}(\tau) \equiv A(\tau)C(\tau) - C(\tau)A(\tau), \tau \in R.$

Справді, якби перша тотожність виконувалася, то обов'язково повинна б виконуватися й така тотожність $C_{33}^2 \equiv C_{33}(\tau)$, з якої випливає, що ранг матриці $C_{33}(\tau)$ не змінюється при зміні $\tau \in R$. Оскільки при $\tau \to +\infty$

$$\left\| C_{33}(\tau) - E_{\hat{r}} \right\| \to 0,$$

то $\det C_{33}(\tau) \neq 0$, отже $C_{33}(\tau) \equiv E_{\hat{r}}$, а це суперечить прямуванню матричної функції до нуля при $\tau \to -\infty$. Таким чином, $C^2(\tau) \neq C(\tau).$

При виконанні другої тотожності повинна виконуватися також тотожність

$$\Omega_\tau^0(\hat{A})C_{33}(\tau)\Omega_0^\tau(\hat{A}) \equiv const,$$

а це суперечить одночасному виконанню умов

$$\begin{aligned} &\left\| \Omega_\tau^0(\hat{A})C_{33}(\tau)\Omega_0^\tau(\hat{A}) \right\| \to 0 \quad при \quad \tau \to -\infty \\ &\left\| \Omega_\tau^0(\hat{A})C_{33}(\tau)\Omega_0^\tau(\hat{A}) - E_{\hat{r}} \right\| \to 0 \quad при \quad \tau \to +\infty \end{aligned} \tag{1.2.19}$$

Неможливість виконання третьої тотожності випливає з неможливості виконання другої.

Зауваження ІІІ. Структура матричної функції *C(τ)*, дає розуміння того, що у випадку неоднозначності ФГС $(f \neq 0)$ завжди можна підібрати *C(τ)* таким чином, щоб одержувати будь-який, обмежений на *R* розв'язок системи.

Зауваження IV. При означенні ФГС можна замість оцінки (1.2.4) вимагати виконання більш слабкої умови:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left\| G(t,\tau) \right\| d\tau \leq K = const < \infty. \tag{1.2.20}$$

Цього цілком достатньо, щоб рівністю визначався обмежений на всій осі R розв'язок системи. При цьому виникає питання: а чи існують ФГС, що задовольняють умові (1.2.20) та не задовольняють (1.2.4)?

Зрозуміло, у випадку однозначності - ні, а у випадку неоднозначності - так, але при цьому завжди знаходиться інша ФГС, що буде задовольняти умові.

РОЗДІЛ 2. ІНВАРІАНТНІ ТОРИ ЗЧИСЛЕНИХ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

2.1. Існування інваріантного тору

Позначимо $\Omega_\tau^t(\varphi)$ фундаментальну матрицю розв'язків системи рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = P\left(\varphi_t(\varphi)\right)x, \tag{2.1.1}$$

де $\varphi = \varphi_{\mathrm{t}}(\varphi)$ - єдиний розв'язок системи рівнянь $\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi)$, $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$ m-вимірний вектор, $a(\varphi) = \{a_1(\varphi), \ldots, a_m(\varphi)\}$. Причому $\varphi_0(\varphi) = \varphi$, де φ - довільний сталий вектор з множини R^m.

Покладемо $\Omega_\tau^\tau(\varphi) = E$, тобто набуває при $t = \tau$ значення одиничної матриці E.

Із належності функцій a, P простору $C^r(\tau_m)$ зразу випливає, що $\varphi_{\mathrm{t}}(\varphi) - \varphi$ та $\Omega_\tau^t(\varphi)$ також належать простору $C^r(\tau_m)$ для всіх $t, \tau \in R$ та будь-якого $r \geq 1$. Покажемо, що

$$\Omega_\tau^{\mathrm{t}}\left(\varphi_0(\varphi)\right) = \Omega_{\tau+\theta}^{t+\theta}(\varphi) \tag{2.1.2}$$

для будь-яких $\mathrm{t}, \tau, \theta \in \mathrm{R}$.

Для цього, в тотожності, яка визначає $\Omega_\tau^t(\varphi)$:

$$\frac{d\Omega_\tau^t(\varphi)}{dt} = P\left(\varphi_t(\varphi)\right)\Omega_\tau^t(\varphi)$$

замінимо φ на φ_0 та, враховуючи групову властивість розв'язків $\varphi_t(\varphi)$, яка розкривається співвідношенням

$$\varphi_t\left(\varphi_0(\varphi)\right) = \varphi_{t+\theta}(\varphi),$$

одержимо тотожність

$$\frac{d\Omega_\tau^t(\varphi_0(\varphi))}{dt} = P(\varphi_{t+\theta}(\varphi))\Omega_\tau^t(\varphi_0(\varphi)).$$

Отримане співвідношення справедливе для довільних $t, \tau, \theta \in$ R, $\varphi \in R^m$ та означає, що $\Omega_\tau^{t}(\varphi_0(\varphi))$ є фундаментальною матрицею розв'язків системи рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = P(\varphi_{t+\theta}(\varphi))x, \tag{2.1.3}$$

яка набуває при $t = \tau$ значення E. Таку ж властивість має й матриця $\Omega_{\tau+\theta}^{t+\theta}(\varphi)$. Це можливо лише при співпаданні матриць $\Omega_\tau^{t}(\varphi_0(\varphi))$ та $\Omega_{\tau+\theta}^{t+\theta}(\varphi)$, що й доводить потрібну рівність (2.1.2).

Нехай $C(\varphi)$ – нескінчена матриця, елементи якої $c_{ij}(\varphi)$ *(i, j = 1, 2, ...)* неперервні зо φ та задовольняють нерівність

$$\sup_i \sum_j^\infty \sup_j |c_{ij}(\varphi)| < \infty.$$

Множину матриць, для яких справедлива остання оцінка, позначимо $C(\tau_m)$. Покладемо

$$G_0(\tau,\varphi) = \begin{cases} \Omega_\tau^0(\varphi)C(\varphi_\tau(\varphi)), & \tau \le 0 \\ \Omega_\tau^0(\varphi)[C(\varphi_\tau(\varphi)) - E], & \tau > 0 \end{cases} \tag{2.1.4}$$

і назвемо $G_0(\tau,\varphi)$ функцією Гріна-Самойленко системи рівнянь

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \quad \frac{dx}{dt} = P(\varphi)x \tag{2.1.5}$$

Причому, коли інтеграл $\int_{-\infty}^{\infty} \|G_0(\tau,\varphi)\| d\tau$ рівномірно обмежений за φ, то ми маємо:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \|G_0(\tau,\varphi)\| d\tau \le K < \infty. \tag{2.1.6}$$

Вкажемо найпростіші властивості ФГС (2.1.4). Із її означення випливає, що $G_0(\tau,\varphi)\in C(\tau_m)$ для кожного τ, причому

$$G_0(0,\varphi)-G_0(+0,\varphi)=E.$$

Нехай $G_t(\tau,\varphi)$ – матриця, яка визначається співвідношенням

$$G_t(\tau,\varphi)=\begin{cases}\Omega_\tau^t(\varphi)C(\varphi_\tau(\varphi)), & t\ge\tau,\\ -\Omega_\tau^t(\varphi)[E-C(\varphi_\tau(\varphi))], & t<\tau.\end{cases}\qquad(2.1.7)$$

Тоді

$$G_0(\tau,\varphi_t(\varphi))=G_t(\tau+t,\varphi).\qquad(2.1.8)$$

Останнє зразу ж випливає із властивості матриці $\Omega_\tau^t(\varphi)$, яка розкривається рівністю (2.1.2):

$$G_0(\tau,\varphi_t(\varphi))=\begin{cases}\Omega_\tau^0(\varphi_t(\varphi))C(\varphi_\tau(\varphi_t(\varphi))), & \tau\le 0\\ -\Omega_\tau^0(\varphi_t(\varphi))[E-C(\varphi_\tau(\varphi_t(\varphi)))], & \tau>0\end{cases}=$$

$$=\begin{cases}\Omega_{\tau+t}^t(\varphi)C(\varphi_{\tau+t}(\varphi)), & \tau+t\le t\\ -\Omega_{\tau+t}^t(\varphi)[E-C(\varphi_{\tau+t}(\varphi))], & \tau+t>t\end{cases}=G_t(\tau+t,\varphi).$$

Із рівності (2.1.8) випливає, що матриця

$$G_0(-t,\varphi_t(\varphi))=G_t(0,\varphi)=\begin{cases}\Omega_0^t(\varphi)C(\varphi), & t\ge 0,\\ -\Omega_0^t(\varphi)[E-C(\varphi)], & t<0\end{cases}$$

складається із розв’язків системи рівнянь (2.1.1), розглянутих відповідно при $t\ge 0$ та $t<0$.

Нехай $f\in C(\tau_m)$. Розглянемо інтеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty}G_0(\tau,\varphi)f(\varphi_\tau(\varphi))d\tau.\qquad(2.1.9)$$

Цей інтеграл мажорується збіжним інтегралом згідно оцінки

$$\left\| \int_{-\infty}^{\infty} G_0(\tau,\varphi) f\left(\varphi_\tau(\varphi)\right) d\tau \right\| \le \int_{-\infty}^{\infty} \left\| G_0(\tau,\varphi) \right\| d\tau \cdot |f|_0 .$$

Покладемо

$$u(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} G_0(\tau,\varphi) f\left(\varphi_\tau(\varphi)\right) d\tau ,$$

та покажемо, що $u \in C(\tau_m)$.

Дійсно, нехай $u_i(\varphi) = \int_{-i}^{i} G_0(\tau,\varphi) f\left(\varphi_\tau(\varphi)\right) d\tau, \quad i = 1,2,3,\dots$.

Послідовність функцій $u_i(\varphi)$ належить, очевидно, простору $C(\tau_m)$ та задовольняє оцінку

$$\left\| u(\varphi) - u_i(\varphi) \right\| \le \left[\int_{-\infty}^{-i} \left\| G_0(\tau,\varphi) \right\| d\tau + \int_{i}^{\infty} \left\| G_0(\tau,\varphi) \right\| d\tau \right] |f|_0 .$$

Рівномірна по φ збіжність інтеграла (2.1.6) гарантує граничне співвідношення

$$\lim_{t \to \infty} u_i(\varphi) = u(\varphi)$$

рівномірно по $\varphi \in C(\tau_m)$. Останнє означає збіжність послідовності $u_i(\varphi)$ $(i = 1,2,\dots)$ за нормою простору $C(\tau_m)$. Оскільки $C(\tau_m)$ – повний простір, то $u \in C(\tau_m)$.

Інтеграл (2.1.9) задає деякий оператор T в просторі функцій $C(\tau_m)$:

$$Tf(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} G_0(\tau,\varphi) f\left(\varphi_\tau(\varphi)\right) d\tau. \tag{2.1.10}$$

Покажемо, що множина

$$x = u(\varphi) = Tf(\varphi), \quad \varphi \in \tau_m , \tag{2.1.11}$$

визначає інваріантний тор системи рівнянь

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \quad \frac{dx}{dt} = P(\varphi)x + f(\varphi). \tag{2.1.12}$$

Для цього розглянемо функцію $x(t,\varphi) = u(\varphi_t(\varphi))$.

Із співвідношень (2.1.8) і (2.1.10) для $u(\varphi_t(\varphi))$ маємо представлення

$$u(\varphi_t(\varphi)) = \int_{-\infty}^{\infty} G_0(\tau, \varphi_t(\varphi)) f(\varphi_\tau(\varphi_t(\varphi))) d\tau =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} G_t(\tau + t, \varphi) f(\varphi_{\tau+t}(\varphi)) d\tau = \int_{\infty}^{-\infty} G_t(\tau, \varphi) f(\varphi_\tau(\varphi)) d\tau .$$

Диференціюємо по t, тоді

$$\frac{du(\varphi_t(\varphi))}{dt} = C(\varphi_t(\varphi)) f(\varphi_t(\varphi)) + (E - C(\varphi_t(\varphi))) f(\varphi_t(\varphi)) +$$

$$+ P(\varphi_t(\varphi)) \int_{-\infty}^{\infty} G_t(\tau, \varphi) f(\varphi_\tau(\varphi)) d\tau = P(\varphi_t(\varphi)) u(\varphi_t(\varphi)) + f(\varphi_t(\varphi))$$

для будь-якого $t \in R$. Остання рівність доводить, що $\varphi \in C^1(\tau_m)$ й множина (2.1.11) є інваріантним тором системи рівнянь (2.1.12).

Таким чином, існування функції Гріна системи рівнянь (2.1.5) гарантує існування інваріантного тору системи рівнянь (2.1.12) для довільної функції $f \in C(\tau_m)$.

Зауважимо, що в наведених вище міркуваннях належність функцій a, P простору $C^r(\tau_m)$ використовувалось для встановлення неперервності по φ матриці $\Omega_\tau^t(\varphi)$. Тому всі приведені вище викладки залишаються незмінними і при $a \in C_{Lip}(\tau_m)$, $P \in C(\tau_m)$. Сказане приводить до наступного твердження, що визначає достатню умову існування інваріантного тору системи (2.1.12).

2.2. Єдиність інваріантного тору

Теорема 2.2.1. *Нехай* $a \in C_{Lip}(\tau_m)$, $P \in C(\tau_m)$ *і система рівнянь (2.1.5) має ФГС* $G_0(\tau,\varphi)$. *Тор* $x = 0 \quad \varphi \in \tau_m$ *є єдиним інваріантним тором системи(2.1.5) тоді і тільки тоді, коли ця система не має інших функцій Гріна, крім* $G_0(\tau,\varphi)$..

Доведення. Нехай система рівнянь (2.1.5), крім функції $G_0(\tau,\varphi)$, має функцію $G_1(\tau,\varphi)$. Покладемо

$$u_0(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} G_1(\tau,\varphi) f\left(\varphi_\tau(\varphi)\right) d\tau - \int_{-\infty}^{\infty} G_0(\tau,\varphi) f\left(\varphi_\tau(\varphi)\right) d\tau, \qquad (2.2.1)$$

де f – довільна функція із $C(\tau_m)$.

Множина $x = u_0(\varphi)$, $\varphi \in \tau_m$, визначає інваріантний тор системи рівнянь (2.1.12). Доведемо, що

$$u_0 \neq 0 \qquad (2.2.2)$$

для деякої функції $f \in C(\tau_m)$.

За означенням ФГС та формули (2.2.1) маємо

$$u_0(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \Omega_\tau^0(\varphi) R\left(\varphi_\tau(\varphi)\right) f\left(\varphi_\tau(\varphi)\right) d\tau,$$

де R – ненульова матриця із $C(\tau_m)$. Для доведення нерівності (2.2.2) достатньо показати, що оператор T_0, який визначається співвідношенням

$$T_0 f(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} G_1(\tau,\varphi) f\left(\varphi_\tau(\varphi)\right) d\tau - \int_{-\infty}^{\infty} G_0(\tau,\varphi) f\left(\varphi_\tau(\varphi)\right) d\tau =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \Omega_\tau^0(\varphi) R\left(\varphi_\tau(\varphi)\right) f\left(\varphi_\tau(\varphi)\right) d\tau \qquad (2.2.3)$$

на просторі функцій $C(\tau_m)$, не є нуль-оператором цього простору.

Припустимо, що це не так, тобто

$$T_0 f \equiv 0 \quad \forall f \in C(\tau_m) \quad . \tag{2.2.4}$$

Покажемо, що із (2.2.4) випливає рівність

$$R(\varphi) = 0 \qquad \forall \varphi \in \tau_m, \tag{2.2.5}$$

що суперечить припущенню $G_0(\tau,\varphi) \neq G_1(\tau,\varphi)$, яке приводить до нерівності $R(\varphi) \neq 0 \quad \varphi \in \tau_m$.

Для доведення рівності (2.2.5), розглянемо спочатку значення матриці R в точках, які належать періодичним на τ_m траєкторіям системи (2.1.5). Нехай $\varphi_0 -$ така точка: $\varphi = \varphi_{t+T}(\varphi) = \varphi_t(\varphi_0) \bmod 2\pi, \quad t \in R, -$ відповідна її траєкторія, T – її період. За теоремою Флоке-Ляпунова маємо, що $\Omega_0^t(\varphi_0) = \Phi(t) e^{At}$, де $\Phi(t)$ – періодична періоду T невироджена матриця, A – стала матриця. Але тоді

$$\Omega_0^t(\varphi_0) = \left(\Omega_0^\tau(\varphi_0)\right)^{-1} = e^{-A\tau}\Phi^{-1}(\tau),$$

так, що

$$T_0 f(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-A\tau} R(\varphi_\tau(\varphi_0)) f(\varphi_\tau(\varphi_0)) d\tau =$$

$$= \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \int_{pT}^{(p+1)T} e^{-A\tau}\Phi^{-1}(\tau) R(\varphi_\tau(\varphi_0)) f(\varphi_\tau(\varphi_0)) d\tau =$$

$$= \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \int_{pT}^{T} e^{-ApT} e^{-A\tau}\Phi^{-1}(\tau) R(\varphi_\tau(\varphi_0)) f(\varphi_\tau(\varphi_0)) d\tau = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \left(e^{-AT}\right)^p B_f,$$

де

$$B_f = \int_0^T e^{-A\tau}\Phi^{-1}(\tau) R(\varphi_\tau(\varphi_0)) f(\varphi_\tau(\varphi_0)) d\tau.$$

Оскільки ряд $\sum\limits_{p=-\infty}^{+\infty}\left(e^{-AT}\right)^p$ розбіжний при будь-які матриці A, то $T_0 f(\varphi_0) = 0$ лише при тій умові, що

$$B_f = 0. \tag{2.2.6}$$

У співвідношенні (2.2.6) будемо розрізняти випадок, коли φ_0 є точкою спокою динамічної системи на τ_m, та випадок, коли φ_0 не є такою точкою. В першому випадку рівність (2.2.6) має місце для будь-якого $T > 0$. Останнє можливо лише тоді, коли

$$e^{-A\tau}\Phi^{-1}(\tau)R(\varphi_\tau(\varphi_0))f(\varphi_\tau(\varphi_0)) \equiv 0.$$

Проте

$$R(\varphi_\tau(\varphi_0))f(\varphi_\tau(\varphi_0)) \equiv 0,$$

з врахуванням тотожності $\varphi_\tau(\varphi_0) \equiv \varphi_0$ та довільності функції f можливо лише при умові

$$R(\varphi_0) = 0. \tag{2.2.7}$$

В іншому випадку знайдеться число $T > 0$ – точний період періодичної на торі траєкторії – таке, що

$$\varphi_{t+T}(\varphi) = \varphi_t(\varphi_0) \operatorname{mod} 2\pi, \qquad \varphi_{t+T}(\varphi) \neq \varphi_t(\varphi_0) \operatorname{mod} 2\pi,$$

при будь-якому $0 < \tau < T$. Точці $\varphi_t(\varphi_0)$ тору τ_m тоді взаємно однозначно ставиться у відповідність точка $\psi_t = \nu t, \nu = 2\pi T,$ кола τ_1. Це співвідношення дозволяє довільній функції $F \in C(\tau_1)$ поставити у відповідність функцію $f \in C(\tau_m)$, пов’язану з F співвідношенням

$$f(\varphi_\tau(\varphi_0)) \equiv F(\nu t), \quad t \in R.$$

В цьому випадку рівність (2.2.6) набуває виду

$$\int_0^T e^{-A\tau}\Phi^{-1}(\tau)R(\varphi_\tau(\varphi_0))f(\varphi_\tau(\varphi_0))d\tau = 0. \qquad (2.2.8)$$

Оскільки рівність (2.2.8) виконується для довільної функції $F \in C(\tau_1)$, то вона можлива лише тоді, коли

$$e^{-A\tau}\Phi^{-1}(\tau)R(\varphi_\tau(\varphi_0))f(\varphi_\tau(\varphi_0)) \equiv 0.$$

Це призведе, з врахуванням невиродженості матриць $e^{-A\tau}$ та $\Phi^{-1}(\tau)$, до тотожності

$$R(\varphi_\tau(\varphi_0)) \equiv 0, \quad \tau \in [0,T]. \qquad (2.2.9)$$

Дійсно, покладемо

$$F(\nu t) = \{0,\ldots,F_j(\nu t),\ldots,0\},\ r_{ij}(t) = \{e^{-A\tau}\Phi^{-1}(\tau)R(\varphi_\tau(\varphi_0))\}_{ij} \quad (i, j = 1,2,\ldots,n)$$

та перепишемо рівність (2.2.8) для вибраної функції $F(\nu\, t)$. Одержимо:

$$\int_0^T r_{ij}(\tau)F_j(\nu\tau)d\tau = 0. \qquad (2.2.10)$$

Функцію із $C(\tau_m)$, визначену при $\psi \in [0,2\pi]$ рівністю

$$F_j(\psi) = \overline{r_{ij}}(\psi/\nu)f_0(\psi),$$

де $\bar{r}_{ij}$ – комплексно-спряжена до r_{ij} функція, f_0 – функція із $C(\tau_m)$, рівна нулеві при $\psi = 0$ і додатна при $\psi \in (0,2\pi)$:

$$f_0(0) = f_0(2\pi) = 0, \quad f_0(\psi) > 0$$

при $\psi \in (0,2\pi)$, підставимо в (2.2.10) замість F_j.

В результаті отримаємо рівність

$$\int_0^T \left| r_{ij}(\tau) \right|^2 f_0(\nu\tau)d\tau = 0.$$

Отримане можливо лише при умові $\left|r_{ij}(\tau)\right|^2 f_0(\nu\tau) = 0, \quad \tau \in (0,T)$, що еквівалентно

$$r_{ij}(\tau) = 0, \quad \tau \in [0,T]. \tag{2.2.11}$$

Оскільки r_{ij} –довільний елемент матриці $e^{-A\tau}\Phi^{-1}(\tau)R(\varphi_\tau(\varphi_0))$, то тотожність (2.2.11) рівносильна тотожності (2.2.10). Цим рівність (2.2.7) доведено для будь-якої точки φ_0, яка належить періодичній на τ_m траєкторії системи (2.1.5).

Значення матриці $R(\varphi)$ розглянемо тепер в інших точках тору τ_m. Така точка нехай буде φ_0, $\varphi = \varphi_t(\varphi_0)$, $t \in R$, – відповідна її траєкторія. Із рівномірної обмеженості інтегралів

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left\|G_i(\tau,\varphi)\right\| d\tau, \quad i = 0,1,\ldots$$

випливає рівномірна обмеженість інтегралу

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left\|\Omega_\tau^0(\varphi) R(\varphi_\tau(\varphi))\right\| d\tau.$$

Отже, можна вказати монотонно спадну до нуля послідовність додатних чисел e_n, $e_{n+1}<e_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} e_n = 0$, та монотонно зростаючу до $+\infty$ послідовність чисел $t_n, t_{n+1} > t_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = +\infty$, таких, щоб виконувалась нерівність

$$\int_{-\infty}^{-\tau_n} \left\|\Omega_\tau^0(\varphi_0) R(\varphi_\tau(\varphi_0))\right\| d\tau + \int_{t_n}^{+\infty} \left\|\Omega_\tau^0(\varphi_0) R(\varphi_\tau(\varphi_0))\right\| d\tau < \epsilon_n .$$

Оскільки $T_0 f(\varphi_0) = 0$, то

$$\left\| \int_{-t_n}^{t_n} \Omega_\tau^0(\varphi_0) R(\varphi_\tau(\varphi_0)) f(\varphi_\tau(\varphi_0)) d\tau \right\| \le$$

$$\left\| \int_{-\infty}^{\infty} \Omega_\tau^0(\varphi_0) R(\varphi_\tau(\varphi_0)) f(\varphi_\tau(\varphi_0)) d\tau \right\| +$$

$$+ \int_{-\infty}^{-t_n} \left\| \Omega_\tau^0(\varphi_0) R(\varphi_\tau(\varphi_0)) \right\| d\tau |f|_0 + \tag{2.2.12}$$

$$\int_{t_n}^{+\infty} \left\| \Omega_\tau^0(\varphi_0) R(\varphi_\tau(\varphi_0)) \right\| d\tau |f|_0 \le \epsilon_n |f|_0$$

Ланка $\varphi = \varphi_t(\varphi_0)$, $-t_n \le t \le t_n$, траєкторії на τ_m немає самоперетинів, тому для будь-якої неперервної функції $F(t)$, визначеної для $t \in R$, знайдеться функція $f_n \in C(\tau_m)$, пов'язаних з $F(t)$ співвідношенням

$$f_n(\varphi_t(\varphi_0)) = F(t) \text{ при } -t_n \le t \le t_n.$$

Нехай $R(\varphi_t(\varphi_0)) \ne 0$ при $t \in R$. Тоді $\Omega_t^0(\varphi_0) R(\varphi_t(\varphi_0)) \ne 0$ при $t \in R$. Та $r_{ij} = \{\Omega_t^0(\varphi_0) R(\varphi_t(\varphi_0))\}_{ij}$ – той елемент матриці $\Omega_t^0(\varphi_0) R(\varphi_t(\varphi_0))$, для якого виконується нерівність $r_{ij}(t) \ne 0, \quad t \in R.$

$$\hat{r}(t) = \begin{cases} \overline{r_{ij}}(t), & |r_{ij}(t)| \le 1, \\ sign\, \overline{r_{ij}}(t), & |r_{ij}(t)| > 1. \end{cases}$$

Функція $\hat{r}(t)$ зрозуміло неперервна при $t \in R$ і $\max\limits_{t \in R} \left| \hat{r}_{ij}(t) \right| \le 1.$

Оберемо скалярні функції $f_n \in C(\tau_m)$ так, щоб виконувалась умова

$$f_n(\varphi_t(\varphi_0)) = \hat{r}_{ij}(t) \text{ при } -t_n \le t \le t_n, \quad |f_n|_0 \le 1,$$

та розглянемо нерівність (2.2.12) для функції $f_n(\varphi)e_j$, де $e_j = \{0,\ldots,1,\ldots,0\} - j$-й одиничний орт. Маємо:

$$\left\| \int_{-t_n}^{t_n} \Omega_\tau^0(\varphi_0) R(\varphi_\tau(\varphi_0)) f_n(\varphi_\tau(\varphi_0)) e_j d\tau \right\| = \left| \int_{-t_n}^{t_n} r_{ij}(\tau)\hat{r}_{ij}(\tau) d\tau \right| =$$

(2.2.13)

$$= \int_{-t_n}^{t_n} r_{ij}(\tau)\hat{r}_{ij}(\tau) d\tau \le e_n.$$

Позаяк $r_{ij}(t)\hat{r}_{ij}(t) \ne 0$ при $t \in R$, то $\int_{-t_n}^{t_n} r_{ij}(\tau)\hat{r}_{ij}(\tau)d\tau = \delta_1 > 0$, для деякого достатньо великого N. Але тоді із невід'ємності функцій $r_{ij}(t)\hat{r}_{ij}(t)$ випливає нерівність $\int_{-t_n}^{t_n} r_{ij}(\tau)\hat{r}_{ij}(\tau)d\tau \ge \delta_1$, $\quad \forall n \ge N$, яка суперечить нерівності (2.2.13) та умові $\lim_{n\to\infty} e_n = 0$.

Суперечність, викликана припущенням $r_{ij}(t) \ne 0$, $\quad t \in R$, доводить, що

$$\Omega_t^0(\varphi_0) R(\varphi_t(\varphi_0)) \equiv 0, \quad t \in R. \qquad (2.2.14)$$

Із рівності (2.2.14) випливає співвідношення (2.2.7) для будь-якої точки $\varphi_0 \in \tau_m$, та не належить періодичній на τ_m траєкторії системи (2.1.5).

Наведені міркування, переконують в тому, що вони доводять рівність (2.2.5). Останнє, як вже зазначалось вище, суперечить припущенню про неєдиність ФГС. Отже, із неєдиності функції Гріна з необхідністю випливає існування відмінного від тривіального $x = 0,\ \varphi \in \tau_m$ інваріантного тору системи (2.1.5). Теорему 2.2.1 в одну сторону доведено. Доведемо її зворотньо. Припустимо для цього, що єдиність ФГС не гарантує єдиність інваріантного тора системи (2.1.5). Встановимо спочатку дві важливі рівності, які випливають із припущення про єдиність ФГС.

Лема 1. *Нехай функція $G_0(\tau,\varphi)$ й тільки вона є ФГС системи рівнянь (2.1.5). Тоді матриця $C(\varphi) = G_0(0,\varphi)$ задовольняє рівностям*

$$C(\varphi_t(\varphi)) = \Omega_0^t(\varphi)C(\varphi)\Omega_t^0(\varphi) \quad \forall t \in R, \quad \varphi \in \tau_m, \tag{2.2.15}$$

$$C^2(\varphi) = C(\varphi) \quad \forall \varphi \in \tau_m. \tag{2.2.16}$$

Доведення. Нехай перше із приведених співвідношень не має місця, тобто для деякого $t_1 \neq 0$

$$C\left(\varphi_{t_1}(\varphi)\right) \neq \Omega_0^t(\varphi)C(\varphi)\Omega_{t_1}^0(\varphi), \quad \varphi \in \tau_m.$$

Покладемо $R(\varphi) = \Omega_0^t(\varphi)C(\varphi)\Omega_{t_1}^0(\varphi) - C(\varphi)\Omega_{t_1}^0(\varphi)$, та розглянемо функцію

$$G_1(\tau,\varphi) = G_0(\tau,\varphi) + \Omega_\tau^0(\varphi)R(\varphi_\tau(\varphi)).$$

Для якої виконується деяка ланка нерівностей:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left\| G_1(\tau,\varphi) \right\| d\tau \leq \int_{-\infty}^{\infty} \left\| G_0(\tau,\varphi) \right\| d\tau +$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left\| \Omega_\tau^0(\varphi)R(\varphi_\tau(\varphi)) \right\| d\tau \leq K +$$

$$+\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left\|\Omega^{0}_{\tau+t_1}(\varphi)C\left(\varphi_{\tau+t_1}(\varphi)\right)-\Omega^{0}_{\tau}(\varphi)C\left(\varphi_{\tau}(\varphi)\right)\Omega^{0}_{t_1}\left(\varphi_{\tau}(\varphi)\right)\right\|d\tau\le K+$$

$$+\int\limits_{-\infty}^{-t_1}\left\|\Omega^{0}_{\tau+t_1}(\varphi)C\left(\varphi_{\tau+t_1}(\varphi)\right)\right\|d\tau+$$

$$\int\limits_{-t_1}^{\infty}\left\|\Omega^{0}_{\tau+t_1}(\varphi)\left[E-C\left(\varphi_{\tau+t_1}(\varphi)\right)\right]\right\|d\tau+$$

$$+\int\limits_{-\infty}^{-t_1}\left\|\Omega^{0}_{\tau+t_1}(\varphi)C\left(\varphi_{\tau+t_1}(\varphi)\right)\right\|d\tau\left|\Omega^{0}_{t_1}\right|_0+$$

$$+\int\limits_{-t_1}^{\infty}\left\|\Omega^{0}_{\tau+t_1}(\varphi)-\Omega^{0}_{\tau}(\varphi)C\left(\varphi_{\tau}(\varphi)\right)\Omega^{0}_{t_1}\left(\varphi_{\tau}(\varphi)\right)\right\|d\tau\le$$

$$\le 2K+\left[\int\limits_{-\infty}^{-t_1}\left\|\Omega^{0}_{\tau}(\varphi)C\left(\varphi_{\tau}(\varphi)\right)\right\|d\tau+\int\limits_{-t_1}^{\infty}\left\|\Omega^{0}_{\tau}(\varphi)\left[E-C\left(\varphi_{\tau}(\varphi)\right)\right]\right\|d\tau\right]\left|\Omega^{0}_{t_1}\right|_0\le$$

$$\le 2K+K\left|\Omega^{0}_{t_1}\right|_0+\left[\left|\int\limits_{-t_1}^{0}\left\|\Omega^{0}_{\tau}(\varphi)C\left(\varphi_{\tau}(\varphi)\right)\right\|d\tau\right|+\left|\int\limits_{0}^{-t_1}\left\|\Omega^{0}_{\tau}(\varphi)\left[E-C\left(\varphi_{\tau}(\varphi)\right)\right]\right\|d\tau\right|\right]\left|\Omega^{0}_{t_1}\right|_0\le$$

$$\le 2K+\left(K+\overline{K}\right)\left|\Omega^{0}_{t_1}\right|_0=K_1,$$

завдяки якій оцінка

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left\|G_1(\tau,\varphi)\right\|d\tau\le K_1$$

рівномірна за $\varphi\in\mathcal{T}_m$. Але тоді функція $G_1(\tau,\varphi)$ задовольняє всі умови, які необхідні для того, щоб функція була ФГС системи рівнянь (2.1.5). Це суперечить припущенню про єдиність ФГС. Суперечність доводить рівність (2.2.14).

Нехай тепер $C^2(\varphi) \neq C(\varphi), \quad \varphi \in \tau_m$.

Функція $G_1(\tau,\varphi) = G_0(\tau,\varphi) + \Omega_\tau^0(\varphi)\Big(C^2\big(\varphi_\tau(\varphi)\big) - C\big(\varphi_\tau(\varphi)\big)\Big)$

задовольняє низку нерівностей

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left\| G_1(\tau,\varphi) \right\| d\tau \le K + \int_{-\infty}^{0} \left\| \Omega_\tau^0(\varphi) G\big(\varphi_\tau(\varphi)\big) \right\| d\tau |C - E|_0 +$$

$$+ \int_{0}^{\infty} \left\| \Omega_\tau^0(\varphi) \big[E - C\big(\varphi_\tau(\varphi)\big)\big] \right\| d\tau |C|_0 \le K\big[1 + \max\big(|C - E|_0, |C|_0\big)\big] = \tilde{K}_1,$$

завдяки якому також є ФГС системи рівнянь (2.1.5). Останнє суперечить припущенню єдиності функції Гріна та доводить рівність (2.2.15).

Застосуємо тепер рівність (2.2.14) для завершення доведення теореми 2.2.1. Нехай, не зважаючи на єдиність функції Гріна $G_0(\tau,\varphi)$, тор

$$x = u_0(\varphi), \quad \varphi \in \tau_m, \tag{2.2.17}$$

є інваріантним тором системи (2.1.5), відмінним від тривіального.

Тоді

$$u_0(\varphi) \neq 0, \quad \varphi \in \tau_m. \tag{2.2.18}$$

Розглянемо функцію $u_1(\varphi) \in C(\tau_m)$, яка визначає інваріантний тор $x = u_1(\varphi), \quad \varphi \in \tau_m$, системи рівнянь

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \qquad \frac{dx}{dt} = P(\varphi)x + u_0(\varphi). \tag{2.2.19}$$

Інваріантність тору однорідної системи рівнянь, що відповідає системі (2.2.19), призводить до $u_0(\varphi_\tau(\varphi)) = \Omega_0^t(\varphi) u_0(\varphi)$. Тому

$$u_1(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} G_0(\tau,\varphi) u_0\big(\varphi_\tau(\varphi)\big) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} G_0(\tau,\varphi) \Omega_0^\tau(\varphi) u_0(\varphi) d\tau =$$

$$= \int_{-\infty}^{0} \Omega_{\tau}^{0}(\varphi) C(\varphi_{\tau}(\varphi)) \Omega_{0}^{\tau}(\varphi) u_0(\varphi) d\tau - \int_{0}^{\infty} \Omega_{0}^{\tau}(\varphi) [E - C(\varphi_{\tau}(\varphi))] \Omega_{0}^{\tau}(\varphi) u_0(\varphi) d\tau,$$

(формула 2.2.19), з врахуванням рівності (2.2.14) приводить до співвідношення

$$u_1(\varphi) = \int_{-\infty}^{0} C(\varphi) u_0(\varphi) d\tau - \int_{0}^{\infty} (E - C(\varphi)) u_0(\varphi) d\tau. \qquad (2.2.20)$$

Останнє можливо лише при умові, що $C(\varphi)u_0(\varphi) = 0,\quad C(\varphi)u_0(\varphi) = u_0(\varphi)$ одночасно. Але тоді $u_0(\varphi) = 0 \quad \forall \varphi \in \tau_m$, що суперечить нерівності (2.2.18). Теорему доведено.

РОЗДІЛ 3. ЗАЛЕЖНІСТЬ ФУНКЦІЇ ГРІНА-САМОЙЛЕНКА ВІД ПАРАМЕТРА

З'ясуємо залежність функції Гріна - Самойленка системи диференціальних рівнянь від параметра.

Будемо розглядати систему диференціальних рівнянь

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi, p), \quad \frac{dh}{dt} = P(\varphi, p)h, \tag{3.1.1}$$

де $\varphi \in m$, $h \in m$, $a(\varphi,p)$, 2π-періодична по φ_i, ($i = 1, 2, ...$) вектор-функція, $P(\varphi,p)$ - 2π- періодична по φ_i, ($i = 1, 2, ...$) нескінчена матриця, $p \in [p_1, p_2]$ — параметр.

Допустимо, що $a(\varphi,p) \in C_{Lip}(\mathcal{T}_\infty)$. Отже перше рівняння системи (3.1.1) має єдиний розв'язок $\varphi_t^p(\varphi)$, такий, що $\varphi_t^p(\varphi) = \varphi$.

Тоді перейдемо до системи рівнянь

$$\frac{dh}{dt} = P(\varphi_t^p(\varphi), p)h, \tag{3.1.2}$$

Покладемо

$$\overset{(m)}{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m, 0, 0, \ldots), \quad \varphi_t^p(\overset{(m)}{\varphi}) = \{\varphi_1^p(t, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m, \ \ldots), \ldots\},$$

та розглянемо систему рівнянь виду

$$\frac{dh}{dt} = P(\varphi_t^p(\overset{(m)}{\varphi}), p)h, \tag{3.1.3}$$

Матрицант системи рівнянь (3.1.2) позначимо $\Omega_\tau^t(p, \varphi)$, а матрицант системи (3.1.3) — $\Omega_\tau^t(p, \overset{(m)}{\varphi})$.

Лема 3.1. *Нехай система рівнянь (3.1.1) така, що*

5. $P(\varphi,p)$, $a(\varphi,p) \in C_{Lip}(\mathcal{T}_\infty)$ *з коефіцієнтами відповідно* $\varepsilon(m)$, $\alpha(m)$.

6. $\sum_{j=1}^{\infty} \sup_{\varphi} \left| p_{sj}(\varphi, p) \right| \le p^o = const < \infty, \quad s = 1, 2, \ldots$

7. $\left\|\Omega_\tau^t(p,\varphi)\right\| \le N\exp\{-\gamma(t-\tau)\},\ N>0,\gamma>0,t>\tau$ *причому* γ *та* N *не залежать від h,* φ*, p.*

8. $\gamma > \alpha(0) + 1$.

Тоді рівномірно за нормою $\lim \Omega_\tau^o(p, \overset{(m)}{\varphi}) = \Omega_\tau^o(p, \varphi)$.

Доведення. За умовою 3 леми функції Гріна-Самойленко задачі про інваріантні тори систем рівнянь (3.1.2) та (3.1.3) записуються відповідно у вигляді

$$G_o(\tau,p,\varphi) = \begin{cases} \Omega_\tau^o(p,\varphi) & \text{при} \quad \tau<0, \\ 0 & \text{при} \quad \tau>0, \end{cases}$$

$$G_o(\tau,p,\overset{(m)}{\varphi}) = \begin{cases} \Omega_\tau^o(p,\overset{(m)}{\varphi}) & \text{при} \quad \tau<0, \\ 0 & \text{при} \quad \tau>0. \end{cases}$$

Отже, справджується співвідношення

$$\Omega_\tau^o(p,\varphi) - \Omega_\tau^o(p,\overset{(m)}{\varphi}) = \int_\tau^o \Omega_{t_1}^o(p,\varphi)\left[P(\varphi_{t_1}(p,\varphi)) - P(\varphi_{t_1}(p,\overset{(m)}{\varphi}))\right]\Omega_\tau^{t_1}(p,\overset{(m)}{\varphi})dt_1, \qquad (3.1.4)$$

Позначимо

$$\overline{\varphi}_t(p,\varphi) = \{\varphi_1(t,p,\varphi),\dots,\varphi_m(t,p,\varphi),0,0,\dots\},$$
$$\overline{\overline{\varphi}}_t(p,\varphi) = \{0,0,\dots,\varphi_{m+1}(t,p,\varphi),\dots,\varphi_{m+2}(t,p,\varphi),\dots\},$$

та оцінимо різницю $P(\varphi_t(p,\varphi)) - P(\varphi_t(p,\overset{(m)}{\varphi}))$.

Маємо

$$\left\|P(\varphi_t(p,\varphi)) - P(\varphi_t(p,\overset{(m)}{\varphi}))\right\| \le \left\|P(\varphi_t(p,\varphi)) - P(\overline{\varphi}_t(p,\varphi) + \overline{\overline{\varphi}}_t(p,\overset{(m)}{\varphi}))\right\| +$$
$$+\left\|P(\overline{\varphi}_t(p,\varphi) + \overline{\overline{\varphi}}_t(p,\overset{(m)}{\varphi})) - P(\varphi_t(p,\overset{(m)}{\varphi}))\right\| \le \varepsilon(m)\exp\{\alpha(o)|t|\}\Delta_m\varphi +$$
$$+\varepsilon(0)\left\|\varphi_t(p,\varphi)) - \varphi_t(p,\overset{(m)}{\varphi})\right\|.$$

Покладемо $V(t,p) = \left\|\varphi_t(p,\varphi)) - \varphi_t(p,\overset{(m)}{\varphi})\right\|$, й отримаємо, що

$$V(t,p)=\left\|\varphi_t(p,\varphi))-\varphi_t(p,\overset{(m)}{\varphi})\right\|\le\int_\tau^t\left\{\left\|a(\varphi_s(p,\varphi))-a(\overline{\varphi}_s(p,\varphi)+\overline{\overline{\varphi}}_s(p,\overset{(m)}{\varphi}))\right\|+\right.$$

$$\left.\left\|a(\overline{\varphi}_s(p,\varphi)+\overline{\overline{\varphi}}_s(p,\overset{(m)}{\varphi}))-a(\varphi_s(p,\overset{(m)}{\varphi}))\right\|\right\}ds\le\int_\tau^t\left\{\alpha(m)\left\|\varphi_t(p,\varphi))-\varphi_t(p,\overset{(m)}{\varphi})\right\|+\right.$$

$$\left.+\alpha(0)\left\|\varphi_s(p,\varphi))-\varphi_s(p,\overset{(m)}{\varphi})\right\|\right\}ds$$

За лемою Гронуолла-Беллмана слушна нерівність

$$\left\|\varphi_t(p,\varphi))-\varphi_t(p,\overset{(m)}{\varphi})\right\|\le\exp\{\alpha(o)|t-\tau|\}\Delta_m\varphi.$$

Тоді для *V(t,p)* отримаємо оцінку

$$V(t,p)\le\int_\tau^t\{\alpha(o)V(s)+\alpha(m)\exp\{\alpha(o)|s-\tau|\}\Delta_m\varphi\}ds.$$

Тому, при $t>\tau$ $V(t)\le\alpha(m)exp\{\alpha(0)(t-\tau)\}(t-\tau)\Delta_m\varphi$.

Відтак

$$\left\|P(\varphi_t(p,\varphi))-P(\varphi_t(p,\overset{(m)}{\varphi}))\right\|\le\varepsilon(m)\exp\{\alpha(o)|t|\}\Delta_m\psi+$$

$$+\varepsilon(0)\alpha(m)\exp\{(\alpha(o)+1)(t-\tau)\}\Delta_m\varphi,\quad t>\tau.$$

З урахуванням представлення (3.1.4), отримаємо таку оцінку

$$\left\|\Omega_\tau^o(p,\varphi)-\Omega_\tau^o(p,\overset{(m)}{\varphi})\right\|\le\xi(m)M,$$

де $\xi(m)=N\left(\frac{\varepsilon(m)}{\alpha(0)}+\frac{\varepsilon(0)\alpha(m)}{\alpha(0)+1}\right)$ прямує до нуля при $m\to\infty$, M — деяка додатна стала. Це твердження й доводить лему 3.1.

Справді, щоб показати неперервність функції Гріна $G_o(\tau, p, \varphi)$ за параметром p, достатньо показати неперервність за p функцій $G_o(\tau, p, \overset{(m)}{\varphi})$ для будь-якого натурального m.

Лема 3.2. *Нехай система рівнянь (3.1.1) така, що*

4. $\sum_{j=1}^{\infty}\sup_{\varphi}|p_{sj}(\varphi,p)|\le p^o=const<\infty,\quad s=1,2,\dots$

5.
$$\|a(\varphi, p) - a(\overline{\varphi}, \overline{p})\| \le \alpha_1 \|\varphi - \overline{\varphi}\| + \alpha_2 \omega(|p - \overline{p}|),$$
$$\|P(\varphi, p) - P(\overline{\varphi}, \overline{p})\| \le \beta_1 \|\varphi - \overline{\varphi}\| + \beta_2 \omega(|p - \overline{p}|),$$
для всіх $\varphi, \overline{\varphi} \in m, \quad p, \overline{p} \in [p_1, p_2]$

тут $\omega(z)$ — неперервна не спадна скалярна функція, що визначена на $[0, p_2 - p_1]$, $\omega(0) = 0$.

6. *Існує функція Гріна задачі про інваріантні тори $G_o(\tau, p, \varphi)$, що задовольняє оцінку*

$$\| G_o(\tau, p, \varphi) \| \le K exp\{-\gamma / \tau /\} \tag{3.1.5}$$

де K, γ — додатні сталі, що не залежать від τ, φ, $p \in [p_1, p_2]$.

Тоді функція Гріна $G_o(\tau, p, \overset{(m)}{\varphi})$ системи рівнянь (3.1.3) неперервна за сукупністю змінних p, $\overset{(m)}{\varphi}$ для будь-якого натурального m.

Доведення. Зазначимо, що вкорочена за φ до m-го порядку система рівнянь (3.1.1) характерна тим, що перше її рівняння скінчене. Отож добудемо оцінки для різниці $\varphi_t^p(\overset{(m)}{\varphi}) - \varphi_t^{\overline{p}}(\overset{(m)}{\varphi})$.

$$\frac{d(\varphi_t^p(\overset{(m)}{\varphi}) - \varphi_t^{\overline{p}}(\overset{(m)}{\varphi}))}{dt} = a(\varphi_t^p(\overset{(m)}{\varphi}), p) - a(\varphi_t^{\overline{p}}(\overset{(m)}{\overline{\varphi}}), \overline{p}),$$

$$\varphi_t^p(\overset{(m)}{\varphi}) - \varphi_t^{\overline{p}}(\overset{(m)}{\overline{\varphi}}) = \overset{(m)}{\varphi} - \overset{(m)}{\overline{\varphi}} + \int_0^t \left(a(\varphi_{t_1}^p(\overset{(m)}{\varphi}), p) - a(\varphi_{t_1}^{\overline{p}}(\overset{(m)}{\overline{\varphi}}), \overline{p}) \right) dt_1.$$

Отриману рівність розглянемо при $t \ge 0$, тоді маємо

$$\left\| \varphi_t^p(\overset{(m)}{\varphi}) - \varphi_t^{\overline{p}}(\overset{(m)}{\overline{\varphi}}) \right\| \le \left\| \overset{(m)}{\varphi} - \overset{(m)}{\overline{\varphi}} \right\| + \alpha_1 \int_0^t \left\| \varphi_{t_1}^p(\overset{(m)}{\varphi}) - \varphi_{t_1}^{\overline{p}}(\overset{(m)}{\overline{\varphi}}) \right\| dt_1 + \alpha_2 \omega(|p - \overline{p}|) t.$$

Позначимо праву частину нерівності через $A(t)$ = $\left\| \varphi_t^p(\overset{(m)}{\varphi}) - \varphi_t^{\overline{p}}(\overset{(m)}{\overline{\varphi}}) \right\|$.

Диференціюємо $A(t)$, отримаємо

$$\frac{dA(t)}{dt} \le \alpha_1 A(t) + \alpha_2 \omega(|p - \overline{p}|).$$

З попередньої нерівності випливає, що

$$A(t) \le \left[\left\| \overset{(m)}{\varphi} - \overset{(m)}{\overline{\varphi}} \right\| + \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \omega(|p - \overline{p}|) \right] \exp\{\alpha_1 t\}.$$

Аналогічно, дослідивши випадок $t \geq 0$, отримаємо оцінку

$$\left\| \varphi_t^p(\overset{(m)}{\varphi}) - \varphi_t^{\bar p}(\overset{(m)}{\bar\varphi}) \right\| \leq \left[\left\| \overset{(m)}{\varphi} - \overset{(m)}{\bar\varphi} \right\| + \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\omega(|\mu - \bar\mu|) \right] \exp\{\alpha_1 |t|\}. \tag{3.1.6}$$

Враховуючи оцінки для $\left\| P(\overset{(m)}{\varphi}, p) - P(\overset{(m)}{\bar\varphi}, \bar p) \right\|$, та (3.1.6), отримаємо

$$\begin{gathered}\left\| P(\varphi_t^p(\overset{(m)}{\varphi}), p) - P(\varphi_t^{\bar p}(\overset{(m)}{\bar\varphi}), \bar p) \right\| \leq \beta_1 \left\| \varphi_t^p(\overset{(m)}{\varphi}) - \varphi_t^{\bar p}(\overset{(m)}{\bar\varphi}) \right\| + \\ + \beta_2 \omega(|p - \bar p|) \leq \left(\beta_1 \left\| \overset{(m)}{\varphi} - \overset{(m)}{\bar\varphi} \right\| + \frac{\beta_1 \alpha_2}{\alpha_1} \omega(|p - \bar p|) \right) \exp\{\alpha_1 |t|\} + \\ + \beta_2 \omega(|p - \bar p|) \leq \left(\beta_1 \left\| \overset{(m)}{\varphi} - \overset{(m)}{\bar\varphi} \right\| + \frac{\beta_1 \alpha_2 + \alpha_1 \beta_2}{\alpha_1} \omega(|p - \bar p|) \right) \exp\{\alpha_1 |t|\}\end{gathered} \tag{3.1.7}$$

Але, з іншого боку

$$\left\| P(\varphi_t^p(\overset{(m)}{\varphi}), p) - P(\varphi_t^{\bar p}(\overset{(m)}{\bar\varphi}), \bar p) \right\| \leq 2\|P\|_o \tag{3.1.8}$$

де $\|P\|_o = \max\limits_{\substack{\overset{(m)}{\varphi} \in R^m \\ p \in [p_1, p_2]}} \left\| P(\overset{(m)}{\varphi}, p) \right\|$.

З урахуванням оцінок (3.1.7), (3.1.8), отримаємо

$$\begin{gathered}\left\| P(\varphi_t^p(\overset{(m)}{\varphi}), p) - P(\varphi_t^{\bar p}(\overset{(m)}{\bar\varphi}), \bar p) \right\| \leq \\ \leq (2\|P\|_o)^{\frac{\nu}{\nu+1}} \left(\beta_1 \left\| \overset{(m)}{\varphi} - \overset{(m)}{\bar\varphi} \right\| + \frac{\beta_1 \alpha_2 + \alpha_1 \beta_2}{\alpha_1} \omega(|p - \bar p|) \right)^{\frac{\nu}{\nu+1}} \exp\left\{ \frac{\alpha_1}{\nu + 1} |t| \right\}, \quad \nu \geq 0.\end{gathered} \tag{3.1.9}$$

Тепер розглянемо різницю ФГС $G_o(\tau, \overset{(m)}{\varphi}, p) - G_o(\tau, \overset{(m)}{\bar\varphi}, \bar p)$ та знайдемо для неї інтегральне представлення. З цією метою розглянемо різницю відповідних ФГС задачі про обмежені розв'язки $G_t(\tau, \overset{(m)}{\varphi}, p) - G_t(\tau, \overset{(m)}{\bar\varphi}, \bar p)$. Диференціюємо цю різницю за t ($t \neq \tau$), отримаємо

$$\frac{d(G_t(\tau,\overset{(m)}{\varphi},p)-G_t(\tau,\overset{(m)}{\overline{\varphi}},\overline{p}))}{dt}=P(\varphi_t^p(\overset{(m)}{\varphi}),p)G_t(\tau,\overset{(m)}{\varphi},p)-$$
$$-P(\varphi_t^{\overline{p}}(\overset{(m)}{\overline{\varphi}}),\overline{p})G_t(\tau,\overset{(m)}{\overline{\varphi}},\overline{p}))=P(\varphi_t^p(\overset{(m)}{\varphi}),p)\left(G_t(\tau,\overset{(m)}{\varphi},p)-G_t(\tau,\overset{(m)}{\overline{\varphi}},p)\right)+ \tag{3.1.10}$$
$$+\left(P(\varphi_t^p(\overset{(m)}{\varphi}),p)-P(\varphi_t^{\overline{p}}(\overset{(m)}{\overline{\varphi}}),\overline{p})\right)G_t(\tau,\overset{(m)}{\overline{\varphi}},\overline{p}).$$

Розглядаючи (3.1.10) як неоднорідну систему рівнянь, та врахувавши неперервність її розв’язків, отримаємо

$$\left(G_{\tau+o}(\tau,\overset{(m)}{\varphi},p)-G_{\tau+o}(\tau,\overset{(m)}{\overline{\varphi}},\overline{p})\right)-\left(G_{\tau-o}(\tau,\overset{(m)}{\varphi},p)-G_{\tau-o}(\tau,\overset{(m)}{\overline{\varphi}},\overline{p})\right)=$$
$$=\left(G_{\tau+o}(\tau,\overset{(m)}{\varphi},p)-G_{\tau-o}(\tau,\overset{(m)}{\varphi},p)\right)-\left(G_{\tau+o}(\tau,\overset{(m)}{\overline{\varphi}},\overline{p})-G_{\tau-o}(\tau,\overset{(m)}{\overline{\varphi}},\overline{p})\right)=E-E=0.$$

Також, врахувавши обмеженість при всіх $t \in R$, для різниці $G_t(\tau,\overset{(m)}{\varphi},p)-G_t(\tau,\overset{(m)}{\overline{\varphi}},\overline{p})$ отримаємо представлення

$$G_t(\tau,\overset{(m)}{\varphi},p)-G_t(\tau,\overset{(m)}{\overline{\varphi}},\overline{p})=\int_{-\infty}^{\infty}G_t(t_1,\overset{(m)}{\varphi},p)\times$$
$$\times\left(P(\varphi_{t_1}^p(\overset{(m)}{\varphi}),p)-P(\varphi_{t_1}^{\overline{p}}(\overset{(m)}{\overline{\varphi}}),\overline{p})\right)G_{t_1}(\tau,\overset{(m)}{\overline{\varphi}},\overline{p})dt_1.$$

Тому, справедлива оцінка

$$G_o(\tau,\overset{(m)}{\varphi},p)-G_o(\tau,\overset{(m)}{\overline{\varphi}},\overline{p})=\int_{-\infty}^{\infty}G_o(t_1,\overset{(m)}{\varphi},p)\times$$
$$\times\left(P(\varphi_{t_1}^p(\overset{(m)}{\varphi}),p)-P(\varphi_{t_1}^{\overline{p}}(\overset{(m)}{\overline{\varphi}}),\overline{p})\right)G_{t_1}(\tau,\overset{(m)}{\overline{\varphi}},\overline{p})dt_1. \tag{3.1.11}$$

З урахуванням нерівностей (3.1.5), (3.1.9), (3.1.11) отримаємо

$$\left\|G_o(\tau,\overset{(m)}{\varphi},p)-G_o(\tau,\overset{(m)}{\overline{\varphi}},\overline{p})\right\| = \int_{-\infty}^{\infty}\left\|G_o(t_1,\overset{(m)}{\varphi},p)\right\|\times$$

$$\times\left\|P(\varphi_{t_1}^{p}(\overset{(m)}{\varphi}),p)-P(\varphi_{t_1}^{\overline{p}}(\overset{(m)}{\overline{\varphi}}),\overline{p})\right\|\left\|G_{t_1}(\tau,\overset{(m)}{\overline{\varphi}},\overline{p})\right\|dt_1 \le$$

$$\le K^2\left(2\|P\|_o\right)^{\frac{\nu}{\nu+1}}\left(\beta_1\left\|\overset{(m)}{\varphi}-\overset{(m)}{\overline{\varphi}}\right\|+\frac{\beta_1\alpha_2+\alpha_1\beta_2}{\alpha_1}\omega(|p-\overline{p}|)\right)^{\frac{\nu}{\nu+1}}\times$$

$$\times\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-\gamma(|t_1|+|t_1-\tau|)+\frac{\alpha_1}{\nu+1}|t_1|\right\}dt_1.$$

Якщо вибираємо $\nu \ge 0$ так, щоб

$$\gamma-\frac{\alpha_1}{\nu+1}>0,$$

то прикінцевий інтеграл сходиться, що й закінчує доведення леми.

На основі лем 1 та 2 сформулюємо таку теорему

Теорема 3.1.1. *Нехай система рівнянь (3.1.1) така, що при р ∈ [p_1,p_2]*

6. *$P(\varphi,p)$, $a(\varphi,p) \in C_{Lip}(\mathcal{T}_\infty)$ з коефіцієнтами відповідно $\varepsilon(m)$, $\alpha(m)$.*

7. $\sum_{j=1}^{\infty}\sup_{\varphi}|p_{sj}(\varphi,p)| \le p^o = const < \infty, \quad s=1,2,\dots$

8. $\|\Omega_\tau^t(p,\varphi)\| \le N\exp\{-\gamma(t-\tau)\},\ N>0,\ \gamma>0,\ t>\tau$ *причому γ та N не залежать від h, φ, p.*

9. *$\gamma > \alpha(0) + 1$.*

10.
$$\|a(\varphi,p)-a(\overline{\varphi},\overline{p})\| \le \alpha_1\|\varphi-\overline{\varphi}\|+\alpha_2\omega(|p-\overline{p}|),$$
$$\|P(\varphi,p)-P(\overline{\varphi},\overline{p})\| \le \beta_1\|\varphi-\overline{\varphi}\|+\beta_2\omega(|p-\overline{p}|),$$
для всіх $\varphi,\overline{\varphi}\in m,\quad p,\overline{p}\in[p_1,p_2]$

де $\omega(z)$ — неперервна не спадна скалярна функція, що визначена на [0, p_2-p_1], $\omega(0) = 0$; $\varphi,\overline{\varphi}\in m,\quad p,\overline{p}\in[p_1,p_2]$.

Тоді ФГС задачі про інваріантні тори системи диференціальних рівнянь (3.1.1) неперервна за параметром р.

А тепер наведемо умови, достатні для диференційовності функції Гріна-Самойленко задачі про інваріантні тори за параметром у випадку системи, аналогічної до системи (3.1.1), але в якій $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m) \in R^m$.

Отож, розглянемо таку систему диференціальних рівнянь

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi, p), \quad \frac{dh}{dt} = P(\varphi, p)h, \tag{3.1.12}$$

де $\varphi \in R^m$, $h \in m$, $a(\varphi,p)$, 2π- періодична по φ_i, ($i = 1, 2, \ldots$) вектор-функція, $P(\varphi,p)$ - 2π- періодична по φ_i, ($i = 1, 2, \ldots$) нескінчена матриця, $p \in [p_1, p_2]$ — параметр.

Теорема 3.2. *Нехай система рівнянь (3.1.12) така, що при* $p \in [p_1,p_2]$

5. $P(\varphi,p)$, $a(\varphi,p)$ *неперервно диференційовані по* φ_i, $(i = 1, 2, \ldots, m)$, p.
6. $\sum_{j=1}^{\infty} \max_{\varphi} \left| p_{sj}(\varphi, p) \right| \le p^o = const < \infty, \quad s = 1, 2, \ldots$
7. *Існує ФГС задачі про інваріантні тори системи диференціальних рівнянь (3.1.12), що задовольняє нерівність (3.1.5).*
8. $$\sum_{j=1}^{\infty} \max_{\varphi, p} \left| \frac{\partial p_{sj}(\varphi, p)}{\partial \varphi_i} \right| \le p_s < \infty, \quad \sum_{s=1}^{\infty} p_s < \infty,$$ $$\sum_{i=1}^{\infty} \max_{\varphi, p} \left| \frac{\partial p_{ki}(\varphi, p)}{\partial \varphi_i} \right| \le l_k < \infty, \quad \sum_{k=1}^{\infty} l_k < \infty.$$

Тоді ФГС задачі про інваріантні тори системи диференціальних рівнянь (3.1.12) диференційована по параметру р, якщо тільки $\gamma > \alpha$, *де* α *вибираємо за умовою*

$$\left| \left\langle \frac{\partial a(\varphi, p)}{\partial \varphi} \eta, \eta \right\rangle \right| \le \alpha |\eta|^2, \quad \langle \cdot, \cdot \rangle - \text{евклідів добуток}$$

$$|\eta| = |(\eta_1, \ldots, \eta_m)| = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \eta_i^2}.$$

Доведення. Поділимо рівність

$$G_o(\tau,\varphi,p)-G_o(\tau,\overline{\varphi},\overline{p})=\int_{-\infty}^{\infty}G_o(t_1,\varphi,p)\times$$
$$\times\left(P(\varphi_{t_1}^{p}(\varphi),p)-P(\varphi_{t_1}^{\overline{p}}(\varphi),\overline{p})\right)G_{t_1}(\tau,\varphi,\overline{p})dt_1.$$

на $p-\overline{p}$, та перейдемо до границі при $p\to\overline{p}$. Нехай

$$G_o(t_1,\varphi,p)=\left[g_{oik}(t_1,\varphi,p)\right]_{i,k=1}^{\infty},$$
$$G_{t_1}(\tau,\varphi,\overline{p})=\left[g_{ik}(t_1,\tau,\varphi,p)\right]_{i,k=1}^{\infty}.$$

З'ясуємо, що покоординатно

$$\lim_{p\to\overline{p}}G_o(t_1,\varphi,\overline{p})\frac{P(\varphi_{t_1}^{\overline{p}}(\varphi),\overline{p})-P(\varphi_{t_1}^{p}(\varphi),p)}{\overline{p}-p}G_{t_1}(\tau,\varphi,p)=$$
$$=G_o(t_1,\varphi,p)\frac{\partial P(\varphi_{t_1}^{p}(\varphi),p)}{\partial p}G_{t_1}(\tau,\varphi,p). \tag{3.1.13}$$

Просто переконатись, що елемент матриці, яка стоїть зліва у виразі (3.1.13) під знаком границі, який знаходиться в r-му стовпцю та l-му рядку, має вигляд:

$$\sum_{k=1}^{\infty}g_{olk}(t_1,\varphi,\overline{p})\sum_{i=1}^{\infty}\frac{p_{ik}(\varphi_{t_1}^{\overline{p}}(\varphi),\overline{p})-p_{ik}(\varphi_{t_1}^{p}(\varphi),p)}{\overline{p}-p}g_{ir}(t_1,\tau,\varphi,p). \tag{3.1.14}$$

Справедлива нерівність

$$L=\left|\sum_{k=1}^{\infty}g_{olk}(t_1,\varphi,\overline{p})\sum_{i=1}^{\infty}\frac{p_{ik}(\varphi_{t_1}^{\overline{p}}(\varphi),\overline{p})-p_{ik}(\varphi_{t_1}^{p}(\varphi),p)}{\overline{p}-p}g_{ir}(t_1,\tau,\varphi,p)\right|\le$$
$$\le\sum_{i=1}^{\infty}N\exp\left\{-\gamma|t_1|\right\}\left[\sum_{j=1}^{m}\left|\frac{\partial p_{ki}(\varphi_{t_1}^{p}(\varphi),p)}{\partial\varphi_{t_1j}^{p}(\varphi)}\right|\left\|\frac{\partial\varphi_{t_1j}^{p}(\varphi)}{\partial p}\right\|+\left|\frac{\partial p_{ki}(\varphi,p)}{\partial p}\right|\right].$$

Оскільки перше рівняння системи диференціальних рівнянь (3.1.12) скінченновимірне, то справедлива оцінка

$$\left\|\frac{\partial\varphi_{t_1j}^{p}(\varphi)}{\partial p}\right\|\le K\exp\left\{\alpha|t|\right\},$$

де α обирається за умовою $\left|\left\langle \frac{\partial a(\varphi, p)}{\partial \varphi}\eta, \eta \right\rangle\right| \le \alpha |\eta|^2$, K — деяка додатна стала.

Позначимо через $\hat{K}$ сталу, можливо достатньо велику додатну величину. Тоді

$$L \le \sum_{j=1}^{m} N^2 \exp\{-\gamma|t_1| - \gamma|t_1 - \tau| + \alpha|t_1|\}\hat{K}\sum_{i=1}^{\infty}\left|\frac{\partial p_{ki}(\varphi_{t_1}^p(\varphi), p)}{\partial \varphi_{t_1 j}^p(\varphi)}\right| +$$
$$+ \sum_{i=1}^{\infty} N^2 \exp\{-\gamma|t_1| - \gamma|t_1 - \tau|\}\left|\frac{\partial p_{ki}(\varphi, p)}{\partial p}\right| \le$$
$$\le \hat{K}\left(\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{\infty}\left|\frac{\partial p_{ki}(\varphi_{t_1}^p(\varphi), p)}{\partial \varphi_{t_1 j}^p(\varphi)}\right| + \sum_{i=1}^{\infty}\left|\frac{\partial p_{ki}(\varphi, p)}{\partial p}\right|\right) \le$$
$$\le \hat{K}\left(\sum_{j=1}^{m} p_k + l_k\right) = \hat{K}(p_k + l_k).$$

В попередніх перетвореннях використана умова $\gamma > \alpha$. Далі отримаємо, що модуль системи (3.1.14) не перевищує

$$\hat{K}\sum_{k=1}^{\infty}(p_k + l_k) = \hat{K}\left(\sum_{k=1}^{\infty} p_k + \sum_{k=1}^{\infty} l_k\right) < \infty.$$

Отже, в ряду (3.1.14) можна переходити до границі при $p \to \overline{p}$ почленно, що приводить до виконуваності рівності (3.1.13). Тоді

$$\lim_{\overline{p}\to p}\frac{G_o(\tau,\varphi,\overline{p}) - G_o(\tau,\varphi,p)}{\overline{p} - p} = \int_{-\infty}^{\infty} G_o(s,\varphi,p) \times$$
$$\times \frac{\partial P(\varphi_{t_1}^p(\varphi), p)}{\partial p} G_s(\tau,\varphi,p)ds \tag{3.1.15}$$

всякий раз, коли інтеграл справа рівномірно сходиться. Але

$$\left\| G_o(s,\varphi,p)\frac{\partial P(\varphi_s^p(\varphi), p)}{\partial p} G_s(\tau,\varphi,p)\right\| \le K\exp\{-(\gamma-\alpha)|s| - \gamma|s-\tau|\},$$

чого достатньо для рівномірної збіжності інтеграла в співвідношенні (3.1.15).

Границя

$$\lim_{\overline{p} \to p} \frac{G_o(\tau, \varphi, \overline{p}) - G_o(\tau, \varphi, p)}{\overline{p} - p}$$

визначає функцію $\dfrac{\partial G_o(\tau, \varphi, p)}{\partial p}$, для якої отримаємо оцінку

$$\left\| \frac{\partial G_o(\tau, \varphi, p)}{\partial p} \right\| \le \int_{-\infty}^{\infty} \hat{K} \exp\left\{ -(\gamma - \alpha)|s| - \gamma|s - \tau| \right\} ds \le$$
$$\le \hat{K} \exp\left\{ -(\gamma - \alpha)|\tau| \right\}.$$

Це й завершує доведення теореми.

ВИСНОВОК

У роботі провідним об'єктом розвідки є дослідження нескінчених систем диференціальних рівнянь, а саме теорія інваріантних многовидів зліченних систем диференціальних рівнянь, які розглядаються в просторі обмежених числових послідовностей. Приміром розглянуто один із підходів до теорії збурення інваріантних тороїдальних многовидів динамічних систем, пов'язаний з використанням функції Гріна-Самойленко для лінеарізованої задачі. Досліджено також найпростіші властивості функції Гріна-Самойленко задачі про інваріантні тори у випадку скінченновимірних систем диференціальних рівнянь. Аналізуються також умови існування та єдиності інваріантних торів у випадку існування єдиної функції Гріна-Самойленко.

Слід відмітити, що тема обрана мною для написання роботи виявилась одночасно і нелегкою, і привабливою. Нелегкою вона була тому, що в університеті замало часу виділено на опрацьовування теорії диференціальних рівнянь, без якої неможливо уявити дослідження даної тематики. А взагалі даний матеріал виявився суттєво цікавим, тому цю теорію варто вивчати.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Авдеюк П.И. О поведении решений квазилинейной счетной системы в окрестности инвариантного тора /П.И. Авдеюк // Асимптотическое интегрирование дифференциальных уравнений - Киев: Ин-т математики АН УССР, 1985. – С.3-8.
2. Авдеюк П.И. О существовании инвариантных торов счетных систем дифференциальных уравнений /П.И. Авдеюк // Некоторые вопросы теории асимптотических методов нелинейной механики - Киев: Ин-т математики АН УССР, 1986. – С.4-12.2.
3. Арнольд В. И. Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике // В. И.Арнольд УМН. 1962.2. - 18, вып. 6. - С. 91-192.1.
4. Арнольд В. И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. / В. И.Арнольд - М.: Наука, 1979. - 304 с.
5. Боголюбов Н.Н., Метод интегральных многообразий в нелинейной механике / Н.Н. Боголюбов, Ю.А. Митропольский // Труды междунар. симп. по нелинейным колебаниям.- Киев: Ин-т математики АН УССР, 1963.. - С. 93-154.
6. Боголюбов Н.Н. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. / Н.Н. Боголюбов , Ю.А. Митропольский.- М.: Наука, 1974. - 504 с.
7. Боголюбов Н.Н. Метод ускоренной сходимости в нелинейной механике. / Н.Н. Боголюбов, Ю.А. Митропольский, А.М. Самойленко - Киев: Наук, думка, 1969. - 244 с.
8. Валеев К.Г., Бесконечные системы дифференцильных уравнений. / К.Г Валеев О.А. Жаутыков.- Алма-Ата: Наука, 1974. - 412 с.
9. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц / Ф.Р. Гантмахер– М.: Наука,

1967.- 575 с.

10. ГДалецкий Ю.Л. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве./ Ю.Л. Далецкий, М.Г Крейн.- М.: Наука, 1970. - 536 с.
11. Колмогоров А.Н. Общая теория динамических систем и классическая механика / А.Н. Колмогоров // Международный конгресс в Амстердаме. - М.: Физматгиз, 1961. - С. 187-208.
12. Крейн М.Г. Лекции по теории устойчивости решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. / М.Г. Крейн - Киев, 1964. - 188 с.
13. Кулик В. Л. К вопросу о зависимости функции Грина задачи об инвариантном торе от параметра / В. Л. Кулик // УМЖ. - 1978. - 30, №4. - С. 544-551.
14. Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения./ А.М. Ляпунов - ГИТТЛ, 1950. 471 с.
15. Митропольский Ю.А. Интегральные многообразия в нелинейной механике. / Ю.А.Митропольский, О.Б. Лыкова - М.: Наука, 1972.2. - 412 с.
16. Митропольский Ю.А. К вопросу о структуре траекторий на тороидальных многообразиях / Ю.А.Митропольский, А.М. Самойленко // Докл. АН УССР. - 1964. - 8. - С. 984-985.
17. Перестюк Н.А. Инвариантные множества одного класса разрывных динамических систем / Н.А. Перестюк // УМЖ. - 1984. - 36, №1. – С. 63-69.
18. Персидский К.П. Бесконечные системы дифференциальных уравнений. / К. П. Персидский Дифференциальные уравнения в нелинейных пространствах. - Алма-Ата: Наука, 1976. - 247 с.
19. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. / Л.С. Понтрягин - М.: Наука, 1970. - 332 с.

20. Пуанкаре А. О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. / А. Пуанкаре - М.-Л.: ОГИЗ ГИТТЛ, 1947. – 390с.
21. Самойленко А.М. К вопросу о структуре траекторий на торе / А.М. Самойленко // УМЖ. - 1964. - 16, №6 - С. 769-782.1.
22. Самойленко А.М. О сохранении инвариантного тора при возмущении / А.М. Самойленко // Изв. АН СССР. Сер. матем - 1970. - 34, ЛГ6.] С. 1219-1240.
23. Самойленко А.М. О приведении динамической системы в окрестности гладкого инвариантного тора к каноническому виду /А.М. Самойленко // Изв. АН СССР. Там же. 1972.1. 35, №1. С. 209 232.2.
24. Самойленко А.М. Об экспоненциальной устойчивости инвариантного тора динамической системы / А.М. Самойленко // Дифференц. уравнения. - 1975. - №5. - С. 820 - 834.
25. Самойленко А.М. О приводимости системы обыкновенных дифференциальных уравнений в окрестности гладкого интегрального многообразия / А.М. Самойленко // УМЖ. - 1966. - 18, №6. - С. 41-64.
26. Самойленко А.М. Исследование динамической системы в окрестности квазипериодической траектории / А.М. Самойленко // - Киев, 1990. В 43 с- (Препр. /АН УССР. Ин-т математики, 90.35).
27. Самойленко А.М. Исследование динамической системы в окрестности инвариантного тороидального многообразия / А.М. Самойленко // УМЖ. - 1991. - 42, Л/Ч. - С. 530-537.
28. Самойленко А.М. Элементы математической теории многочастотных колебаний. Инвариантные торы. / А.М. Самойленко - М.: Наука, 1987. - 302 с.
29. Самойленко А.М., Кулик В.Л. О непрерывности функции Грина задачи об инвариантном торе / А.М. Самойленко, В.Л. Кулик //

УМЖ. - 1978. - 30, №6. - С. 779-782.2.

30. Самойленко А.М. Множества инвариантных торов линейных расширений динамических систем / А.М. Самойленко, В.Л. Кулик // Докл. АН УССР. Сер. А. - 1984. - №8. С. 15-19.

31. Самойленко А.М. Расщепляемость линейных расширений динамических систем на торе / А.М. Самойленко, В.Л. Кулик // Докл. АН УССР. Сер.А.- 1984. - №12.1.- С. 23-27.

32. Самойленко А.М. Функция Грина задачи об инвариантных торах счетных систем дифференциальных уравнений / А.М. Самойленко, Ю.В. Теплинский // Докл. АН УССР. Сер. А. - 1981. - №1 - С. 26-30.

33. Самойленко А.М. Об инвариантных торах счетных систем дифференциальных уравнений. / А.М. Самойленко, Ю.В. Теплинский, Цыгановский И.С. - Киев, 1982.2. - 43 с. - (Препр. /АН УССР. Ин-т математики; 82.2.30).

34. Самойленко А.М., Теплинский Ю.В. Об инвариантных торах дифференциальных систем с импульсами в пространстве ограниченных числовых последовательностей / А.М. Самойленко, Ю.В. Теплинский // Дифференц уравнения. - 1985. - 21, №8. - С. 1353-1361.

35. Самойленко А.М. Об устойчивости инвариантного тора нелинейной счетной системы уравнений / А.М. Самойленко, Ю.В. Теплинский // Докл. АН УССР. Сер. А. - 1991. - №7. - С. 31-32.2.

36. Самойленко А.М. Счетные системы дифференциальных уравнений / А.М. Самойленко, Ю.В. Теплинский – К.: Ин-т математики, 1993. – 308 с.

37. Самойленко А. М., Теплінський Ю. В. Елементи математичної теорії еволюційних рівнянь у банахових просторах /Самойленко А. М., Теплінський Ю. В. // праці Ін-ту математики НАН України. Математика та її застосування. - 2008. –Т72. - 496 с.

38. Самойленко А.М., Теплінський Ю.В., Пасюк К.В. Про існування інваріантних торів зліченних систем диференціально-різницевих рівнянь, визначених на нескінченновимірних торах // Нелінійні коливання. – 2009. – 12, №3. – С. 347-367.

39. Самойленко А.М., Теплінський Ю.В., Пасюк К.В. Про існування нескінченновимірних інваріантних торів нелінійних зліченних систем диференціально-різницевих рівнянь // Нелінійні коливання. – 2010. – 13, №2. – С. 253-271.

40. Теплинский Ю.В. Об инвариантных торах и приводимости счетных систем / Ю.В. Теплинский // Дифференц. уравнения. - 1979. - 15, N4. – С.759-761.

41. Теплинский Ю.В. К вопросу о приводимости счетных систем дифференциальных уравнений с квазипериодическими коэффициентами / Ю.В. Теплинский // УМЖ. - 1979. – 31, №4. - С. 463-465.

42. Теплинский Ю.В. Об инвариантных торах счетных систем дифференциальных уравнений / Ю.В. Теплинский // Докл. АН УССР. Сер. А. - 1978. - №9. - С. 796-800.

43. Теплинский Ю.В. Об инвариантных торах линейных систем дифференциальных уравнений в пространстве М / Ю.В. Теплинский // УМЖ. - 1982.2. - 35, №2.1.- С. 194-199.

44. Теплинский Ю.В., Авдеюк П.И. О зависимости функции Грина задачи об инвариантном торе линейной дифференциальной системы уравнений в пространстве М от параметра / Ю.В. Теплинский, П.И. Авдеюк // Приближенные методы анализа нелинейных колебаний. - Киев: Ин-т математики АН УССР, 1984. - С. 120-128.

45. Теплинский Ю.В., Авдеюк П.И. Об экспоненциальной устойчивости инвариантного тора нелинейной счетной системы дифференциальных уравнений / Ю.В. Теплинский, П.И. Авдеюк // УМЖ. - 1990. - 42, №2.2. - С. 401-405.

46. Теплинский Ю.В., Авдеюк П.И. Редукция задачи о существовании инвариантного тора бесконечной дифференциальной системы к конечному случаю / Ю.В. Теплинский, П.И. Авдеюк // УМЖ. – 1991. - 43, №9, - С. 1251-1255.