УДК 517.5

Ю. В. Гнатюк, У. В. Гудима, В. О. Гнатюк

Кам'янець-Подільський національний університет

АПРОКСИМАЦІЯ КОМПАКТНОЗНАЧНОГО ВІДОБРАЖЕННЯ ВІДНОШЕННЯМИ ЕЛЕМЕНТІВ ДВОХ МНОЖИН ОДНОЗНАЧНИХ ВІДОБРАЖЕНЬ

Встановлено необхідні, достатні умови та критерії екстремального елемента для задачі найкращої рівномірної апроксимації неперервного компактнозначного відображення відношеннями елементів двох множин неперервних однозначних відображень.

Ключові слова: *компактнозначне відображення, екстремальний елемент, критерії екстремального елемента.*

Постановка задачі. Нехай S – компакт, s – його елементи, $C(S)$ – лінійний над полем дійсних чисел нормований простір неперервних на S дійснозначних функцій, $K(R)$ – сукупність непорожніх компактів множини R дійсних чисел, $C(S,K(R))$ – множина багатозначних відображень a компакту S в R таких, що для кожного $s \in S$ $a(s) = K_s \in K(R)$ і які неперервні на S відносно метрики Хаусдорфа на $K(R)$, $C^+(S) = \{g \in C(S) : g(s) > 0,\, s \in S\}$, $U \subset C(S)$, $V \subset C^+(S)$, $\dfrac{U}{V} = \left\{ \dfrac{u}{\upsilon} :\, u \in U,\, \upsilon \in V \right\}$.

Задачею найкращої рівномірної апроксимації неперервного компактнозначного відображення $a \in C(S,K(R))$ відношеннями елементів множин U та V неперервних однозначних відображень компакта S в R будемо називати задачу відшукання величини

$$\alpha_a^*\left(\frac{U}{V}\right) = \inf_{(u,\upsilon)\in U\times V} \max_{s\in S} \max_{y\in a(s)} \left| \frac{u(s)}{\upsilon(s)} - y \right|. \tag{1}$$

Якщо існує елемент $\dfrac{u^*}{\upsilon^*}$, $(u^*,\upsilon^*) \in U \times V$, такий, що

$$\alpha_a^*\left(\frac{U}{V}\right) = \max_{s\in S} \max_{y\in a(s)} \left| \frac{u^*(s)}{\upsilon^*(s)} - y \right|,$$

то його називають екстремальним елементом для величини (1).

Актуальність теми. У схему постановки задачі відшукання величини (1) вкладаються: задача про рівномірне наближення неперервної на відрізку дійснозначної функції множинами алгебраїчних поліномів [1]; задача найкращого рівномірного наближення неперервної на компакті функції множиною узагальнених поліномів [2], [3, с.81-122]; задача найкращої одночасної апроксимації сім'ї неперервних на компакті S дійснозначних функцій скінченновимірним підпростором простору $C(S)$ [4]; задача найкращого наближення неперервного сегментнозначного відображення, заданого на [0, 1], поліномами n-го степеня [5]; задача найкращої рівномірної апроксимації неперервної на компакті S функції відношенням скінченновимірних підпросторів простору $C(S)$ [6].

Слід зауважити, що питання апроксимації неперервних багатозначних відображень у різних аспектах розглядалися у багатьох працях. Однак, лише в окремих з них розглядаються питання найкращої апроксимації багатозначних відображень [7-12]. Проте основні результати щодо характеризації екстремального елемента у вищезгаданих працях вдалось отримати за умови, що апроксимуючі множини є Γ^*-множинами відносно цього елемента.

Мета роботи. Метою роботи є встановлення необхідних, достатніх умов та критеріїв екстремального елемента для задачі найкращої рівномірної апроксимації неперервного компактнозначного відображення абстрактного компакту S в множину R дійсних чисел відношеннями елементів двох множин неперервних функцій, множина яких, взагалі кажучи, не є Γ^*-множиною відносно цього елемента.

Основні результати. У подальшому будемо припускати, що обмеження $(u,\upsilon)\in U\times V$ у задачі відшукання величини (1) є суттєвим, тобто

$$\alpha_a^*(C(S))=\inf_{g\in C(S)}\max_{s\in S}\max_{y\in a(s)}|g(s)-y|<\alpha_a^*\left(\frac{U}{V}\right). \qquad (2)$$

Для $\frac{u^*}{\upsilon^*}$, $(u^*,\upsilon^*)\in U\times V$, покладемо

$$\alpha^{(u^*,\upsilon^*)}=\max_{s\in S}\max_{y\in a(s)}\left|\frac{u^*(s)}{\upsilon^*(s)}-y\right|;$$

$$S^{(u^*,\upsilon^*)}=\left\{s:s\in S,\max_{y\in a(s)}\left|\frac{u^*(s)}{\upsilon^*(s)}-y\right|=\alpha^{(u^*,\upsilon^*)}\right\};$$

$$a_s^{(u^*,\upsilon^*)}=\left\{y:y\in a(s),\left|\frac{u^*(s)}{\upsilon^*(s)}-y\right|=\max_{y\in a(s)}\left|\frac{u^*(s)}{\upsilon^*(s)}-y\right|\right\},\ s\in S^{(u^*,\upsilon^*)}.$$

Неважко переконатися, що $S^{(u^*,\upsilon^*)}\neq\varnothing$; $a_s^{(u^*,\upsilon^*)}\neq\varnothing$, $s\in S^{(u^*,\upsilon^*)}$.

Через $\Gamma\left(M, y^*\right)$ будемо позначати конус внутрішніх напрямків для множини M лінійного нормованого простору Y із точки $y^* \in Y$, а через $\Gamma^*\left(M, y^*\right)$-конус граничних напрямків для M із y^* [3, с.12, 13].

Для кожної пари $(u, \upsilon) \in C(S) \times C(S)$ покладемо

$$\|(u, \upsilon)\| = \max\{\|u\|, \|\upsilon\|\}.$$

Тоді векторний простір $C(S) \times C(S)$ стане лінійним нормованим простором.

Для $\left(u^*, \upsilon^*\right) \in U \times V$ позначимо через

$$h_{(s,y)}^{\left(u^*,\upsilon^*\right)}(u, \upsilon) = |u(s) - y\upsilon(s)| - \alpha^{\left(u^*,\upsilon^*\right)}\upsilon(s),\ (u, \upsilon) \in C(S) \times C(S),$$

де $s \in S$, $y \in a(s)$;

$$h_s^{\left(u^*,\upsilon^*\right)}(u, \upsilon) = \max_{y \in a(s)} |u(s) - y\upsilon(s)| - \alpha^{\left(u^*,\upsilon^*\right)}\upsilon(s),\ (u, \upsilon) \in C(S) \times C(S),$$

де $s \in S$; $h^{\left(u^*,\upsilon^*\right)}(u, \upsilon) = \max\limits_{s \in S} h_s^{\left(u^*,\upsilon^*\right)}(u, \upsilon)$, $(u, \upsilon) \in C(S) \times C(S)$.

Маємо, що

$$h^{\left(u^*,\upsilon^*\right)}(u, \upsilon) = \max_{s \in S} \max_{y \in a(s)} h_{(s,y)}^{\left(u^*,\upsilon^*\right)}(u, \upsilon),\ (u, \upsilon) \in C(S) \times C(S).$$

Твердження 1. Для будь-якого елемента $\left(u^*, \upsilon^*\right) \in U \times V$ має місце рівність $h^{\left(u^*,\upsilon^*\right)}\left(u^*, \upsilon^*\right) = 0$.

Теорема 1. Для того щоб елемент $\frac{u^*}{\upsilon^*}$, де $\left(u^*, \upsilon^*\right) \in U \times V$, був екстремальним елементом для величини (1), необхідно і достатньо, щоб

$$\min_{(u,\upsilon) \in U \times V} h^{\left(u^*,\upsilon^*\right)}(u, \upsilon) = h^{\left(u^*,\upsilon^*\right)}\left(u^*, \upsilon^*\right) = 0. \tag{3}$$

Доведення. *Необхідність.* Нехай $\frac{u^*}{\upsilon^*}$, де $\left(u^*, \upsilon^*\right) \in U \times V$, є екстремальним елементом для величини (1). Згідно з твердженням 1 $h^{\left(u^*,\upsilon^*\right)}\left(u^*, \upsilon^*\right) = 0$. Припустимо, що існує елемент $(u, \upsilon) \in U \times V$ такий, що $h^{\left(u^*,\upsilon^*\right)}(u, \upsilon) < 0$.

Тоді для всіх $s \in S$ $\max\limits_{y \in a(s)} |u(s) - y\upsilon(s)| - \alpha^{\left(u^*,\upsilon^*\right)}\upsilon(s) < 0$. Звідки

$$\max_{s \in S} \max_{y \in a(s)} \left| \frac{u(s)}{\upsilon(s)} - y \right| < \alpha^{\left(u^*,\upsilon^*\right)} = \max_{s \in S} \max_{y \in a(s)} \left| \frac{u^*(s)}{\upsilon^*(s)} - y \right|,$$

що суперечить припущенню про те, що $\frac{u^*}{\upsilon^*}$ є екстремальним елементом для величини (1). Отже, рівність (3) має місце.

Необхідність доведено.

Достатність. Нехай для елемента $\frac{u^*}{\upsilon^*}$, де $(u^*, \upsilon^*) \in U \times V$, має місце рівність (3). Переконаємось, що $\frac{u^*}{\upsilon^*}$ є екстремальним елементом для величини (1). З (3) випливає, що для всіх $(u, \upsilon) \in U \times V$ справедлива нерівність $h^{(u^*,\upsilon^*)}(u, \upsilon) \ge 0$.

Нехай для $(u, \upsilon) \in U \times V$

$$h^{(u^*,\upsilon^*)}(u,\upsilon) = \left| u\left(s_{(u,\upsilon)}\right) - y_{(u,\upsilon)}\upsilon\left(s_{(u,\upsilon)}\right) \right| - \alpha^{(u^*,\upsilon^*)}\upsilon\left(s_{(u,\upsilon)}\right),$$

де $s_{(u,\upsilon)} \in S$, $y_{(u,\upsilon)} \in a\left(s_{(u,\upsilon)}\right)$.

Звідси і з попередньої нерівності отримаємо, що

$$\left| \frac{u\left(s_{(u,\upsilon)}\right)}{\upsilon\left(s_{(u,\upsilon)}\right)} - y_{(u,\upsilon)} \right| \ge \alpha^{(u^*,\upsilon^*)}.$$

Тому $\max\limits_{s\in S} \max\limits_{y\in a(s)} \left| \frac{u(s)}{\upsilon(s)} - y \right| \ge \alpha^{(u^*,\upsilon^*)} = \max\limits_{s\in S} \max\limits_{y\in a(s)} \left| \frac{u^*(s)}{\upsilon^*(s)} - y \right|$.

Це й означає, що $\frac{u^*}{\upsilon^*}$ є екстремальним елементом для величини (1).

Теорему доведено.

Твердження 2. Нехай φ – задана на лінійному нормованому просторі Y опукла неперервна функція, $\alpha \in R$, $D_\varphi^\alpha = \{y \in Y : \varphi(y) < \alpha\} \ne \varnothing$, $D_\alpha^\varphi = \{y \in Y : \varphi(y) \le \alpha\}$. Має місце рівність

$$\operatorname{int} D_\alpha^\varphi = D_\varphi^\alpha. \tag{4}$$

Для $(u^*, \upsilon^*) \in U \times V$ будемо покладати

$$S_{(u^*,\upsilon^*)} = \left\{s : s \in S, h_s^{(u^*,\upsilon^*)}\left(u^*, \upsilon *\right) = 0\right\},$$

$$a_{(u^*,\upsilon^*)}^s = \left\{y : y \in a(s), h_{(s,y)}^{(u^*,\upsilon^*)}\left(u^*, \upsilon *\right) = 0\right\},\ s \in S_{(u^*,\upsilon^*)},$$

$$C^{(u^*,\upsilon^*)} = \left\{(u,\upsilon) : (u,\upsilon) \in C(S) \times C(S),\ h^{(u^*,\upsilon^*)}(u,\upsilon) < 0\right\}.$$

Легко переконатися, що $S_{\left(u^*,\upsilon^*\right)} = S^{\left(u^*,\upsilon^*\right)}$, $a^s_{\left(u^*,\upsilon^*\right)} = a_s^{\left(u^*,\upsilon^*\right)}$ для всіх $s \in S_{\left(u^*,\upsilon^*\right)}$.

Теорема 2. Нехай $\left(u^*,\upsilon^*\right) \in U \times V$. Має місце рівність

$$\Gamma\left(C^{\left(u^*,\upsilon^*\right)},\left(u^*,\upsilon^*\right)\right) = \bigcap_{s\in S^{\left(u^*,\upsilon^*\right)}} \bigcap_{y\in a_s^{\left(u^*,\upsilon^*\right)}} \left\{(u,\upsilon) : (u,\upsilon) \in C(S)\times C(S),\right.$$

$$\left. sign\left(\frac{u^*(s)}{\upsilon^*(s)} - y\right)\left(u(s) - \frac{u^*(s)}{\upsilon^*(s)}\upsilon(s)\right) < 0\right\}. \qquad (5)$$

Доведення. Нехай для $s \in S$

$$C_s^{\left(u^*,\upsilon^*\right)} = \left\{(u,\upsilon) : (u,\upsilon) \in C(S)\times C(S), h_s^{\left(u^*,\upsilon^*\right)}(u,\upsilon) < 0\right\}.$$

Маємо, що

$$\bigcap_{s\in S} C_s^{\left(u^*,\upsilon^*\right)} = \bigcap_{s\in S}\left\{(u,\upsilon) : (u,\upsilon) \in C(S)\times C(S), h_s^{\left(u^*,\upsilon^*\right)}(u,\upsilon) < 0\right\} =$$

$$= \left\{(u,\upsilon) : (u,\upsilon) \in C(S)\times C(S), \max_{s\in S} h_s^{\left(u^*,\upsilon^*\right)}(u,\upsilon) < 0\right\} =$$

$$= \left\{(u,\upsilon) : (u,\upsilon) \in C(S)\times C(S), h^{\left(u^*,\upsilon^*\right)}(u,\upsilon) < 0\right\} = C^{\left(u^*,\upsilon^*\right)}. \qquad (6)$$

З нерівності (2) випливає, що $C^{\left(u^*,\upsilon^*\right)} \neq \varnothing$. Тому і $\bigcap_{s\in S} C_s^{\left(u^*,\upsilon^*\right)} \neq \varnothing$.

Позначимо через

$$C^s_{\left(u^*,\upsilon^*\right)} = \left\{(u,\upsilon) : (u,\upsilon) \in C(S)\times C(S), h_s^{\left(u^*,\upsilon^*\right)}(u,\upsilon) \le 0\right\}, \ s \in S.$$

З урахуванням (6) і того, що S – компакт, для $s \in S$ функції $h_s^{\left(u^*,\upsilon^*\right)}$ є опуклими та неперервними на $C(S)\times C(S)$, відображення $T : ((u,\upsilon), s) \in (C(S)\times C(S))\times S \to h_s^{\left(u^*,\upsilon^*\right)}(u,\upsilon)$ є неперервним на $(C(S)\times C(S))\times S$, $\bigcap_{s\in S} C_s^{\left(u^*,\upsilon^*\right)} \neq \varnothing$, на основі теореми 1.8.8 [3, с.40] та рівності $S_{\left(u^*,\upsilon^*\right)} = S^{\left(u^*,\upsilon^*\right)}$ робимо висновок, що

$$\Gamma\left(\bigcap_{s\in S} C^s_{\left(u^*,\upsilon^*\right)}, \left(u^*,\upsilon^*\right)\right) = \bigcap_{s\in S^{\left(u^*,\upsilon^*\right)}} \Gamma\left(C^s_{\left(u^*,\upsilon^*\right)}, \left(u^*,\upsilon^*\right)\right). \qquad (7)$$

Внаслідок твердження 2 та твердження 1.8.6 [3, с.39] маємо, що

$$\operatorname{int}\left(\bigcap_{s\in S} C^{s}_{\left(u^*,\upsilon^*\right)}\right)=\bigcap_{s\in S}\operatorname{int} C^{s}_{\left(u^*,\upsilon^*\right)}=\bigcap_{s\in S} C_s^{\left(u^*,\upsilon^*\right)}=C^{\left(u^*,\upsilon^*\right)}. \qquad (8)$$

З (7), (8) та твердження 1.2.5. [3, с.16] одержимо

$$\Gamma\left(C^{\left(u^*,\upsilon^*\right)},\left(u^*,\upsilon^*\right)\right)=\Gamma\left(\operatorname{int}\left(\bigcap_{s\in S} C^{s}_{\left(u^*,\upsilon^*\right)}\right),\left(u^*,\upsilon^*\right)\right)=$$

$$=\Gamma\left(\bigcap_{s\in S} C^{s}_{\left(u^*,\upsilon^*\right)},\left(u^*,\upsilon^*\right)\right)=\bigcap_{s\in S^{\left(u^*,\upsilon^*\right)}}\Gamma\left(C^{s}_{\left(u^*,\upsilon^*\right)},\left(u^*,\upsilon^*\right)\right). \qquad (9)$$

Охарактеризуємо тепер конус $\Gamma\left(C^{s}_{\left(u^*,\upsilon^*\right)},\left(u^*,\upsilon^*\right)\right)$, $s\in S^{\left(u^*,\upsilon^*\right)}$.

З урахуванням того, що для $s\in S^{\left(u^*,\upsilon^*\right)}$ $a(s)$ – компакт, для $s\in S^{\left(u^*,\upsilon^*\right)}$, $y\in a(s)$ функції $h_{(s,y)}^{\left(u^*,\upsilon^*\right)}$ є опуклими та неперервними на $C(S)\times C(S)$, відображення

$$T_s:((u,\upsilon);y)\in(C(S)\times C(S))\times a(s)\to h_{(s,y)}^{\left(u^*,\upsilon^*\right)}(u,\upsilon)$$

є неперервним по $((u,\upsilon),y)$ на $(C(S)\times C(S))\times a(s)$,

$$\bigcap_{y\in a(s)}\left\{(u,\upsilon):(u,\upsilon)\in C(S)\times C(S),h_{(s,y)}^{\left(u^*,\upsilon^*\right)}(u,\upsilon)<0\right\}\neq\varnothing$$

(див. нерівність (2)), на основі теореми 1.8.8 [3, с.40] та рівності $a^{s}_{\left(u^*,\upsilon^*\right)}=a_s^{\left(u^*,\upsilon^*\right)}$ робимо висновок, що для $s\in S^{\left(u^*,\upsilon^*\right)}$

$$\Gamma\left(C^{s}_{\left(u^*,\upsilon^*\right)},\left(u^*,\upsilon^*\right)\right)=$$

$$=\Gamma\left(\left\{(u,\upsilon):(u,\upsilon)\in C(S)\times C(S),\max_{y\in a(s)} h_{(s,y)}^{\left(u^*,\upsilon^*\right)}(u,\upsilon)\le 0\right\},\left(u^*,\upsilon^*\right)\right)=$$

$$=\bigcap_{y\in a_s^{\left(u^*,\upsilon^*\right)}}\Gamma\left(\left\{(u,\upsilon):(u,\upsilon)\in C(S)\times C(S),h_{(s,y)}^{\left(u^*,\upsilon^*\right)}(u,\upsilon)\le 0\right\},\left(u^*,\upsilon^*\right)\right)=$$

$$=\bigcap_{y\in a_s^{\left(u^*,\upsilon^*\right)}}\Gamma\left(D_{(s,y)},\left(u^*,\upsilon^*\right)\right), \qquad (10)$$

де $D_{(s,y)}=\left\{(u,\upsilon)\in C(S)\times C(S):h_{(s,y)}^{\left(u^*,\upsilon^*\right)}(u,\upsilon)\le 0\right\}$, $s\in S^{\left(u^*,\upsilon^*\right)}$, $y\in a_s^{\left(u^*,\upsilon^*\right)}$.

Для всіх $s \in S^{(u^*,\upsilon^*)}$, $y \in a_s^{(u^*,\upsilon^*)}$ охарактеризуємо $\Gamma\left(D_{(s,y)},\left(u^*,\upsilon^*\right)\right)$.

Позначимо через

$$l_{(s,y)}^{+}(u,\upsilon)=u(s)-\left(y+\alpha^{(u^*,\upsilon^*)}\right)\upsilon(s),\ (u,\upsilon)\in C(S)\times C(S),$$

$$l_{(s,y)}^{-}(u,\upsilon)=-u(s)+\left(y-\alpha^{(u^*,\upsilon^*)}\right)\upsilon(s),\ (u,\upsilon)\in C(S)\times C(S),$$

$$D_{(s,y)}^{+}=\left\{(u,\upsilon):(u,\upsilon)\in C(S)\times C(S), l_{(s,y)}^{+}(u,\upsilon)\le 0\right\},$$

$$D_{(s,y)}^{-}=\left\{(u,\upsilon):(u,\upsilon)\in C(S)\times C(S), l_{(s,y)}^{-}(u,\upsilon)\le 0\right\}, s\in S^{(u^*,\upsilon^*)},\ y\in a_s^{(u^*,\upsilon^*)}.$$

Легко бачити, що

$$D_{(s,y)}=D_{(s,y)}^{+}\cap D_{(s,y)}^{-},\ s\in S^{(u^*,\upsilon^*)},\ y\in a_s^{(u^*,\upsilon^*)}. \qquad (11)$$

Для $s\in S^{(u^*,\upsilon^*)}$, $y\in a_s^{(u^*,\upsilon^*)}$ маємо, що $\left|\dfrac{u^*(s)}{\upsilon^*(s)}-y\right|=\alpha^{(u^*,\upsilon^*)}$.

Якщо $sign\left(\dfrac{u^*(s)}{\upsilon^*(s)}-y\right)=1$, то в цьому випадку одержуємо

$$l_{(s,y)}^{+}\left(u^*,\upsilon^*\right)=0,\ l_{(s,y)}^{-}\left(u^*,\upsilon^*\right)<0. \qquad (12)$$

Оскільки $l_{(s,y)}^{+}(u,\upsilon)$, $l_{(s,y)}^{-}(u,\upsilon)$ є лінійними неперервними функціоналами на $C(S)\times C(S)$, то згідно з (11), (12), твердженнями 1.2.2 [3, с.14], 1.3.7 [3, с.21] одержимо, що

$$\Gamma\left(D_{(s,y)},\left(u^*,\upsilon^*\right)\right)=\Gamma\left(D_{(s,y)}^{+}\cap D_{(s,y)}^{-},\left(u^*,\upsilon^*\right)\right)=$$

$$=\Gamma\left(D_{(s,y)}^{+},\left(u^*,\upsilon^*\right)\right)\cap\Gamma\left(D_{(s,y)}^{-},\left(u^*,\upsilon^*\right)\right)=$$

$$=\left\{(u,\upsilon):(u,\upsilon)\in C(S)\times C(S), l_{(s,y)}^{+}(u,\upsilon)<0\right\}\cap\left(C(S)\times C(S)\right)=$$

$$=\left\{(u,\upsilon):(u,\upsilon)\in C(S)\times C(S), u(s)-\left(y+\alpha^{(u^*,\upsilon^*)}\right)\upsilon(s)<0\right\}.$$

В розглядуваному випадку $y+\alpha^{(u^*,\upsilon^*)}=\dfrac{u^*(s)}{\upsilon^*(s)}$. Тому

$$\Gamma\left(D_{(s,y)},\left(u^*,\upsilon^*\right)\right)=\left\{(u,\upsilon):u(s)-\frac{u^*(s)}{\upsilon^*(s)}\upsilon(s)<0\right\}=$$

$$=\left\{(u,\upsilon):(u,\upsilon)\in C(S)\times C(S), sign\left(\frac{u^*(s)}{\upsilon^*(s)}-y\right)\left(u(s)-\frac{u^*(s)}{\upsilon^*(s)}\upsilon(s)\right)<0\right\}. \qquad (13)$$

Аналогічно доводиться, що рівність (13) має місце і у випадку, коли

$$sign\left(\frac{u^*(s)}{\upsilon^*(s)} - y\right) = -1 .$$

З (9), (10), (13) випливає справедливість рівності (5).

Теорему доведено.

Теорема 3. Для того щоб елемент $\frac{u^*}{\upsilon^*}$, $(u^*, \upsilon^*) \in U \times V$, був екстремальним елементом для величини (1), необхідно, щоб для кожного елемента $(u, \upsilon) \in \Gamma^*(U \times V, (u^*, \upsilon^*))$ існували елементи $s \in S$, $y \in a(s)$ такі, що

$$\left|\frac{u^*(s)}{\upsilon^*(s)} - y\right| = \max_{s \in S} \max_{y \in a(s)} \left|\frac{u^*(s)}{\upsilon^*(s)} - y\right|, \tag{14}$$

$$sign\left(\frac{u^*(s)}{\upsilon^*(s)} - y\right)\left(u(s) - \frac{u^*(s)}{\upsilon^*(s)}\upsilon(s)\right) \ge 0 . \tag{15}$$

Доведення. Нехай елемент $\frac{u^*}{\upsilon^*}$, $(u^*, \upsilon^*) \in U \times V$, є екстремальним елементом для величини (1). Тоді згідно з теоремою 1 (u^*, υ^*) є оптимальним розв’язком задачі відшукання величини

$$\min_{(u,\upsilon) \in U \times V} h^{(u^*, \upsilon^*)}(u, \upsilon).$$

Внаслідок теореми 1.4.1 [3, с.22]

$$\Gamma\left(C^{(u^*,\upsilon^*)}, (u^*, \upsilon^*)\right) \cap \Gamma^*\left(U \times V, (u^*, \upsilon^*)\right) = \varnothing .$$

З урахуванням цього та теореми 2 робимо висновок, що не існує $(u, \upsilon) \in \Gamma^*(U \times V, (u^*, \upsilon^*))$ такого, що для всіх $s \in S^{(u^*, \upsilon^*)}$, $y \in a_s^{(u^*, \upsilon^*)}$ справджується нерівність

$$sign\left(\frac{u^*(s)}{\upsilon^*(s)} - y\right)\left(u(s) - \frac{u^*(s)}{\upsilon^*(s)}\upsilon(s)\right) < 0 .$$

Це означає, що для кожного $(u, \upsilon) \in \Gamma^*(U \times V, (u^*, \upsilon^*))$ існують елементи $s \in S^{(u^*, \upsilon^*)}$, $y \in a_s^{(u^*, \upsilon^*)}$ такі, для яких має місце нерівність (15). Враховуючи, що $s \in S^{(u^*, \upsilon^*)}$, $y \in a_s^{(u^*, \upsilon^*)}$ тоді і тільки тоді, коли $s \in S$, $y \in a(s)$ та виконується рівність (14), робимо висновок, що для кожного елемента $(u, \upsilon) \in \Gamma^*(U \times V, (u^*, \upsilon^*))$ існують елементи $s \in S$, $y \in a(s)$ такі, що мають місце співвідношення (14), (15).

Теорему доведено.

Теорема 4. Нехай $\left(u^*,\upsilon^*\right)\in U\times V$. Якщо для кожного елемента $\frac{u}{\upsilon}$, $\left(u,\upsilon\right)\in U\times V$, існують елементи $s\in S$, $y\in a\left(s\right)$ такі, що

$$\left|\frac{u^*(s)}{\upsilon^*(s)}-y\right|=\max_{s\in S}\max_{y\in a(s)}\left|\frac{u^*(s)}{\upsilon^*(s)}-y\right|, \qquad (16)$$

$$sign\left(\frac{u^*(s)}{\upsilon^*(s)}-y\right)\left(\frac{u(s)}{\upsilon(s)}-\frac{u^*(s)}{\upsilon^*(s)}\right)\geq 0, \qquad (17)$$

то $\frac{u^*}{\upsilon^*}$ є екстремальним елементом для величини (1).

Справедливість теореми 4 випливає з теореми 3.6 [10, с.1615].

Для формулювання достатньої умови та критерію екстремального елемента скористаємось поняттями Γ^* [10,с.1616] та Γ [11, с.20] – множин.

Теорема 5. Нехай $\left(u^*,\upsilon^*\right)\in U\times V$ і $U\times V$ є Γ^*-множиною відносно $\left(u^*,\upsilon^*\right)$, в тому числі Γ-множиною відносно $\left(u^*,\upsilon^*\right)$, зірковою відносно $\left(u^*,\upsilon^*\right)$, опуклою множиною. Для того щоб елемент $\frac{u^*}{\upsilon^*}$ був екстремальним елементом для величини (1), необхідно і достатньо, щоб для кожного $\left(u,\upsilon\right)\in U\times V$ існували елементи $s\in S$, $y\in a\left(s\right)$ такі, для яких виконуються співвідношення (16), (17).

Доведення. *Необхідність.* Нехай $\frac{u^*}{\upsilon^*}$, $\left(u^*,\upsilon^*\right)\in U\times V$, є екстремальним елементом для величини (1) і $U\times V$ є Γ^*-множиною відносно точки $\left(u^*,\upsilon^*\right)$, в тому числі Γ-множиною відносно $\left(u^*,\upsilon^*\right)$, зірковою відносно $\left(u^*,\upsilon^*\right)$, опуклою множиною.

Тоді для кожного елемента $\left(u,\upsilon\right)\in U\times V$ маємо, що

$$\left(u,\upsilon\right)-\left(u^*,\upsilon^*\right)=\left(u-u^*,\upsilon-\upsilon^*\right)\in\Gamma^*\left(U\times V,\left(u^*,\upsilon^*\right)\right).$$

Тому за теоремою 3 для кожного елемента $\left(u,\upsilon\right)\in U\times V$ існують точки $s\in S$, $y\in a\left(s\right)$ такі, що має місце рівність (16) і

$$sign\left(\frac{u^*(s)}{\upsilon^*(s)}-y\right)\left(u(s)-u^*(s)-\frac{u^*(s)}{\upsilon^*(s)}\left(\upsilon(s)-\upsilon^*(s)\right)\right)\geq 0. \qquad (18)$$

З (18) випливає, що

$$sign\left(\frac{u^*(s)}{\upsilon^*(s)}-y\right)\left(u(s)-\frac{u^*(s)}{\upsilon^*(s)}\upsilon(s)\right)\geq 0\,.$$

Поділивши останню нерівність на $\upsilon(s)$ одержимо (17).

Достатність. Випливає з теореми 4.

Теорему доведено.

Наслідок 1. Нехай $(u^*,\upsilon^*)\in U\times V$, U є зірковою відносно u^*, в тому числі опуклою множиною, а V є зірковою відносно υ^*, в тому числі опуклою множиною. Для того щоб елемент $\frac{u^*}{\upsilon^*}$ був екстремальним елементом для величини (1), необхідно і достатньо, щоб для будь-яких $(u,\upsilon)\in U\times V$ існували такі елементи $s\in S$, $y\in a(s)$, для яких виконуються співвідношення (16), (17).

Висновок. Встановлено необхідні, достатні умови та критерії екстремального елемента для задачі відшукання величини (1), які можна використати для побудови чисельних методів наближеного відшукання цієї величини та її екстремального елемента.

Список використаних джерел:

1. Чебышев П. Л. Теория механизмов, известных под названием параллелограммов // Соч. – М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1948. – Т.2. – С.23-51.
2. Зуховицкий С. И. О приближении действительных функций в смысле П. Л. Чебышева // Успехи мат. наук. – 1956. – XI, №2. – С.125-159.
3. Лоран П.-Ж. Аппроксимация и оптимизация. – М.: Мир,1975. – 496 с.
4. Гнатюк Ю. В. Найкраще рівномірне наближення сім’ї неперервних на компакті функцій // Укр. мат. журн. – 2002. – 54, №11. – С.1574-1580.
5. Выгодчикова И. Ю. О наилучшем приближении непрерывного многозначного отображения алгебраическим полиномом // Математика. Механика: Сб. науч. тр. – Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2000. – №2. – С.13-15.
6. Колатц Л., Крабс В. Теория приближения. Чебышевские приближения и их приложения. – М.: Наука, 1978. – С.235.
7. Сендов Б. Хаусдорфовы приближения. – София: БАН, 1979. – 372 с.
8. Никольский М. С. Аппроксимация выпуклозначных непрерывных многозначных отображений // Докл. АН СССР. – 1989. – 308, №5. – С.1047-1050.
9. Никольский М. С. Об аппроксимации непрерывного многозначного отображения постоянными многозначными отображениями // Вестник Московского ун-та. Сер. 15. Вычислительная математика и кибернетика. – 1990. – №1. – С.76-80.
10. Гудима У. В. Найкраща рівномірна апроксимація неперервного компактнозначного відображення множинами неперервних однозначних відображень // Укр. мат. журн. – 2005. – 57, №12. – С.1601-1619.
11. Гнатюк Ю. В., Гудима У. В. Критерії екстремального елемента та його єдиності для задачі найкращої рівномірної апроксимації неперервного

компактнозначного відображення множинами однозначних відображень // Доп. НАН України. – 2005. – №6. – С.19-23.
12. Гудима У. В., Гнатюк Ю. В., Гнатюк В. О. Про єдиність екстремального елемента та чебишовський альтернанс для задачі найкращої рівномірної апроксимації неперервного компактнозначного відображення // Проблеми теорії наближення функцій та суміжні питання: Зб. наук. праць Ін-ту математики НАН України. – Київ, 2005. – Т.2. – №2. – С.106-116.

In article we established the necessary and sufficient conditions and criteria of the element of the best uniform rational approximation of continuous compact-valued map.

Key words: *the best uniform rational approximation, the compact-valued maps, the criteria of extreme element.*

Отримано: 05.06.2008

УДК 539.3

А. П. Громик[1], І. М. Конет[2]

[1]Подільський державний аграрно-технічний університет, м. Кам'янець-Подільський
[2]Кам'янець-Подільський національний університет

ІНТЕГРАЛЬНІ ЗОБРАЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ СТАЦІОНАРНИХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ДЛЯ ОБМЕЖЕНИХ КУСКОВО-ОДНОРІДНИХ ПРОСТОРОВИХ СЕРЕДОВИЩ

Методом інтегральних перетворень побудовано точні аналітичні розв'язки стаціонарних задач теплопровідності для обмежених кусково-однорідних просторових середовищ.

Ключові слова: *диференціальне рівняння Пуассона, інтегральні перетворення, фундаментальні розв'язки.*

Вступ. Стаціонарні крайові задачі феноменологічної теорії теплопровідності для багатошарових (кусково-однорідних) середовищ становлять значний теоретичний та практичний інтерес [5, 7, 14, 15]. Питанням побудови методом інтегральних перетворень точних аналітичних розв'язків згаданих задач у декартовій, сферичній та циліндричній системах координат присвячені монографії [12, 8, 9, 10]. Стаціонарні температурні поля в необмежених двоскладових та тришарових просторових середовищах побудовано в працях [2, 3, 4, 11]. У цій статті ми пропонуємо інтегральні зображення точних аналітичних розв'язків алгоритмічного характеру стаціонарних задач теплопровідності для обмежених кусково-однорідних за декартовою координатою просторових середовищ.

