

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КАМ'ЯНЕЦЬ-ПОДІЛЬСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ**

Препринт 2008.1

Гнатюк Ю.В., Гнатюк В.О., Гудима У.В.

**НАЙКРАЩА РІВНОМІРНА АПРОКСИМАЦІЯ
НЕПЕРЕРВНОГО КОМПАКТНОЗНАЧНОГО ОПУКЛОЗНАЧНОГО
ВІДОБРАЖЕННЯ МНОЖИНАМИ ІНШИХ НЕПЕРЕРВНИХ
КОМПАКТНОЗНАЧНИХ ОПУКЛОЗНАЧНИХ ВІДОБРАЖЕНЬ**

Кам'янець-Подільський - 2008

УДК 517.5

**НАЙКРАЩА РІВНОМІРНА АПРОКСИМАЦІЯ НЕПЕРЕРВНОГО
КОМПАКТНОЗНАЧНОГО ОПУКЛОЗНАЧНОГО ВІДОБРАЖЕННЯ
МНОЖИНАМИ ІНШИХ НЕПЕРЕРВНИХ КОМПАКТНОЗНАЧНИХ
ОПУКЛОЗНАЧНИХ ВІДОБРАЖЕНЬ.**- Кам'янець-Подільський, 2008.-54 с.-
(Препринт/ Кам'янець-Подільський державний університет; № 2008.1).

У даній роботі для задачі найкращої рівномірної апроксимації неперервного компактнозначного опуклозначного відображення множинами інших неперервних компактнозначних опуклозначних відображень встановлено необхідну, достатню умови та критерій екстремального елемента, який є узагальненням класичного критерію Колмогорова многочлена, що найменше відхиляється від заданої функції.

Рецензент:

кандидат фізико-математичних наук, доцент

Щирба В.С.

Рекомендовано до друку вченою радою Кам'янець-Подільського державного університету, протокол № 1 від 31 січня 2008 р.

© Кам'янець-Подільський державний університет , 2008

© Ю.В.Гнатюк, В.О.Гнатюк, У.В. Гудима, 2008

1. Постановка задачі.

Нехай S – компакт, X – лінійний над полем комплексних (дійсних) чисел нормований простір, $C(S, X)$ – лінійний над полем дійсних чисел нормований простір однозначних відображень g компакту S в X , неперервних на S , з нормою $\|g\| = \max_{s \in S} \|g(s)\|$, $K(X)$ – сукупність непорожніх компактів простору X , $C(S, K(X))$ – множина неперервних на S відносно метрики Хаусдорфа багатозначних відображень S в $K(X)$, $K_0(X)$ – сукупність всіх непорожніх опуклих компактів простору X , $C(S, K_0(X))$ – множина тих багатозначних відображень g із $C(S, K(X))$, для яких $g(s) \in K_0(X)$, $s \in S$, $V \subset C(S, K(X))$.

Як відомо (див., наприклад, [1, с.130]), в якості відстані $H(A, B)$ між $A, B \in K(X)$ приймається більше з двох чисел

$$\sup_{x \in A} \inf_{y \in B} \|x - y\|, \sup_{y \in B} \inf_{x \in A} \|x - y\|,$$

тобто

$$H(A, B) = \max \left\{ \sup_{x \in A} \inf_{y \in B} \|x - y\|, \sup_{y \in B} \inf_{x \in A} \|x - y\| \right\}.$$

Оскільки для кожного $x \in X$ функція $F_x(y) = \|x - y\|$ є неперервною по y на X , а для кожного $A \in K(X)$ функція $E(x, A) = \inf_{y \in A} \|x - y\|$ є неперервною по x на X (див. [2, с.17]), то на основі властивостей неперервної на компактті дійснозначної функції (див., наприклад, [3, с.28]) величину $H(A, B)$ можна подати у такому вигляді

$$H(A, B) = \max \left\{ \max_{x \in A} \min_{y \in B} \|x - y\|, \max_{y \in B} \min_{x \in A} \|x - y\| \right\}. \quad (1.1)$$

Величина H задовольняє всім аксіомам метрики на множині $K(X)$ і перетворює цю множину у метричний простір (див., наприклад, [1, с.130]). Метрика H називається метрикою Хаусдорфа або іноді Помпейю-Хаусдорфа на честь Помпейю і Хаусдорфа, які ввели і досліджували її у своїх працях.

Задачею найкращої рівномірної апроксимації відображення $a \in C(S, K(X))$, множиною $V \subset C(S, K(X))$ інших неперервних компактзначних відображень будемо називати задачу відшукування величини

$$\alpha_a^*(V) = \inf_{g \in V} \sup_{s \in S} H(g(s), a(s)). \quad (1.2)$$

Якщо врахувати (1.1), то задача відшукування величини (1.2) набере вигляду

$$\alpha_a^*(V) = \inf_{g \in V} \sup_{s \in S} \max \left\{ \max_{x \in g(s)} \min_{y \in a(s)} \|x - y\|, \max_{y \in a(s)} \min_{x \in g(s)} \|x - y\| \right\}. \quad (1.3)$$

Якщо існує елемент $g^* \in V$ такий, що

$$\alpha_a^*(V) = \sup_{s \in S} H(g^*(s), a(s)) = \sup_{s \in S} \max \left\{ \max_{x \in g^*(s)} \min_{y \in a(s)} \|x - y\|, \max_{y \in a(s)} \min_{x \in g^*(s)} \|x - y\| \right\},$$

то його будемо називати елементом найкращого наближення для відображення a у множині V або екстремальним елементом для величини (1.2), ((1.3)).

Вважається, що теорія апроксимації бере свій початок у роботах П.Л. Чебишова, який ще у 50-х роках XIX століття розглянув задачу про найкраще рівномірне наближення неперервної на сегменті $[c, d]$ дійснозначної функції a множиною V алгебраїчних поліномів g степеня, що не перевищує n , тобто задачу відшукування величини

$$\inf_{g \in V} \max_{s \in [c, d]} |g(s) - a(s)|. \quad (1.4)$$

Згодом у працях багатьох відомих математиків вивчалися й інші подібні задачі про найкраще наближення функцій, які відрізнялися вибором міри відхилення і апроксимуючої множини. До таких робіт відносяться роботи А.А. Маркова, Д. Джексона, С.Н. Бернштейна, Валле-Пуссена, Хаара, А.М. Колмогорова, С.М. Нікольського та інші.

Однією з таких задач є задача про найкраще рівномірне наближення неперервної на компактті S дійснозначної (комплекснозначної) функції a множиною V інших неперервних на цьому компактті функцій, тобто задачу відшукування величини

$$\inf_{g \in V} \max_{s \in S} |g(s) - a(s)|. \quad (1.5)$$

З розвитком теорії лінійних нормованих просторів стало зрозумілим, що широке коло задач найкращого наближення допускає загальну постановку, якщо в якості відстані між двома елементами нормованого простору взяти норму їх різниці, що дає можливість використовувати для розв'язання цих задач ідеї та методи функціонального аналізу. Внаслідок цього було сформульовано задачу найкращого наближення елемента a лінійного нормованого простору X множиною $V \subset X$, тобто задачу відшукування величини

$$\inf_{g \in V} \|g - a\|. \quad (1.6)$$

Основні результати дослідження задач (1.4)-(1.6) підсумовані у монографіях Н.І.Ахієзера [4], В.К. Дзядика [5], М.П. Корнейчука [2], П.-Ж. Лорана [6], О.І. Степанця [7, 8], В.М.Тихомирова [9] та ін.

Основні результати дослідження задач відшукування величин (1.5), (1.6) було узагальнено на випадок задачі відшукування величини

$$\inf_{g \in V} \max_{s \in S} \|g(s) - a(s)\|, \quad (1.7)$$

де S , X , $C(S, X)$ означаються як і при постановці задачі відшукування величини (1.2), $a \in C(S, X)$, $V \subset C(S, X)$.

Різним аспектам дослідження цієї задачі присвячено велику кількість робіт, серед яких роботи С.І. Зуховіцького і С.Б. Стечкіна [10,11], Г.Я. Ярахметова [12,13], Г.С. Смірнова [14,15], Г. Опфера [16], Р. Смарзевського [17], В. Ворза [18], Я. Ші [19], Ф. Дейча [20], А.Л. Гаркаві [21], Г.С. Смірнова і Р.Г. Смірнова [22], І. Зінгера [23] та ін.

Важливий клас задач теорії наближення утворюють задачі найкращого одночасного наближення кількох або нескінченної кількості елементів. До таких задач, зокрема, належить задача про чебишовський центр компакту K лінійного нормованого простору X відносно множини V цього простору, тобто задача відшукування величини

$$\inf_{g \in V} \max_{y \in K} \|g - y\|. \quad (1.8)$$

Питанням існування, єдиності, стійкості, характеристик, належності чебишовського центра множини опуклій оболонці цієї множини присвячено низку праць (див., наприклад, [24-31]).

До задач найкращого одночасного наближення належить також задача найкращої одночасної рівномірної апроксимації сім'ї функцій $\varphi_j \in C(S, R)$, $j \in I$, таких, що $\Phi_1(s) = \min_{j \in I} \varphi_j(s)$, $\Phi_2(s) = \max_{j \in I} \varphi_j(s)$, $s \in S$, також є неперервними функціями, множиною $V \subset C(S, R)$, яка полягає у відшуванні величини

$$\inf_{g \in V} \max_{j \in I} \max_{s \in S} |g(s) - \varphi_j(s)|. \quad (1.9)$$

Задача відшукування величини (1.9) розглядалась, зокрема, у працях [32-36].

У випадку, коли абстрактна функція, що апроксимується не означена точно, але відомо, що для кожного s компакту S її значення належать деякій компактній множині $a(s) \subset X$, причому множини $a(s)$ змінюються неперервно у розумінні метрики Хаусдорфа по s на S , для найкращого рівномірного відтворення такої функції абстрактними функціями множини $V \subset C(S, X)$ природно ставити задачу відшукування величини

$$\inf_{g \in V} \max_{s \in S} \max_{y \in a(s)} \|g(s) - y\|. \quad (1.10)$$

Задача відшукування величини (1.10) є задачею найкращої рівномірної апроксимації неперервного компактнозначного відображення a множиною V неперервних однозначних відображень.

Дослідженню цієї задачі присвячено, зокрема, праці [37-41].

Лише в окремих роботах розглядаються питання найкращої рівномірної апроксимації неперервного компактнозначного відображення множинами інших неперервних компактнозначних відображень.

Зокрема, у праці [42] розглянуто питання про існування у множині багатозначних поліномів фіксованого порядку полінома найкращого рівномірного наближення неперервного багатозначного відображення сегмента $[0,1]$ у множину $K_v(R')$ неперервних опуклих компактів простору R' .

У праці [43] встановлено теореми існування та характеристики елемента найкращого рівномірного наближення багатозначного неперервного відображення компакту U простору R^m в $K_v(R')$ сталими відображеннями U в $K_v(R')$.

Природно, що виникає ідея розгляду таких задач найкращого наближення, які охоплювали б задачі відшукування величин (1.4)-(1.10) та інші задачі, про які йшла мова вище, і дослідження яких дозволило б єдиним чином отримувати результати для того кола задач, які включаються у їх постановку як частинні випадки.

Однією з таких задач є задача (1.2) ((1.3)) найкращої рівномірної апроксимації неперервного компактнозначного відображення множинами інших неперервних компактнозначних відображень, яка розглядається у даній роботі.

2. Алгебраїчні операції над множинами та деякі їх властивості

Нехай $P(X)$ - сукупність непорожніх множин простору X , $A, B \in P(X)$, $\alpha \in R$.

Як відомо, алгебраїчною сумою (або просто сумою) множин A і B називається множина

$$A + B = \{c = a + b : a \in A, b \in B\},$$

а добутком числа α на множину A називається множина

$$\alpha A = \{c = \alpha a : a \in A\}.$$

У випадку $\alpha = -1$ замість $(-1)A$ пишуть $-A$.

При довільних $\alpha, \beta \in R$, $A, B, C \in P(X)$ мають місце наступні співвідношення:

- 1) $A + B = B + A$;
- 2) $A + (B + C) = (A + B) + C$;
- 3) $A + 0 = A$, де 0 означає множину, яка складається з нульового вектора простору X ;
- 4) $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$;
- 5) $1 \cdot A = A$;
- 6) $0 \cdot A = 0$;
- 7) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$;
- 8) $(\alpha + \beta)A \subset \alpha A + \beta A$;
- 9) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$, якщо A - опукла множина і $\alpha \cdot \beta \geq 0$.

В тому числі ці властивості мають місце для $\alpha, \beta \in R$, $A, B, C \in K(X)$ та для $\alpha, \beta \in R$, $A, B, C \in K_0(X)$.

При цьому слід мати на увазі, що операції додавання множин з $K(X)$ та з $K_0(X)$ та множення їх на дійсне число не виводять з $K(X)$ та з $K_0(X)$ відповідно.

3. Метричний простір неперервних компактнозначних відображень

Нагадаємо, що відображення $g: S \rightarrow K(X)$ називається неперервним відносно метрики H (за Хаусдорфом) в точці $s_0 \in S$, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує окіл $V_\varepsilon(s_0)$ точки s_0 компакту S такий, що $H(g(s), g(s_0)) < \varepsilon$ для всіх $s \in V_\varepsilon(s_0)$ (див., наприклад, [1, с.133]).

Твердження 3.1. Для будь-яких $g, h \in C(S, K(X))$ функція

$$H(g(s), h(s)) = \max \left\{ \max_{x \in g(s)} \min_{y \in h(s)} \|x - y\|, \max_{y \in h(s)} \min_{x \in g(s)} \|x - y\| \right\}, s \in S,$$

є неперервною по s на S .

Доведення. Оскільки H є метрикою на $K(X)$, то для $s, s_0 \in S$ має місце нерівність (див., наприклад, [44, с.85])

$$|H(g(s), h(s)) - H(g(s_0), h(s_0))| \leq H(g(s), g(s_0)) + H(h(s), h(s_0)). \quad (3.1)$$

За умовою відображення g, h є неперервними у точці s_0 , тому для $\varepsilon > 0$

існує окіл $V_\varepsilon(s_0)$ точки s_0 компакту S такий, що

$$H(g(s), g(s_0)) < \frac{\varepsilon}{2}, H(h(s), h(s_0)) < \frac{\varepsilon}{2}$$

для всіх $s \in V_\varepsilon(s_0)$. Тоді з нерівності (3.1) випливає, що для всіх $s \in V_\varepsilon(s_0)$

$$|H(g(s), h(s)) - H(g(s_0), h(s_0))| < \varepsilon.$$

Це й означає, що функція $H(g(s), h(s))$ є неперервною в точці s_0 .

Оскільки точка s_0 вибрана з S довільним чином, то $H(g(s), h(s))$ є неперервною по s на S .

Твердження доведено.

На основі властивостей неперервної на компактній дійснозначній функції та доведеної теореми робимо висновок, що для довільних $g, h \in C(S, K(X))$ функція $H(g(s), h(s))$ досягає на S свого найбільшого значення, тобто існує

$$\max_{s \in S} H(g(s), h(s)).$$

Покладемо далі для будь-яких $g, h \in C(S, K(X))$

$$\rho(g, h) = \max_{s \in S} H(g(s), h(s)) = \max_{s \in S} \max \left\{ \max_{x \in g(s)} \min_{y \in h(s)} \|x - y\|, \max_{y \in h(s)} \min_{x \in g(s)} \|x - y\| \right\}. \quad (3.2)$$

Твердження 3.2. Величина $\rho(g, h)$, $g, h \in C(S, K(X))$, задає метрику на множині $C(S, K(X))$.

Доведення. Оскільки $H(g(s), h(s)) \geq 0$ для всіх $s \in S$, то для будь-яких $g, h \in C(S, K(X))$

$$\rho(g, h) \geq 0.$$

Якщо $g = h$, то $g(s) = h(s)$ для всіх $s \in S$. Взявши до уваги, що H задає метрику на $K(X)$, звідси отримаємо, що

$$H(g(s), h(s)) = 0 \text{ для всіх } s \in S.$$

Тому

$$\rho(g, h) = \max_{s \in S} H(g(s), h(s)) = 0.$$

Навпаки, якщо

$$\rho(g, h) = \max_{s \in S} H(g(s), h(s)) = 0,$$

то $H(g(s), h(s)) = 0$ для всіх $s \in S$.

Оскільки H є метрикою на $K(X)$, то звідси одержуємо, що $g(s) = h(s)$ для всіх $s \in S$. Тому $g = h$.

Зрозуміло, що $\rho(g, h) = \rho(h, g)$ для всіх $g, h \in C(S, K(X))$.

Переконаємось, що для $g, h, p \in C(S, K(X))$

$$\rho(g, h) \leq \rho(g, p) + \rho(p, h).$$

Дійсно для будь-яких $s \in S$

$$H(g(s), h(s)) \leq H(g(s), p(s)) + H(p(s), h(s)).$$

Тому

$$\begin{aligned} \rho(g, h) &= \max_{s \in S} H(g(s), h(s)) \leq \max_{s \in S} (H(g(s), p(s)) + H(p(s), h(s))) \leq \\ &\leq \max_{s \in S} H(g(s), p(s)) + \max_{s \in S} H(p(s), h(s)) = \rho(g, p) + \rho(p, h). \end{aligned}$$

Твердження доведено.

Надалі через $(C(S, K(X)), \rho)$ будемо позначати такий метричний простір, у якому для всіх $g, h \in C(S, K(X))$

$$\rho(g, h) = \max_{s \in S} H(g(s), h(s)).$$

Отримаємо двоїсте подання відстані $\rho(g, h)$ між двома неперервними компактноточковими опуклозначними відображеннями.

Позначимо через X^* - простір, спряжений з X , а через B^* - одиничну кулю цього простору:

$$B^* = \{f : f \in X^*, \|f\| \leq 1\}.$$

Твердження 3.3. Для будь-яких $A, B \in K_0(X)$

$$H(A, B) = \max_{f \in B^*} \left| \max_{x \in A} \operatorname{Re} f(x) - \max_{y \in B} \operatorname{Re} f(y) \right|. \quad (3.3)$$

Доведення. Позначимо через X_R простір X , розглядуваний лише над полем дійсних чисел (X_R - дійсний лінійний нормований простір, асоційований з комплексним лінійним нормованим простором X).

Нехай

$$H_1(A, B) = \max_{x \in A} \min_{y \in B} \|x - y\|.$$

Згідно із співвідношенням двоїстості для задачі наближення фіксованого елемента опуклою множиною (див., наприклад, [2, с.28]) для всіх $x \in A$

$$\min_{y \in B} \|x - y\| = \max_{\substack{\varphi \in X_R^*, \\ \|\varphi\|_{X_R^*} \leq 1}} \left(\varphi(x) - \max_{y \in B} \varphi(y) \right).$$

Тому

$$H_1(A, B) = \max_{x \in A} \max_{\substack{\varphi \in X_R^*, \\ \|\varphi\|_{X_R^*} \leq 1}} \left(\varphi(x) - \max_{y \in B} \varphi(y) \right) = \max_{\substack{\varphi \in X_R^*, \\ \|\varphi\|_{X_R^*} \leq 1}} \left(\max_{x \in A} \varphi(x) - \max_{y \in B} \varphi(y) \right).$$

Аналогічно доводиться, що

$$H_2(A, B) = \max_{y \in B} \min_{x \in A} \|x - y\| = \max_{\substack{\varphi \in X_R^*, \\ \|\varphi\|_{X_R^*} \leq 1}} \left(\max_{y \in B} \varphi(y) - \max_{x \in A} \varphi(x) \right).$$

Звідси випливає, що

$$H(A, B) = \max \{H_1(A, B), H_2(A, B)\} = \max_{\substack{\varphi \in X_R^*, \\ \|\varphi\|_{X_R^*} \leq 1}} \left| \max_{x \in A} \varphi(x) - \max_{y \in B} \varphi(y) \right|. \quad (3.4)$$

Дійсно, нехай, наприклад,

$$H(A, B) = H_1(A, B) = \max_{x \in A} \varphi_1(x) - \max_{y \in B} \varphi_1(y),$$

де $\varphi_1 \in X_R^*$, $\|\varphi_1\|_{X_R^*} \leq 1$.

Тоді

$$H(A, B) = H_1(A, B) \leq \max_{\substack{\varphi \in X_R^*, \\ \|\varphi\|_{X_R^*} \leq 1}} \left| \max_{x \in A} \varphi(x) - \max_{y \in B} \varphi(y) \right|. \quad (3.5)$$

З другого боку, нехай, наприклад,

$$\max_{\substack{\varphi \in X_R^*, \\ \|\varphi\|_{X_R^*} \leq 1}} \left| \max_{x \in A} \varphi(x) - \max_{y \in B} \varphi(y) \right| = \left| \max_{x \in A} \varphi_2(x) - \max_{y \in B} \varphi_2(y) \right| = \max_{y \in B} \varphi_2(y) - \max_{x \in A} \varphi_2(x),$$

де $\varphi_2 \in X_R^*$, $\|\varphi_2\|_{X_R^*} \leq 1$.

Тоді

$$\begin{aligned} \max_{\substack{\varphi \in X_R^*, \\ \|\varphi\|_{X_R^*} \leq 1}} \left| \max_{x \in A} \varphi(x) - \max_{y \in B} \varphi(y) \right| &\leq \max_{\substack{\varphi \in X_R^*, \\ \|\varphi\|_{X_R^*} \leq 1}} \left(\max_{y \in B} \varphi(y) - \max_{x \in A} \varphi(x) \right) = \\ &= H_2(A, B) \leq H(A, B). \end{aligned} \quad (3.6)$$

З (3.5), (3.6) випливає, що має місце (3.4).

Нехай далі

$$H(A, B) = \left| \max_{x \in A} \varphi^*(x) - \max_{y \in B} \varphi^*(y) \right|, \quad (3.7)$$

де $\varphi^* \in X_R^*$, $\|\varphi^*\|_{X_R^*} \leq 1$.

Розглянемо функціонал f^* , заданий на X таким чином:

$$f^*(x) = \varphi^*(x) - i\varphi^*(ix), x \in X.$$

Відомо (див., наприклад, [44, с.159]), що $f^* \in X^*$ і $\|f^*\| = \|\varphi^*\|_{X_R^*} \leq 1$.

Тоді з (3.7) отримаємо, що

$$H(A, B) = \left| \max_{x \in A} \operatorname{Re} f^*(x) - \max_{y \in B} \operatorname{Re} f^*(y) \right|,$$

причому $f^* \in B^*$.

Тому

$$H(A, B) \leq \max_{f \in B^*} \left| \max_{x \in A} \operatorname{Re} f(x) - \max_{y \in B} \operatorname{Re} f(y) \right|. \quad (3.8)$$

З іншого боку для всіх $f \in B^*$ маємо, що $\operatorname{Re} f^* \in X_R^*$, $\|\operatorname{Re} f\| \leq 1$.

Тоді

$$\max_{f \in B^*} \left| \max_{x \in A} \operatorname{Re} f(x) - \max_{y \in B} \operatorname{Re} f(y) \right| \leq \max_{\substack{\varphi \in X_R^*, \\ \|\varphi\|_{X_R^*} \leq 1}} \left| \max_{x \in A} \varphi(x) - \max_{y \in B} \varphi(y) \right| = H(A, B). \quad (3.9)$$

З (3.8), (3.9) випливає, що має місце рівність (3.3).

Твердження доведено.

Твердження 3.4. Для будь-яких $g, h \in C(S, K_0(X))$ має місце рівність

$$\rho(g, h) = \max_{s \in S} \max_{f \in B^*} \left| \max_{x \in g(s)} \operatorname{Re} f(x) - \max_{y \in h(s)} \operatorname{Re} f(y) \right|. \quad (3.10)$$

Справедливість цього твердження випливає з рівності (3.2), якщо врахувати (3.3).

4. Алгебраїчні операції над багатозначними відображеннями та деякі їх властивості

Нехай $g, h \in C(S, K(X))$, $\lambda \in R$.

Природно вважати, що $g = h$, якщо $g(s) = h(s)$ для всіх $s \in S$. Як відомо, сумою багатозначних відображень g і h називається відображення $g + h$ таке, що $(g + h)(s) = g(s) + h(s)$ для всіх $s \in S$, а добутком числа α на відображення g називається відображення αg таке, що $(\alpha g)(s) = \alpha g(s)$ для всіх $s \in S$.

При $\alpha = -1$ замість $(-1)g$ пишуть $-g$.

Операції додавання відображень з множин $C(S, K(X))$ та $C(S, K_0(X))$ і множення їх на дійсні числа не виводять з цих множин.

З урахуванням зазначеного вище та властивостей алгебраїчних операцій над множинами, описаних у пункті 2, легко переконатися, що для довільних $\alpha, \beta \in R$, $g, h, p \in C(S, K(X))$ мають місце такі співвідношення:

$$1) g + h = h + g;$$

$$2) g + (h + p) = (h + g) + p;$$

3) $g + 0 = g$, де 0 означає відображення, яке кожному $s \in S$ ставить у відповідність нульовий елемент простору X ;

$$4) \alpha(\beta g) = (\lambda\beta)g;$$

$$5) 1 \cdot g = g;$$

$$6) 0 \cdot g = 0;$$

$$7) \alpha(g + h) = \alpha g + \alpha h;$$

$$8) (\alpha + \beta)g(s) \subset \alpha g(s) + \beta g(s) \text{ для всіх } s \in S;$$

$$9) (\alpha + \beta)g = \alpha g + \beta g, \text{ якщо } g \in C(S, K_0(X)) \text{ і } \lambda \cdot \beta \geq 0.$$

Твердження 4.1 (див., наприклад, [46]). Нехай $A_i, B_i \in K_0(X)$, $\lambda_i \in R$, $i = \overline{1, k}$. Має місце нерівність

$$H\left(\sum_{i=1}^k \lambda_i A_i, \sum_{i=1}^k \lambda_i B_i\right) \leq \sum_{i=1}^k |\lambda_i| H(A_i, B_i).$$

Справедливість твердження легко випливає з твердження 3.3.

Твердження 4.2. Нехай $g_i, h_i \in C(S, K_0(X))$, $\lambda_i \in R$, $i = \overline{1, k}$. Має місце нерівність

$$\rho\left(\sum_{i=1}^k \lambda_i g_i, \sum_{i=1}^k \lambda_i h_i\right) \leq \sum_{i=1}^k |\lambda_i| \rho(g_i, h_i). \quad (4.1)$$

Доведення. Згідно з (3.2)

$$\rho\left(\sum_{i=1}^k \lambda_i g_i, \sum_{i=1}^k \lambda_i h_i\right) = \max_{s \in S} H\left(\sum_{i=1}^k \lambda_i g_i(s), \sum_{i=1}^k \lambda_i h_i(s)\right). \quad (4.2)$$

Внаслідок твердження 4.1 для кожного $s \in S$

$$H\left(\sum_{i=1}^k \lambda_i g_i(s), \sum_{i=1}^k \lambda_i h_i(s)\right) \leq \sum_{i=1}^k |\lambda_i| H(g_i(s), h_i(s)).$$

Тому

$$\max_{s \in S} H \left(\sum_{i=1}^k \lambda_i g_i(s), \sum_{i=1}^k \lambda_i h_i(s) \right) \leq \sum_{i=1}^k |\lambda_i| \max_{s \in S} H(g_i(s), h_i(s)) = \sum_{i=1}^k |\lambda_i| \rho(g_i, h_i).$$

Звідси та з рівності (4.2) випливає справедливість нерівності (4.1).

Твердження доведено.

5. Лінійний нормований простір класів еквівалентних пар неперервних компактнозначних опуклозначних відображень

Будемо позначати через $(C(S, K_0(X)))^2$ прямий добуток множини $C(S, K_0(X))$ неперервних компактнозначних опуклозначних відображень самої на себе, тобто сукупність пар виду (g, h) , де $g, h \in C(S, K_0(X))$.

Означимо в $(C(S, K_0(X)))^2$ алгебраїчні операції додавання і множення на дійсні числа таким чином:

$$(g_1, h_1) + (g_2, h_2) = (g_1 + g_2, h_1 + h_2), \quad (g_1, h_1), (g_2, h_2) \in (C(S, K_0(X)))^2;$$

$$\alpha \cdot (g, h) = (\alpha g, \alpha h), \quad \text{якщо } \alpha \in R, \alpha \geq 0, (g, h) \in (C(S, K_0(X)))^2;$$

$$\alpha \cdot (g, h) = (\alpha h, \alpha g), \quad \text{якщо } \alpha \in R, \alpha < 0, (g, h) \in (C(S, K_0(X)))^2.$$

Зокрема,

$$(-1) \cdot (g, h) = (-h, -g), \quad (g, h) \in (C(S, K_0(X)))^2.$$

Введемо далі у $(C(S, K_0(X)))^2$ відношення еквівалентності $\approx$. Будемо вважати, що $(g_1, h_1) \approx (g_2, h_2)$, де $(g_1, h_1), (g_2, h_2) \in (C(S, K_0(X)))^2$, якщо $g_1 - h_2 = g_2 - h_1$, тобто для всіх $s \in S$ $g_1(s) - h_2(s) = g_2(s) - h_1(s)$.

Переконаємось, що відношення $\approx$ є відношенням еквівалентності, тобто, що воно задовольняє таким умовам:

- 1) рефлексивність: $(g, h) \approx (g, h)$ для всіх $(g, h) \in (C(S, K_0(X)))^2$;
- 2) симетричність: якщо $(g_1, h_1) \approx (g_2, h_2)$, то $(g_2, h_2) \approx (g_1, h_1)$;
- 3) транзитивність: якщо $(g_1, h_1) \approx (g_2, h_2)$ і $(g_2, h_2) \approx (g_3, h_3)$, то $(g_1, h_1) \approx (g_3, h_3)$.

Дійсно, для $(g, h) \in (C(S, K_0(X)))^2$ маємо $(g, h) \approx (g, h)$, оскільки $g(s) - h(s) = g(s) - h(s)$ для всіх $s \in S$.

Справедливість умови симетричності відношення $\approx$ випливає з таких міркувань. Якщо $(g_1, h_1) \approx (g_2, h_2)$, то $g_1(s) - h_2(s) = g_2(s) - h_1(s)$ для всіх $s \in S$. Тоді $g_2(s) - h_1(s) = g_1(s) - h_2(s)$, $s \in S$. Звідки й випливає, що $(g_2, h_2) \approx (g_1, h_1)$.

Нехай

$$(g_1, h_1), (g_2, h_2), (g_3, h_3) \in (C(S, K_0(X)))^2, \\ (g_1, h_1) \approx (g_2, h_2), (g_2, h_2) \approx (g_3, h_3).$$

Тоді

$$g_1(s) - h_2(s) = g_2(s) - h_1(s), \quad s \in S, \quad (5.1)$$

та

$$g_2(s) - h_3(s) = g_3(s) - h_2(s), \quad s \in S. \quad (5.2)$$

Переконаємось, що тоді

$$g_1(s) - h_3(s) = g_3(s) - h_1(s), \quad s \in S,$$

тобто, що

$$H(g_1(s) - h_3(s), g_3(s) - h_1(s)) = 0, \quad s \in S.$$

Згідно з (3.3)

$$\begin{aligned} & H(g_1(s) - h_3(s), g_3(s) - h_1(s)) = \\ & \max_{f \in B^*} \left| \max_{x \in g_1(s) - h_3(s)} \operatorname{Re} f(x) - \max_{y \in g_3(s) - h_1(s)} \operatorname{Re} f(y) \right| = \\ & = \max_{f \in B^*} \left| \max_{x \in g_1(s)} \operatorname{Re} f(x) - \min_{x \in h_3(s)} \operatorname{Re} f(x) - \max_{y \in g_3(s)} \operatorname{Re} f(y) + \min_{y \in h_1(s)} \operatorname{Re} f(y) \right| = \\ & = \max_{f \in B^*} \left| \max_{x \in g_1(s)} \operatorname{Re} f(x) - \min_{z \in h_2(s)} \operatorname{Re} f(z) + \min_{z \in h_2(s)} \operatorname{Re} f(z) + \max_{t \in g_2(s)} \operatorname{Re} f(t) - \right. \\ & \quad \left. - \max_{t \in g_2(s)} \operatorname{Re} f(t) - \max_{y \in g_3(s)} \operatorname{Re} f(y) + \min_{y \in h_1(s)} \operatorname{Re} f(y) - \min_{x \in h_3(s)} \operatorname{Re} f(x) \right| \leq \\ & \leq \max_{f \in B^*} \left| \max_{x \in g_1(s)} \operatorname{Re} f(x) - \min_{z \in h_2(s)} \operatorname{Re} f(z) - \left(\max_{t \in g_2(s)} \operatorname{Re} f(t) - \min_{y \in h_1(s)} \operatorname{Re} f(y) \right) \right| + \\ & \quad + \max_{f \in B^*} \left| \max_{t \in g_2(s)} \operatorname{Re} f(t) - \min_{x \in h_3(s)} \operatorname{Re} f(x) - \left(\max_{y \in g_3(s)} \operatorname{Re} f(y) - \min_{z \in h_2(s)} \operatorname{Re} f(z) \right) \right| = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \max_{f \in B^*} \left| \max_{x \in g_1(s) - h_2(s)} \operatorname{Re} f(x) - \max_{y \in g_2(s) - h_1(s)} \operatorname{Re} f(y) \right| + \\
&+ \max_{f \in B^*} \left| \max_{x \in g_2(s) - h_3(s)} \operatorname{Re} f(x) - \max_{y \in g_3(s) - h_2(s)} \operatorname{Re} f(y) \right| = \\
&= H(g_1(s) - h_2(s), g_2(s) - h_1(s)) + H(g_2(s) - h_3(s), g_3(s) - h_2(s)).
\end{aligned}$$

На основі (5.1), (5.2) звідси робимо висновок, що

$$H(g_1(s) - h_3(s), g_3(s) - h_1(s)) = 0, s \in S.$$

Це означає, що $g_1(s) - h_3(s) = g_3(s) - h_1(s)$, $s \in S$.

Тому $g_1 - h_3 = g_3 - h_1$.

Отже, $(g_1, h_1) \approx (g_3, h_3)$. Транзитивність відношення $\approx$ доведено.

Відношення еквівалентності $\approx$ дозволяє розбити прямий добуток $(C(S, K_0(X)))^2$ на класи еквівалентних між собою пар $(g, h) \in (C(S, K_0(X)))^2$.

Будемо позначати через $K_{(g, h)}$ клас елементів із $(C(S, K_0(X)))^2$, які еквівалентні парі (g, h) . Сукупність таких класів будемо позначати через $K_{(C(S, K_0(X)))^2}$.

Введемо далі операції додавання елементів множини $K_{(C(S, K_0(X)))^2}$ та множення їх на дійсні числа. Нехай $\alpha, \beta \in K_{(C(S, K_0(X)))^2}$ і

$(g_1, h_1) \in \alpha$, $(g_2, h_2) \in \alpha$, а $(g'_1, h'_1) \in \beta$, $(g'_2, h'_2) \in \beta$. Перевіримо, що пари $(g_1, h_1) + (g'_1, h'_1) = (g_1 + g'_1, h_1 + h'_1)$ та $(g_2, h_2) + (g'_2, h'_2) = (g_2 + g'_2, h_2 + h'_2)$ будуть еквівалентними між собою, тобто входять в один і той же клас $\gamma \in K_{(C(S, K_0(X)))^2}$.

Дійсно, маємо

$$g_1(s) - h_2(s) = g_2(s) - h_1(s), g'_1(s) - h'_2(s) = g'_2(s) - h'_1(s), s \in S.$$

Додавши ліві і праві частини цих рівностей та використавши властивості операцій додавання опуклих множин та множення їх на дійсне число (див. п.2) отримаємо, що

$$(g_1(s) + g'_1(s)) - (h_2(s) + h'_2(s)) = (g_2(s) + g'_2(s)) - (h_1(s) + h'_1(s)), s \in S.$$

Це й означає, що $(g_1 + g'_1, h_1 + h'_1) \approx (g_2 + g'_2, h_2 + h'_2)$. Проведені міркування дозволяють означити суму класів α і β із $K_{(C(S, K_0(X)))^2}$ таким чином:

$$\alpha + \beta = \gamma,$$

де γ – клас, що містить пару $(g_1 + g'_1, h_1 + h'_1)$, а $(g_1, h_1) \in \alpha$, $(g'_1, h'_1) \in \beta$.

Подібним чином означимо добуток класу α на довільне дійсне число c . Нехай $(g_1, h_1) \in \alpha$, $(g_2, h_2) \in \alpha$.

Переконаємось, що $c(g_1, h_1) \approx c(g_2, h_2)$. Оскільки $(g_1, h_1) \approx (g_2, h_2)$, то

$$g_1(s) - h_2(s) = g_2(s) - h_1(s), s \in S.$$

Звідки

$$c(g_1(s) - h_2(s)) = c(g_2(s) - h_1(s)), s \in S,$$

$$cg_1(s) - ch_2(s) = cg_2(s) - ch_1(s), s \in S.$$

Маємо, що при $c \geq 0$ $c(g_1, h_1) = (cg_1, ch_1)$, $c(g_2, h_2) = (cg_2, ch_2)$. На основі попередньої рівності звідси випливає, що $c(g_1, h_1) \approx c(g_2, h_2)$.

Якщо ж $c < 0$, то

$$c(g_1, h_1) = (ch_1, cg_1), c(g_2, h_2) = (ch_2, cg_2).$$

Тоді і в цьому випадку $c(g_1, h_1) \approx c(g_2, h_2)$, оскільки $ch_1(s) - cg_2(s) = ch_2(s) - cg_1(s)$, $s \in S$.

Означимо добуток класу α на число c як клас $c\alpha$, який містить пару $c(g, h)$, де (g, h) – довільна пара з класу α .

Переконаємось, що множина $K_{(C(S, K_0(X)))^2}$ з означеними вище алгебраїчними операціями є лінійним простором. Роль нуля в цьому просторі буде відігравати сукупність всіх пар (g, h) , еквівалентних парі $(0, 0)$, тобто, для яких $h = -g$.

Отже, $K_{(0,0)} = \{(g, -g) : g \in C(S, K_0(X))\}$.

Дійсно

1. Для $K_{(g_1, h_1)}, K_{(g_2, h_2)} \in K_{(C(S, K_0(X)))^2}$ маємо, що

$$K_{(g_1, h_1)} + K_{(g_2, h_2)} = K_{(g_2, h_2)} + K_{(g_1, h_1)}, \text{ оскільки } K_{(g_1, h_1)} + K_{(g_2, h_2)} = K_{(g_1 + g_2, h_1 + h_2)},$$

$$K_{(g_2, h_2)} + K_{(g_1, h_1)} = K_{(g_2 + g_1, h_2 + h_1)}, \text{ а } (g_1 + g_2, h_1 + h_2) \approx (g_2 + g_1, h_2 + h_1).$$

2. Для $K_{(g_1, h_1)}, K_{(g_2, h_2)}, K_{(g_3, h_3)} \in K_{(C(S, K_0(X)))^2}$

$$K_{(g_1, h_1)} + (K_{(g_2, h_2)} + K_{(g_3, h_3)}) = (K_{(g_1, h_1)} + K_{(g_2, h_2)}) + K_{(g_3, h_3)}, \text{ оскільки}$$

$$(g_1 + (g_2 + g_3), h_1 + (h_2 + h_3)) \approx ((g_1 + g_2) + g_3, (h_1 + h_2) + h_3).$$

3. Для всіх $K_{(g, h)} \in K_{(C(S, K_0(X)))^2}$ отримаємо, що

$$K_{(g, h)} + K_{(0, 0)} = K_{(g+0, h+0)} = K_{(g, h)}.$$

4. Для кожного $K_{(g, h)} \in K_{(C(S, K_0(X)))^2}$,

$$K_{(g, h)} + (-K_{(g, h)}) = K_{(g, h)} + K_{(-h, -g)} = K_{(g-h, h-g)} = K_{(g-h, -(g-h))} = K_{(0, 0)},$$

оскільки $(g-h, -(g-h)) \approx (0, 0)$.

5. Для $c_1, c_2 \in R$, $K_{(g, h)} \in K_{(C(S, K_0(X)))^2}$ має місце рівність

$$c_1(c_2 K_{(g, h)}) = (c_1 c_2) K_{(g, h)}.$$

Переконаємось в цьому. Справедливість зазначеної рівності при $c_1 \geq 0, c_2 \geq 0$ випливає з таких співвідношень:

$$c_1(c_2 K_{(g, h)}) = c_1 K_{(c_2 g, c_2 h)} = K_{((c_1 c_2)g, (c_1 c_2)h)} = (c_1 c_2) K_{(g, h)}.$$

$$\text{Якщо } c_1 < 0, c_2 < 0, \text{ то } c_1(c_2 K_{(g, h)}) = c_1 K_{(c_2 h, c_2 g)} = K_{((c_1 c_2)g, (c_1 c_2)h)} = (c_1 c_2) K_{(g, h)}.$$

$$\text{Якщо } c_1 \geq 0, c_2 < 0, \text{ то } c_1(c_2 K_{(g, h)}) = c_1 K_{(c_2 h, c_2 g)} = K_{((c_1 c_2)h, (c_1 c_2)g)} = (c_1 c_2) K_{(g, h)}.$$

$$\text{Якщо } c_1 < 0, c_2 \geq 0, \text{ то } c_1(c_2 K_{(g, h)}) = c_1 K_{(c_2 g, c_2 h)} = K_{((c_1 c_2)h, (c_1 c_2)g)} = (c_1 c_2) K_{(g, h)}.$$

Отже, справедливість рівності встановлено для будь-яких $c_1, c_2 \in R$, $K_{(g, h)} \in K_{(C(S, K_0(X)))^2}$.

6. Для будь-яких $K_{(g, h)} \in K_{(C(S, K_0(X)))^2}$ та $1 \in R$ справедлива рівність

$$1 \cdot K_{(g, h)} = K_{(g, h)}.$$

7. Для будь-яких $c_1, c_2 \in R$, $K_{(g, h)} \in K_{(C(S, K_0(X)))^2}$ виконується рівність

$$(c_1 + c_2) K_{(g, h)} = c_1 K_{(g, h)} + c_2 K_{(g, h)}.$$

Дійсно, якщо $c_1 \geq 0, c_2 \geq 0$, то згідно з п.4

$$(c_1 + c_2) K_{(g, h)} = K_{((c_1 + c_2)g, (c_1 + c_2)h)} = K_{(c_1 g + c_2 g, c_1 h + c_2 h)} =$$

$$= K_{(c_1 g, c_1 h)} + K_{(c_2 g, c_2 h)} = c_1 K_{(g, h)} + c_2 K_{(g, h)}.$$

Якщо $c_1 \geq 0, c_2 < 0$, $c_1 + c_2 \geq 0$, то

$$(c_1 + c_2) K_{(g, h)} = K_{((c_1 + c_2)g, (c_1 + c_2)h)}. \quad (5.3)$$

З другого боку

$$c_1 K_{(g, h)} + c_2 K_{(g, h)} = K_{(c_1 g, c_1 h)} + K_{(c_2 h, c_2 g)} = K_{(c_1 g + c_2 h, c_1 h + c_2 g)}. \quad (5.4)$$

Нехай $s \in S$. Маємо (див. (3.3))

$$H((c_1 + c_2)g(s) - c_1 h(s) - c_2 g(s), c_1 g(s) + c_2 h(s) - (c_1 + c_2)h(s)) =$$

$$= \max_{f \in B^*} \left| \max_{x \in ((c_1 + c_2)g(s) - c_1 h(s) - c_2 g(s))} \operatorname{Re} f(x) - \max_{y \in (c_1 g(s) + c_2 h(s) - (c_1 + c_2)h(s))} \operatorname{Re} f(y) \right| =$$

$$= \max_{f \in B^*} \left| (c_1 + c_2) \max_{x \in g(s)} \operatorname{Re} f(x) - c_1 \min_{x \in h(s)} \operatorname{Re} f(x) - c_2 \max_{x \in g(s)} \operatorname{Re} f(x) - \right.$$

$$\left. - c_1 \max_{x \in g(s)} \operatorname{Re} f(x) - c_2 \min_{y \in h(s)} \operatorname{Re} f(y) + (c_1 + c_2) \min_{y \in h(s)} \operatorname{Re} f(y) \right| = 0.$$

Звідси випливає справедливість рівності

$$(c_1 + c_2)g - c_1 h - c_2 g = c_1 g + c_2 h - (c_1 + c_2)h.$$

Тому

$$((c_1 + c_2)g, (c_1 + c_2)h) \approx (c_1 g + c_2 h, c_1 h + c_2 g),$$

і отже, на основі (5.3), (5.4) можна зробити висновок, що рівність

$$(c_1 + c_2) K_{(g, h)} = c_1 K_{(g, h)} + c_2 K_{(g, h)}$$

має місце і в цьому випадку.

Припустимо, що $c_1 \geq 0, c_2 < 0$, $c_1 + c_2 < 0$. Тоді

$$(c_1 + c_2) K_{(g, h)} = K_{((c_1 + c_2)h, (c_1 + c_2)g)}, \text{ а}$$

$$c_1 K_{(g, h)} + c_2 K_{(g, h)} = K_{(c_1 g, c_1 h)} + K_{(c_2 h, c_2 g)} = K_{(c_1 g + c_2 h, c_1 h + c_2 g)}.$$

Для $s \in S$ маємо, що

$$\max_{f \in B^*} \left| \max_{x \in ((c_1 + c_2)h(s) - c_1 h(s) - c_2 g(s))} \operatorname{Re} f(x) - \max_{y \in (c_1 g(s) + c_2 h(s) - (c_1 + c_2)g(s))} \operatorname{Re} f(y) \right| =$$

$$= \max_{f \in B^*} \left| (c_1 + c_2) \min_{x \in h(s)} \operatorname{Re} f(x) - c_1 \min_{x \in h(s)} \operatorname{Re} f(x) - c_2 \max_{x \in g(s)} \operatorname{Re} f(x) - \right.$$

$$\left. - c_1 \max_{x \in g(s)} \operatorname{Re} f(x) - c_2 \min_{y \in h(s)} \operatorname{Re} f(y) + (c_1 + c_2) \max_{y \in g(s)} \operatorname{Re} f(y) \right| = 0.$$

Звідси випливає, що

$$(c_1 + c_2)h - c_1 h - c_2 g = c_1 g + c_2 h - (c_1 + c_2)g,$$

і отже,

$$((c_1 + c_2)h, (c_1 + c_2)g) \approx (c_1 g + c_2 h, c_1 h + c_2 g).$$

Тому рівність $(c_1 + c_2)K_{(g,h)} = c_1K_{(g,h)} + c_2K_{(g,h)}$ має місце і в цьому випадку.

Нехай $c_1 < 0, c_2 < 0$.

Тоді

$$\begin{aligned} (c_1 + c_2)K_{(g,h)} &= K_{((c_1+c_2)h, (c_1+c_2)g)} = K_{(c_1h+c_2h, c_1g+c_2g)} = K_{(c_1h, c_1g)} + K_{(c_2h, c_2g)} = \\ &= c_1K_{(g,h)} + c_2K_{(g,h)}. \end{aligned}$$

Тут використано той факт, що $(c_1 + c_2)h = c_1h + c_2h, (c_1 + c_2)g = c_1g + c_2g$,

оскільки $c_1 \cdot c_2 > 0$, а $h, g \in C(S, K_0(X))$.

З проведених міркувань випливає, що зазначена вище рівність справедлива для всіх $c_1, c_2 \in R, K_{(g,h)} \in K_{(C(S, K_0(X)))^2}$.

8. Для будь-яких $c \in R, K_{(g_1, h_1)}, K_{(g_2, h_2)} \in K_{(C(S, K_0(X)))^2}$ справедлива рівність

$$c(K_{(g_1, h_1)} + K_{(g_2, h_2)}) = cK_{(g_1, h_1)} + cK_{(g_2, h_2)}.$$

Дійсно, якщо $c \geq 0$, то

$$\begin{aligned} c(K_{(g_1, h_1)} + K_{(g_2, h_2)}) &= cK_{(g_1+g_2, h_1+h_2)} = K_{(cg_1+cg_2, ch_1+ch_2)} = \\ &= K_{(cg_1, ch_1)} + K_{(cg_2, ch_2)} = cK_{(g_1, h_1)} + cK_{(g_2, h_2)}. \end{aligned}$$

Якщо $c < 0$, то

$$\begin{aligned} c(K_{(g_1, h_1)} + K_{(g_2, h_2)}) &= cK_{(g_1+g_2, h_1+h_2)} = K_{(ch_1+ch_2, cg_1+cg_2)} = \\ &= K_{(ch_1, cg_1)} + K_{(ch_2, cg_2)} = cK_{(g_1, h_1)} + cK_{(g_2, h_2)}. \end{aligned}$$

Оскільки умови 1-8 мають місце, то $K_{(C(S, K_0(X)))^2}$ є лінійним простором над

полем дійсних чисел.

Задамо норму елементів цього простору.

Теорема 5.1. Для будь-яких $\alpha \in K_{(C(S, K_0(X)))^2}$, $(g, h) \in \alpha$, $s \in S, f \in X^*$

величини

$$\max_{x \in g(s)} \operatorname{Re} f(x) + \min_{y \in h(s)} \operatorname{Re} f(y), \quad (5.5)$$

$$\max_{s \in S} \max_{f \in B^*} \left| \max_{x \in g(s)} \operatorname{Re} f(x) + \min_{y \in h(s)} \operatorname{Re} f(y) \right| \quad (5.6)$$

не залежать від вибору пари (g, h) із α .

Доведення. Нехай $(g, h), (g_1, h_1) \in \alpha$. Тоді $(g, h) \approx (g_1, h_1)$. Тому для всіх $s \in S$

$$g(s) - h(s) = g_1(s) - h(s).$$

Внаслідок цього для $f \in X^*$

$$\begin{aligned} \max_{x \in (g(s) - h(s))} \operatorname{Re} f(x) &= \max_{y \in (g_1(s) - h(s))} \operatorname{Re} f(y), \\ \max_{x \in g(s)} \operatorname{Re} f(x) - \min_{y \in h(s)} \operatorname{Re} f(y) &= \max_{y \in g_1(s)} \operatorname{Re} f(y) - \min_{y \in h(s)} \operatorname{Re} f(y), \\ \max_{x \in g(s)} \operatorname{Re} f(x) + \min_{y \in h(s)} \operatorname{Re} f(y) &= \max_{y \in g_1(s)} \operatorname{Re} f(y) + \min_{x \in h_1(s)} \operatorname{Re} f(x). \end{aligned}$$

Отже, величина (5.5) не залежить від вибору $(g, h) \in \alpha$.

Звідси впливає також, що

$$\max_{s \in S} \max_{f \in B^*} \left| \max_{x \in g(s)} \operatorname{Re} f(x) + \min_{y \in h(s)} \operatorname{Re} f(y) \right| = \max_{s \in S} \max_{f \in B^*} \left| \max_{x \in g_1(s)} \operatorname{Re} f(x) + \min_{y \in h_1(s)} \operatorname{Re} f(y) \right|.$$

Теорему доведено.

Величину (5.6) прийемо за норму класу $\alpha = K_{(g,h)}$ лінійного простору

$$K_{(C(S, K_0(X)))^2}.$$

Отже, для всіх $K_{(g,h)} \in K_{(C(S, K_0(X)))^2}$ покладемо

$$\|K_{(g,h)}\| = \max_{s \in S} \max_{f \in B^*} \left| \max_{x \in g(s)} \operatorname{Re} f(x) + \min_{y \in h(s)} \operatorname{Re} f(y) \right|. \quad (5.7)$$

З урахуванням (3.2), (3.3), (3.10) та (5.7)

$$\begin{aligned} \|K_{(g,h)}\| &= \max_{s \in S} \max_{f \in B^*} \left| \max_{x \in g(s)} \operatorname{Re} f(x) - \max_{y \in -h(s)} \operatorname{Re} f(-y) \right| = \\ &= \max_{s \in S} \max_{f \in B^*} \left| \max_{x \in g(s)} \operatorname{Re} f(x) - \max_{y \in -h(s)} \operatorname{Re} f(y) \right| = \max_{s \in S} H(g(s), -h(s)) = \rho(g, -h) = \\ &= \max_{s \in S} \max \left\{ \max_{x \in g(s)} \min_{y \in -h(s)} \|x - y\|, \max_{y \in -h(s)} \min_{x \in g(s)} \|x - y\| \right\} = \\ &= \max_{s \in S} \max \left\{ \max_{x \in g(s)} \min_{y \in h(s)} \|x + y\|, \max_{y \in h(s)} \min_{x \in g(s)} \|x + y\| \right\}. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Переконаємось, що для $\|K_{(g,h)}\|, K_{(g,h)} \in K_{(C(S, K_0(X)))^2}$, виконуються всі аксіоми

норми.

Зрозуміло, що $\|K_{(g,h)}\| \geq 0$. Нехай $K_{(g,h)} = K_{(0,0)}$. Маємо

$$\|K_{(0,0)}\| = \max_{s \in S} \max_{f \in B^*} \left| \max_{x=0} \operatorname{Re} f(x) + \min_{y=0} \operatorname{Re} f(y) \right| = 0.$$

Нехай $\|K_{(g,h)}\| = 0$. Тоді згідно з (5.8) $\rho(g, -h) = 0$. Звідки $h = -g$.

Тому $K_{(g,h)} = K_{(g,-g)} = K_{(0,0)}$.

Отже виконання першої аксіоми норми встановлено.

Нехай $c \in \mathbb{R}$, $K_{(g,h)} \in K_{(C(S,K_0(X)))^2}$.

Переконаємось, що

$$\|cK_{(g,h)}\| = |c| \|K_{(g,h)}\|.$$

Для $c=0$ ця рівність є очевидною.

Нехай $c > 0$. Тоді

$$\begin{aligned} \|cK_{(g,h)}\| &= \|K_{(cg,ch)}\| = \max_{s \in S} \max_{f \in B^*} \left| \max_{x \in cg(s)} \operatorname{Re} f(x) + \min_{y \in ch(s)} \operatorname{Re} f(y) \right| = \\ &= \max_{s \in S} \max_{f \in B^*} \left| \max_{\frac{x}{c} \in g(s)} c \operatorname{Re} f\left(\frac{x}{c}\right) + \min_{\frac{y}{c} \in h(s)} c \operatorname{Re} f\left(\frac{y}{c}\right) \right| = \\ &= c \max_{s \in S} \max_{f \in B^*} \left| \max_{x \in g(s)} \operatorname{Re} f(x) + \min_{y \in h(s)} \operatorname{Re} f(y) \right| = c \|K_{(g,h)}\|. \end{aligned}$$

Нехай $c < 0$. Тоді

$$\begin{aligned} \|cK_{(g,h)}\| &= \|K_{(ch,cg)}\| = \max_{s \in S} \max_{f \in B^*} \left| \max_{x \in ch(s)} \operatorname{Re} f(x) + \min_{y \in cg(s)} \operatorname{Re} f(y) \right| = \\ &= \max_{s \in S} \max_{f \in B^*} \left| \max_{\frac{x}{c} \in h(s)} c \operatorname{Re} f\left(\frac{x}{c}\right) + \min_{\frac{y}{c} \in g(s)} c \operatorname{Re} f\left(\frac{y}{c}\right) \right| = \\ &= \max_{s \in S} \max_{f \in B^*} \left| c \min_{y \in h(s)} \operatorname{Re} f(y) + c \max_{x \in g(s)} \operatorname{Re} f(x) \right| = \\ &= |c| \max_{s \in S} \max_{f \in B^*} \left| \min_{y \in h(s)} \operatorname{Re} f(y) + \max_{x \in g(s)} \operatorname{Re} f(x) \right| = |c| \|K_{(g,h)}\|. \end{aligned}$$

Отже, виконання другої аксіоми норми встановлено.

Переконаємось, що для всіх $K_{(g_1,h_1)}, K_{(g_2,h_2)} \in K_{(C(S,K_0(X)))^2}$ справедлива

нерівність

$$\|K_{(g_1,h_1)} + K_{(g_2,h_2)}\| \leq \|K_{(g_1,h_1)}\| + \|K_{(g_2,h_2)}\|.$$

Маємо

$$\begin{aligned} \|K_{(g_1,h_1)} + K_{(g_2,h_2)}\| &= \|K_{(g_1+g_2,h_1+h_2)}\| = \\ &= \max_{s \in S} \max_{f \in B^*} \left| \max_{x \in g_1(s)+g_2(s)} \operatorname{Re} f(x) + \min_{y \in h_1(s)+h_2(s)} \operatorname{Re} f(y) \right| = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \max_{s \in S} \max_{f \in B^*} \left| \max_{x \in g_1(s)} \operatorname{Re} f(x) + \min_{y \in h_1(s)} \operatorname{Re} f(y) + \max_{x \in g_2(s)} \operatorname{Re} f(x) + \min_{y \in h_2(s)} \operatorname{Re} f(y) \right| \leq \\ &\leq \max_{s \in S} \max_{f \in B^*} \left| \max_{x \in g_1(s)} \operatorname{Re} f(x) + \min_{y \in h_1(s)} \operatorname{Re} f(y) \right| + \max_{s \in S} \max_{f \in B^*} \left| \max_{x \in g_2(s)} \operatorname{Re} f(x) + \min_{y \in h_2(s)} \operatorname{Re} f(y) \right| = \\ &= \|K_{(g_1,h_1)}\| + \|K_{(g_2,h_2)}\|. \end{aligned}$$

Отже, третя аксіома норми виконується. Таким чином в цьому пункті встановлено, що простір $K_{(C(S,K_0(X)))^2}$ є лінійним над полем дійсних чисел

нормованим простором.

6. Еквівалентність задачі найкращої рівномірної апроксимації багатозначного відображення $a \in C(S, K_0(X))$ множиною $V \subset C(S, K_0(X))$ задачі найкращого наближення елемента $K_{(a,0)}$ лінійного нормованого простору $K_{(C(S,K_0(X)))^2}$ множиною K_V цього простору

Нехай $a \in C(S, K_0(X))$, $V \subset C(S, K_0(X))$. Згідно з твердженням 3.1, рівностями (3.2), (3.10) задачу (1.2) найкращої рівномірної апроксимації відображення $a \in C(S, K_0(X))$ множиною V можна подати у такому вигляді

$$\begin{aligned} \alpha_a^*(V) &= \inf_{g \in V} \max_{s \in S} H(g(s), a(s)) = \inf_{g \in V} \rho(g, a) = \\ &= \inf_{g \in V} \max_{s \in S} \max_{f \in B^*} \left| \max_{x \in g(s)} \operatorname{Re} f(x) - \max_{y \in a(s)} \operatorname{Re} f(y) \right|. \end{aligned} \quad (6.1)$$

Позначимо через K_V множину лінійного нормованого простору $K_{(C(S,K_0(X)))^2}$,

яка задається таким чином:

$$K_V = \left\{ K_{(g,0)} \in K_{(C(S,K_0(X)))^2} : g \in V \right\},$$

та розглянемо у просторі $K_{(C(S,K_0(X)))^2}$ задачу найкращого наближення елемента

$K_{(a,0)}$ множиною K_V , тобто задачу відшукування величини

$$\inf_{K_{(g,0)} \in K_V} \|K_{(g,0)} - K_{(a,0)}\|. \quad (6.2)$$

Теорема 6.1. Справедлива рівність

$$\alpha_a^*(V) = \inf_{K_{(g,0)} \in K_V} \|K_{(g,0)} - K_{(a,0)}\|. \quad (6.3)$$

Для того щоб елемент $g^* \in V$ був екстремальним елементом для величини (6.1), необхідно і достатньо, щоб елемент $K_{(g^*,0)}$ був екстремальним елементом

для величини (6.2).

Доведення. Справедливість рівності (6.3) випливає з (5.5), (6.1), (6.2) та наступних співвідношень:

$$\begin{aligned} \inf_{K_{(g,0)} \in K_V} \|K_{(g,0)} - K_{(a,0)}\| &= \inf_{K_{(g,0)} \in K_V} \|K_{(g,0)} + K_{(0,-a)}\| = \inf_{g \in V} \|K_{(g,-a)}\| = \\ &= \inf_{g \in V} \max_{s \in S} \max_{f \in B^*} \left| \max_{x \in g(s)} \operatorname{Re} f(x) + \min_{y \in -a(s)} \operatorname{Re} f(y) \right| \\ &= \inf_{g \in V} \max_{s \in S} \max_{f \in B^*} \left| \max_{x \in g(s)} \operatorname{Re} f(x) - \max_{y \in a(s)} \operatorname{Re} f(y) \right| = \alpha_a^*(V). \end{aligned}$$

Нехай тепер $g^* \in V$ є екстремальним елементом для величини (6.1). Тоді $K_{(g^*,0)} \in K_V$ є екстремальним елементом для величини (6.2). Дійсно, у протилежному випадку існував би елемент $K_{(g',0)} \in K_V$ такий, що

$$\|K_{(g',0)} - K_{(a,0)}\| < \inf_{K_{(g,0)} \in K_V} \|K_{(g,0)} - K_{(a,0)}\| = \alpha_a^*(V).$$

Для елемента $g' \in V$ внаслідок (5.6) мали б, що

$$\rho(g', a) = \|K_{(g',-a)}\| = \|K_{(g',0)} - K_{(a,0)}\| < \alpha_a^*(V).$$

Одержана нерівність суперечить нашому припущенню щодо екстремальності елемента g^* для величини (6.1).

Нехай далі $K_{(g^*,0)} \in K_V$ є екстремальним елементом для величини (6.2), тобто

$$\|K_{(g^*,0)} - K_{(a,0)}\| = \inf_{K_{(g,0)} \in K_V} \|K_{(g,0)} - K_{(a,0)}\|.$$

Переконаємось, що g^* є екстремальним елементом для величини (6.1). Дійсно, нехай $g' \in V$ і

$$\rho(g', a) < \alpha_a^*(V).$$

Тоді

$$\rho(g', a) = \|K_{(g',-a)}\| = \|K_{(g',0)} - K_{(a,0)}\| < \alpha_a^*(V) = \|K_{(g^*,0)} - K_{(a,0)}\|,$$

що неможливо, оскільки $K_{(g^*,0)}$ є екстремальним елементом для величини (6.2).

Одержана суперечність доводить, що g^* є екстремальним елементом для величини (6.1).

Теорему доведено.

7. Деякі допоміжні твердження.

Розглянемо твердження, які будуть використані при встановленні необхідних, достатніх умов та критеріїв екстремального елемента для величини (6.1)

Твердження 7.1. Для будь-яких A, B_1, A_2, B_2 із $K_0(X)$ справедливі нерівності

$$|H(A, B_1) - H(A_2, B_2)| \leq H(A_1 + B_2, A_2 + B_1), \quad (7.1)$$

$$|H(A, B_1) - H(A_2, B_2)| \leq H(A_1, A_2) + H(B_1, B_2). \quad (7.2)$$

Доведення. Справедливість нерівності (7.1) випливає з таких співвідношень

$$\begin{aligned} &|H(A, B_1) - H(A_2, B_2)| = \\ &= \left| \max_{f \in B^*} \left| \max_{x \in A_1} \operatorname{Re} f(x) - \max_{y \in B_1} \operatorname{Re} f(y) \right| - \max_{f \in B^*} \left| \max_{x \in A_2} \operatorname{Re} f(x) - \max_{y \in B_2} \operatorname{Re} f(y) \right| \right| \leq \\ &\leq \max_{f \in B^*} \left| \max_{x \in A_1} \operatorname{Re} f(x) - \max_{y \in B_1} \operatorname{Re} f(y) + \max_{y \in B_2} \operatorname{Re} f(y) - \max_{x \in A_2} \operatorname{Re} f(x) \right| = \\ &= \max_{f \in B^*} \left| \max_{x \in A_1 + B_2} \operatorname{Re} f(x) - \max_{y \in A_2 + B_1} \operatorname{Re} f(y) \right| = H(A_1 + B_2, A_2 + B_1). \end{aligned}$$

Нерівність (7.2) має місце, оскільки H є метрикою на $K(X)$.

Твердження доведено.

Твердження 7.2. Для A, B_1, B_2 із $K_0(X)$ має місце рівність

$$|H(A, B_1) - H(A, B_2)| \leq H(B_1, B_2). \quad (7.3)$$

Доведення. Справедливість нерівності (7.3) випливає з нерівності (7.2).

Дійсно, згідно з цією нерівністю

$$|H(A, B_1) - H(A, B_2)| \leq H(A, A) + H(B_1, B_2).$$

Оскільки $H(A, A) = 0$, то одержимо

$$|H(A, B_1) - H(A, B_2)| \leq H(B_1, B_2).$$

Твердження доведено.

Твердження 7.3. Нехай $a \in C(S, K_0(X))$, $s \in S$,

$$\varphi_s^a(K_{(g,h)}) = H(g(s), a(s) - h(s)), \quad K_{(g,h)} \in K_{(C(S, K_0(X)))^2}.$$

Функція $\varphi_s^a(K_{(g,h)})$ не залежить від вибору пари (g, h) із $K_{(g,h)}$, є неперервною та опуклою по $K_{(g,h)}$ на $K_{(C(S, K_0(X)))^2}$.

При фіксованому $K_{(g,h)} \in K_{(C(S, K_0(X)))^2}$ функція $\varphi_s^a(K_{(g,h)})$ є неперервною по s на S .

Доведення. Нехай $(g, h), (g_1, h_1) \in K_{(g,h)}$. З урахуванням твердження 3.3 та теореми 5.1 маємо, що

$$\begin{aligned} H(g(s), a(s) - h(s)) &= \\ &= \max_{f \in B^*} \left| \max_{x \in g(s)} \operatorname{Re} f(x) - \max_{y \in a(s)} \operatorname{Re} f(y) + \max_{y \in h(s)} \operatorname{Re} f(y) \right| = \\ &= \max_{f \in B^*} \left| \max_{x \in g_1(s)} \operatorname{Re} f(x) - \max_{y \in a(s)} \operatorname{Re} f(y) + \max_{y \in h_1(s)} \operatorname{Re} f(y) \right| = \\ &= H(g_1(s), a(s) - h_1(s)). \end{aligned}$$

Цей й означає, що функція $\varphi_s^a(K_{(g,h)})$ не залежить від вибору пари (g, h) із $K_{(g,h)}$.

Переконаємось у неперервності функції $\varphi_s^a(K_{(g,h)})$ на $K_{(C(S, K_0(X)))^2}$.

Згідно з твердженнями 4.2, 7.1 та рівністю (5.6) для $K_{(g,h)} \in K_{(C(S, K_0(X)))^2}$,

$K_{(g_0, h_0)} \in K_{(C(S, K_0(X)))^2}$ маємо, що

$$\begin{aligned} \left| \varphi_s^a(K_{(g,h)}) - \varphi_s^a(K_{(g_0, h_0)}) \right| &= \left| H(g(s), a(s) - h(s)) - H(g_0(s), a(s) - h_0(s)) \right| \leq \\ &\leq H(g(s) + a(s) - h_0(s), g_0(s) + a(s) - h(s)) \leq \\ &\leq H(g(s) - h_0(s), g_0(s) - h(s)) \leq \rho(g - h_0, g_0 - h) = \|K_{(g-h_0, h-h_0)}\| = \\ &= \|K_{(g,h)} - K_{(g_0, h_0)}\|. \end{aligned}$$

З цієї нерівності випливає неперервність функції $\varphi_s^a(K_{(g,h)})$ у кожній точці $K_{(g_0, h_0)}$ простору $K_{(C(S, K_0(X)))^2}$.

Переконаємось у опуклості цієї функції на $K_{(C(S, K_0(X)))^2}$.

Нехай $K_{(g_1, h_1)}, K_{(g_2, h_2)}$ довільні елементи простору $K_{(C(S, K_0(X)))^2}$, $\alpha \in [0, 1]$.

З урахуванням властивостей алгебраїчних операцій над опуклими множинами (див. п.2) та нерівності (4.1) отримаємо, що

$$\begin{aligned} \varphi_s^a(\alpha K_{(g_1, h_1)} + (1-\alpha)K_{(g_2, h_2)}) &= \varphi_s^a(K_{(\alpha g_1 + (1-\alpha)g_2, \alpha h_1 + (1-\alpha)h_2)}) = \\ &= H(\alpha g_1(s) + (1-\alpha)g_2(s), a(s) - (\alpha h_1(s) + (1-\alpha)h_2(s))) = \\ &= H(\alpha g_1(s) + (1-\alpha)g_2(s), \alpha a(s) + (1-\alpha)a(s) - (\alpha h_1(s) + (1-\alpha)h_2(s))) = \\ &= H(\alpha g_1(s) + (1-\alpha)g_2(s), \alpha(a(s) - h_1(s)) + (1-\alpha)(a(s) - h_2(s))) \leq \\ &\leq \alpha H(g_1(s), a(s) - h_1(s)) + (1-\alpha)H(g_2(s), a(s) - h_2(s)) = \\ &= \alpha \varphi_s^a(K_{(g_1, h_1)}) + (1-\alpha)\varphi_s^a(K_{(g_2, h_2)}). \end{aligned}$$

Опуклість функції $\varphi_s^a(K_{(g,h)})$ на $K_{(C(S, K_0(X)))^2}$ встановлено.

Переконаємось, що при фіксованому $K_{(g,h)} \in K_{(C(S, K_0(X)))^2}$ функція $\varphi_s^a(K_{(g,h)})$ є неперервною по s на S .

Для $s, s_0 \in S$ внаслідок тверджень 4.2, 7.1 будемо мати, що

$$\begin{aligned} \left| \varphi_s^a(K_{(g,h)}) - \varphi_{s_0}^a(K_{(g,h)}) \right| &= \left| H(g(s), a(s) - h(s)) - H(g(s_0), a(s_0) - h(s_0)) \right| \leq \\ &\leq H(g(s), g(s_0)) + H(a(s) - h(s), a(s_0) - h(s_0)) \leq \\ &\leq H(g(s), g(s_0)) + H(a(s), a(s_0)) + H(h(s), h(s_0)). \end{aligned}$$

Оскільки $a, g, h \in C(S, K_0(X))$, то для $\varepsilon > 0$ існує окіл $O_\varepsilon(s_0)$ точки s_0 компакту S такий, що для всіх $s \in O_\varepsilon(s_0)$ виконуються нерівності

$$H(g(s), g(s_0)) < \frac{\varepsilon}{3}, \quad H(a(s), a(s_0)) < \frac{\varepsilon}{3}, \quad H(h(s), h(s_0)) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Звідси й випливає, що для довільного $\varepsilon > 0$ існує окіл $O_\varepsilon(s_0)$ точки s_0 в S такий, що для всіх $s \in O_\varepsilon(s_0)$

$$\left| \varphi_s^a(K_{(g,h)}) - \varphi_{s_0}^a(K_{(g,h)}) \right| < \varepsilon.$$

Це означає, що при фіксованому $K_{(g,h)} \in K_{(C(S, K_0(X)))^2}$, $\varphi_s^a(K_{(g,h)})$ є неперервною як функція s в точці $s_0 \in S$. Оскільки точка s_0 вибрана довільно з S , то $\varphi_s^a(K_{(g,h)})$ є неперервною по s на S .

Твердження доведено.

Твердження 7.4. Нехай для $a \in C(S, K_0(X))$, $s \in S$, $f \in B^*$

$$\Psi_f^s(K_{(g,h)}) = \left| \max_{x \in g(s)} \operatorname{Re} f(x) - \max_{y \in a(s)} \operatorname{Re} f(y) - \max_{y \in -h(s)} \operatorname{Re} f(y) \right|, K_{(g,h)} \in K_{(C(S, K_0(X)))^2}.$$

Функція $\Psi_f^s(K_{(g,h)})$ не залежить від вибору пари (g, h) із $K_{(g,h)}$, є неперервною та опуклою по $K_{(g,h)}$ на $K_{(C(S, K_0(X)))^2}$.

При фіксованому $s \in S$, $a \in C(S, K_0(X))$, $K_{(g,h)} \in K_{(C(S, K_0(X)))^2}$ функція $\Psi_f^s(K_{(g,h)})$ є неперервною по f на B^* у розумінні слабкої * топології B^* .

Доведення. Незалежність функції $\Psi_f^s(K_{(g,h)})$ від вибору $(g, h) \in K_{(g,h)}$ випливає з теореми 5.1.

Переконаємось у неперервності функції $\Psi_f^s(K_{(g,h)})$ по $K_{(g,h)}$ на $K_{(C(S, K_0(X)))^2}$.

Для $K_{(g,h)} \in K_{(C(S, K_0(X)))^2}$, $K_{(g_0, h_0)} \in K_{(C(S, K_0(X)))^2}$ з урахуванням рівності (5.6)

маємо, що

$$\begin{aligned} & \left| \Psi_f^s(K_{(g,h)}) - \Psi_f^s(K_{(g_0, h_0)}) \right| = \\ & = \left| \max_{x \in g(s)} \operatorname{Re} f(x) - \max_{y \in a(s)} \operatorname{Re} f(y) - \max_{y \in -h(s)} \operatorname{Re} f(y) \right| - \\ & - \left| \max_{x \in g_0(s)} \operatorname{Re} f(x) - \max_{y \in a(s)} \operatorname{Re} f(y) - \max_{y \in -h_0(s)} \operatorname{Re} f(y) \right| \leq \\ & \leq \left| \max_{x \in (g(s) - h_0(s))} \operatorname{Re} f(x) - \max_{y \in (g_0(s) - h(s))} \operatorname{Re} f(y) \right| \leq \\ & \leq \rho(g - h_0, g_0 - h) = \|K_{(g-h_0, h-g_0)}\| = \|K_{(g,h)} - K_{(g_0, h_0)}\|. \end{aligned} \quad (7.4)$$

З нерівності (7.4) випливає неперервність функції $\Psi_f^s(K_{(g,h)})$ у кожній точці $K_{(g_0, h_0)}$ простору $K_{(C(S, K_0(X)))^2}$.

Переконаємось у опуклості цієї функції на $K_{(C(S, K_0(X)))^2}$. Нехай $K_{(g_1, h_1)}$,

$K_{(g_2, h_2)}$ довільні елементи простору $K_{(C(S, K_0(X)))^2}$, $\alpha \in [0, 1]$. Маємо, що

$$\Psi_f^s(\alpha K_{(g_1, h_1)} + (1-\alpha)K_{(g_2, h_2)}) = \Psi_f^s(K_{(\alpha g_1 + (1-\alpha)g_2, \alpha h_1 + (1-\alpha)h_2)}) =$$

$$\begin{aligned} & = \left| \max_{x \in (\alpha g_1(s) + (1-\alpha)g_2(s))} \operatorname{Re} f(x) - \max_{y \in a(s)} \operatorname{Re} f(y) - \max_{y \in (-\alpha h_1(s) - (1-\alpha)h_2(s))} \operatorname{Re} f(y) \right| = \\ & = \left| \alpha \left(\max_{x \in g_1(s)} \operatorname{Re} f(x) - \max_{y \in a(s)} \operatorname{Re} f(y) - \max_{y \in -h_1(s)} \operatorname{Re} f(y) \right) + \right. \\ & \left. + (1-\alpha) \left(\max_{x \in g_2(s)} \operatorname{Re} f(x) - \max_{y \in a(s)} \operatorname{Re} f(y) - \max_{y \in -h_2(s)} \operatorname{Re} f(y) \right) \right| \leq \\ & \leq \alpha \Psi_f^s(K_{(g_1, h_1)}) + (1-\alpha) \Psi_f^s(K_{(g_2, h_2)}). \end{aligned}$$

Опуклість функції $\Psi_f^s(K_{(g,h)})$ на $K_{(C(S, K_0(X)))^2}$ встановлено.

Переконаємось далі, що при фіксованих $s \in S$, $a \in C(S, K_0(X))$, $K_{(g,h)} \in K_{(C(S, K_0(X)))^2}$ функція $\Psi_f^s(K_{(g,h)})$ є неперервною по f на B^* у розумінні слабкої * топології B^* .

Нехай $f, f_0 \in B^*$. Маємо, що

$$\begin{aligned} & \left| \Psi_f^s(K_{(g,h)}) - \Psi_{f_0}^s(K_{(g,h)}) \right| = \\ & = \left| \max_{x \in g(s)} \operatorname{Re} f(x) - \max_{y \in a(s)} \operatorname{Re} f(y) - \max_{y \in -h(s)} \operatorname{Re} f(y) \right| - \\ & - \left| \max_{x \in g(s)} \operatorname{Re} f_0(x) - \max_{y \in a(s)} \operatorname{Re} f_0(y) - \max_{y \in -h(s)} \operatorname{Re} f_0(y) \right| \leq \\ & \leq \left| \max_{x \in g(s)} \operatorname{Re} f(x) - \max_{x \in g(s)} \operatorname{Re} f_0(x) \right| + \left| \max_{y \in a(s)} \operatorname{Re} f(y) - \max_{y \in a(s)} \operatorname{Re} f_0(y) \right| + \\ & + \left| \max_{y \in -h(s)} \operatorname{Re} f(y) - \max_{y \in -h(s)} \operatorname{Re} f_0(y) \right| \leq \\ & \leq \max_{x \in g(s)} |\operatorname{Re} f(x) - \operatorname{Re} f_0(x)| + \max_{y \in a(s)} |\operatorname{Re} f(y) - \operatorname{Re} f_0(y)| + \\ & + \max_{y \in -h(s)} |\operatorname{Re} f(y) - \operatorname{Re} f_0(y)|. \end{aligned} \quad (7.5)$$

Нехай ε' - довільне додатне число. Оскільки $g(s)$, $a(s)$, $-h(s)$ - компакти простору X , то існують їх ε' - сітки $\{x_1^1, \dots, x_{m_1}^1\}$, $\{x_1^2, \dots, x_{m_2}^2\}$, $\{x_1^3, \dots, x_{m_3}^3\}$ відповідно.

Розглянемо окіл $O(f_0)$ точки f_0 множини B^* у слабкій * топології B^* , який визначається точками x_i^1 , $i = \overline{1, m_1}$, x_i^2 , $i = \overline{1, m_2}$, x_i^3 , $i = \overline{1, m_3}$, та числом ε' , тобто

$$O(f_0) = \left\{ f : f \in B^*; \left| f(x_i^1) - f_0(x_i^1) \right| < \varepsilon', i = \overline{1, m_1}; \right. \\ \left. \left| f(x_i^2) - f_0(x_i^2) \right| < \varepsilon', i = \overline{1, m_2}; \left| f(x_i^3) - f_0(x_i^3) \right| < \varepsilon', i = \overline{1, m_3} \right\}.$$

Для кожного $x \in g(s)$ позначимо через $x_{i_x}^1$ такий елемент з множини $\{x_1^1, \dots, x_{m_1}^1\}$, що $\|x - x_{i_x}^1\| < \varepsilon'$.

Тоді для всіх $f \in O(f_0)$, $x \in g(s)$ будемо мати

$$\begin{aligned} |\operatorname{Re} f(x) - \operatorname{Re} f_0(x)| &\leq |f(x) - f_0(x)| \leq \\ &\leq |f(x) - f(x_{i_x}^1)| + |f(x_{i_x}^1) - f_0(x_{i_x}^1)| + |f_0(x_{i_x}^1) - f_0(x)| \leq \\ &\leq \|x - x_{i_x}^1\| + |f(x_{i_x}^1) - f_0(x_{i_x}^1)| + \|x - x_{i_x}^1\| < \varepsilon' + \varepsilon' + \varepsilon' = 3\varepsilon'. \end{aligned}$$

Аналогічно доводиться, що для всіх $f \in O(f_0)$, $y \in a(s)$, $z \in -h(s)$ виконуються нерівності

$$|\operatorname{Re} f(y) - \operatorname{Re} f_0(y)| < 3\varepsilon', \quad |\operatorname{Re} f(z) - \operatorname{Re} f_0(z)| < 3\varepsilon'.$$

Внаслідок цього та співвідношення (7.5) будемо мати, що для всіх $f \in O(f_0)$ виконується нерівність

$$\left| \Psi_f^s(K_{(g,h)}) - \Psi_{f_0}^s(K_{(g,h)}) \right| < 9\varepsilon'.$$

Нехай ε - довільне додатне число. Поклавши у проведених вище міркуваннях $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{9}$, одержимо, що для $\varepsilon > 0$ існує окіл $O(f_0)$ точки f_0 множини B^* у слабкій * топології B^* такий, що для всіх $f \in O(f_0)$ виконується нерівність

$$\left| \Psi_f^s(K_{(g,h)}) - \Psi_{f_0}^s(K_{(g,h)}) \right| < \varepsilon.$$

Це й означає, що при фіксованих $s \in S$, $a \in C(S, K_0(X))$, $K_{(g,h)} \in K_{(C(S, K_0(X)))^2}$ функція $\Psi_f^s(K_{(g,h)})$ є неперервною по f на B^* щодо слабкої * топології B^* .

Твердження доведено.

Твердження 7.5. Нехай для $s \in S$, $f \in B^*$

$$I_s^f(K_{(g,h)}) = \max_{x \in g(s)} \operatorname{Re} f(x) - \max_{y \in (-h(s))} \operatorname{Re} f(y), K_{(g,h)} \in K_{(C(S, K_0(X)))^2}.$$

Тоді I_s^f не залежить від вибору $(g, h) \in K_{(g,h)}$, є лінійним неперервним функціоналом, заданим на $K_{(C(S, K_0(X)))^2}$, тобто

$$I_s^f \in \left(K_{(C(S, K_0(X)))^2} \right)^*, \text{ де } \left(K_{(C(S, K_0(X)))^2} \right)^* - \text{простір, спряжений з } K_{(C(S, K_0(X)))^2}.$$

Доведення. Незалежність I_s^f від вибору $(g, h) \in K_{(g,h)}$ випливає з теореми 5.1.

Для $K_{(g_1, h_1)}, K_{(g_2, h_2)} \in K_{(C(S, K_0(X)))^2}$ маємо

$$\begin{aligned} I_s^f(K_{(g_1, h_1)} + K_{(g_2, h_2)}) &= I_s^f(K_{(g_1+g_2, h_1+h_2)}) = \\ &= \max_{x \in (g_1(s)+g_2(s))} \operatorname{Re} f(x) - \max_{y \in (-h_1(s)-h_2(s))} \operatorname{Re} f(y) = \\ &= \max_{x \in g_1(s)} \operatorname{Re} f(x) - \max_{y \in -h_1(s)} \operatorname{Re} f(y) + \max_{x \in g_2(s)} \operatorname{Re} f(x) - \max_{y \in -h_2(s)} \operatorname{Re} f(y) = \\ &= I_s^f(K_{(g_1, h_1)}) + I_s^f(K_{(g_2, h_2)}). \end{aligned}$$

Адитивність функціонала I_s^f встановлено. Переконаємось у його однорідності. Нехай $c \in R$, $K_{(g,h)} \in K_{(C(S, K_0(X)))^2}$.

Маємо, що при $c \geq 0$

$$\begin{aligned} I_s^f(cK_{(g,h)}) &= I_s^f(K_{(cg, ch)}) = \max_{x \in cg(s)} \operatorname{Re} f(x) - \max_{y \in (-ch(s))} \operatorname{Re} f(y) = \\ &= c \left(\max_{x \in g(s)} \operatorname{Re} f(x) - \max_{y \in (-h(s))} \operatorname{Re} f(y) \right) = c I_s^f(K_{(g,h)}). \end{aligned}$$

Якщо $c < 0$, то

$$\begin{aligned} I_s^f(cK_{(g,h)}) &= I_s^f(K_{(ch, cg)}) = \max_{y \in ch(s)} \operatorname{Re} f(y) - \max_{x \in (-cg(s))} \operatorname{Re} f(x) = \\ &= \max_{-\frac{y}{c} \in -h(s)} \operatorname{Re} f \left((-c) \left(-\frac{y}{c} \right) \right) - \max_{-\frac{x}{c} \in g(s)} \operatorname{Re} f \left((-c) \left(-\frac{x}{c} \right) \right) = \\ &= c \left(\max_{x \in g(s)} \operatorname{Re} f(x) - \max_{y \in (-h(s))} \operatorname{Re} f(y) \right) = c I_s^f(K_{(g,h)}). \end{aligned}$$

Таким чином доведено, що функціонал I_s^f є однорідним на $K_{(C(S, K_0(X)))^2}$. Вище було встановлено його адитивність. Тому I_s^f є лінійним на $K_{(C(S, K_0(X)))^2}$ функціоналом.

Переконаємось у його обмеженості. З урахуванням (5.6) одержимо, що

$$I_s^f(K_{(g,h)}) = \max_{x \in g(s)} \operatorname{Re} f(x) - \max_{y \in (-h(s))} \operatorname{Re} f(y) \leq$$

$$\leq \max_{s \in S} \max_{\varphi \in B^*} \left| \max_{x \in g(s)} \operatorname{Re} \varphi(x) - \max_{y \in (-h(s))} \operatorname{Re} \varphi(y) \right| = \rho(g, -h) = \|K_{(g,h)}\|.$$

Обмеженість функціонала I_s^f встановлено.

$$\text{Отже, } I_s^f \in \left(K_{(C(S, K_0(X)))^2} \right)^*.$$

Твердження доведено.

8. Подання конуса внутрішніх напрямків $\Gamma\left(C_a^{g^*}, K_{(g^*, 0)}\right)$ для відкритої кулі $C_a^{g^*}$ простору $K_{(C(S, K_0(X)))^2}$ з центром у точці $K_{(a, 0)}$, $a \in C(S, K_0(X))$, радіуса $\|K_{(g^*, 0)} - K_{(a, 0)}\|$, $g^* \in V$

У подальшому будемо припускати, що у задачі відшукування величини (6.1) $a \notin \bar{V}$, де $\bar{V}$ – замикання множини V простору $(C(S, K_0(X)), \rho)$.

Легко переконатися, що ця умова еквівалентна умові $K_{(a, 0)} \notin \bar{K}_V$, де $\bar{K}_V$ – замикання множини K_V у лінійному нормованому просторі $K_{(C(S, K_0(X)))^2}$. Дійсно, нехай $a \notin \bar{V}$. Переконаємося, що $K_{(a, 0)} \notin \bar{K}_V$. В протилежному випадку існувала б послідовність $\{K_{(g_n, 0)}\}_{n=1}^\infty$, де $g_n \in V$, така, що $\lim_{n \rightarrow \infty} K_{(g_n, 0)} = K_{(a, 0)}$, тобто

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|K_{(g_n, 0)} - K_{(a, 0)}\| = 0.$$

Згідно (5.6) тоді б

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(g_n, a) = 0. \quad (8.1)$$

З рівності (8.1) випливало б, що $a \in \bar{V}$.

Навпаки, якщо $K_{(a, 0)} \notin \bar{K}_V$, то і $a \notin \bar{V}$.

Дійсно, якщо б $a \in \bar{V}$, то тоді існувала б послідовність $\{g_n\}_{n=1}^\infty$, $g_n \in V$, така, що $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(g_n, a) = 0$. Внаслідок (5.6) тоді

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|K_{(g_n, 0)} - K_{(a, 0)}\| = 0.$$

Це означало б, що $K_{(a, 0)} \in \bar{K}_V$, що суперечить нашому припущенню. Отже, із співвідношення $K_{(a, 0)} \notin \bar{K}_V$, випливає співвідношення $a \notin \bar{V}$.

Зрозуміло, що за умови виконання співвідношення $a \notin \bar{V}$ має місце нерівність $\alpha_a^*(V) > 0$. Дійсно, якщо б $\alpha_a^*(V) = 0$, то існувала б послідовність $\{g_n\}_{n=1}^\infty$, $g_n \in V$, $n = 1, 2, \dots$, така, що $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(g_n, a) = 0$. Це означало б, що $a \in \bar{V}$. Останнє суперечить припущенню.

З отриманої нерівності випливає, що множина тих $g \in C(S, K_0(X))$, для яких $\rho(g, a) < \alpha_a^*(V)$ не є порожньою множиною. Цій множині належить, зокрема, відображення a .

Не є порожньою також множина тих елементів $K_{(g, h)}$ простору $K_{(C(S, K_0(X)))^2}$, для яких

$$\|K_{(g, h)} - K_{(a, 0)}\| < \alpha_a^*(V).$$

Цій множині належить, зокрема, клас $K_{(a, 0)}$, оскільки

$$\|K_{(a, 0)} - K_{(a, 0)}\| = 0 < \alpha_a^*(V).$$

Для $a \in C(S, K_0(X))$ та $g^* \in V$ покладемо.

$$\alpha_a^{g^*} = \rho(g^*, a) = \max_{s \in S} H(g^*(s), a(s)) = \|K_{(g^*, 0)} - K_{(a, 0)}\|;$$

$$C_a^{g^*} = \left\{ K_{(g, h)} \in K_{(C(S, K_0(X)))^2} : \|K_{(g, h)} - K_{(a, 0)}\| < \alpha_a^{g^*} \right\};$$

$$S_a^{g^*} = \left\{ s \in S : H(g^*(s), a(s)) = \alpha_a^{g^*} \right\};$$

$$B_a^{g^*}(s) = \left\{ f \in B^* : \left| \max_{x \in g^*(s)} \operatorname{Re} f(x) - \max_{y \in a(s)} \operatorname{Re} f(y) \right| = \right.$$

$$\left. = \max_{f \in B^*} \left| \max_{x \in g^*(s)} \operatorname{Re} f(x) - \max_{y \in a(s)} \operatorname{Re} f(y) \right| = H(g^*(s), a(s)) \right\}, \quad s \in S_a^{g^*}.$$

Зрозуміло, що $C_a^{g^*}$ є відкритою кулею простору $K_{(C(S, K_0(X)))^2}$ з центром у точці $K_{(a, 0)}$ та радіусом $\|K_{(g^*, 0)} - K_{(a, 0)}\|$.

З проведених вище міркувань випливає, що за умови, коли $a \notin \bar{V}$, $C_a^{g^*}$ не є порожньою множиною.

Означення 8.1 [6, с.12, 13]. Нехай M множина лінійного нормованого простору Y , $y^* \in Y$. Конусом $\Gamma(M, y^*)$ внутрішніх напрямків для M із y^* будемо називати множину всіх точок $y \in Y$, для яких існує околі $O(y)$ точки y та число $\varepsilon > 0$ такі, що $y^* + th \in M$ для всіх $h \in O(y)$ і всіх $t \in (0, \varepsilon)$.

Конусом $\Gamma^*(M, y^*)$ граничних напрямків для M із y^* будемо називати множину таких точок $y \in Y$, що для довільного околу $O(y)$ точки y та довільного числа $\varepsilon > 0$ існують такі $h \in O(y)$ та $t \in (0, \varepsilon)$, що $y^* + th \in M$.

Теорема 8.1. Має місце рівність

$$\Gamma\left(C_a^{g^*}, K_{(g^*, 0)}\right) = \bigcap_{s \in S_a^{g^*}} \bigcap_{f \in B_a^{g^*}(s)} \left\{ K_{(g, h)} \in K_{(C(S, K_0(X)))^2} : \right. \\ \left. \text{sign}\left(\max_{x \in g^*(s)} \text{Re } f(x) - \max_{y \in a(s)} \text{Re } f(y)\right) \left(\max_{x \in g(s)} \text{Re } f(x) - \max_{y \in -h(s)} \text{Re } f(y) \right) < 0 \right\}. \quad (8.2)$$

Доведення. З урахуванням (5.6)

$$C_a^{g^*} = \left\{ K_{(g, h)} \in K_{(C(S, K_0(X)))^2} : \|K_{(g, h)} - K_{(a, 0)}\| = \|K_{(g, h-a)}\| = \right. \\ \left. = \max_{s \in S} H(g(s), a(s) - h(s)) = \max_{s \in S} \varphi_s^a(K_{(g, h)}) < \alpha_a^{g^*} \right\},$$

де для $s \in S$

$$\varphi_s^a(K_{(g, h)}) = H(g(s), a(s) - h(s)), K_{(g, h)} \in K_{(C(S, K_0(X)))^2}.$$

Отже,

$$C_a^{g^*} = \bigcap_{s \in S} \left\{ K_{(g, h)} \in K_{(C(S, K_0(X)))^2} : \varphi_s^a(K_{(g, h)}) < \alpha_a^{g^*} \right\} = \bigcap_{s \in S} C_a^{g^*}(s),$$

$$\text{де } C_a^{g^*}(s) = \left\{ K_{(g, h)} \in K_{(C(S, K_0(X)))^2} : \varphi_s^a(K_{(g, h)}) < \alpha_a^{g^*} \right\}.$$

Тому внаслідок твердження 1.2.2 [6]

$$\Gamma\left(C_a^{g^*}, K_{(g^*, 0)}\right) \subset \bigcap_{s \in S} \Gamma\left(C_a^{g^*}(s), K_{(g^*, 0)}\right) \subset \bigcap_{s \in S_a^{g^*}} \Gamma\left(C_a^{g^*}(s), K_{(g^*, 0)}\right). \quad (8.3)$$

Для $s_0 \in S \setminus S_a^{g^*}$ виконується нерівність

$$H(g^*(s_0), a(s_0)) < \alpha_a^{g^*}.$$

Оскільки $\varphi_{s_0}^a(K_{(g^*, 0)}) = H(g^*(s_0), a(s_0)) < \alpha_a^{g^*}$, то внаслідок неперервності

функції $\varphi_{s_0}^a(K_{(g, h)})$ по $K_{(g, h)}$ (див. твердження 7.3) існує околі $O(K_{(g^*, 0)})$ точки

$K_{(g^*, 0)}$ простору $K_{(C(S, K_0(X)))^2}$ такий, що $\varphi_{s_0}^a(K_{(g, h)}) < \alpha_a^{g^*}$ для всіх $K_{(g, h)} \in O(K_{(g^*, 0)})$.

Тоді згідно із зауваженням 1.1.7 [6, с.13] та означенням 8.1

$$\Gamma\left(C_a^{g^*}(s_0), K_{(g^*, 0)}\right) = K_{(C(S, K_0(X)))^2}.$$

Звідси випливає, що

$$\bigcap_{s \in S_a^{g^*}} \Gamma\left(C_a^{g^*}(s), K_{(g^*, 0)}\right) = \bigcap_{s \in S} \Gamma\left(C_a^{g^*}(s), K_{(g^*, 0)}\right). \quad (8.4)$$

З урахуванням цієї нерівності та співвідношення (8.3) отримаємо, що

$$\Gamma\left(C_a^{g^*}, K_{(g^*, 0)}\right) \subset \bigcap_{s \in S} \Gamma\left(C_a^{g^*}(s), K_{(g^*, 0)}\right) = \bigcap_{s \in S_a^{g^*}} \Gamma\left(C_a^{g^*}(s), K_{(g^*, 0)}\right).$$

Візьмемо довільне $K_{(g, h)} \in \bigcap_{s \in S_a^{g^*}} \Gamma\left(C_a^{g^*}(s), K_{(g^*, 0)}\right)$.

З рівності (8.4) випливає, що $K_{(g, h)} \in \bigcap_{s \in S} \Gamma\left(C_a^{g^*}(s), K_{(g^*, 0)}\right)$.

Тому згідно з означенням 8.1 конуса внутрішніх напрямків для будь-якого $s \in S$ існує $\alpha_s > 0$ таке, що

$$K_{(g^*, 0)} + \alpha_s K_{(g, h)} = K_{(g^* + \alpha_s g, \alpha_s h)} \in C_a^{g^*}(s).$$

Внаслідок цього

$$\varphi_s^a(K_{(g^*, 0)} + \alpha_s K_{(g, h)}) < \alpha_a^{g^*}. \quad (8.5)$$

Зафіксуємо α_s і розглянемо $\varphi_{s'}^a(K_{(g^*, 0)} + \alpha_s K_{(g, h)})$ як функцію s' на S . Згідно з твердженням 7.3 вона є неперервною функцією в кожній точці $s \in S$. Оскільки має місце нерівність (8.5), то внаслідок цього існує околі $O(s)$ точки s у компактi S такий, що для всіх $s' \in O(s)$ справджується нерівність

$$\varphi_{s'}^a(K_{(g^*, 0)} + \alpha_s K_{(g, h)}) < \alpha_a^{g^*}. \quad (8.6)$$

Внаслідок опуклості функції $\varphi_{s'}^a(K_{(g,p)})$ по $K_{(g,p)}$ на $K_{(C(S,K_0(X)))^2}$ (див. твердження 7.3), нерівності (8.6) та співвідношення

$$\varphi_{s'}^a(K_{(g^*,0)}) = H(g^*(s'), a(s')) \leq \max_{s \in S} H(g^*(s), a(s)) = \alpha_a^{g^*}$$

отримаємо для всіх $\alpha \in (0,1]$ такі співвідношення

$$\begin{aligned} & \varphi_{s'}^a\left((1-\alpha)K_{(g^*,0)} + \alpha\left(K_{(g^*,0)} + \alpha_s K_{(g,h)}\right)\right) = \\ & = \varphi_{s'}^a\left(K_{(g^*,0)} + \alpha\alpha_s K_{(g,h)}\right) \leq (1-\alpha)\varphi_{s'}^a\left(K_{(g^*,0)}\right) + \alpha\varphi_{s'}^a\left(K_{(g^*,0)} + \alpha_s K_{(g,h)}\right) < \\ & < (1-\alpha)\alpha_a^{g^*} + \alpha\alpha_a^{g^*} = \alpha_a^{g^*}. \end{aligned}$$

Звідси випливає, що

$$\varphi_{s'}^a\left(K_{(g^*,0)} + tK_{(g,h)}\right) < \alpha_a^{g^*} \quad (8.7)$$

для всіх $t \in (0, \alpha_s]$, $s' \in O(s)$.

Оскільки S є компактом і $\bigcup_{s \in S} O(s) = S$, то з покриття $O(s), s \in S$, компакта S можна виділити скінченне підпокриття $O(s_i), s_i \in S, i = \overline{1, k}$, тобто $\bigcup_{i=1}^k O(s_i) = S$. Покладемо $\bar{\alpha} = \min_{1 \leq i \leq k} \alpha_{s_i}$. Тоді з (8.7) випливає, що

$$\varphi_s^a\left(K_{(g^*,a)} + tK_{(g,h)}\right) < \alpha_a^{g^*} \quad (8.8)$$

для всіх $s \in S$ та всіх $t \in (0, \bar{\alpha}]$.

Тому внаслідок неперервності по s на S функції $\varphi_s^a\left(K_{(g^*,0)} + \bar{\alpha}K_{(g,h)}\right)$ (див. твердження 7.3) та (5.5) отримаємо, що

$$\begin{aligned} & \max_{s \in S} \varphi_s^a\left(K_{(g^*,0)} + \bar{\alpha}K_{(g,h)}\right) = \\ & = \max_{s \in S} H(g^*(s) + \bar{\alpha}g(s), a(s) - \bar{\alpha}h(s)) = \\ & = \rho(g^* + \bar{\alpha}g, a - \bar{\alpha}h) = \left\|K_{(g^* + \bar{\alpha}g, \bar{\alpha}h - a)}\right\| = \\ & = \left\|K_{(g^*,0)} + \bar{\alpha}K_{(g,h)} - K_{(a,0)}\right\| < \alpha_a^{g^*}. \end{aligned}$$

Оскільки $\left\|K_{(g^*,0)} + \bar{\alpha}K_{(g',h')} - K_{(a,0)}\right\|$ як функція від $K_{(g',h')}$ є неперервною по $K_{(g',h')}$, то існує окіл $O(K_{(g,h)})$ точки $K_{(g,h)}$ такий, що

$$\left\|K_{(g^*,0)} + \bar{\alpha}K_{(g',h')} - K_{(a,0)}\right\| < \alpha_a^{g^*} \quad \text{для всіх } K_{(g',h')} \in O(K_{(g,h)}).$$

З цієї нерівності та з рівності $\left\|K_{(g^*,0)} - K_{(a,0)}\right\| = \alpha_a^{g^*}$ отримаємо для всіх $\alpha \in (0,1]$, $K_{(g',h')} \in O(K_{(g,h)})$

$$\begin{aligned} & \left\|(1-\alpha)\left(K_{(g^*,0)} - K_{(a,0)}\right) + \alpha\left(K_{(g^*,0)} + \bar{\alpha}K_{(g',h')} - K_{(a,0)}\right)\right\| = \\ & = \left\|K_{(g^*,0)} + \alpha\bar{\alpha}K_{(g',h')} - K_{(a,0)}\right\| \leq \\ & \leq (1-\alpha)\left\|K_{(g^*,0)} - K_{(a,0)}\right\| + \alpha\left\|K_{(g^*,0)} + \bar{\alpha}K_{(g',h')} - K_{(a,0)}\right\| < \\ & < (1-\alpha)\alpha_a^{g^*} + \alpha\alpha_a^{g^*} = \alpha_a^{g^*}. \end{aligned}$$

Звідси випливає, що

$$\left\|K_{(g^*,0)} + tK_{(g',h')} - K_{(a,0)}\right\| < \alpha_a^{g^*}$$

для всіх $t \in (0, \bar{\alpha}]$, $K_{(g',h')} \in O(K_{(g,h)})$.

Це означає, що $K_{(g,h)} \in \Gamma\left(C_a^{g^*}, K_{(g^*,0)}\right)$ (див. означення 8.1).

Звідси та з (8.3) робимо висновок, що має місце рівність

$$\Gamma\left(C_a^{g^*}, K_{(g^*,0)}\right) = \bigcap_{s \in S_a^{g^*}} \Gamma\left(C_a^{g^*}(s), K_{(g^*,0)}\right). \quad (8.9)$$

Тепер перейдемо до описання конуса

$\Gamma\left(C_a^{g^*}(s), K_{(g^*,0)}\right)$, $s \in S_a^{g^*}$, де, як і вище,

$$\begin{aligned} C_a^{g^*}(s) & = \left\{K_{(g,h)} \in K_{(C(S,K_0(X)))^2} : \varphi_s^a(K_{(g,h)}) = H(g(s), a(s) - h(s)) = \right. \\ & = \left. \max_{f \in B^*} \left| \max_{x \in g(s)} \operatorname{Re} f(x) - \max_{y \in a(s)} \operatorname{Re} f(y) - \max_{y \in -h(s)} \operatorname{Re} f(y) \right| < \alpha_a^{g^*} \right\}. \end{aligned}$$

Нехай для $s \in S_a^{g^*}$, $f \in B^*$

$$\psi_f^s(K_{(g,h)}) = \left| \max_{x \in g(s)} \operatorname{Re} f(x) - \max_{y \in a(s)} \operatorname{Re} f(y) - \max_{y \in -h(s)} \operatorname{Re} f(y) \right|. \quad (8.10)$$

Тоді для $s \in S_a^{g^*}$

$$C_a^{g^*}(s) = \left\{ K_{(g,h)} \in K_{(C(S, K_0(X)))^2} : \max_{f \in B^*} \psi_f^s(K_{(g,h)}) < \alpha_a^{g^*} \right\}. \quad (8.11)$$

Для $s \in S_a^{g^*}$, $f \in B^*$ позначимо через

$$C_a^{g^*}(f, s) = \left\{ K_{(g,h)} \in K_{(C(S, K_0(X)))^2} : \psi_f^s(K_{(g,h)}) < \alpha_a^{g^*} \right\}. \quad (8.12)$$

Згідно з (8.11) для $s \in S_a^{g^*}$

$$C_a^{g^*}(s) = \bigcap_{f \in B^*} C_a^{g^*}(f, s).$$

Тому для $s \in S_a^{g^*}$ внаслідок твердження 1.2.2 [6, с.14]

$$\begin{aligned} \Gamma(C_a^{g^*}(s), K_{(g^*, 0)}) &= \Gamma\left(\bigcap_{f \in B^*} C_a^{g^*}(f, s), K_{(g^*, 0)}\right) \subset \\ &\subset \bigcap_{f \in B^*} \Gamma(C_a^{g^*}(f, s), K_{(g^*, 0)}) \subset \bigcap_{f \in B_a^{g^*}(s)} \Gamma(C_a^{g^*}(f, s), K_{(g^*, 0)}). \end{aligned} \quad (8.13)$$

Нехай $f \notin B_a^{g^*}(s)$, $s \in S_a^{g^*}$. Тоді

$$\left| \max_{x \in g^*(s)} \operatorname{Re} f(x) - \max_{y \in a(s)} \operatorname{Re} f(y) \right| = \Psi_f^s(K_{(g^*, 0)}) < \alpha_a^{g^*}.$$

Тому внаслідок неперервності функції $\psi_f^s(K_{(g,h)})$ по $K_{(g,h)}$ (див. твердження

7.4) існує окіл $O(K_{(g^*, 0)})$ точки $K_{(g^*, 0)}$ простору $K_{(C(S, K_0(X)))^2}$ такий, що

$$\Psi_f^s(K_{(g,h)}) < \alpha_a^{g^*} \text{ для всіх } K_{(g,h)} \in O(K_{(g^*, 0)}).$$

Згідно з [6, с.13] тоді

$$\Gamma(C_a^{g^*}(f, s), K_{(g^*, 0)}) = K_{(C(S, K_0(X)))^2}.$$

Звідси випливає, що

$$\bigcap_{f \in B_a^{g^*}(s)} \Gamma(C_a^{g^*}(f, s), K_{(g^*, 0)}) = \bigcap_{f \in B^*} \Gamma(C_a^{g^*}(f, s), K_{(g^*, 0)}).$$

З урахуванням цієї нерівності та співвідношення (8.13) отримаємо, що

$$\Gamma(C_a^{g^*}(s), K_{(g^*, 0)}) \subset$$

$$\subset \bigcap_{f \in B^*} \Gamma(C_a^{g^*}(f, s), K_{(g^*, 0)}) = \bigcap_{f \in B_a^{g^*}(s)} \Gamma(C_a^{g^*}(f, s), K_{(g^*, 0)}). \quad (8.14)$$

$$\text{Візьмемо довільне } K_{(g,h)} \in \bigcap_{f \in B_a^{g^*}(s)} \Gamma(C_a^{g^*}(f, s), K_{(g^*, 0)}). \text{ З рівності (8.14)}$$

$$\text{випливає, що } K_{(g,h)} \in \bigcap_{f \in B^*} \Gamma(C_a^{g^*}(f, s), K_{(g^*, 0)}).$$

Згідно з означенням 8.1 конуса внутрішніх напрямків для будь-якого $f \in B^*$ існує $\lambda_f > 0$ таке, що

$$K_{(g^*, 0)} + \lambda_f K_{(g,h)} = K_{(g^* + \lambda_f g, \lambda_f h)} \in C_a^{g^*}(f, s).$$

Внаслідок цього

$$\Psi_f^s(K_{(g^*, 0)} + \lambda_f K_{(g,h)}) < \alpha_a^{g^*}. \quad (8.15)$$

Зафіксуємо λ_f і розглянемо $\Psi_{f'}^s(K_{(g^*, 0)} + \lambda_f K_{(g,h)})$ як функцію f' на B^* .

Згідно з твердженням 7.4 вона є неперервною по f' у слабкій * топології B^* . Оскільки має місце нерівність (8.15), то внаслідок цього існує окіл $O(f)$ у розумінні слабкої * топології простору X^* точки f у B^* такий, що для всіх $f' \in O(f)$ справджується нерівність

$$\Psi_{f'}^s(K_{(g^*, 0)} + \lambda_f K_{(g,h)}) < \alpha_a^{g^*}. \quad (8.16)$$

Внаслідок опуклості функції $\Psi_{f'}^s(K_{(q,p)})$ по $K_{(q,p)}$ на $K_{(C(S, K_0(X)))^2}$ (див. твердження 7.4), нерівності (8.16) та співвідношення

$$\Psi_{f'}^s(K_{(g^*, 0)}) = \left| \max_{x \in g^*(s)} \operatorname{Re} f(x) - \max_{y \in a(s)} \operatorname{Re} f(y) \right| \leq \alpha_a^{g^*}$$

отримаємо для всіх $\alpha \in (0, 1]$ такі співвідношення

$$\begin{aligned} \Psi_{f'}^s\left((1-\alpha)K_{(g^*, 0)} + \alpha(K_{(g^*, 0)} + \lambda_f K_{(g,h)})\right) &= \Psi_{f'}^s(K_{(g^*, 0)} + \alpha\lambda_f K_{(g,h)}) \leq \\ &\leq (1-\alpha)\Psi_{f'}^s(K_{(g^*, 0)}) + \alpha\Psi_{f'}^s(K_{(g^*, 0)} + \lambda_f K_{(g,h)}) < (1-\alpha)\alpha_a^{g^*} + \alpha\alpha_a^{g^*} = \alpha_a^{g^*}. \end{aligned}$$

Звідси випливає, що

$$\Psi_{f'}^s \left(K_{(g^*,0)} + tK_{(g,h)} \right) < \alpha_a^{g^*} \quad (8.17)$$

для всіх $t \in (0, \lambda_f]$.

Оскільки B^* є слабко $*$ компактною множиною (див., наприклад, [27, с.35]) і

$\bigcup_{f \in B^*} O(f) = B^*$, то з покриття $O(f)$, $f \in B^*$, множини B^* можна виділити

скінченне підпокриття $O(f_i)$, $f_i \in B^*$, $i = \overline{1, k}$, тобто $\bigcup_{i=1}^k O(f_i) = B^*$.

Покладемо $\bar{\lambda} = \min_{1 \leq i \leq k} \lambda_{f_i}$. Тоді з (8.17) випливає, що

$$\Psi_f^s \left(K_{(g^*,0)} + tK_{(g,h)} \right) < \alpha_a^{g^*}$$

для всіх $f \in B^*$ та $t \in (0, \bar{\lambda}]$.

Внаслідок неперервності у розумінні слабкої $*$ топології B^* по f на B^* функції $\Psi_f^s \left(K_{(g^*,0)} + \bar{\lambda}K_{(g,h)} \right)$ та слабкої $*$ компактності B^* звідси отримаємо, що

$$\max_{f \in B^*} \Psi_f^s \left(K_{(g^*,0)} + \bar{\lambda}K_{(g,h)} \right) < \alpha_a^{g^*}.$$

Враховуючи цю нерівність та співвідношення (8.11) робимо висновок, що

$$K_{(g^*,0)} + \bar{\lambda}K_{(g,h)} \in C_a^{g^*}(s).$$

Оскільки $\max_{f \in B^*} \Psi_f^s \left(K_{(g^*,0)} + \bar{\lambda}K_{(g,h)} \right)$ як функція від $K_{(g,h)}$ є неперервною по

$K_{(g,h)} \in K_{(C(S, K_0(X)))^2}$ (див. співвідношення (7.4)), то існує окіл $O(K_{(g,h)})$ точки

$K_{(g,h)}$ простору $K_{(C(S, K_0(X)))^2}$ такий, що

$$\max_{f \in B^*} \Psi_f^s \left(K_{(g^*,0)} + \bar{\lambda}K_{(g',h')} \right) < \alpha_a^{g^*}$$

для всіх $K_{(g',h')} \in O(K_{(g,h)})$.

Звідси та з рівності $\max_{f \in B^*} \Psi_f^s \left(K_{(g^*,0)} \right) = \alpha_a^{g^*}$, справедливої для всіх $s \in S_a^{g^*}$,

опуклості функції $\max_{f \in B^*} \Psi_f^s \left(K_{(q,p)} \right)$ по $K_{(q,p)}$ на $K_{(C(S, K_0(X)))^2}$, яка випливає з

опуклості для кожного $f \in B^*$ функції $\Psi_f^s \left(K_{(q,p)} \right)$ (див. твердження 7.4), отримаємо для всіх $\alpha \in (0, 1]$

$$\begin{aligned} \max_{f \in B^*} \Psi_f^s \left((1-\alpha)K_{(g^*,0)} + \alpha \left(K_{(g^*,0)} + \bar{\lambda}K_{(g',h')} \right) \right) &= \max_{f \in B^*} \Psi_f^s \left(K_{(g^*,0)} + \alpha \bar{\lambda}K_{(g',h')} \right) \leq \\ &\leq (1-\alpha) \max_{f \in B^*} \Psi_f^s \left(K_{(g^*,0)} \right) + \alpha \max_{f \in B^*} \Psi_f^s \left(K_{(g^*,0)} + \bar{\lambda}K_{(g',h')} \right) < \\ &\leq (1-\alpha) \alpha_a^{g^*} + \alpha \alpha_a^{g^*} = \alpha_a^{g^*}. \end{aligned}$$

Звідси випливає, що

$$\max_{f \in B^*} \Psi_f^s \left(K_{(g^*,0)} + tK_{(g',h')} \right) < \alpha_a^{g^*}$$

для всіх $t \in (0, \bar{\lambda}]$, $K_{(g',h')} \in O(K_{(g,h)})$.

Це означає, що $K_{(g,h)} \in \Gamma \left(C_a^{g^*}(s), K_{(g^*,0)} \right)$.

Тому, з урахуванням співвідношення (8.14), можна зробити висновок, що має місце рівність

$$\Gamma \left(C_a^{g^*}(s), K_{(g^*,0)} \right) = \bigcap_{f \in B_a^{g^*}(s)} \Gamma \left(C_a^{g^*}(f, s), K_{(g^*,0)} \right). \quad (8.18)$$

Перейдемо тепер до описання конуса

$$\Gamma \left(C_a^{g^*}(f, s), K_{(g^*,0)} \right), \quad s \in S_a^{g^*}, \quad f \in B_a^{g^*}(s).$$

Згідно з (8.10), (8.12) маємо, що для $s \in S_a^{g^*}$, $f \in B_a^{g^*}(s)$

$$\begin{aligned} C_a^{g^*}(s, f) &= \left\{ K_{(g,h)} \in K_{(C(S, K_0(X)))^2} : \right. \\ &\left. \left| \max_{x \in g(s)} \operatorname{Re} f(x) - \max_{y \in a(s)} \operatorname{Re} f(y) - \max_{y \in -h(s)} \operatorname{Re} f(y) \right| < \alpha_a^{g^*} \right\}. \end{aligned} \quad (8.19)$$

З рівності (8.19) випливає, що для $s \in S_a^{g^*}$, $f \in B_a^{g^*}(s)$

$$C_a^{g^*}(s, f) = A_a^{g^*}(s, f) \cap B_a^{g^*}(s, f), \quad (8.20)$$

де

$$\begin{aligned} A_a^{g^*}(s, f) &= \left\{ K_{(g,h)} \in K_{(C(S, K_0(X)))^2} : \right. \\ &\left. \max_{x \in g(s)} \operatorname{Re} f(x) - \max_{y \in a(s)} \operatorname{Re} f(y) - \max_{y \in -h(s)} \operatorname{Re} f(y) < \alpha_a^{g^*} \right\}, \\ B_a^{g^*}(s, f) &= \left\{ K_{(g,h)} \in K_{(C(S, K_0(X)))^2} : \right. \\ &\left. \max_{x \in g(s)} \operatorname{Re} f(x) - \max_{y \in a(s)} \operatorname{Re} f(y) - \max_{y \in -h(s)} \operatorname{Re} f(y) > -\alpha_a^{g^*} \right\}. \end{aligned}$$

Розглянемо випадок, коли для $s \in S_a^{g^*}$, $f \in B_a^{g^*}(s)$ та

$$\alpha_a^{g^*} = \left| \max_{x \in g^*(s)} \operatorname{Re} f(x) - \max_{y \in a(s)} \operatorname{Re} f(y) \right| = \max_{x \in g^*(s)} \operatorname{Re} f(x) - \max_{y \in a(s)} \operatorname{Re} f(y).$$

Тоді

$$\begin{aligned} A_a^{g^*}(s, f) &= \left\{ K_{(g,h)} \in K_{(C(S, K_0(X)))^2} : \max_{x \in g(s)} \operatorname{Re} f(x) - \max_{y \in -h(s)} \operatorname{Re} f(y) < \max_{x \in g^*(s)} \operatorname{Re} f(x) \right\}, \\ B_a^{g^*}(s, f) &= \left\{ K_{(g,h)} \in K_{(C(S, K_0(X)))^2} : \right. \\ &\left. \max_{x \in g(s)} \operatorname{Re} f(x) - \max_{y \in -h(s)} \operatorname{Re} f(y) > -\alpha_a^{g^*} + \max_{y \in a(s)} \operatorname{Re} f(y) \right\}. \end{aligned}$$

Позначимо через

$$\ell_s^f(K_{(g,h)}) = \max_{x \in g(s)} \operatorname{Re} f(x) - \max_{y \in -h(s)} \operatorname{Re} f(y), K_{(g,h)} \in K_{(C(S, K_0(X)))^2}.$$

Згідно з твердженням 7.5 ℓ_s^f є лінійним неперервним функціоналом, заданим на $K_{(C(S, K_0(X)))^2}$. З допомогою цього функціоналу в розглядуваному випадку

множини $A_a^{g^*}(s, f)$ та $B_a^{g^*}(s, f)$ можна подати у такому вигляді

$$\begin{aligned} A_a^{g^*}(s, f) &= \left\{ K_{(g,h)} \in K_{(C(S, K_0(X)))^2} : \ell_s^f(K_{(g,h)}) < \ell_s^f(K_{(g^*, 0)}) \right\}, \\ B_a^{g^*}(s, f) &= \left\{ K_{(g,h)} \in K_{(C(S, K_0(X)))^2} : \ell_s^f(K_{(g,h)}) > -\alpha_a^{g^*} + \max_{y \in a(s)} \operatorname{Re} f(y) \right\}. \end{aligned}$$

Оскільки

$$\begin{aligned} \ell_s^f(K_{(g^*, 0)}) &= \max_{x \in g^*(s)} \operatorname{Re} f(x) = \\ &= \max_{x \in g^*(s)} \operatorname{Re} f(x) - \max_{y \in a(s)} \operatorname{Re} f(y) + \max_{y \in a(s)} \operatorname{Re} f(y) = \end{aligned}$$

$$= \alpha_a^{g^*} + \max_{y \in a(s)} \operatorname{Re} f(y) > -\alpha_a^{g^*} + \max_{y \in a(s)} \operatorname{Re} f(y),$$

то згідно з твердженням 1.3.7 [6, с.21]

$$\begin{aligned} \Gamma\left(A_a^{g^*}(s, f), K_{(g^*, 0)}\right) &= \left\{ K_{(g,h)} \in K_{(C(S, K_0(X)))^2} : \ell_s^f(K_{(g,h)}) < 0 \right\} = \\ &= \left\{ K_{(g,h)} \in K_{(C(S, K_0(X)))^2} : \max_{x \in g(s)} \operatorname{Re} f(x) - \max_{y \in -h(s)} \operatorname{Re} f(y) < 0 \right\}, \end{aligned}$$

а

$$\Gamma\left(B_a^{g^*}(s, f), K_{(g^*, 0)}\right) = K_{(C(S, K_0(X)))^2}.$$

Звідси із врахуванням твердження 1.2.2 [6, с.14] та рівності (8.20) одержимо, що

$$\begin{aligned} \Gamma\left(C_a^{g^*}(s, f), K_{(g^*, 0)}\right) &= \Gamma\left(A_a^{g^*}(s, f), K_{(g^*, 0)}\right) \cap \Gamma\left(B_a^{g^*}(s, f), K_{(g^*, 0)}\right) = \\ &= \left\{ K_{(g,h)} \in K_{(C(S, K_0(X)))^2} : \ell_s^f(K_{(g,h)}) < 0 \right\} = \\ &= \left\{ K_{(g,h)} \in K_{(C(S, K_0(X)))^2} : \max_{x \in g(s)} \operatorname{Re} f(x) - \max_{y \in -h(s)} \operatorname{Re} f(y) < 0 \right\} = \\ &= \left\{ K_{(g,h)} \in K_{(C(S, K_0(X)))^2} : \right. \\ &\left. \operatorname{sign}\left(\max_{x \in g^*(s)} \operatorname{Re} f(x) - \max_{y \in a(s)} \operatorname{Re} f(y)\right) \left(\max_{x \in g(s)} \operatorname{Re} f(x) - \max_{y \in -h(s)} \operatorname{Re} f(y)\right) < 0 \right\}. \quad (8.21) \end{aligned}$$

Розглянемо випадок, коли для $s \in S_a^{g^*}$, $f \in B_a^{g^*}(s)$ та

$$\alpha_a^{g^*} = \left| \max_{x \in g^*(s)} \operatorname{Re} f(x) - \max_{y \in a(s)} \operatorname{Re} f(y) \right| = \max_{y \in a(s)} \operatorname{Re} f(y) - \max_{x \in g^*(s)} \operatorname{Re} f(x).$$

Тоді

$$\begin{aligned} A_a^{g^*}(s, f) &= \left\{ K_{(g,h)} \in K_{(C(S, K_0(X)))^2} : \ell_s^f(K_{(g,h)}) < \alpha_a^{g^*} + \max_{y \in a(s)} \operatorname{Re} f(y) \right\}, \\ B_a^{g^*}(s, f) &= \left\{ K_{(g,h)} \in K_{(C(S, K_0(X)))^2} : \ell_s^f(K_{(g,h)}) > \ell_s^f(K_{(g^*, 0)}) \right\}. \end{aligned}$$

Згідно з твердженням 1.3.7 [6, с.21]

$$\Gamma\left(A_a^{g^*}(s, f), K_{(g^*, 0)}\right) = K_{(C(S, K_0(X)))^2},$$

$$\Gamma\left(B_a^{g^*}(s, f), K_{(g^*, 0)}\right) = \left\{ K_{(g, h)} \in K_{(C(S, K_0(X)))^2} : \ell_s^f(K_{(g, h)}) > 0 \right\} =$$

$$= \left\{ K_{(g, h)} \in K_{(C(S, K_0(X)))^2} : \right.$$

$$\left. \operatorname{sign}\left(\max_{x \in g^*(s)} \operatorname{Re} f(x) - \max_{y \in a(s)} \operatorname{Re} f(y)\right) \left(\max_{x \in g(s)} \operatorname{Re} f(x) - \max_{y \in -h(s)} \operatorname{Re} f(y)\right) < 0 \right\}.$$

Звідси із врахуванням рівності (8.20) та твердження 1.2.2 [6, с. 14] одержуємо, що і в цьому випадку

$$\Gamma\left(C_a^{g^*}(s, f), K_{(g^*, 0)}\right) = \left\{ K_{(g, h)} \in K_{(C(S, K_0(X)))^2} : \right.$$

$$\left. \operatorname{sign}\left(\max_{x \in g^*(s)} \operatorname{Re} f(x) - \max_{y \in a(s)} \operatorname{Re} f(y)\right) \left(\max_{x \in g(s)} \operatorname{Re} f(x) - \max_{y \in -h(s)} \operatorname{Re} f(y)\right) < 0 \right\}.$$

Отже, рівність (8.21) має місце для будь-яких $s \in S_a^{g^*}$, $f \in B_a^{g^*}(s)$.

З рівностей (8.9), (8.18), (8.21) робимо висновок про справедливість рівності (8.2).

Теорему доведено.

9. Необхідні умови екстремальності елемента для задачі відшукування величини (6.1)

В цьому пункті встановлено необхідну умову того, що $g^* \in V$ є екстремальним елементом для величини (6.1).

Теорема 9.1. Нехай V – довільна множина простору $C(S, K_0(X))$.

Для того щоб $g^* \in V$ був екстремальним для величини (6.1), необхідно, щоб не існувало такого елемента $K_{(g, h)} \in \Gamma^*(V, K_{(g^*, 0)})$, що для всіх $s \in S_a^{g^*}$,

$f \in B_a^{g^*}(s)$ справджувалась нерівність

$$\operatorname{sign}\left(\max_{x \in g^*(s)} \operatorname{Re} f(x) - \max_{y \in a(s)} \operatorname{Re} f(y)\right) \left(\max_{x \in g(s)} \operatorname{Re} f(x) - \max_{y \in -h(s)} \operatorname{Re} f(y)\right) < 0.$$

Доведення. Нехай g^* – екстремальний елемент для величини (6.1). Тоді згідно з теоремою 6.1 $K_{(g^*, 0)}$ є екстремальним елементом для величини (6.2). Відповідно до теореми 1.4.1 [6, с. 22] має місце співвідношення

$$\Gamma\left(C_a^{g^*}, K_{(g^*, 0)}\right) \cap \Gamma^*\left(K_V, K_{(g^*, 0)}\right) = \emptyset.$$

Звідси, враховуючи (8.2), робимо висновок, що не

існує $K_{(g, h)} \in \Gamma^*\left(K_V, K_{(g^*, 0)}\right)$, для якого

$$\operatorname{sign}\left(\max_{x \in g^*(s)} \operatorname{Re} f(x) - \max_{y \in a(s)} \operatorname{Re} f(y)\right) \left(\max_{x \in g(s)} \operatorname{Re} f(x) - \max_{y \in -h(s)} \operatorname{Re} f(y)\right) < 0$$

для всіх $s \in S_a^{g^*}$, $f \in B_a^{g^*}(s)$.

Теорему доведено.

Легко зрозуміти, що теорему 9.1 можна сформулювати у такій еквівалентній формі.

Теорема 9.2. Нехай V – довільна множина простору $C(S, K_0(X))$.

Якщо $g^* \in V$ є екстремальним елементом для величини (6.1), то для будь-якого $K_{(g, h)} \in \Gamma^*\left(V, K_{(g^*, 0)}\right)$ існують елементи $s \in S$, $f \in B^*$ такі, що

$$\left| \max_{x \in g^*(s)} \operatorname{Re} f(x) - \max_{y \in a(s)} \operatorname{Re} f(y) \right| = H(g^*(s), a(s)) = \rho(g^*, a),$$

$$\operatorname{sign}\left(\max_{x \in g^*(s)} \operatorname{Re} f(x) - \max_{y \in a(s)} \operatorname{Re} f(y)\right) \left(\max_{x \in g(s)} \operatorname{Re} f(x) - \max_{y \in -h(s)} \operatorname{Re} f(y)\right) \geq 0.$$

10. Достатня умова екстремальності елемента $g^* \in V$ для задачі відшукування величини (6.1)

Встановимо далі достатню умову того, що $g^* \in V$ є екстремальним елементом для величини (6.1).

Теорема 10.1. Нехай V – довільна множина простору $C(S, K_0(X))$, $g^* \in V$.

Якщо для кожного $g \in V$ існують елементи $s_g \in S$, $f_g \in B^*$ такі, що мають місце співвідношення

$$\left| \max_{x \in g^*(s_g)} \operatorname{Re} f_g(x) - \max_{y \in a(s_g)} \operatorname{Re} f_g(y) \right| = H(g^*(s_g), a(s_g)) = \rho(g^*, a), \quad (10.1)$$

$$\operatorname{sign}\left(\max_{x \in g^*(s_g)} \operatorname{Re} f_g(x) - \max_{y \in a(s_g)} \operatorname{Re} f_g(y)\right) \left(\max_{x \in g(s_g)} \operatorname{Re} f_g(x) - \max_{y \in -h(s_g)} \operatorname{Re} f_g(y)\right) \geq 0, \quad (10.2)$$

то g^* є екстремальним елементом для величини (6.1)

Доведення. Нехай g – довільний елемент множини V . Згідно з умовою теореми існують елементи $s_g \in S$, $f_g \in B^*$ такі, для яких мають місце співвідношення (10.1), (10.2).

З урахуванням цих співвідношень одержуємо

$$\begin{aligned}
0 &\leq \text{sign} \left(\max_{x \in g^*(s_g)} \text{Re } f_g(x) - \max_{y \in a(s_g)} \text{Re } f_g(y) \right) \left(\max_{x \in g(s_g)} \text{Re } f_g(x) - \max_{y \in g^*(s_g)} \text{Re } f_g(y) \right) = \\
&= \text{sign} \left(\max_{x \in g^*(s_g)} \text{Re } f_g(x) - \max_{y \in a(s_g)} \text{Re } f_g(y) \right) \\
&\left(\max_{x \in g(s_g)} \text{Re } f_g(x) - \max_{y \in a(s_g)} \text{Re } f_g(y) - \left(\max_{y \in g^*(s_g)} \text{Re } f_g(y) - \max_{y \in a(s_g)} \text{Re } f_g(y) \right) \right) = \\
&= \text{sign} \left(\max_{x \in g^*(s_g)} \text{Re } f_g(x) - \max_{y \in a(s_g)} \text{Re } f_g(y) \right) \left(\max_{x \in g(s_g)} \text{Re } f_g(x) - \max_{y \in a(s_g)} \text{Re } f_g(y) \right) - \rho(g^*, a) \leq \\
&= \left| \max_{x \in g(s_g)} \text{Re } f_g(x) - \max_{y \in a(s_g)} \text{Re } f_g(y) \right| - \rho(g^*, a) \leq \\
&\leq \max_{f \in B^*} \left| \max_{x \in g(s_g)} \text{Re } f(x) - \max_{y \in a(s_g)} \text{Re } f(y) \right| - \rho(g^*, a) = \\
&= H(g(s_g), a(s_g)) - \rho(g^*, a) \leq \\
&\max_{s \in S} H(g(s), a(s)) - \rho(g^*, a) = \rho(g, a) - \rho(g^*, a).
\end{aligned}$$

Звідки $\rho(g, a) \geq \rho(g^*, a)$ для всіх $g \in V$. Це й означає, що g^* є екстремальним елементом для величини (6.1).

Теорему доведено.

11. Критерії екстремальності елемента $g^* \in V$ для задачі відшукування величини (6.1)

Зауважимо, що встановлена у теоремі 10.1 достатня умова екстремальності елемента $g^* \in V$ для величини (6.1) має місце у випадку найкращого

рівномірного наближення багатозначного відображення $a \in C(S, K_0(X))$ будь-якою множиною $V \subset C(S, X)$.

Становлять інтерес множини, для яких ця умова є не лише достатньою, а й необхідною умовою екстремальності елемента $g^* \in V$ для величини (6.1).

Означення 11.1 ([38, с. 1616]). Множину M нормованого простору Y будемо називати Γ^* -множиною відносно точки $y_0 \in M$, якщо $y - y_0 \in \Gamma^*(M, y_0)$ для всіх $y \in M$.

Стосовно простору $K_{(C(S, K_0(X)))^2}$ це означення конкретизується таким чином.

Множину M простору $K_{(C(S, K_0(X)))^2}$ будемо називати Γ^* -множиною відносно

$K_{(g^*, h^*)} \in M$ якщо $K_{(g, h)} - K_{(g^*, h^*)} = K_{(g-h^*, h-g^*)} \in \Gamma^*(M, K_{(g^*, h^*)})$ для всіх $K_{(g, h)} \in M$.

З урахуванням зазначеного вище введемо таке означення.

Означення 11.2. Множину V простору $C(S, K_0(X))$ будемо називати Γ^* -множиною відносно $g^* \in V$, якщо множина K_V є Γ^* -множиною простору $K_{(C(S, K_0(X)))^2}$ відносно $K_{(g^*, 0)}$, тобто, якщо

$K_{(g, 0)} - K_{(g^*, 0)} = K_{(g-g^*, -g^*)} \in \Gamma^*(K_V, K_{(g^*, 0)})$ для всіх $g \in V$.

Твердження 11.1. Будь-яка зіркова відносно $g^* \in V$ множина V є Γ^* -множиною відносно g^* .

Доведення. Оскільки V є зірковою відносно $g^* \in V$ множиною, то для будь-якого $g \in V$ та $\alpha \in [0, 1]$, $(1-\alpha)g^* + \alpha g \in V$.

Тому $K_{((1-\alpha)g^* + \alpha g, 0)} \in K_V$ для всіх $\alpha \in [0, 1]$.

Маємо, що

$$K_{(g^*, 0)} + \alpha K_{(g, -g^*)} = K_{(g^*, 0)} + K_{(\alpha g, -\alpha g^*)} = K_{(g^* + \alpha g, -\alpha g^*)} = K_{((1-\alpha)g^* + \alpha g, 0)}, \quad \alpha \in [0, 1],$$

оскільки внаслідок властивостей багатозначних опуклозначних відображень (див. п.4)

$$(1-\alpha)g^* + \alpha g - (-\alpha g^*) = (1-\alpha)g^* + \alpha g + \alpha g^* = (1-\alpha + \alpha)g^* + \alpha g = g^* + \alpha g.$$

Тоді $K_{(g^*, 0)} + \alpha K_{(g, -g^*)} \in K_V$ для всіх $\alpha \in [0, 1]$.

Згідно з означенням 8.1 конуса граничних напрямків тоді $K_{(g,-g^*)} \in \Gamma^* \left(K_V, K_{(g^*,0)} \right)$ для всіх $g \in V$. Тому $V \in \Gamma^*$ -множиною відносно g^* .

Твердження доведено.

Твердження 11.2. Будь-яка опукла множина V простору $C(S, K_0(X)) \in \Gamma^*$ -множиною відносно будь-якого $g^* \in V$.

Справедливість твердження випливає з твердження 11.1 оскільки опукла множина є зірковою відносно кожного свого елемента.

Прикладом опуклої множини V простору $C(S, K_0(X))$, елементи якої мають просту структуру, є множина сталих багатозначних опуклозначних відображень, тобто таких відображень $g \in C(S, K_0(X))$, що $g(s) = K_g \in K_0(X)$ для всіх $s \in S$.

З урахуванням цього та твердження 11.2 робимо висновок, що множина V всіх сталих багатозначних опуклозначних відображень є Γ^* -множиною відносно будь-якого $g^* \in V$.

Твердження 11.3. Якщо множина $V \subset C(S, X)$ і є Γ^* -множиною простору $C(S, X)$ відносно $g^* \in V$ у розумінні означення 11.1, то вона є Γ^* -множиною цього простору відносно g^* у розумінні означення 11.2.

Доведення. Дійсно, нехай $V \subset C(S, X)$ і є Γ^* -множиною відносно $g^* \in V$ у розумінні означення 11.1, тобто $g - g^* \in \Gamma^*(V, g^*)$ для всіх $g \in V$.

Для будь-якого $g \in V$ візьмемо довільний окіл $O_\delta(K_{(g,-g^*)})$ точки $K_{(g,-g^*)}$ простору $K_{(C(S, K_0(X)))^2}$ радіуса δ і $\varepsilon > 0$. Оскільки $V \in \Gamma^*$ -множиною у розумінні означення 11.1, то існує $z \in O_\delta(g - g^*)$ і $\alpha \in (0, \varepsilon)$ такі, що $g^* + \alpha z \in V$ і, отже,

$$K_{(g^*,0)} + \alpha K_{(z,0)} = K_{(g^* + \alpha z, 0)} \in K_V. \quad (11.1)$$

Переконаємось, що $K_{(z,0)} \in O_\delta(K_{(g,-g^*)})$.

Дійсно, врахувавши (5.5), будемо мати

$$\begin{aligned} \|K_{(z,0)} - K_{(g,-g^*)}\| &= \|K_{(z,0)} + K_{(g^*,-g)}\| = \|K_{(z+g^*,-g)}\| = \\ &= \max_{s \in S} \max_{f \in B^*} \left| \max_{x \in z(s) + g^*(s)} \operatorname{Re} f(x) + \min_{y \in -g(s)} \operatorname{Re} f(y) \right| = \\ &= \max_{s \in S} \max_{f \in B^*} \left| \operatorname{Re} f(z(s) + g^*(s) - g(s)) \right| = \\ &= \max_{s \in S} \|(g - g^*)(s) - z(s)\| = \|(g - g^*) - z\| < \delta, \end{aligned}$$

Оскільки $z \in O_\delta(g - g^*)$ в просторі $C(S, X)$.

Звідси та з (11.1) випливає, що $V \in \Gamma^*$ -множиною у розумінні означення 11.2.

Твердження доведено.

Теорема 11.1. Нехай $V \subset C(S, K_0(X))$, $g^* \in V$ і $V \in \Gamma^*$ -множиною відносно точки g^* (в тому числі зірковою відносно g^* або опуклою множиною).

Для того щоб елемент g^* був екстремальним елементом для величини (6.1), необхідно і достатньо, щоб для кожного $g \in V$ існували елементи $s_g \in S$, $f_g \in B^*$, для яких виконуються умови (10.1), (10.2).

Доведення. Необхідність. Нехай $g^* \in V$ є екстремальним елементом для величини (6.1). Оскільки $V \in \Gamma^*$ -множиною відносно g^* (в тому числі зірковою відносно g^* або опуклою множиною), то $K_{(g,-g^*)} \in \Gamma^*(K_V, K_{(g^*,0)})$.

Тоді згідно з теоремою 9.2 для будь-якого $g \in V$ існують елементи $s_g \in S$, $f_g \in B^*$ такі, для яких виконуються умови (10.1), (10.2).

Достатність умов теореми для екстремальності g^* встановлена у теоремі 10.1.

Наслідок 11.1. Нехай V підпростір $C(S, K_0(X))$.

Для того щоб елемент $g^* \in V$ був екстремальним елементом для величини (6.1), необхідно, щоб для кожного $g \in V$ існували елементи $s_g \in S$, $f_g \in B^*$ такі, що

$$\left| \max_{x \in g^*(s_g)} \operatorname{Re} f_g(x) - \max_{y \in a(s_g)} \operatorname{Re} f_g(y) \right| = H(g^*(s_g), a(s_g)) = \rho(g^*, a), \quad (11.2)$$

$$\text{sign} \left(\max_{x \in g^*(s_g)} \text{Re } f_g(x) - \max_{y \in a(s_g)} \text{Re } f_g(y) \right) \max_{x \in g(s_g)} \text{Re } f_g(x) \geq 0. \quad (11.3)$$

Доведення. Нехай V підпростір $C(S, K_0(X))$, $g^* \in V$ є екстремальним елементом для величини (6.1), $g \in V$. Оскільки $g + g^* \in V$ та V є опуклою множиною, то згідно з теоремою 11.1 існують елементи $s_g \in S$, $f_g \in B^*$ такі, що виконується умова (11.2) і

$$\begin{aligned} & \text{sign} \left(\max_{x \in g^*(s_g)} \text{Re } f_g(x) - \max_{y \in a(s_g)} \text{Re } f_g(y) \right) \cdot \\ & \cdot \left(\max_{x \in (g(s_g) + g^*(s_g))} \text{Re } f_g(x) - \max_{y \in g(s_g)} \text{Re } f_g(y) \right) \geq 0. \end{aligned} \quad (11.4)$$

З (11.4) випливає (11.3), якщо врахувати, що

$$\max_{x \in (g(s_g) + g^*(s_g))} \text{Re } f_g(x) = \max_{x \in g(s_g)} \text{Re } f_g(x) + \max_{x \in g^*(s_g)} \text{Re } f_g(x).$$

Наслідок доведено.

Наслідок 11.2. Нехай V підпростір $C(S, K_0(X))$.

Для того щоб елемент $g^* \in V$ був екстремальним елементом для величини (6.1), необхідно і достатньо, щоб для будь-якого $g \in V$ існували елементи $s_g \in S$, $f_g \in B^*$, такі, що мають місце рівності (10.1), (10.2).

Справедливість наслідку випливає з теореми 11.1, оскільки підпростір є опуклою множиною.

Наслідок 11.3. Нехай V є множиною сталих відображень із $C(S, K_0(X))$.

Для того щоб елемент $g^* \in V$ був екстремальним елементом для величини (6.1), необхідно і достатньо, щоб для будь-якого $g \in V$ існували елементи $s_g \in S$, $f_g \in B^*$ такі, що мають місце рівності (10.1), (10.2).

Справедливість наслідку випливає з наслідку 11.2, оскільки множина сталих відображень із $C(S, K_0(X))$ є підпростором $C(S, K_0(X))$.

Зауважимо, що в частковому випадку, коли S є компактом простору R^m , а $X = R^l$ цей наслідок встановлено у праці [43].

Наслідок 11.4 [38, с. 1616]. Нехай $V \subset C(S, X)$, $g^* \in V$ і V є Γ^* -множиною відносно точки g^* у розумінні означення 11.1 (в тому числі зірковою відносно g^* або опуклою множиною).

Для того щоб елемент g^* був екстремальним елементом для величини (6.1) в цьому випадку, необхідно і достатньо, щоб для кожного $g \in V$ існували елементи $s_g \in S$, $y_g \in a(s_g)$, $f_g \in B^*$ такі, що

$$\begin{aligned} f_g(g^*(s_g) - y_g) &= \max_{s \in S} \max_{y \in a(s)} \|g^*(s) - y\| = \rho(g^*, a), \\ \text{Re } f_g(g(s_g) - g^*(s_g)) &\geq 0. \end{aligned}$$

Справедливість цього наслідку випливає з теореми 11.1, якщо врахувати, що g^* , g є неперервними однозначними відображеннями з S в X ($g, g^* \in C(S, X)$) та Γ^* -множина у розумінні означення 11.1 є Γ^* -множиною у розумінні означення 11.2 (див. твердження 11.3).

Список літератури

1. Борисович Ю.Г., Гельман Б.Д., Мышкис А.Д., Обуховский В.В. Многозначные отображения// Итоги науки и техн./ ВИНТИ. Мат. анализ. – 1982. – 19. – С.127 – 231.
2. Корнейчук Н.П. Экстремальные задачи теории приближения. – М.: Наука, 1976. – 320с.
3. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. – М.: Наука, 1977. – 742с.
4. Ахиезер Н.И. Лекции по теории аппроксимации. – М.: Наука, 1965. – 407с.
5. Дзядык В.К. Введение в теорию равномерного приближения функций. – М.: Наука, 1977. – 510с.
6. Лоран П.-Ж. Аппроксимация и оптимизация. – М.: Мир, 1975. – 496с.
7. Степанец А.И. Методы теории приближений. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. – Ч.І. – 427с.
8. Степанец А.И. Методы теории приближений. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. – Ч.ІІ. – 468с.
9. Тихомиров В.М. Некоторые вопросы теории приближений. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1976. – 307с.
10. Зуховицкий С.И., Стечкин С.Б. О приближении абстрактных функций со значениями в банаховом пространстве // Докл. АН СССР. – 1956. – 106, №5. – С.773-776.
11. Зуховицкий С.И., Стечкин С.Б. О приближении абстрактных функций // Успехи мат. наук. – 1957. – 12. №1(73). – С.187-191.

12. Ярахмедов Г.Я. Об одном вопросе наилучшего равномерного приближения // Сиб. матем. журн.-1972.-XIII, №4-С.958.
13. Ярахмедов Г.Я. Об одном обобщении теоремы А.Н.Колмогорова // Сиб.матем. журн.-1972.-XIII, №4-С.959.
14. Смирнов Г.С. О критерии элемента наилучшего приближения абстрактной функции со значениями в банаховом пространстве. – Киев, 1973.-20с.- (Препринт/АН УССР. Ин-т математики; ин-73-8).
15. Смирнов.Г.С. Про одну характеристику элемента наилучшего приближения абстрактної функції із значеннями в банаховому просторі // Вісн. Київ. ун-ту. Серія: Математика.Механіка.-1975.-№ 17.-С. 134-138.
16. Opfer G. An algorithm for the construction of best approximations based on Kolmogorov's criterion // J. Approximation Theory.-1978.-23.-P. 299-317.
17. Smarzewski R. Chebyshev optimal starting approximation by families with the weak betweenness property // Applicationes Mathematicae.-1979.- XVI, № 3.-P. 485-495.
18. Warth W. On the uniqueness of best uniform approximations in the presence of constraints. // J. Approximation Theory.-1979.-25.-P. 1-11.
19. Shi Y. The limits of a Chebyshev-type theory of restricted range approximation// J. Approximation Theory.-1988.-53.-P.41-53.
20. Deutsch F. Best approximation in the space of continuous vector-valued functions// J. Approximation Theory.-1988.-53.-P.112-116.
21. Гаркави А.Л. Об условии Хаара для систем векторнозначных функций // Математические заметки.-1989.-45, №1.-С.10-15.
22. Smirnov G.S., Smirnov R.G. Best uniform restricted ranges approximation of complex-valued functions// C.R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada-1997.- 19, № 2.-P.58-63.
23. Singer I. Asupra unicității elementului de cea mai bună aproximatie în spații Banach oarecare// Studii și cercetari mat. Acad. RPR. – 1957. – 8, №1-2 – P.235-244.
24. Klee V.L. Circumspheres and inner products// Math. Scand. – 1960. – 8, №2. – P.363-370.
25. Гаркави А.Л. О чебышевском центре и выпуклой оболочке множества// Успехи мат. наук. – 1964. – 19, №6. – С.139-145.
26. Белобров П.К. О чебышевской точке системы множеств// Изв. высш. учебн. заведений. Математика. – 1966. – №6. – С.18-24.
27. Гольштейн Е.Г. Теория двойственности в математическом программировании и ее приложения. – М.: Наука, 1971. – 352с.
28. Ward J. D. Chebyshev centers in spaces of continuous functions// Pacific journal of mathematics. – 1974. – 52, № 1. – P.283-287.
29. Mach J. On the existence of best simultaneous approximation// J. Approximation theory. – 1979. – 25. – P.258-265.
30. Peval L. Chebyshev centres in normed spaces// Publications de L'Institut Mathematique. – 1989. – Tome 45(59) – P.109-112.
31. Гнатюк Ю.В., Гнатюк У.В. Найкраще одночасне наближення елементів збіжних за нормами послідовностей// Крайові задачі для диференціальних рівнянь: Зб. наук. пр. – Чернівці: Прут, 2002. – Вип.8. – С. 228-238.
32. Гаркави А.Л. Об условном чебышевском центре компактного множества непрерывных функций// Математические заметки.– 1973. – 14, №4. – С.469-478.
33. Fernandez M., Soriano M.L. On the Chebyshev alternation theorem// Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena. – 1997. – XLV. – P.169-178.
34. Tanimoto S.A. On best simultaneous approximation// Math. Japonica. – 1998. – 48, № 2. – P.275-279.
35. Гнатюк Ю.В. Найкраще рівномірне наближення сім'ї неперервних на компактї функцій// Укр. мат. журн. – 2002. – 54, №11. – С.1574-1580.
36. Гнатюк Ю.В. Алгоритми найкращого одночасного рівномірного наближення сім'ї неперервних на компактї функцій чебишовським підпростором// Укр. мат. журн. – 2003. – 55, №2. – С.291-307.
37. Гнатюк Ю.В., Гудима У.В. Задача найкращої рівномірної апроксимації неперервного компактнозначного відображення скінченновимірним підпростором однозначних неперервних відображень// Проблеми теорії наближення функцій та суміжні питання – відп. ред.: О.І.Степанець = Зб. праць Ін-ту математики НАН України. Т.1, №1. – Київ: Ін-т математики НАН України, 2004. – С.115-129.
38. Гудима У.В. Найкраща рівномірна апроксимація неперервного компактнозначного відображення множинами неперервних однозначних відображень// Укр. мат. журн. – 2005.-57, №12. – С.1601-1619.
39. Гнатюк В.О., Гнатюк Ю.В., Гудима У.В. Питання чебишовського альтернансу та єдиності екстремального елемента для задачі найкращої рівномірної апроксимації неперервного компактнозначного відображення скінченновимірним підпростором однозначних неперервних відображень// Зб. наук. пр. Кам'янець-Подільського держ. ун-ту. Серія фізико-математична (математика). – Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський держ. ун-т., 2005. – Вип.8. – С. 16-23.
40. Гнатюк Ю.В., Гудима У.В. Критерії екстремального елемента та його єдиності для задачі найкращої рівномірної апроксимації неперервного компактнозначного відображення множинами однозначних відображень// Доп. НАНУ, 2005 – №6 – С.19-23.
41. Гнатюк В.О., Гнатюк Ю.В., Гудима У.В. Модифікація методу Ремеза на випадок апроксимації компактнозначного відображення// Вісник КНУ. Серія: фізико-математичні науки. – 2005. – №3. – С.239-244.
42. Никольский М.С. Аппроксимация выпуклозначных непрерывных многозначных отображений// Докл. АН СССР.– 1989.– 308, № 5. – С.1047-1050.
43. Никольский М.С. Об аппроксимации непрерывного многозначного отображения постоянными многозначными отображениями// Вестник Московского ун-та. Сер. 15, Вычислительная математика и кибернетика. – 1990. – № 1. – С.76-80.

44. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1989. – 623с.
45. Иосида К. Функциональный анализ. – М.: Мир, 1967. – 624с.
46. Чобан М.М., Ипате Д.М. Теорема Стоуна-Вейерштрасса и аппроксимации выпуклозначных непрерывных многозначных отображений//Изв. АН Респ. Молдова. Мат.-1991.-№ 2. –С.13-18.

Наукове видання

Робота частково підтримана ДФФД, грант № 25.1/083

**НАЙКРАЩА РІВНОМІРНА АПРОКСИМАЦІЯ НЕПЕРЕРВНОГО
КОМПАКТНОЗНАЧНОГО ОПУКЛОЗНАЧНОГО ВІДОБРАЖЕННЯ
МНОЖИНАМИ ІНШИХ НЕПЕРЕРВНИХ КОМПАКТНОЗНАЧНИХ
ОПУКЛОЗНАЧНИХ ВІДОБРАЖЕНЬ**

Підп. до друку 23.06.04. Формат 60×84/16. Папір тип.
Офс. друк. Фіз. друк. арк. 2,16. Ум. друк. арк. 4,0.
Тираж 60 пр. Зам. 89.

Інформаційно – видавничий відділ
Кам'янець-Подільського державного університету
32300, м. Кам'янець-Подільський, Івана Огієнка, 61
Свідоцтво серії ДК № 117 від 11.07.2000 р.