В.О. Гнатюк , Ю.В. Гнатюк,У.В.Гудима (Кам'янець-Поділ. нац. ун-т імені Івана Огієнка)

Модифікація методу Ремеза для апроксимації неперервного компактнозначного відображення скінченновимірним чебишовським підпростором однозначних неперервних відображень з додатковим обмеженням,що задається системою замкнутих куль

Нехай S -метричний компакт, X - лінійний над полем комплексних чисел нормований сепарабельний простір, X^*- простір, спряжений з X, B^* - одинична куля простору X^*, $E\left(B^*\right)$ - множина крайніх точок B^*, $C\left(S,X\right)$ - лінійний над полем дійсних чисел нормований простір однозначних відображень компакту S в X, неперервних на S, $K\left(X\right)$ - сукупність непорожніх компактів простору X, $C\left(S,K\left(X\right)\right)$-множина багатозначних відображень a компакту S в X таких, що для кожного $s\in S$ $a\left(s\right)\in K\left(X\right)$ і вони неперервні на S відносно метрики Хаусдорфа на $K\left(X\right)$, V-чебишовський підпростір простору $C\left(S,X\right)$, породжений лінійно незалежними відображеннями $g_i\in C\left(S,X\right)$, $i=\overline{1,n}$, $u\in C\left(S,X\right)$, $r\in C\left(S,R\right)$,$r\left(s\right)>0$, $b\left(s\right)=\left\{x:\ x\in X,\ \left\|x-u\left(s\right)\right\|\le r\left(s\right)\right\}$, $s\in S$, $D=\left\{g:\ g\in C\left(S,X\right),\ \ g\left(s\right)\in b\left(s\right),\ \ s\in S\right\}$. Припускається, що існує елемент $g_0\in\ V$ для якого $\left\|g_0\left(s\right)-u\left(s\right)\right\|<r\left(s\right)$, $s\in\ S$. Розглядається задача відшукання величини

$$\alpha_a^*\left(V\cap D\right)=\inf_{g\in V\cap D}\max_{s\in S}\max_{y\in a(s)}\left\|g\left(s\right)-y\right\|. \tag{1}$$

Відображення $g^*\in V\cap D$ таке, що $\alpha_a^*\left(V\cap D\right)=\max\limits_{s\in S}\max\limits_{y\in a(s)}\left\|g^*\left(s\right)-y\right\|$, називається екстремальним елементом для величини (1).

Припускається, що $\alpha_a^*(D)<\alpha_a^*\left(V\cap D\right)$, де $\alpha_a^*(D)=\inf\limits_{g\in D}\max\limits_{s\in S}\max\limits_{y\in a(s)}\left\|g\left(s\right)-y\right\|$.

На q-му кроці запропонованого методу ($q\ge 1$) знаходимо розв'язок $\left(\alpha^q;\theta^q\right)=\left(\alpha_1^q,...,\alpha_n^q,\theta^q\right)$ системи лінійних рівнянь

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i Re\left(-f_j^q\left(g_i\left(s_j^q\right)\right)\right)+\theta=Re\left(-f_j^q\left(y_j^q\right)\right),j=\overline{1,k_1^q}, \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i Re\left(-\varphi_j^q\left(g_i\left(t_j^q\right)\right)\right)=Re\left(-\varphi_j^q\left(u\left(t_j^q\right)\right)\right)-r\left(t_j^q\right),j=\overline{1,k_2^q}, \tag{3}$$

де $s_j^q\in S$, $y_j^q\in a\left(s_j^q\right)$, $f_j^q\in E\left(B^*\right)$, $j=\overline{1,k_1^q}$, $k_1^q\ge 1$, $t_j^q\in S$, $\varphi_j^q\in E\left(B^*\right)$, $j=\overline{1,k_2^q}$, $k_2^q\ge 0$, $k_1^q+k_2^q=n+1$, вибрані певним чином.

Для вектора $g^q = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i^q g_i$ знаходимо

$$\varepsilon^q = \max \left\{ \max_{s\in S} \max_{y\in a(s)} \|g^q(s) - y\| - \theta^q, \max_{t\in S} \left(\|g^q(t) - u(t)\| - r(t)\right) \right\}.$$

Доводиться, що $\varepsilon^q \geq 0$. Якщо $\varepsilon^q = 0$, то g^q є екстремальним для величини (1) та $\theta^q = \alpha_a^*(V \cap D)$. Якщо $\varepsilon^q > 0$ і, наприклад , $\varepsilon^q = \max\limits_{s\in S} \max\limits_{y\in a(s)} \|g^q(s) - y\| - \theta^q = f_{n+2}^q\left(g^q\left(s_{n+2}^q\right) - y_{n+2}^q\right) - \theta^q$, де $s_{n+2} \in S$, $y_{n+2} \in a(s_{n+2})$, $f_{n+2} \in E(B^*)$, то замінюємо за певним правилом одне з рівнянь систем (2), (3) на рівняння

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i Re\left(-f_{n+2}^q\left(g_i\left(s_{n+2}^q\right)\right)\right) + \theta = Re\left(-f_{n+2}^q\left(y_{n+2}^q\right)\right),$$

розв'язуємо новоутворену систему лінійних алгебраїчних рівнянь і т.д.

Теорема. Послідовність $\{\theta^q\}_{q=1}^{\infty}$ є зростаючою. Послідовність $\{g^q\}_{q=1}^{\infty}$ збігається до екстремального елемента g^* для величини (1). Мають місце рівності

$$\lim_{q\to\infty} \theta^q = \alpha_a^*(V \cap D) = \lim_{q\to\infty} \max_{s\in S} \max_{y\in a(s)} \|g^q(s) - y\| = \max_{s\in S} \max_{y\in a(s)} \|g^*(s) - y\|,$$

$$\lim_{q\to\infty} \varepsilon^q = 0, \lim_{q\to\infty} \max_{t\in S} \left(\|g^q(t) - u(t)\| - r(t)\right) = \max_{t\in S} \left(\|g^*(t) - u(t)\| - r(t)\right) \leq 0.$$