У.В.Гудима, Ю.В. Гнатюк, В.О. Гнатюк (Кам'янець-Поділ. нац. ун-т імені Івана Огієнка)

Найкраща рівномірна апроксимація неперервного компактнозначного відображення скінченновимірним підпростором неперервних однозначних відображень з додатковим обмеженням, що задається системою замкнутих куль

Нехай S - метричний компакт, X - лінійний над полем комплексних чисел нормований сепарабельний простір, X^*- простір, спряжений з X, B^* - одинична куля простору X^*, $E\left(B^*\right)$ - множина крайніх точок B^*, $C\left(S,X\right)$ - лінійний над полем дійсних чисел нормований простір однозначних відображень компакту S в X, неперервних на S, $K\left(X\right)$ - сукупність непорожніх компактів простору X, $C\left(S,K\left(X\right)\right)$- множина багатозначних відображень a компакту S в X таких, що для кожного $s\in S$ $a\left(s\right)\in K\left(X\right)$ і вони неперервні на S відносно метрики Хаусдорфа на $K\left(X\right)$, V- лінійний підпростір простору $C\left(S,X\right)$, породжений лінійно незалежними відображеннями $g_i\in C\left(S,X\right)$, $i=\overline{1,n}$, $u\in C\left(S,X\right)$, $r\in C\left(S,R\right)$,$r\left(s\right)>0$, $b\left(s\right)=\left\{x:\ x\in X,\ \left\|x-u\left(s\right)\right\|\leq r\left(s\right)\right\}$, $s\in S$,

$$D=\left\{g:\ g\in C\left(S,X\right),\ \ g\left(s\right)\in b\ \left(s\right),\ \ s\in S\right\}.$$

Припускається, що існує елемент $g_0\in\ V$, для якого $\left\|g_0\left(s\right)-u\left(s\right)\right\|<r\left(s\right)$, $s\in\ S$.

Розглядається задача відшукання величини

$$\alpha_a^*\left(V\cap D\right)=\inf_{g\in V\cap D}\max_{s\in S}\max_{y\in a(s)}\left\|g\left(s\right)-y\right\|. \qquad (1)$$

Відображення $g^*\in V\cap D$ таке, що $\alpha_a^*\left(V\cap D\right)=\max\limits_{s\in S}\max\limits_{y\in a(s)}\left\|g^*\left(s\right)-y\right\|$, називається екстремальним елементом для величини (1).

Припускається, що $\alpha_a^*(D)<\alpha_a^*\left(V\cap D\right)$, де $\alpha_a^*(D)=\inf\limits_{g\in D}\max\limits_{s\in S}\max\limits_{y\in a(s)}\left\|g\left(s\right)-y\right\|$.

Теорема . Для того щоб елемент $g^*\in V\cap D$ був екстремальним елементом для величини (1), необхідно і достатньо, щоб знайшлись точки $s_j\in S$, $y_j\in a(s_j)$, $f_j\in E(B^*)$, $j=\overline{1,k_1}$, $k_1\geq 1$, для яких $f_j(g^*(s_j)-y_j)=\max\limits_{s\in S}\max\limits_{y\in a(s)}\left\|g^*(s)-y\right\|$, $j=\overline{1,k_1}$, точки $s_j'\in S$, $f_j'\in E(B^*)$, $j=\overline{1,k_2}$, $k_2\geq 0$, $k_1+k_2\leq n+1$, для яких $f_j'(g^*(s_j')-u(s_j'))=r(s_j')$, $j=\overline{1,k_2}$, додатні числа ρ_j, $j=\overline{1,k_1}$, $\sum\limits_{j=1}^{k_1}\rho_j=1$, β_j, $j=\overline{1,k_2}$, такі, що

$$\sum_{j=1}^{k_1}\rho_jRef_j(g(s_j))+\sum_{j=1}^{k_2}\beta_jRef_j'(g(s_j'))=0, g\in V.$$

У випадку, коли виконується умова (H): для будь-яких $s_j'\in S$, $f_j'\in E(B^*)$, таких, що лінійні неперервні на $C\left(S,X\right)$ функціонали $\varphi_{(s_j,f_j)}\left(g\right)=Ref_j\left(g\left(s_j\right)\right)$, $j=\overline{1,n}$, $g\in C\left(S,X\right)$, є лінійно незалежними, визначник $\det\left[\varphi_{(s_j,f_j)}\left(g_i\right)\right]\neq 0$, то за умов теореми існує єдиний екстремальний елемент і $k_1+k_2=n+1$.