Ю.В. Гнатюк, У.В.Гудима, В.О. Гнатюк (Кам'янець-Поділ. нац. ун-т імені Івана Огієнка)

Модифікація методу січних площин на випадок апроксимації неперервного компактнозначного відображення скінченновимірним підпростором однозначних неперервних відображень з додатковим обмеженням,що задається системою замкнутих куль

Нехай S - метричний компакт, X - лінійний над полем комплексних чисел нормований сепарабельний простір, X^*- простір, спряжений з X, B^* - одинична куля простору X^*, $C\left(S,X\right)$ - лінійний над полем дійсних чисел нормований простір однозначних відображень компакту S в X, неперервних на S, $K\left(X\right)$ - сукупність непорожніх компактів простору X, $C\left(S,K\left(X\right)\right)$- множина багатозначних відображень a компакту S в X таких, що для кожного $s\in S$ $a\left(s\right)\in K\left(X\right)$ і вони неперервні на S відносно метрики Хаусдорфа на $K\left(X\right)$, V- лінійний підпростір простору $C\left(S,X\right)$, породжений лінійно незалежними відображеннями $g_i\in C\left(S,X\right)$, $i=\overline{1,n}$, $u\in C\left(S,X\right)$, $r\in C\left(S,R\right)$,$r\left(s\right)>0$, $b\left(s\right)=\left\{x:\ x\in X,\ \left\|x-u\left(s\right)\right\|\le r\left(s\right)\right\}$, $s\in S$,

$$D=\left\{g:\ g\in C\left(S,X\right),\ \ g\left(s\right)\in b\ \left(s\right),\ \ s\in S\right\}.$$

Припускається, що існує елемент $g_0\in\ V$, для якого $\left\|g_0\left(s\right)-u\left(s\right)\right\|<r\left(s\right)$, $s\in\ S$.

Розглядається задача відшукання величини

$$\alpha_a^*\left(V\cap D\right)=\inf_{g\in V\cap D}\max_{s\in S}\max_{y\in a(s)}\left\|g\left(s\right)-y\right\|. \tag{1}$$

Відображення $g^*\in V\cap D$ таке, що $\alpha_a^*\left(V\cap D\right)=\max\limits_{s\in S}\max\limits_{y\in a(s)}\left\|g^*\left(s\right)-y\right\|$, називається екстремальним елементом для величини (1).

Припускається, що $\alpha_a^*(D)<\alpha_a^*\left(V\cap D\right)$, де $\alpha_a^*(D)=\inf\limits_{g\in D}\max\limits_{s\in S}\max\limits_{y\in a(s)}\left\|g\left(s\right)-y\right\|$.

На попередньому кроці методу вибираємо точки $s_j\in S$, $y_j\in a\left(s_j\right)$, функціонали $f_j\in B^*$, $j=\overline{1,m_1}$, такі, що

$$\min\left\{\max_{1\le j\le m_1}\mathrm{Re}f_j\left(\sum_{i=1}^n\alpha_i g_i\left(s_j\right)\right):\ \alpha=\left(\alpha_1,...,\alpha_n\right)\in S_{R^n}\right\}>0,$$

де $S_{R^n}=\left\{\ \alpha=\left(\alpha_1,...,\alpha_n\right):\ \left\|\alpha\right\|=1\right\}$.

Нехай на q -му кроці ($q\ge 1$) методу знайдено оптимальний розв'язок такої задачі лінійного програмування:

$$\min\theta, \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathrm{Re}\left(-f_j\left(g_i\left(s_j\right)\right)\right) + \theta \geq \mathrm{Re}\left(-f_j\left(y_j\right)\right), j = \overline{1, m_q} \tag{3}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathrm{Re}\left(-\varphi_j\left(g_i\left(t_j\right)\right)\right) \geq \mathrm{Re}\left(-\varphi_j\left(u\left(t_j\right)\right)\right) - r\left(t_j\right), j = \overline{1, p_q}, \tag{4}$$

де $s_j \in S$, $y_j \in a\left(s_j\right)$, $f_j \in B^*$, $j = \overline{1, m_q}$, $t_j \in S$, $\varphi_j \in B^*$, $j = \overline{1, p_q}$; $m_q \geq 1$, $m_q + p_q = q$.

Для вектора $g^q = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i^q g_i$ знаходимо

$$\varepsilon^q = \max\left\{\max_{s \in S} \max_{y \in a(s)} \left\|g^q\left(s\right) - y\right\| - \theta^q, \max_{t \in S}\left(\left\|g^q\left(t\right) - u\left(t\right)\right\| - r\left(t\right)\right)\right\}.$$

Доводиться, що $\varepsilon^q \geq 0$. У випадку , коли $\varepsilon^q = 0$, елемент g^q є екстремальним для величини (1) і $\theta^q = \alpha_a^*\left(V \cap D\right)$.

Якщо ж $\varepsilon^q > 0$, то у випадку , коли, наприклад, $\varepsilon^q = \max\limits_{s \in S} \max\limits_{y \in a(s)} \left\|g^q\left(s\right) - y\right\| - \theta^q$, знаходимо $s_{m_q+1} \in S, y_{m_q+1} \in a\left(s_{m_q+1}\right)$, $f_{m_q+1} \in B^*$ такі, що $\max\limits_{s \in S} \max\limits_{y \in a(s)} \left\|g^q\left(s\right) - y\right\| = f_{m_q+1}\left(g^q\left(s_{m_q+1}\right) - y_{m_q+1}\right)$, та приєднуємо до обмежень (3) задачі (2)-(4) обмеження

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathrm{Re}\left(-f_{m_q+1}\left(g_i\left(s_{m_q+1}\right)\right)\right) + \theta \geq \mathrm{Re}\left(-f_{m_q+1}\left(y_{m_q+1}\right)\right).$$

Знаходимо оптимальний розв'язок новоутвореної задачі $\left(\alpha^{q+1}; \theta^{q+1}\right) = \left(\alpha_1^{q+1}, ..., \alpha_n^{q+1}; \theta^{q+1}\right)$ і т.д.

Теорема. Послідовність $\left\{\theta^q\right\}_{q=1}^{\infty}$ є неспадною. Будь-яка часткова границя g^* послідовності $\left\{g^q\right\}_{q=1}^{\infty}$ є екстремальним елементом для величини (1). Мають місце рівності

$$\lim_{q \to \infty} \theta^q = \alpha_a^*\left(V \cap D\right) = \lim_{q \to \infty} \max_{s \in S} \max_{y \in a(s)} \left\|g^q\left(s\right) - y\right\|, \lim_{q \to \infty} \varepsilon^q = 0.$$