УДК 517.5

Ю. В. Гнатюк (Кам’янець-Поділ. нац. ун-т ім. І. Огієнка)

НАЙКРАЩА РІВНОМІРНА АПРОКСИМАЦІЯ В МЕТРИЧНОМУ ПРОСТОРІ НЕПЕРЕРВНИХ ВІДОБРАЖЕНЬ З КОМПАКТНИМИ ОПУКЛИМИ ОБРАЗАМИ

For the problem of the best uniform approximation of a continuous map with compact convex images by sets of other continuous maps with compact convex images, we establish necessary and sufficient conditions and the criterion for an extremal element, which is a generalization of the classical Kolmogorov criterion for the polynomial of best approximation.

Для задачи наилучшей равномерной аппроксимации непрерывного отображения с компактными выпуклыми образами множествами других непрерывных отображений с компактными выпуклыми образами установлены необходимые, достаточные условия и критерий экстремального элемента, который является обобщением классического критерия Колмогорова многочлена наилучшего приближения.

У цій роботі розглядається задача найкращої рівномірної апроксимації неперервного відображення з компактними опуклими образами множинами інших неперервних відображень з компактними опуклими образами, яка полягає в наступному.

Нехай S — компакт, X — лінійний над полем комплексних (дійсних) чисел нормований простір, $C(S,X)$ — лінійний над полем дійсних чисел нормований простір однозначних відображень g компакта S в X, неперервних на S, з нормою $\| g \| = \max_{s \in S} \| g(s) \|$, $K(X)$ $K_0(X)$ — сукупність непорожніх компактів (непорожніх опуклих компактів) простору X, $H(A, B) = \left\{ \max_{x \in A} \min_{y \in B} \| x - y \|, \max_{y \in B} \min_{x \in A} \| x - y \| \right\}$ — хаусдорфова відстань між множинами A, B із $K(X)$, $C(S, K(X))$ $(C(S, K_0(X)))$ — множина неперервних на S відносно метрики Хаусдорфа багатозначних відображень в S $K(X)$ $(S$ в $K_0(X))$.

Задачею найкращої рівномірної апроксимації відображення $a \in C(S, K(X))$ множиною $V \subset C(S, K(X))$ будемо називати задачу відшукання величини

$$\alpha_a^*(V) = \inf_{g \in V} \max_{s \in S} H(g(s), a(s)). \tag{1}$$

Якщо існує елемент $g^* \in V$ такий, що

$$\alpha_a^*(V) = \max_{s \in S} H\left(g^*(s), a(s)\right),$$

то його будемо називати елементом найкращого наближення для відображення a у множині V, або екстремальним елементом для величини (1).

Слід зазначити, що питання апроксимації багатозначних відображень у різних аспектах розглядалися у багатьох працях. Однак лише окремі з них присвячено питанням найкращої апроксимації багатозначних відображень (див., наприклад, [1 – 6]).

Особливість і основна складність дослідження задач найкращої рівномірної апроксимації неперервних відображень з компактними образами пов’язані з тим, що множина таких відображень не є лінійним, а отже, і лінійним нормованим простором.

У цій роботі встановлено необхідні, достатні умови та критерії екстремального елемента для величини (1).

Покладемо для будь-яких g, $h \in C(S, K(X))$ $\rho(g, h) = \max_{s \in S} H(g(s), h(s))$. Величина $\rho(g, h)$ задає метрику на множині $C(S, K(X))$. Відповідний метричний простір будемо позначати через $(C(S, K(X)), \rho)$.

З урахуванням зазначеного задачу відшукання величини (1) можна подати у вигляді

$$\alpha_a^*(V) = \inf_{g \in V} \rho(g, a). \tag{2}$$

Позначимо через X^* простір, спряжений з X, а через B^* одиничну кулю цього простору: $B^* = \left\{ f : f \in X^*, \ \| f \| \le 1 \right\}$.

Твердження 1. *Для будь-яких* g, $h \in C(S, K_0(X))$ *має місце рівність*

$$\rho(g, h) = \max_{s \in S} \max_{f \in B^*} \left| \max_{x \in g(s)} \operatorname{Re} f(x) - \max_{y \in h(s)} \operatorname{Re} f(y) \right|.$$

Нехай g, $h \in C(S, K(X))$, $\alpha \in R$. Як відомо, сумою багатозначних відображень g і h називається відображення $g + h$ таке, що $(g + h)(s) = g(s) + h(s)$ для всіх $s \in S$, а добутком числа α на відображення називається відображення αg таке, що $(\alpha g)(s) = \alpha g(s)$ для всіх $s \in S$. Легко перевірити, що операції додавання елементів множин $C(S, K(X))$, $C(S, K_0(X))$ і множення дійсних чисел на ці елементи не виводять із цих множин.

Позначимо через $(C(S, K_0(X)))^2$ прямий добуток $C(S, K_0(X)) \times C(S, K_0(X))$. Означимо в $(C(S, K_0(X)))^2$ алгебраїчні операції додавання і множення на дійсні числа таким чином:

$$(g_1, h_1) + (g_2, h_2) = (g_1 + g_2, h_1 + h_2),$$

$$\alpha \cdot (g, h) = (\alpha g, \alpha h), \quad \text{якщо} \quad \alpha \in R, \ \ \alpha \ge 0,$$

$$\alpha \cdot (g, h) = (\alpha h, \alpha g), \quad \text{якщо} \quad \alpha \in R, \ \ \alpha < 0.$$

Будемо вважати, що $(g_1, h_1) \approx (g_2, h_2)$, де (g_1, h_1), $(g_2, h_2) \in (C(S, K_0(X)))^2$, якщо $g_1 - h_2 = g_2 - h_1$, тобто якщо для всіх $s \in S$ $g_1(s) - h_2(s) = g_2(s) - h_1(s)$. Легко переконатися, що відношення $\approx$ є відношенням еквівалентності, яке дозволяє розбити $(C(S, K_0(X)))^2$ на класи $K_{(g,h)}$ еквівалентних між собою пар (g, h). Сукупність таких класів будемо позначати через $K_{(C(S, K_0(X)))^2}$.

Нехай α, $\beta \in K_{(C(S, K_0(X)))^2}$, c — дійсне число, $(g_1, h_1) \in \alpha$, $(g_2, h_2) \in \beta$. Покладемо $\alpha + \beta = \gamma = K_{(g_1 + g_2, h_1 + h_2)}$, $c\alpha = K_{c(g_1, h_1)}$. Можна переконатися, що результати операцій додавання класів і множення їх на дійсні числа не залежать від вибору елементів із цих класів і множина $K_{(C(S, K_0(X)))^2}$ з так означеними алгебраїчними операціями є лінійним простором над полем дійсних чисел.

Роль нуля в цьому просторі буде відігравати сукупність усіх пар (g, h), еквівалентні парі (0, 0), тобто для яких $h = -g$. Отже, $K_{(0,0)} = \{(g, -g) : g \in \in C(S, K_o(X))\}$. Для всіх $\alpha \in K_{(C(S, K_0(X)))^2}$ і $(g, h) \in \alpha$ покладемо

$$\|\alpha\| = \|K_{(g,h)}\| = \max_{s\in S} \max_{f\in B^*} \left| \max_{x\in g(s)} \operatorname{Re} f(x) + \min_{y\in h(s)} \operatorname{Re} f(y) \right|. \tag{3}$$

Можна переконатись, що величина $\|\alpha\|$, $\alpha \in K_{(C(S, K_0(X)))^2}$, не залежить від вибору (g, h) із α і задовольняє всі аксіоми норми. Таким чином, простір $K_{(C(S, K_0(X)))^2}$ є лінійним над полем дійсних чисел нормованим простором.

Для a, $g \in C(S, K_0(X))$, згідно з твердженням 1 і співвідношенням (3), матимемо

$$\rho(g, a) = \max_{s\in S} \max_{f\in B^*} \left| \max_{x\in g(s)} \operatorname{Re} f(x) - \max_{y\in a(s)} \operatorname{Re} f(y) \right| =$$

$$= \max_{s\in S} \max_{f\in B^*} \left| \max_{x\in g(s)} \operatorname{Re} f(x) + \min_{y\in -a(s)} \operatorname{Re} f(y) \right| = \|K_{(g,0)} - K_{(a,0)}\|.$$

З урахуванням цього задачу відшукання величини (1) ((2)) для $a \in C(S, K_0(X))$, $V \subset C(S, K(X))$ можна подати у вигляді

$$\alpha_a^*(V) = \inf_{g\in V} \max_{s\in S} H(g(s), a(s)) = \inf_{g\in V} \rho(g, a) = \inf_{g\in V} \|K_{(g,0)} - K_{(a,0)}\|. \tag{4}$$

Позначимо через K_V множину лінійного нормованого простору $K_{(C(S, K_0(X)))^2}$, яка задається як $K_V = \{K_{(g,0)} \in K_{(C(S, K_0(X)))^2} : g \in V\}$, та розглянемо у просторі $K_{(C(S, K_0(X)))^2}$ задачу найкращого наближення елемента $K_{(\alpha,0)}$ множиною K_V, тобто задачу відшукання величини

$$\inf_{K_{(g,0)}\in K_V} \|K_{(g,0)} - K_{(a,0)}\|. \tag{5}$$

Зрозуміло, що справедливою є рівність

$$\alpha_a^*(V) = \inf_{K_{(g,0)}\in K_V} \|K_{(g,0)} - K_{(a,0)}\| \tag{6}$$

і для того щоб елемент $g^* \in V$ був екстремальним елементом для величини (4), необхідно і достатньо, щоб елемент $K_{(g^*,0)}$ був екстремальним елементом для величини (5).

Твердження 2. *Нехай* $a \in C(S, K_0(X))$, $s \in S$, $\alpha \in K_{(C(S, K_0(X)))^2}$, $(g, h) \in \in \alpha$ *і* $\varphi_s^a(\alpha) = H(g(s), a(s) - h(s))$. *Функція* $\varphi_s^a(\alpha)$ *не залежить від вибору пари* (g, h) *із* α, *є неперервною та опуклою по* α *на* $K_{(C(S, K_0(X)))^2}$. *При фіксованому* α *функція* $\varphi_s^a(\alpha)$ *є неперервною по* s *на* S.

Твердження 3. *Нехай для* $a \in C(S, K_0(X))$, $s \in S$, $f \in B^*$, $\alpha \in \in K_{(C(S, K_0(X)))^2}$, $(g, h) \in \alpha$

$$\Psi_f^s(\alpha) = \left| \max_{x \in g(s)} \operatorname{Re} f(x) - \max_{y \in a(s)} \operatorname{Re} f(y) - \max_{y \in -h(s)} \operatorname{Re} f(y) \right|.$$

Функція $\Psi_f^s(\alpha)$ *не залежить від вибору пари* (g, h) *із* α, *є неперервною та опуклою по* α *на* $K_{(C(S, K_0(X)))^2}$. *При фіксованих* s, a, α *функція* $\Psi_f^s(\alpha)$ *є неперервною по* f *на* B^* *у розумінні слабкої* $*$ *топології* B^*.

Твердження 4. *Нехай* $s \in S$, $f \in B^*$, $\alpha \in K_{(C(S, K_0(X)))^2}$, $(g, h) \in \alpha$, $l_s^f(\alpha) = \max_{x \in g(s)} \operatorname{Re} f(x) - \max_{y \in -h(s)} \operatorname{Re} f(y)$. *Тоді величина* $l_s^f(\alpha)$ *не залежить від вибору* (g, h) *і задає лінійний неперервний функціонал на* $K_{(C(S, K_0(X)))^2}$, *тобто* $l_s^f \in \left(K_{(C(S, K_0(X)))^2}\right)^*$, *де* $\left(K_{(C(S, K_0(X)))^2}\right)^*$ — *простір, спряжений з* $K_{(C(S, K_0(X)))^2}$.

У подальшому будемо припускати, що у задачі відшукання величини (4) $a \notin \overline{V}$, де $\overline{V}$ — замикання множини V простору $(C(S, K_0(X)), \rho)$. Легко переконатися, що ця умова еквівалентна умові $K_{(a,0)} \notin \overline{K_V}$, де $\overline{K_V}$ — замикання множини K_V у лінійному нормованому просторі $K_{(C(S, K_0(X)))^2}$. Зрозуміло, що за умови виконання співвідношення $a \notin \overline{V}$ має місце нерівність $\alpha_a^*(V) > 0$. З отриманої нерівності випливає, що множина тих $g \in C(S, K_0(X))$, для яких $\rho(g, a) < \alpha_a^*(V)$, не є порожньою множиною. Цій множині належить, зокрема, відображення a. Не є порожньою також множина тих елементів $K_{(g,h)}$, для яких $\left\| K_{(g,h)} - K_{(a,0)} \right\| < \alpha_a^*(V)$. Для $a \in C(S, K_0(X))$ та $g^* \in V$ покладемо

$$\alpha_a^{g^*} = \rho(g^*, a) = \max_{s \in S} H\left(g^*(s), a(s)\right) = \left\| K_{(g^*,0)} - K_{(a,0)} \right\|,$$

$$C_a^{g^*} = \left\{ K_{(g,h)} \in K_{(C(S,\, K_0(X)))^2} : \left\| K_{(g,h)} - K_{(a,0)} \right\| < \alpha_a^{g^*} \right\},$$

$$S_a^{g^*} = \left\{ s \in S : H\left(g^*(s), a(s)\right) = \alpha_a^{g^*} \right\},$$

$$B_a^{g^*}(s) = \left\{ f \in B^* : \left| \max_{x \in g^*(s)} \operatorname{Re} f(x) - \max_{y \in a(s)} \operatorname{Re} f(y) \right| = \right.$$

$$\left. = \max_{f \in B^*} \left| \max_{x \in g^*(s)} \operatorname{Re} f(x) - \max_{y \in a(s)} \operatorname{Re} f(y) \right| = H\left(g^*(s), a(s)\right) \right\}, \quad s \in S_a^{g^*}.$$

Згідно з [7, с.12, 13] через $\Gamma(M, y^*)$, $\Gamma^*(M, y^*)$ позначимо відповідно конуси внутрішніх та граничних напрямків для множини M лінійного нормованого простору Y із $y^* \in Y$.

Теорема 1. *Справедливою є рівність*

$$\Gamma\left(C_a^{g^*}, K_{(g^*,0)}\right) = \bigcap_{s \in S_a^{g^*}} \bigcap_{f \in B_a^{g^*}(s)} \left\{ K_{(g,h)} \in K_{(C(S, K_0(X)))^2} : \right.$$

$$\operatorname{sign}\left(\max_{x\in g^*(s)} \operatorname{Re} f(s) - \max_{y\in a(s)} \operatorname{Re} f(y)\right)\left(\max_{x\in g(s)} \operatorname{Re} f(x) - \max_{y\in -h(s)} \operatorname{Re} f(y)\right) < 0\Bigg\}. \quad (7)$$

Доведення. Маємо

$$C_a^{g^*} = \Big\{K_{(g,h)} \in K_{(C(S,K_0(X)))^2} : \big\| K_{(g,h)} - K_{(a,0)} \big\| =$$

$$= \big\| K_{(g,h-a)} \big\| = \max_{s\in S} \varphi_s^a(K_{(g,h)}) < \alpha_a^{g^*}\Big\},$$

де для $s \in S$ $\varphi_s^a(K_{(g,h)}) = H\big(g(s),\, a(s) - h(s)\big)$, $K_{(g,h)} \in K_{(C(S,K_0(X)))^2}$.

Отже,

$$C_a^{g^*} = \bigcap_{s\in S} C_a^{g^*}(s),$$

$$C_a^{g^*}(s) = \Big\{K_{(g,h)} \in K_{(C(S,K_0(X)))^2} : \varphi_s^a(K_{(g,h)}) < \alpha_a^{g^*}\Big\}.$$

Тому згідно з твердженням 1.2.2 [7, с. 14]

$$\Gamma\Big(C_a^{g^*},\, K_{(g^*,0)}\Big) \subset \bigcap_{s\in S} \Gamma\Big(C_a^{g^*}(s),\, K_{(g^*,0)}\Big) \subset \bigcap_{s\in S_a^{g^*}} \Gamma\Big(C_a^{g^*}(s),\, K_{(g^*,0)}\Big). \quad (8)$$

Оскільки для $s_0 \in S\backslash S_a^{g^*}$, згідно із зауваженням 1.1.7 [7, с. 13], $\Gamma\Big(C_a^{g^*}(s_0),\, K_{(g^*,0)}\Big) = K_{(C(S,K_0(X)))^2}$, то із співвідношення (8) отримаємо

$$\Gamma\Big(C_a^{g^*},\, K_{(g^*,0)}\Big) \subset \bigcap_{s\in S} \Gamma\Big(C_a^{g^*}(s),\, K_{(g^*,0)}\Big) = \bigcap_{s\in S_a^{g^*}} \Gamma\Big(C_a^{g^*}(s),\, K_{(g^*,0)}\Big). \quad (9)$$

Візьмемо довільне $K_{(g,h)} \in \bigcap_{s\in S_a^{g^*}} \Gamma\Big(C_a^{g^*}(s),\, K_{(g^*,0)}\Big) = \bigcap_{s\in S} \Gamma\Big(C_a^{g^*}(s),\, K_{(g^*,0)}\Big)$. Тоді згідно з означенням конуса внутрішніх напрямків для будь-якого $s \in S$ існує $\alpha_s > 0$ таке, що $K_{(g^*,0)} + \alpha_s K_{(g,h)} = K_{(g^* + \alpha_s g, \alpha_s h)} \in C_a^{g^*}(s)$. Внаслідок цього

$$\varphi_s^a\Big(K_{(g^*,0)} + \alpha_s K_{(g,h)}\Big) < \alpha_a^{g^*}. \quad (10)$$

Зафіксуємо α_s і розглянемо $\varphi_{s'}^a\Big(K_{(g^*,0)} + \alpha_s K_{(g,h)}\Big)$ як функцію s' на S. Згідно з твердженням 2 вона є неперервною функцією в кожній точці $s \in S$, а тому з нерівності (10) випливає існування околу $\mathrm{O}(s)$ точки s у компакті S такого, що для всіх $s' \in \mathrm{O}(s)$ справджується нерівність

$$\varphi_{s'}^a\Big(K_{(g^*,0)} + \alpha_s K_{(g,h)}\Big) < \alpha_a^{g^*}. \quad (11)$$

Внаслідок опуклості функції $\varphi_{s'}^a\big(K_{(g,p)}\big)$ по $K_{(g,p)}$ на $K_{(C(S,K_0(X)))^2}$ (див.

твердження 2), нерівності (11) та співвідношення $\varphi_{s'}^{a}\Big(K_{(g^*,0)}\Big) = H\Big(g^*(s'), a(s')\Big) \le \max_{s\in S} H\Big(g^*(s), a(s)\Big) = \alpha_a^{g^*}$ для всіх $\alpha \in (0, 1]$ отримаємо співвідношення

$$\varphi_{s'}^{a}\Big((1-\alpha) K_{(g^*,0)} + \alpha \big(K_{(g^*,0)} + \alpha_s K_{(g,h)}\big)\Big) = \varphi_{s'}^{a}\Big(K_{(g^*,0)} + \alpha\alpha_s K_{(g,h)}\Big) \le$$

$$\le (1-\alpha)\varphi_{s'}^{a}\Big(K_{(g^*,0)}\Big) + \alpha\varphi_{s'}^{a}\Big(K_{(g^*,0)} + \alpha_s K_{(g,h)}\Big) < (1-\alpha)\alpha_a^{g^*} +$$

$$+ \alpha\alpha_a^{g^*} = \alpha_a^{g^*}.$$

Звідси випливає, що

$$\varphi_{s'}^{a}\Big(K_{(g^*,0)} + tK_{(g,h)}\Big) < \alpha_a^{g^*} \tag{12}$$

для всіх $t \in (0, \alpha_s]$, $s' \in \mathrm{O}(s)$. Оскільки S є компактом і $\bigcup_{s\in S} \mathrm{O}(s) = S$, то з покриття $\mathrm{O}(s)$ компакта S можна виділити скінченне підпокриття $\mathrm{O}(s_i)$, тобто $\bigcup_{i=1}^{k} \mathrm{O}(s_i) = S$. Покладемо $\overline{\alpha} = \min_{1\le i\le k} \alpha_{s_i}$. Тоді з (12) випливає, що

$$\varphi_{s}^{a}\Big(K_{(g^*,a)} + tK_{(g,h)}\Big) < \alpha_a^{g^*} \tag{13}$$

для всіх $s \in S$ та всіх $t \in \big(0, \overline{\alpha}\,\big]$.

Тому, внаслідок неперервності по s на S функції $\varphi_{s}^{a}\Big(K_{(g^*,0)} + \overline{\alpha}K_{(g,h)}\Big)$ (див. твердження 2), одержимо

$$\max_{s\in S} \varphi_{s}^{a}\Big(K_{(g^*,0)} + \overline{\alpha}K_{(g,h)}\Big) = \max_{s\in S} H\Big(g^*(s) + \overline{\alpha}g(s), a\,(s) - \overline{\alpha}h(s)\Big) =$$

$$= \rho\Big(g^* + \overline{\alpha}g, a - \overline{\alpha}h\Big) = \Big\| K_{(g^*+\overline{\alpha}g, \overline{\alpha}h-a)} \Big\| =$$

$$= \Big\| K_{(g^*,0)} + \overline{\alpha}K_{(g,h)} - K_{(a,0)} \Big\| < \alpha_a^{g^*}.$$

Звідси згідно з теоремою 1.3.4 [7, с. 19] отримуємо, що $K_{(g,h)} \in \Gamma\Big(C_a^{g^*}, K_{(g^*,0)}\Big)$. З урахуванням цього та співвідношення (9) робимо висновок, що справджується рівність

$$\Gamma\Big(C_a^{g^*}, K_{(g^*,0)}\Big) = \bigcap_{s\in S_a^{g^*}} \Gamma\Big(C_a^{g^*}(s), K_{(g^*,0)}\Big). \tag{14}$$

Тепер перейдемо до опису конуса $\Gamma\Big(C_a^{g^*}(s), K_{(g^*,0)}\Big)$, $s \in S_a^{g^*}$. Нехай для $s \in S_a^{g^*}$, $f \in B^*$

$$\psi_f^s\Big(K_{(g,h)}\Big) = \left| \max_{x\in g(s)} \operatorname{Re} f(x) - \max_{y\in a(s)} \operatorname{Re} f(y) - \max_{y\in -h(s)} \operatorname{Re} f(y) \right|,$$

$$K_{(g,h)} \in K_{(C(S, K_0(X)))^2}, \tag{15}$$

Тоді для $s \in S_a^{g^*}$

$$C_a^{g^*}(s) = \left\{ K_{(g,h)} \in K_{(C(S,K_0(X)))^2} : \max_{f \in B^*} \psi_f^s\left(K_{(g,h)}\right) < \alpha_a^{g^*} \right\}. \tag{16}$$

Для $s \in S_a^{g^*}$, $f \in B^*$ позначимо

$$C_a^{g^*}(f, s) = \left\{ K_{(g,h)} \in K_{(C(S,K_0(X)))^2} : \psi_f^s\left(K_{(g,h)}\right) < \alpha_a^{g^*} \right\}. \tag{17}$$

Згідно з (16) для $s \in S_a^{g^*}$ $C_a^{g^*}(s) = \bigcap_{f \in B^*} C_a^{g^*}(f, s)$. Тому для $s \in S_a^{g^*}$ за твердженням 1.2.2 [7, с.14]

$$\Gamma\left(C_a^{g^*}(s), K_{(g^*,0)}\right) \subset \bigcap_{f \in B^*} \Gamma\left(C_a^{g^*}(f, s), K_{(g^*,0)}\right) \subset$$

$$\subset \bigcap_{f \in B_a^{g^*}(s)} \Gamma\left(C_a^{g^*}(f, s), K_{(g^*,0)}\right). \tag{18}$$

Нехай для $s \in S_a^{g^*}$ $f \notin B_a^{g^*}(s)$. Тоді $\left| \max_{x \in g^*(s)} \operatorname{Re} f(x) - \max_{y \in a(s)} \operatorname{Re} f(y) \right| =$ $= \Psi_f^s\left(K_{(g^*,0)}\right) < \alpha_a^{g^*}$. Внаслідок неперервності функції $\psi_f^s\left(K_{(g,h)}\right)$ по $K_{(g,h)}$ (див. твердження 3) згідно з [7, с. 13] робимо висновок, що $\Gamma\Big(C_a^{g^*}(f, s),$ $K_{(g^*,0)}\Big) = K_{(C(S,K_0(X)))^2}$. Звідси та з співвідношення (18) випливає, що

$$\Gamma\left(C_a^{g^*}(s), K_{(g^*,0)}\right) \subset \bigcap_{f \in B^*} \Gamma\left(C_a^{g^*}(f, s), K_{(g^*,0)}\right) =$$

$$= \bigcap_{f \in B_a^{g^*}(s)} \Gamma\left(C_a^{g^*}(f, s), K_{(g^*,0)}\right). \tag{19}$$

Візьмемо довільне $K_{(g,h)} \in \bigcup_{f \in B_a^{g^*}(s)} \Gamma\left(C_a^{g^*}(f, s), K_{(g^*,0)}\right) = \bigcup_{f \in B^*} \Gamma\Big(C_a^{g^*}(f, s),$ $K_{(g^*,0)}\Big)$. Згідно з означенням конуса внутрішніх напрямків для будь-якого $f \in B^*$ існує $\lambda_f > 0$ таке, що $K_{(g^*,0)} + \lambda_f K_{(g,h)} = K_{(g^* + \lambda_f g, \lambda_f h)} \in C_a^{g^*}(f, s)$. Внаслідок цього

$$\Psi_f^s\left(K_{(g^*,0)} + \lambda_f K_{(g,h)}\right) < \alpha_a^{g^*}. \tag{20}$$

Зафіксуємо λ_f і розглянемо $\Psi_{f'}^s\left(K_{(g^*,0)} + \lambda_f K_{(g,h)}\right)$ як функцію f' на B^*. Згідно з твердженням 3 вона є неперервною по f' у слабкій $*$ топології B^*. Оскільки має місце нерівність (20), то внаслідок цього існує окіл $O(f)$ у розумінні слабкої $*$ топології простору X^* точки f у B^* такий, що для всіх $f' \in O(f)$ справджується нерівність

$$\Psi^s_{f'}\Big(K_{(g^*,0)} + \lambda_f K_{(g,h)}\Big) < \alpha_a^{g^*}. \tag{21}$$

Внаслідок опуклості функції $\Psi^s_{f'}\big(K_{(q,p)}\big)$ по $K_{(q,p)}$ на $K_{(C(S,K_0(X)))^2}$ (див. твердження 3), нерівності (21) та співвідношення $\Psi^s_{f'}\Big(K_{(g^*,0)}\Big) = \left|\max\limits_{x\in g^*(s)} \operatorname{Re} f'(x) - \max\limits_{y\in a(s)} \operatorname{Re} f'(y)\right| \le \alpha_a^{g^*}$ для всіх $\alpha \in (0,1]$ отримаємо співвідношення

$$\Psi^s_{f'}\Big((1-\alpha)K_{(g^*,0)} + \alpha\Big(K_{(g^*,0)} + \lambda_f K_{(g,h)}\Big)\Big) = \Psi^s_{f'}\Big(K_{(g^*,0)} + \alpha\lambda_f K_{(g,h)}\Big) \le$$
$$\le (1-\alpha)\Psi^s_{f'}\Big(K_{(g^*,0)}\Big) + \alpha\Psi^s_{f'}\Big(K_{(g^*,0)} + \lambda_f K_{(g,h)}\Big) <$$
$$< (1-\alpha)\alpha_a^{g^*} + \alpha\alpha_a^{g^*} = \alpha_a^{g^*}.$$

Звідси випливає, що

$$\Psi^s_{f'}\Big(K_{(g^*,0)} + tK_{(g,h)}\Big) < \alpha_a^{g^*} \tag{22}$$

для всіх $t \in \big(0, \lambda_f\big]$. Оскільки B^* є слабко $*$ компактною множиною (див., наприклад, [8, с. 35]) і $\bigcup_{f\in B^*} \mathrm{O}(f) = B^*$, то з покриття $\mathrm{O}(f)$ множини B^* можна виділити скінченне підпокриття $\mathrm{O}(f_i)$, $i = \overline{1, k}$, тобто $\bigcup_{i=1}^k \mathrm{O}(f_i) = B^*$. Покладемо $\bar\lambda = \min\limits_{1\le i\le k} \lambda_{f_i}$. Тоді з (22) випливає, що $\Psi^s_f\Big(K_{(g^*,0)} + tK_{(g,h)}\Big) < \alpha_a^{g^*}$ для всіх $f \in B^*$ та $t \in \big(0, \bar\lambda\big]$. Внаслідок неперервності у розумінні слабкої $*$ топології B^* по f на B^* функції $\Psi^s_f\Big(K_{(g^*,0)} + \bar\lambda K_{(g,h)}\Big)$ та слабкої $*$ компактності B^* звідси отримуємо $\max_{f\in B^*} \Psi^s_f\Big(K_{(g^*,0)} + \bar\lambda K_{(g,h)}\Big) < \alpha_a^{g^*}$. Враховуючи цю нерівність та співвідношення (16), робимо висновок, що $K_{(g^*,0)} + \bar\lambda K_{(g,h)} \in C_a^{g^*}(s)$. Оскільки $C_a^{g^*}(s)$ є опуклою множиною простору $K_{(C(S,K_0(X)))^2}$ та $K_{(g^*,0)} \in C_a^{g^*}(s)$, то звідси згідно з теоремою 1.3.4 [7, с. 19], випливає, що $K_{(g,h)} \in \Gamma\Big(C_a^{g^*}(s), K_{(g^*,0)}\Big)$. Тому з урахуванням співвідношення (19) можна зробити висновок, що для $s \in S_a^{g^*}$ має місце рівність

$$\Gamma\Big(C_a^{g^*}(s), K_{(g^*,0)}\Big) = \bigcap_{f\in B_a^{g^*}(s)} \Gamma\Big(C_a^{g^*}(f,s), K_{(g^*,0)}\Big). \tag{23}$$

Згідно з (15), (17) для $s \in S_a^{g^*}$, $f \in B_a^{g^*}(s)$ маємо

$$C_a^{g^*}(s,f) = \left|\max_{x\in g(s)} \operatorname{Re} f(x) - \max_{y\in a(s)} \operatorname{Re} f(y) - \max_{y\in -h(s)} \operatorname{Re} f(y)\right| < \alpha_a^{g^*}\Big\}. \tag{24}$$

З рівності (24) випливає, що для $s \in S_a^{g^*}$, $f \in B_a^{g^*}(s)$

$$C_a^{g^*}(s,\ f) \;=\; A_a^{g^*}(s,\ f) \cap B_a^{g^*}(s,\ f), \tag{25}$$

де

$$A_a^{g^*}(s,\ f) \;=\; \Big\{K_{(g,h)} \in K_{(C(S,K_0(X)))^2} :\ \max_{x\in g(s)} \operatorname{Re} f(x) \;-\; \max_{y\in a(s)} \operatorname{Re} f(y) \;-$$

$$-\; \max_{y\in -h(s)} \operatorname{Re} f(y) \;<\; \alpha_a^{g^*}\Big\},$$

$$B_a^{g^*}(s,\ f) \;=\; \Big\{K_{(g,h)} \in K_{(C(S,K_0(X)))^2} :\ \max_{x\in g(s)} \operatorname{Re} f(x) \;-\; \max_{y\in a(s)} \operatorname{Re} f(y) \;-$$

$$-\; \max_{y\in -h(s)} \operatorname{Re} f(y) \;>\; -\alpha_a^{g^*}\Big\}.$$

Розглянемо випадок , коли для $s \in S_a^{g^*}$, $f \in B_a^{g^*}(s)$

$$\alpha_a^{g^*} \;=\; \left|\max_{x\in g^*(s)} \operatorname{Re} f(x) - \max_{y\in a(s)} \operatorname{Re} f(y)\right| \;=\; \max_{x\in g^*(s)} \operatorname{Re} f(x) - \max_{y\in a(s)} \operatorname{Re} f(y).$$

Тоді

$$A_a^{g^*}(s,\ f) \;=\; \Big\{K_{(g,h)} \in K_{(C(S,K_0(X)))^2} :\ \max_{x\in g(s)} \operatorname{Re} f(x) \;-\; \max_{y\in -h(s)} \operatorname{Re} f(y) \;<$$

$$<\; \max_{x\in g^*(s)} \operatorname{Re} f(x)\Big\},$$

$$B_a^{g^*}(s,\ f) \;=\; \Big\{K_{(g,h)} \in K_{(C(S,K_0(X)))^2} :\ \max_{x\in g(s)} \operatorname{Re} f(x) \;-\; \max_{y\in -h(s)} \operatorname{Re} f(y) \;>$$

$$>\; -\alpha_a^{g^*} \;+\; \max_{y\in a(s)} \operatorname{Re} f(y)\Big\}.$$

Позначимо $\ell_s^f\big(K_{(g,h)}\big) = \max_{x\in g(s)} \operatorname{Re} f(x) - \max_{y\in -h(s)} \operatorname{Re} f(y)$, $K_{(g,h)} \in K_{(C(S,K_0(X)))^2}$.

Згідно з твердженням 4 ℓ_s^f є лінійним неперервним функціоналом на $K_{(C(S,K_0(X)))^2}$. Маємо

$$A_a^{g^*}(s, f) \;=\; \Big\{K_{(g,h)} \in K_{(C(S,K_0(X)))^2} : \ell_s^f\big(K_{(g,h)}\big) < \ell_s^f\big(K_{(g^*,0)}\big)\Big\},$$

$$B_a^{g^*}(s, f) \;=\; \Big\{K_{(g,h)} \in K_{(C(S,K_0(X)))^2} :\ \ell_s^f\big(K_{(g,h)}\big) > -\alpha_a^{g^*} \;+\; \max_{y\in a(s)} \operatorname{Re} f(y)\Big\}.$$

Оскільки

$$\ell_s^f\big(K_{(g^*,0)}\big) \;=\; \max_{x\in g^*(s)} \operatorname{Re} f(x) \;=\; \max_{x\in g^*(s)} \operatorname{Re} f(x) \;-\; \max_{y\in a(s)} \operatorname{Re} f(y) \;+$$

$$+\; \max_{y\in a(s)} \operatorname{Re} f(y) \;=\; \alpha_a^{g^*} \;+\; \max_{y\in a(s)} \operatorname{Re} f(y) \;>\; -\alpha_a^{g^*} \;+\; \max_{y\in a(s)} \operatorname{Re} f(y),$$

то згідно з твердженням 1.3.7 [7, с. 21]

$$\Gamma\Big(A_a^{g^*}(s, f),\ K_{(g^*,0)}\Big) \;=\; \Big\{K_{(g,h)} \in K_{(C(S,K_0(X)))^2} : \ell_s^f\big(K_{(g,h)}\big) < 0\Big\} \;=$$

$$= \left\{K_{(g,h)} \in K_{(C(S,K_0(X)))^2} : \max_{x\in g(s)} \operatorname{Re} f(x) - \max_{y\in -h(s)} \operatorname{Re} f(y) < 0\right\},$$

$$\Gamma\left(B_a^{g^*}(s,f),\ K_{(g^*,0)}\right) = K_{(C(S,K_0(X)))^2}.$$

Звідси з урахуванням твердження 1.2.2 [7, с. 14] та рівності (25) одержуємо

$$\Gamma\left(C_a^{g^*}(s,f),\ K_{(g^*,0)}\right) = \Gamma\left(A_a^{g^*}(s,f),\ K_{(g^*,0)}\right) \bigcap \Gamma\left(B_a^{g^*}(s,f),\ K_{(g^*,0)}\right) =$$

$$= \left\{K_{(g,h)} \in K_{(C(S,K_0(X)))^2} : \ell_s^f\left(K_{(g,h)}\right) < 0\right\} =$$

$$= \left\{K_{K_{(g,h)}} \in K_{(C(S,K_0(X)))^2} : \max_{x\in g(s)} \operatorname{Re} f(x) - \max_{y\in -h(s)} \operatorname{Re} f(y) < 0\right\} =$$

$$= \left\{K_{K_{(g,h)}} \in K_{(C(S,K_0(X)))^2} : \operatorname{sign}\left(\max_{x\in g^*(s)} \operatorname{Re} f(x) - \max_{y\in a(s)} \operatorname{Re} f(y)\right) \times\right.$$

$$\left. \times \left(\max_{x\in g(s)} \operatorname{Re} f(x) - \max_{y\in -h(s)} \operatorname{Re} f(y)\right) < 0\right\}. \tag{26}$$

Аналогічно доводиться, що рівність (26) має місце і у випадку, коли для $s \in S_a^{g^*}$, $f \in B_a^{g^*}(s)$ $\alpha_a^{g^*} = \left|\max_{x\in g^*(s)} \operatorname{Re} f(x) - \max_{y\in a(s)} \operatorname{Re} f(y)\right| = \max_{y\in a(s)} \operatorname{Re} f(y) - - \max_{x\in g^*(s)} \operatorname{Re} f(x)$.

Отже, рівність (26) має місце для будь-яких $s \in S_a^{g^*}$, $f \in B_a^{g^*}(s)$.

З рівностей (14), (23), (26) робимо висновок про справедливість рівності (7).

Теорему доведено.

Теорема 2. *Нехай* V — *довільна множина простору* $C(S,\ K_0(X))$. *Для того щоб елемент* $g^* \in V$ *був екстремальним для величини* (4), *необхідно, щоб не існувало такого елемента* $K_{(g,h)} \in \Gamma^*\left(K_V,\ K_{(g^*,0)}\right)$, *що для всіх* $s \in S_a^{g^*}$, $f \in {}_a^{g^*}(s)$ *справджується нерівність*

$$\operatorname{sign}\left(\max_{x\in g^*(s)} \operatorname{Re} f(x) - \max_{y\in a(s)} \operatorname{Re} f(y)\right)\left(\max_{x\in g(s)} \operatorname{Re} f(x) - \max_{y\in -h(s)} \operatorname{Re} f(y)\right) < 0.$$

Доведення. Нехай g^* — екстремальний елемент для величини (4). Тоді $K_{g^*,0}$ є екстремальним елементом для величини (5). Згідно з теоремою 1.4.1 [7, с. 22] має місце співвідношення $\Gamma\left(C_a^{g^*},\ K_{g^*,0}\right) \bigcap \Gamma^*\left(K_V, K_{g^*,0}\right) = \varnothing$.

Звідси, враховуючи (7), робимо висновок, що не існує $K_{(g,h)} \in \Gamma^*\left(K_V,\right.$ $\left.K_{(g^*,0)}\right)$, для якого

$$\operatorname{sign}\left(\max_{x\in g^*(s)} \operatorname{Re} f(x) - \max_{y\in a(s)} \operatorname{Re} f(y)\right)\left(\max_{x\in g(s)} \operatorname{Re} f(x) - \max_{y\in -h(s)} \operatorname{Re} f(y)\right) < 0$$

для всіх $s \in S_a^{g^*}$, $f \in B_a^{g^*}(s)$.

Теорему доведено.

Теорема 3. *Нехай V — довільна множина простору $C(S, K_0(X))$. Якщо $g^* \in V$ є екстремальним елементом для величини* (4), *то для будь-якого $K_{(g,h)} \in \Gamma^*\left(K_V, K_{(g^*,0)}\right)$ існують елементи $s \in S_a^{g^*}$, $f \in B_a^{g^*}(s)$ такі, що*

$$\left|\max_{x \in g^*(s)} \operatorname{Re} f(x) - \max_{y \in a(s)} \operatorname{Re} f(y)\right| = H\left(g^*(s), a(s)\right) = \rho(g^*, a),$$

$$\operatorname{sign}\left(\max_{x \in g^*(s)} \operatorname{Re} f(x) - \max_{y \in a(s)} \operatorname{Re} f(y)\right)\left(\max_{x \in g(s)} \operatorname{Re} f(x) - \max_{y \in -h(s)} \operatorname{Re} f(y)\right) \geq 0.$$

Теорема 4. *Нехай V — довільна множина простору $C(S, K_0(X))$, $g^* \in V$. Якщо для кожного $g \in V$ існують елементи $s_g \in S$, $f_g \in B^*$, такі, що мають місце співвідношення*

$$\left|\max_{x \in g^*(s_g)} \operatorname{Re} f_g(x) - \max_{y \in a(s_g)} \operatorname{Re} f_g(y)\right| = H\left(g^*(s_g), a(s_g)\right) = \rho(g^*, a), \tag{27}$$

$$\operatorname{sign}\left(\max_{x \in g^*(s_g)} \operatorname{Re} f_g(x) - \max_{y \in a(s_g)} \operatorname{Re} f(y)\right) \times$$

$$\times \left(\max_{x \in g(s_g)} \operatorname{Re} f_g(x) - \max_{y \in -h(s_g)} \operatorname{Re} f_g(y)\right) \geq 0, \tag{28}$$

то g^* є екстремальним елементом для величини (4).

Доведення. Нехай g — довільний елемент множини V. Згідно з умовою теореми існують елементи $s_g \in S$, $f_g \in B^*$, такі, для яких мають місце співвідношення (27), (28). Тоді

$$0 \leq \operatorname{sign}\left(\max_{x \in g^*(s_g)} \operatorname{Re} f_g(x) - \max_{y \in a(s_g)} \operatorname{Re} f_g(y)\right) \times$$

$$\times \left(\max_{x \in g(s_g)} \operatorname{Re} f_g(x) - \max_{y \in g^*(s_g)} \operatorname{Re} f_g(y)\right) =$$

$$= \operatorname{sign}\left(\max_{x \in g^*(s_g)} \operatorname{Re} f_g(x) - \max_{y \in a(s_g)} \operatorname{Re} f_g(y)\right) \times$$

$$\times \left(\max_{x \in g(s_g)} \operatorname{Re} f_g(x) - \max_{y \in a(s_g)} \operatorname{Re} f_g(y) - \left(\max_{y \in g^*(s_g)} \operatorname{Re} f_g(y) - \max_{y \in a(s_g)} \operatorname{Re} f_g(y)\right)\right) =$$

$$= \operatorname{sign}\left(\max_{x \in g^*(s_g)} \operatorname{Re} f_g(x) - \max_{y \in a(s_g)} \operatorname{Re} f_g(y)\right) \times$$

$$\times \left(\max_{x \in g(s_g)} \operatorname{Re} f_g(x) - \max_{y \in a(s_g)} \operatorname{Re} f_g(y)\right) - \rho(g^*, a) \leq$$

$$\leq \left| \max_{x\in g(s_g)} \operatorname{Re} f_g(x) - \max_{y\in a(s_g)} \operatorname{Re} f_g(y) \right| - \rho(g^*, a) \leq$$

$$\leq \max_{f\in B^*} \left| \max_{x\in g(s_g)} \operatorname{Re} f(x) - \max_{y\in a(s_g)} \operatorname{Re} f(y) \right| - \rho(g^*, a) =$$

$$= H\big(g(s_g), a(s_g)\big) - \rho(g^*, a) \leq \max_{s\in S} H\big(g(s), a(s)\big) - \rho(g^*, a) =$$

$$= \rho(g, a) - \rho(g^*, a).$$

Звідси $\rho(g, a) \geq \rho(g^*, a)$ для всіх $g \in V$. Це й означає, що g^* є екстремальним елементом для величини (4).

Теорему доведено.

Означення 1 [1, с. 1616]**.** *Множину* M *нормованого простору* Y *будемо називати* Γ^* — *множиною відносно точки* $y_0 \in M$, *якщо* $y - y_0 \in \Gamma^*(M, y_0)$ *для всіх* $y \in M$.

Означення 2. *Множину* $V \subset C\big(S, K_0(X)\big)$ *будемо називати* Γ^* — *множиною відносно* $g^* \in V$, *якщо множина* K_V *є* Γ^* — *множиною простору* $K_{(C(S,K_0(X)))^2}$ *відносно* $K_{(g^*,0)}$, *тобто якщо* $K_{(g,0)} - K_{(g^*,0)} = K_{(g,-g^*)} \in \Gamma^*\big(K_V, K_{(g^*,0)}\big)$ *для всіх* $g \in V$.

Твердження 5. *Зіркова відносно* $g^* \in V$ *множина* $V \subset C\big(S, K_0(X)\big)$ *є* Γ^* — *множиною відносно* g^*.

Твердження 6. *Будь-яка опукла множина* $V \subset C\big(S, K_0(X)\big)$ *є* Γ^* — *множиною відносно будь-якого* $g^* \in V$.

Прикладом опуклої множини $V \subset C\big(S, K_0(X)\big)$, елементи якої мають просту структуру, є множина сталих відображень з компактними опуклими образами, тобто таких відображень $g \in C\big(S, K(X)\big)$, що $g(s) = K_g \in K_0(X)$ для всіх $s \in S$.

З урахуванням цього та твердження 6 робимо висновок, що множина всіх сталих відображень з компактними опуклими образами є Γ^* — множиною відносно будь-якого $g^* \in V$.

Твердження 7. *Якщо множина* $V \subset C(S, X)$, *і є* Γ^* — *множиною простору* $C(S, X)$ *відносно* $g^* \in V$ *у розумінні означення* 1, *то вона є* Γ^* — *множиною цього простору відносно* g^* *у розумінні означення* 2.

Теорема 5. *Нехай* $V \subset C\big(S, K_0(X)\big)$, $g^* \in V$ *і* V *є* Γ^* — *множиною відносно точки* g^* (*в тому числі зірковою відносно* g^* *або опуклою множиною*). *Для того щоб елемент* g^* *був екстремальним елементом для величини* (4), *необхідно і достатньо, щоб для кожного* $g \in V$ *існували елементи* $s_g \in S$, $f_g \in B^*$, *для яких виконуються умови* (27), (28).

Доведення. *Необхідність.* Нехай $g^* \in V$ є екстремальним елементом для величини (4) . Оскільки V є Γ^* — множиною відносно g^* (в тому числі зірковою відносно g^* або опуклою множиною), то $K_{(g,-g^*)} \in \Gamma^*\left(K_V, K_{(g^*,0)}\right)$. Тоді згідно з теоремою 3 для будь-якого існують елементи $s_g \in S$, $f_g \in B^*$, такі, для яких виконуються умови (27), (28).

Достатність умов теореми для екстремальності g^* встановлено у теоремі 4.

Наслідок **1.** *Нехай* v — *підпростір* $C(S, K(X))$. *Для того щоб елемент* $g^* \in V$ *був екстремальним елементом для величини* (4), *необхідно*, *щоб для кожного* $g \in V$ *існували елементи* $s_g \in S$, $f_g \in B^*$, *такі*, *що*

$$\left| \max_{x \in g^*(s_g)} \operatorname{Re} f_g(x) - \max_{y \in a(s_g)} \operatorname{Re} f_g(y) \right| = H\left(g^*(s_g), a(s_g)\right) = \rho(g^*, a), \quad (29)$$

$$\operatorname{sign}\left(\max_{x \in g^*(s_g)} \operatorname{Re} f_g(x) - \max_{y \in a(s_g)} \operatorname{Re} f_g(y) \right) \max_{x \in g(s_g)} \operatorname{Re} f_g(x) \geq 0. \quad (30)$$

Доведення. Нехай V — підпростір $C(S, K(X))$, $g^* \in V$ є екстремальним елементом для величини (4), $g \in V$. Оскільки $g + g^* \in V$ та V є опуклою множиною, то згідно з теоремою 5 існують елементи $s_g \in S$, $f_g \in B^*$ такі, що виконується умова (27) і

$$\operatorname{sign}\left(\max_{x \in g^*(s_g)} \operatorname{Re} f_g(x) - \max_{y \in a(s_g)} \operatorname{Re} f_g(y) \right) =$$

$$= \left(\max_{x \in \left(g(s_g) + g^*(s_g)\right)} \operatorname{Re} f_g(x) - \max_{y \in g^*(s_g)} \operatorname{Re} f_g(y) \right) \geq 0. \quad (31)$$

З (31) випливає (30), якщо врахувати, що

$$\max_{x \in \left(g(s_g) + g^*(s_g)\right)} \operatorname{Re} f_g(x) = \max_{x \in g(s_g)} \operatorname{Re} f_g(x) + \max_{x \in g^*(s_g)} \operatorname{Re} f_g(x).$$

Наслідок доведено.

Наслідок **2.** *Нехай* V — *підпростір* $C(S, K(X))$. *Для того щоб елемент* $g^* \in V$ *був екстремальним елементом для величини* (4), *необхідно і достатньо*, *щоб для будь-якого* $g \in V$ *існували елементи* $s_g \in S$, $f_g \in B^*$ *такі*, *що мають місце рівності* (27), (28).

Наслідок **3.** *Нехай* V — *є множиною сталих відображень із* $C(S, K(X))$. *Для того щоб* $g^* \in V$ *елемент був екстремальним елементом для величини* (4), *необхідно і достатньо*, *щоб для будь-якого* $g \in V$ *існували елементи* $s_g \in S$, $f_g \in B^*$ *такі*, *що мають місце рівності* (27), (28).

Зауважимо, що в частковому випадку, коли s є компактом простору R^m, а $X = R^l$ цей наслідок встановлено у праці [5].

Наслідок **4** [1, с. 1616]. *Нехай* $V \subset C(S, X)$, $g^* \in V$ V *і є* Γ^* — *множи-*

ною відносно точки g^* *у розумінні означення* 1 (*в тому числі зірковою відносно* g^* *або опуклою множиною*).

Для того щоб елемент g^* був екстремальним елементом для величини (4) в цьому випадку, необхідно і достатньо, щоб для кожного $g \in V$ існували елементи $s_g \in S$, $y_g \in a(s_g)$, $f_g \in B^*$, такі, що $f_g\left(g^*(s_g) - y_g\right) = \max_{s \in S} \max_{y \in a(s)} \left\| g^*(s) - y \right\| = \rho(g^*, a)$, $\operatorname{Re} f_g\left(g(s_g) - g^*(s_g)\right) \geq 0$

1. *Гудима У. В.* Найкраща рівномірна апроксимація неперервного компактнозначного відображення множинами неперервних однозначних відображень // Укр. мат. журн. – 2005. – **57**, № 12. – С.1601 – 1619.
2. *Гнатюк Ю. В., Гудима У. В.* Критерії екстремального елемента та його єдиності для задачі найкращої рівномірної апроксимації неперервного компактнозначного відображення множинами однозначних відображень – Доп. НАН України, 2005.– № 6. – С.19 – 23.
3. *Гнатюк В. О. Гнатюк Ю. В., Гудима У. В.* Модифікація методу Ремеза на випадок апроксимації компактнозначного відображення // Вісник Київ. нац. ун-ту. Сер. фіз.-мат. науки. – 2005. – № 3. – С.239 – 244.
4. *Никольский М. С.* Аппроксимация выпуклозначных непрерывных многозначных отображений // Докл. АН СССР. – 1989. – **308**, № 5. – С.1047 – 1050.
5. *Никольский М. С.* Об аппроксимации непрерывного многозначного отображения постоянными многозначными отображениями // Вестн. Моск. ун-та. Сер. Вычислит. математика и кибернетика. – 1990. – № 1. – С.76 – 80.
6. *Выгодчикова И. Ю.* О наилучшем приближении непрерывного многозначного отображения алгебраическим полиномом // Математика. Механика: Сб. науч. тр. – 2000. – № 2. – С.13 – 15.
7. *Лоран П.-Ж.* Аппроксимация и оптимизация. – М.: Мир, 1975. – 496 с.
8. Гольштейн Е. Г. Теория двойственности в математическом программировании и ее приложения. – М.: Наука, 1971. – 352 с.

Одержано 13.05.10,
після доопрацювання — 05.09.10