ПЕРЕДМОВА

Частину математики, яка вивчає геометричні образи, в першу чергу криві та поверхні, використовуючи методи математичного аналізу, називають диференціальною геометрією. Вважають, що диференціальна геометрія відокремилась в самостійну математичну дисципліну у 1827 році, коли Гаус опублікував роботу "Загальне дослідження про криві поверхні". В Росії школу диференціальної геометрії створили Ф.Міндінг і К.Петерсон. Великий внесок в розвиток цієї науки зробили українські вчені А.В.Погорєлов, М.І.Кованцов та їх учні.

Основу цього навчального посібника складають лекції автора з диференціальної геометрії на фізико-математичному факультеті Кам'янець-Подільського державного педагогічного університету.

Ця книга написана як навчальний посібник з традиційної частини диференціальної геометрії, яка вивчає криві та поверхні в трьохвимірному евклідовому просторі. При цьому, як правило, досліджується поведінка як завгодно малих їх дуг та областей. Читач також ознайомиться з більш загальним підходом до означення кривих та поверхонь в топологічних многовидах як до класу відображень спеціального виду. Під скалярами скрізь розуміються лише дійсні числа. Теоретичний матеріал ілюструється достатньою кількістю вправ та прикладів, частина з яких розв'язана в тексті, частина пропонується для самостійного опрацювання. Саме система цих вправ знайомить читача з основними властивостями таких відомих в геометрії кривих та поверхонь як ланцюгова та гвинтова лінії, трактриса, циклоїда, катеноїд, прямий гелікоїд, псевдосфера та інші.

Для свідомого засвоєння цього курсу читач повинен бути ознайомлений з основами математичного аналізу та аналітичної геометрії. Сформулюємо нижче два відомі з курсу математичного аналізу твердження, які досить часто будуть використовуватись в основному тексті.

Теорема *(про існування неявної функції). Нехай функція* $F(x,y,z)$ *неперервна за сукупністю змінних разом з усіма своїми частковими похідними до другого порядку включно в околі точки* $M_0(x_0,y_0,z_0)$, *і часткова похідна* $\left.\dfrac{\partial F}{\partial x}\right|_{M_0} \neq 0$, *при-*

чому $F(x_0, y_0, z_0) = 0$. *Тоді існує єдина функція* $x = \varphi(y,z)$, *така, що* $x_0 = \varphi(y_0, z_0)$, *і яка в деякому околі точки* M_0 *задовольняє тотожність* $F(\varphi(y,z), y, z) = 0$. *Функція* $\varphi(y,z)$ *в цьому околі неперервна за сукупністю змінних разом з усіма своїми частковими похідними до другого порядку включно.*

Теорема *(про існування неявних функцій). Нехай функції* $F(x,y,z)$ *та* $\Phi(x,y,z)$ *неперервні за сукупністю змінних разом з усіма своїми частковими похідними до другого порядку включно в околі точки* $M_0(x_0, y_0, z_0)$, *детермінант*

$$\left.\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial y} & \dfrac{\partial F}{\partial z} \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial y} & \dfrac{\partial \Phi}{\partial z} \end{vmatrix}\right|_{M_0} \neq 0$$

і $F(x_0, y_0, z_0) = \Phi(x_0, y_0, z_0) = 0$. *Тоді існує єдина пара функцій* $y = \varphi_1(x), z = \varphi_2(x)$, *таких, що* $y_0 = \varphi_1(x_0), z_0 = \varphi_2(x_0)$, *і які в деякому околі точки* M_0 *задовольняють тотожності*

$$F(x, \varphi_1(x), \varphi_2(x)) \equiv 0,\ \Phi(x, \varphi_1(x), \varphi_2(x)) \equiv 0,$$

причому функції $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ *в цьому околі неперервні разом із своїми похідними до другого порядку включно.*

На жаль, обсяг книги не дозволив більш детально викласти теорію дотику поверхонь, результати, пов'язані з поведінкою сімейств поверхонь та їх ізометричним відображенням. Не містить посібник і елементів ріманової геометрії.

В тексті застосована подвійна нумерація. Для формул, тверджень (означень, лем, теорем, і т.п.) перше число вказує на номер параграфу, друге — на номер формули, твердження (означення, леми, теореми і т.п.) в цьому параграфі.

Розділ 1

ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ КРИВИХ

§ 1. ВЕКТОРНІ ФУНКЦІЇ СКАЛЯРНОГО АРГУМЕНТУ

Нехай E^3 — трьохвимірний евклідів простір, точки якого будемо позначати великими латинськими літерами A, B, C і т.д. Відрізок AB простору будемо називати *напрямленим* і позначати $\overline{AB}$, якщо в нього вказано початок A і кінець B.

В E^3 виберемо довільну точку O і назвемо її *полюсом*. Множину всіх напрямлених відрізків E^3 з початками в точці O позначимо через V^3. Елементи цієї множини назвемо *векторами* і будемо позначати їх малими буквами латинського алфавіту з стрілками над ними, наприклад: $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ і т.д. Через $\overrightarrow{AB}$ будемо позначати вектор, *еквіполентний* (співнапрямлений і рівний за модулем) напрямленому відрізку $\overline{AB}$.

Вектор $\overrightarrow{OA}$ будемо називати *радіус-вектором* точки A. Покладемо: $-\vec{b} = (-1)\vec{b}$, $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + \left(-\vec{b}\right)$.

Неважко переконатися, що відносно операцій додавання за правилом паралелограма та множення на скаляр множина V^3 утворює *векторний простір* над полем дійсних чисел.

Скалярний та векторний добутки векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ будемо позначати через $\vec{a}\vec{b}$, $\left[\vec{a}, \vec{b}\right]$ відповідно, *мішаний добуток* векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ — через $\left(\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right)$, *ортонормований репер (базис)* в множині V^3 — через $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

Одним з найважливіших понять сучасної математики, для яких не дається означення, є поняття *множини*. Слова: «сукупність», «сімейство», «клас» — це синоніми слова «множина». Множину вважають *визначеною*, якщо про кожний об'єкт, який розглядається, можна твердити, що він або належить, або не належить множині.

Відображенням f множини X в множину Y називають правило, яке кожному елементу $x \in X$ ставить у відповідність точно один елемент $y \in Y$. Слова: «функція», «відображення», «оператор», «перетворення» — є синонімі.

Множину X називають *множиною визначення* функції f і позначають через $D(f)$. Множину $R(f) = \{y \in Y | \exists x \in X: f(x) = y\}$ називають *множиною значень* функції *f*.

Означення 1.1. *Функцію $\vec{r} = \vec{r}(t)$, для якої $D(\vec{r}) \subset R^1$, $R(\vec{r}) \subset V^3$ де R^1 — множина дійсних чисел, назвемо вектор-функцією скалярного аргументу.*

В подальшому, як правило, під $D(\vec{r})$ будемо розуміти інтервал $(a,b) \subset R^1$.

Насамперед з'ясуємо поняття границі для векторних функцій.

Означення 1.2. *Скажемо, що $\vec{r}(t) \to \vec{r}_0 \in V^3$ при $t \to t_0 \in D(\vec{r})$, якщо $\left|\vec{r}(t) - \vec{r}_0\right| \to 0$ при $t \to t_0$.*

Форми запису $\vec{r}(t) \xrightarrow[t \to t_0]{} \vec{r}_0$ і $\lim\limits_{t \to t_0} \vec{r}(t) = \vec{r}_0$ еквівалентні. Про властивості границі свідчить наступне твердження.

Теорема 1.1. *Нехай $\vec{a}(t), \vec{b}(t)$ вектор-функції, $m(t)$ — скалярна функція, визначені на $(a,b) \subset R^1$, причому при $t \to t_0 \in (a,b)$ $\vec{a}(t) \to \vec{a}_0$, $\vec{b}(t) \to \vec{b}_0$, $m(t) \to m_0$. Тоді при $t \to t_0$:*

1) $\vec{a}(t) + \vec{b}(t) \to \vec{a}_0 + \vec{b}_0$;
2) $m(t)\vec{a}(t) \to m_0\vec{a}_0$;
3) $\vec{a}(t)\vec{b}(t) \to \vec{a}_0\vec{b}_0$;
4) $\left[\vec{a}(t), \vec{b}(t)\right] \to \left[\vec{a}_0, \vec{b}_0\right]$.

Доведення проведемо для твердження 2). Оскільки

$$I = \left|m(t)\vec{a}(t) - m_0\vec{a}_0\right| \le$$
$$\le \left|m(t)\right|\left|\vec{a}(t) - \vec{a}_0\right| + \left|m(t) - m_0\right|\left|\vec{a}_0\right|,$$

а за умовою теореми $\left|\vec{a}(t)-\vec{a}_0\right| \to 0$, $\left|m(t)-m_0\right| \to 0$ при $t \to t_0$, то $I \to 0$ при $t \to t_0$. Твердження 2) доведене.

Означення 1.3. *Функція $\vec{r}(t)$ називається неперервною в точці $t_0 \in (a,b) \subset R^1$, якщо $\vec{r}(t) \to \vec{r}(t_0)$ при $t \to t_0$.*

Для неперервних функцій має місце наступна властивість.

Теорема 1.2. *Нехай векторні функції $\vec{a}(t), \vec{b}(t)$ і скалярна функція $m(t)$ визначені на $(a,b) \subset R^1$ та неперервні в точці $t_0 \in (a,b)$. Тоді в точці t_0 неперервними є функції:*

1) $\vec{a}(t)+\vec{b}(t)$, 2) $m(t)\vec{a}(t)$, 3) $\vec{a}(t)\vec{b}(t)$, 4) $\left[\vec{a}(t),\vec{b}(t)\right]$.

Доведення проведемо, наприклад для твердження 4) теореми 1.2. Враховуючи означення 1.3 та твердження 4) теореми 1.1, маємо:

$$\lim_{t\to t_0}\left[\vec{a}(t),\vec{b}(t)\right] = \left[\lim_{t\to t_0}\vec{a}(t), \lim_{t\to t_0}\vec{b}(t)\right] =$$
$$= \left[\vec{a}(t_0),\vec{b}(t_0)\right],$$

що завершує доведення.

Означення 1.4. *Говорять, що функція $\vec{r}(t)$ має в точці $t_0 \in (a,b)$ похідну (диференційована в точці t_0), якщо існує границя відношення $\dfrac{\vec{r}(t)-\vec{r}(t_0)}{t-t_0}$ при $t \to t_0$.*

Позначають цю похідну через $\vec{r}\,'(t_0)$ або через $\left.\dfrac{d\vec{r}(t)}{dt}\right|_{t_0}$.

Теорема 1.3. *Нехай векторні функції $\vec{a}(t), \vec{b}(t)$ і скалярна функція $m(t)$ визначені на $(a,b) \subset R^1$ та диференційовані в точці $t \in (a,b)$. Тоді в цій точці диференційовані функції $\vec{a}(t)+\vec{b}(t)$, $m(t)\vec{a}(t)$, $\vec{a}(t)\vec{b}(t)$, $\left[\vec{a}(t),\vec{b}(t)\right]$, причому:*

1) $(\vec{a}(t)+\vec{b}(t))' = \vec{a}\,'(t)+\vec{b}\,'(t)$;

2) $(m(t)\vec{a}(t))' = m'(t)\vec{a}(t)+m(t)\vec{a}\,'(t)$;

3) $(\vec{a}(t)\vec{b}(t))' = \vec{a}'(t)\vec{b}(t) + \vec{a}(t)\vec{b}'(t)$;

4) $\left[\vec{a}(t), \vec{b}(t)\right]' = \left[\vec{a}'(t), \vec{b}(t)\right] + \left[\vec{a}(t), \vec{b}'(t)\right]$.

Доведення проведемо для твердження 3) сформульованої теореми. За означенням 1.4 та теоремою 1.1 маємо:

$$\left(\vec{a}(t)\vec{b}(t)\right)' = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{a}(t+\Delta t) - \vec{a}(t)}{\Delta t} \vec{b}(t+\Delta t) + \lim_{\Delta t \to 0} \vec{a}(t) \times$$
$$\times \frac{\vec{b}(t+\Delta t) - \vec{b}(t)}{\Delta t} = \vec{a}'(t)\vec{b}(t) + \vec{a}(t)\vec{b}'(t),$$

що й треба було довести.

Неозначеним інтегралом від векторної функції $\vec{r}(t)$ будемо називати вектор-функцію $\vec{v}(t) = \int \vec{r}(t)dt,$ якщо $\vec{v}'(t) = \vec{r}(t)$. Ця функція визначається з точністю до сталого векторного доданку. Під означеним інтегралом будемо розуміти сталий вектор

$$\int_a^b \vec{r}(t)dt = \vec{v}(b) - \vec{v}(a).$$

Для векторної функції легко ввести поняття похідних другого, третього і т.д. порядків. Це робиться так само, як в скалярному аналізі.

Через $C^k_{(a,b)}$ позначимо множину всіх векторних та скалярних функцій, які мають в кожній точці $t \in (a,b)$, неперервні похідні до k-го порядку включно.

Покажемо, що для вектор-функцій скалярного аргументу має місце формула Тейлора. Нехай $\vec{r}(t) \in C^{n+1}_{(a,b)}$. В просторі V^3, введемо довільний ортонормований репер $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Розклавши вектор $\vec{r}(t)$ по базисних векторах, матимемо вираз

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}\ .$$

Неважко довести, що з належності $\vec{r}(t) \in C^{n+1}_{(a,b)}$ випливає належність $x(t), y(t), z(t) \in C^{n+1}_{(a,b)}$ і навпаки. Нехай $t_0 \in (a,b)$.

Для кожної з функцій $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ запишемо формулу Тейлора, подавши залишковий член розкладу у формі Лагранжа:

$$x(t) = x(t_0) + x'(t_0)(t - t_0) + \ldots +$$
$$+ x^{(n)}(t_0)\frac{(t - t_0)^n}{n!} + x^{(n+1)}(\xi_1)\frac{(t - t_0)^{n+1}}{(n+1)!};$$
$$y(t) = y(t_0) + y'(t_0)(t - t_0) + \ldots +$$
$$+ y^{(n)}(t_0)\frac{(t - t_0)^n}{n!} + y^{(n+1)}(\xi_2)\frac{(t - t_0)^{n+1}}{(n+1)!};$$
$$z(t) = z(t_0) + z'(t_0)(t - t_0) + \ldots +$$
$$+ z^{(n)}(t_0)\frac{(t - t_0)^n}{n!} + z^{(n+1)}(\xi_3)\frac{(t - t_0)^{n+1}}{(n+1)!};$$

де $\xi_i \to t_0$, $(i = 1,2,3)$ при $t \to t_0$.

Помножимо першу з цих рівностей на вектор $\vec{i}$, другу — на вектор $\vec{j}$, третю — на вектор $\vec{k}$. Отримані співвідношення почленно додамо і одержимо формулу Тейлора для векторної функції:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(t_0) + \vec{r}\,'(t_0)(t - t_0) + \ldots +$$
$$+ \vec{r}^{\,(n)}(t_0)\frac{(t - t_0)^n}{n!} + \vec{Q}\frac{(t - t_0)^{n+1}}{(n+1)!},$$

де $\vec{Q} = x^{(n+1)}(\xi_1)\vec{i} + y^{(n+1)}(\xi_2)\vec{j} + z^{(n+1)}(\xi_3)\vec{k} \to \vec{r}^{\,(n+1)}(t_0)$ при $t \to t_0$.

Вектор $\vec{Q}$ можна подати у вигляді $\vec{Q} = \vec{r}^{\,(n+1)}(t_0) + \vec{\varepsilon}(t_0, t)$, де $\left|\vec{\varepsilon}(t_0, t)\right| \to 0$ при $t \to t_0$.

Провівши аналогічні міркування, зазначимо, що коли функція $\vec{r}(t) \in C^n_{\{t_0\}}$ і визначена на $(a, в)$, формулу Тейлора для $\vec{r}(t)$ можна записати у вигляді

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(t_0) + \vec{r}\,'(t_0)(t - t_0) + \ldots + \vec{r}^{\,(n)}(t_0)\frac{(t - t_0)^n}{n!} + \vec{R}_n(t),$$

де $\lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{\vec{R}_n(t)}{(t - t_0)^n} = \vec{0}$.

Означення 1.5. *Функцію $\vec{r}(t)$ будемо називати аналітичною в точці $t_0 \in (a,b)$, якщо вона має в цій точці похідні будь-якого порядку та існує такий окіл точки t_0, в якому ряд Тейлора*

$$\vec{r}(t_0) + \vec{r}\,'(t_0)(t - t_0) + \vec{r}\,''(t_0)\frac{(t - t_0)^2}{2!} + \ldots$$

збігається до функції $\vec{r}(t)$.

Розглянемо тепер два твердження, які неодноразово будуть використані в подальшому викладі.

Лема 1.1. *Похідна вектор-функції сталого модуля перпендикулярна до неї при всіх значеннях аргумента.*

Доведення. Нехай $|\vec{r}(t)| = c = const$ при всіх $t \in (a,b)$. Тоді $\vec{r}(t)\vec{r}(t) = c^2$. Продиференціювавши останню рівність, маємо, що $2\vec{r}(t)\vec{r}\,'(t) = 0$, звідки випливає твердження леми 1.1.

Означення 1.6. *Швидкістю обертання вектор-функції $\vec{r}(t)$ в точці $t_0 \in (a,b)$ називають границю відношення $\left|\dfrac{\Delta\varphi}{t - t_0}\right|$ при $t \to t_0$, де $\Delta\varphi$ — кут між векторами $\vec{r}(t_0)$ і $\vec{r}(t)$.*

Лема 1.2. *Швидкість обертання одиничної вектор-функції дорівнює модулю її похідної у відповідній точці.*

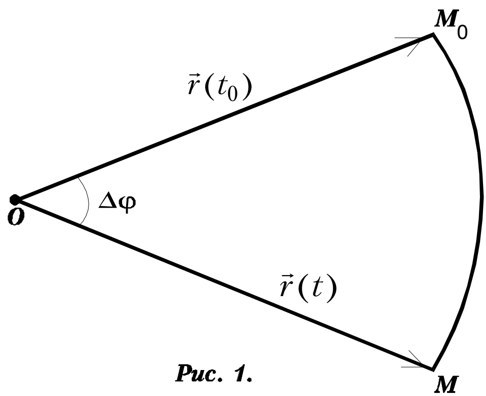

Рис. 1.

Доведення. За умовою $|\vec{r}(t_0)| = |\vec{r}(t)| = 1$.

Очевидно, $\Delta\varphi = \overset{\cup}{M_0M}$, де $\overset{\cup}{M_0M}$ — довжина дуги одиничного кола з центром в точці O, $\Delta\varphi$ вимірюється радіанною мірою (*рис. 1*).

За означенням 1.6 швидкість обертання функції $\vec{r}(t)$ в точці t_0 визначає границя

$$\lim_{t\to t_0}\frac{\overset{\cup}{M_0M}}{|t-t_0|}=\lim_{t\to t_0}\frac{\overset{\cup}{M_0M}}{|\overrightarrow{M_0M}|}\cdot\lim_{t\to t_0}\frac{|\overrightarrow{M_0M}|}{|t-t_0|}=1\cdot\left|\lim_{t\to t_0}\frac{\vec{r}(t)-\vec{r}(t_0)}{t-t_0}\right|=|\vec{r}\,'(t_0)|,$$

що й потрібно було довести.

Вправи

1. Довести, що з рівності $\vec{r}(t)=\vec{0}$ $\left(t\in(a,b)\right)$ випливає, що $\vec{r}(t)$ — сталий вектор:
   а) не застосовуючи формулу Тейлора;
   б) за допомогою формули Тейлора.
2. Функції $\vec{r}_i(t)$ $(i=1,2,3)$ неперервні в точці $t=t_0$. Тоді в цій точці неперервна функція $\left(\vec{r}_1(t)\vec{r}_2(t)\vec{r}_3(t)\right)$. Довести.
3. Функції $\vec{r}_i(t)$ $(i=1,2,3)$ диференційовані в точці $t=t_0$. Знайти похідну $\left(\vec{r}_1(t)\vec{r}_2(t)\vec{r}_3(t)\right)'$.
4. Знайти похідні по t від функцій $\left[\vec{r}\,',\vec{r}\,''\right],\left(\vec{r}\,\vec{r}\,'\vec{r}\,'''\right)$, $\left[\left[\vec{r}\,',\vec{r}\,''\right],\vec{r}\,'''\right]$, де $\vec{r}=\vec{r}(t)\in C^4_{(a,b)}$.
5. Чи виконуються рівності
$$\left|\vec{r}\,'(t)\right|=\left|\vec{r}(t)\right|',\quad \vec{r}(t)\vec{r}\,'(t)=\left|\vec{r}(t)\right|\left|\vec{r}(t)\right|'\ ?$$
6. Використати задачу 3 для встановлення правила диференціювання визначника третього порядку.
7. Для того, щоб вектор $\vec{r}(t)$ зберігав напрямок при всіх $t\in(a,b)$, необхідно і досить, щоб при $\forall t\in(a,b)$ $\vec{r}(t)\,||\,\vec{r}\,'(t)$. Довести.

<u>Доведення</u>. Подамо $\vec{r}(t)$ у вигляді
$$\vec{r}(t)=\left|\vec{r}(t)\right|\vec{\tau}(t), \tag{1.1}$$
де $\vec{\tau}(t)$ — одиничний вектор. Якщо $\vec{r}(t)$ зберігає напрямок, то $\vec{\tau}(t)=\vec{e}$ — сталий вектор. Продиференціюємо рівність (1.1):

$\vec{r}'(t) = \left|\vec{r}(t)\right|' \vec{e}$, звідки, поклавши $\lambda(t) = \dfrac{\left|\vec{r}(t)\right|'}{\left|\vec{r}(t)\right|}$, одержуємо, що

$$\vec{r}'(t) = \lambda(t)\vec{r}(t), \tag{1.2}$$

тобто $\vec{r}'(t) || \vec{r}(t)$.

Навпаки, нехай виконується рівність (1.2). Покажемо, що тоді в (1.1) вектор $\vec{\tau}(t)$ сталий. Продиференціювавши рівність (1.1), маємо, що $\vec{r}'(t) = \left|\vec{r}(t)\right|' \vec{\tau}(t) + \left|\vec{r}(t)\right| \vec{\tau}'(t)$. Звідси

$$\left|\vec{r}(t)\right| \vec{\tau}'(t) = \vec{r}'(t) - \left|\vec{r}(t)\right|' \vec{\tau}(t) =$$
$$= \lambda(t)\vec{r}(t) - \left|\vec{r}(t)\right|' \vec{\tau}(t) = \left(\lambda(t)\left|\vec{r}(t)\right| - \left|\vec{r}(t)\right|'\right)\vec{\tau}(t).$$

Отже, оскільки за лемою 1.1 $\vec{\tau}'(t) \perp \vec{\tau}(t)$, то

$$\left|\vec{r}(t)\right| \left|\vec{\tau}'(t)\right|^2 = \left(\lambda(t)\left|\vec{r}(t)\right| - \left|\vec{r}(t)\right|'\right)\vec{\tau}\vec{\tau}' = 0,$$

звідки $\vec{\tau}'(t) = \vec{0}$, тобто $\vec{\tau}(t)$ сталий одиничний вектор.

8. Для того, щоб вектор $\vec{r}(t)$ був паралельний до фіксованої площини ω при всіх $t \in (a,b)$ необхідно, а при умові, що при всіх $t \in (a,b)$ $\vec{r}(t) \nparallel \vec{r}'(t)$ і достатньо, щоб мішаний добуток $\left(\vec{r}(t)\vec{r}'(t)\vec{r}''(t)\right)$ дорівнював нулю при всіх $t \in (a,b)$. Довести.

<u>*Доведення.*</u> Нехай $\vec{a}$ — нормальний вектор площини ω і $\vec{r}(t) || \omega$. Тоді $\vec{a}\vec{r}(t) = 0$, звідки $\vec{a}\vec{r}' = 0$ і $\vec{a}\vec{r}'' = 0$. Отже, вектори $\vec{r}(t), \vec{r}'(t), \vec{r}''(t)$ перпендикулярні вектору $\vec{a}$, тобто компланарні. Тоді їх мішаний добуток дорівнює нулю.

Навпаки, нехай $\left(\vec{r}(t)\vec{r}'(t)\vec{r}''(t)\right) = 0$. Оскільки $\vec{r}'(t) \nparallel \vec{r}(t)$, то $\vec{r}''(t)$ можна подати у вигляді

$$\vec{r}''(t) = \lambda_1(t)\vec{r}(t) + \lambda_2(t)\vec{r}'(t).$$

Тоді

$$\left[\vec{r}, \vec{r}'\right]' = \left[\vec{r}, \vec{r}''\right] = \lambda_1(t)\left[\vec{r}, \vec{r}\right] + \lambda_2(t)\left[\vec{r}, \vec{r}'\right] = \lambda_2(t)\left[\vec{r}, \vec{r}'\right].$$

В попередньому прикладі показано, що вектор $[\vec{r},\vec{r}\,']$ зберігає напрямок. Але $\vec{r}\perp[\vec{r},\vec{r}\,']$, отже паралельний до площини, перпендикулярної до вектора $[\vec{r}(t),\vec{r}\,'(t)]$.

9. Нехай в репері $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ вектор $\vec{r}(t)$ має координати $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, що є аналітичними функціями на (a,b). Довести, що $\vec{r}(t)$ — аналітична функція на цьому відрізку.
10. Нехай вектор-функція $\vec{r}(t)$ неперервна на $[a,b]$ і має в репері $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ координати $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$. Довести, що
$$\int_a^b \vec{r}(t)dt = \vec{i}\int_a^b x(t)dt + \vec{j}\int_a^b y(t)dt + \vec{k}\int_a^b z(t)dt .$$
11. Якщо вектор-функція $\vec{r}(t)$ неперервна на $(a,в)$, то $\frac{d}{dt}\int_a^t \vec{r}(\xi)d\xi = \vec{r}(t)$. Довести.
12. Якщо $\vec{r} = \vec{r}(t)$ і $t = f(\tau)$ диференційовані функції, то $\frac{d\vec{r}}{d\tau} = \frac{d\vec{r}}{dt}\cdot\frac{dt}{d\tau}$. Довести.
13. Показати, що теорема Ролля не має місця для векторних функцій.

§ 2. ПОНЯТТЯ КРИВОЇ. ЗВИЧАЙНІ ТА ОСОБЛИВІ ТОЧКИ КРИВОЇ. ДОТИЧНА ДО КРИВОЇ ТА ДОСТАТНІ УМОВИ ЇЇ ІСНУВАННЯ

Нехай $\vec{r}(t)$ — вектор-функція, що визначена на проміжку $(a,b) \subset R^1$ і приймає значення з множини V^3. При зміні параметра t від a до $в$ кінець вектора $\vec{r}(t)$ опише в просторі E^3 деяку множину точок $M(t)$. Цю множину ми назвемо *годографом вектор-функції* або *кривою* l, яка задається рівнянням

$$\vec{r} = \vec{r}(t). \tag{2.1}$$

При цьому вектор-функцію $\vec{r}(t)$ будемо називати *параметризацією кривої* l. Зрозуміло, що крива l може бути задана і іншою параметризацією, наприклад, $\vec{r}_0(\tau)$, де $\tau \in (a_0, b_0) \subset R^1$. Параметризації $\vec{r}(t)$ і $\vec{r}_0(\tau)$ будемо вважати *еквівалентними*, якщо існує оборотна диференційована на (a_0, b_0) функція $t = f(\tau)$, яка відображає інтервал (a_0, b_0) на (a,b), причому обернена функція $\tau = f^{-1}(t)$ диференційована на (a,b).

Очевидно, що в сенсі наведеного означення, кривою є довільна непорожня множина точок евклідового простору E^3, оскільки її потужність не перевищує потужності множини точок інтервалу $(a, в)$. Ця обставина на перший погляд незвична, але використовувати її в подальшому досить зручно.

Означення 2.1. *Точку* $t_0 \in (a,b)$ *назвемо звичайною точкою параметризації* $\vec{r}(t)$, *якщо вектор-функція* $\vec{r}(t)$ *диференційована в точці* t_0, *причому*

$$\vec{r}\,'(t_0) \neq \vec{0}. \tag{2.2}$$

Точку, що не є звичайною, назвемо особливою точкою параметризації $\vec{r}(t)$.

Якщо точці $M \in l$ відповідають точки $t_0 \in (a,b)$ і $\tau_0 \in (a_0, b_0)$ в еквівалентних параметризаціях $\vec{r}(t)$ і $\vec{r}_0(\tau)$ відповідно, то ці точки одночасно або звичайні, або особливі для обох цих параметризацій. В подальшому при дослідженні певної кривої будемо використовувати одночасно тільки еквівалентні її параметризації. Тому, там, де це не викликає непорозумінь, звичайною (особливою) будемо називати саму точку $M(t_0)$ кривої l, якій відповідає звичайна (особлива) точка t_0 її параметризації $\vec{r}(t)$.

Непорозуміння може виникнути, якщо точка M кривої l є точкою самоперетину, тобто відповідає різним значенням параметра t. В цьому випадку криву l слід розбити на частини, які містять цю точку і для яких вона не є точкою самоперетину, та вияснити тип цієї точки окремо для кожної такої частини кривої l. Для зручності такі точки виключимо з розгляду.

Означення 2.2. *Криву, задану рівнянням (2.1), назвемо регулярною кривою k-го порядку, якщо* $\vec{r}(t) \in C^k_{(a,b)}$. *Регулярну криву першого порядку назвемо гладкою кривою. Якщо* $\vec{r}(t)$ *— аналітична функція на (а, в), то її годограф назвемо аналітичною кривою на цьому проміжку.*

Означення 2.3. *Множину точок простору* E^3 *назвемо простою дугою, якщо існує такий репер* $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, *в якому координати цих точок x, y, z задовольняють рівняння*

$$y = y(x),\ z = z(x). \tag{2.3}$$

Відмітимо, що в означенні 2.3 координати y і z виражаються через абсцису x. Якщо x і y виражаються через z, або x і z виражаються через y, то означення 2.3 залишається в силі.

Теорема 2.1. *У всякої звичайної точки гладкої кривої існує окіл, в якому вона є простою дугою.*

<u>*Доведення*</u>. Нехай точка $M_0(t_0)$ годографа вектор-функції $\vec{r}(t)$ звичайна і $\vec{r}(t) \in C^1_{(a,b)}$. За означенням 2.1 $\vec{r}\,'(t_0) \neq \vec{0}$. Виберемо довільний репер $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ і розкладемо $\vec{r}(t)$ в цьому репері:

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}\ . \tag{2.4}$$

Легко бачити, що вектор $\vec{r}\,'(t)$ має координати $\left(x'(t), y'(t), z'(t)\right)$. Умова (2.2) веде до того, що хоча б одне з чисел $x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)$ відмінне від нуля. Нехай, для означеності, $x'(t_0) \neq 0$. Співвідношення (2.4) свідчить про те, що в репері $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ годограф вектор-функції $\vec{r}(t)$ задається параметричними рівняннями

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t). \tag{2.5}$$

Перше з рівнянь (2.5) запишемо у вигляді

$$F(t, x) = x - x(t) = 0. \tag{2.6}$$

Беручи до уваги, що $\left.\dfrac{\partial F(t,x)}{\partial t}\right|_{t=t_0} = -x'(t_0) \neq 0$, і використовуючи відому з курсу математичного аналізу теорему про існування неявної функції, приходимо до висновку, що існує такий окіл точки t_0, в якому рівняння (2.6) розв'язується відносно t, тобто $t = \varphi(x)$, де $x \in (x_1, x_2) \subset R^1$, причому $\varphi(x) \in C^1_{(x_1, x_2)}$. Підставляючи $\varphi(x)$ замість t у друге та третє рівняння (2.5), одержуємо співвідношення виду (2.3), що закінчує доведення.

Означення 2.4. *Пряму називають дотичною до кривої в даній її точці, якщо вона є граничним положенням січної, що проходить через дану точку та іншу точку кривої, яка необмежено наближається до даної.*

Дамо ще одне означення дотичної до кривої, яке еквівалентне означення 2.4. Для цього зробимо *рисунок 2*.

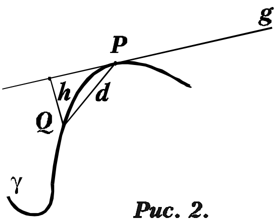

Рис. 2.

Нехай γ — дана крива, P — точка на ній, g — пряма, що проходить через точку P. Візьмемо на кривій γ точку Q і позначимо її відстані від точки P та прямої g через d і h відповідно.

Означення 2.5. *Пряму g назвемо дотичною до кривої γ в точці P, якщо частка h/d прямує до нуля при $Q \to P$.*

Еквівалентність означень 2.4 і 2.5 обумовлена тим, що h/d є синус кута, утвореного прямими g і PQ.

Теорема 2.2. *Гладка крива, що задана рівнянням (2.1), в кожній своїй звичайній точці* $M_0(t_0)$ *має єдину дотичну, яка паралельна вектору* $\vec{r}\,'(t_0)$.

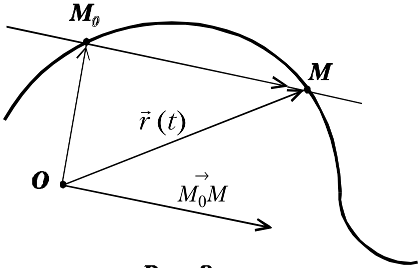

Рис. 3.

Доведення. Нехай точкам M_0 та M даної кривої відповідають значення параметра t_0 і t, а їх радіуси-вектори дорівнюють $\vec{r}(t_0)$ і $\vec{r}(t)$ відповідно (*рис. 3*). Тоді $\overrightarrow{M_0M} = \vec{r}(t) - \vec{r}(t_0)$, а вектор $\vec{\alpha}(t) = \dfrac{\vec{r}(t) - \vec{r}(t_0)}{t - t_0}$ паралельний січній M_0M.

Якщо точка M прямує по кривій до точки M_0, то вектор-функція $\vec{\alpha}(t)$ прямує до похідної $\vec{r}\,'(t_0)$ як до своєї границі. Січна M_0M при цьому, обертаючись навколо точки M_0, займає своє граничне положення, яке за означенням 2.4 визначає дотичну до кривої в точці M_0.

Очевидно, що теорема 2.2 в особливих точках кривої не спрацьовує. Проте це не означає, що в цих точках дотична не існує або не визначена. Наступна теорема наводить достатні умови існування дотичної в особливій точці регулярної кривої.

Теорема 2.3. *Нехай рівнянням (2.1) задана регулярна крива p-го порядку, причому* $\vec{r}\,'(t_0) = \vec{r}\,''(t_0) = \ldots = \vec{r}^{(p-1)}(t_0) = \vec{0}$, *а* $\vec{r}^{(p)}(t_0) \neq \vec{0}$. *Тоді в точці* $M_0(t_0)$ *цієї кривої існує єдина дотична, паралельна до вектора* $\vec{r}^{(p)}(t_0)$.

Доведення. Розкладемо функцію $\vec{r}(t)$ в околі точки t_0 за формулою Тейлора:

$$\vec{r}(t)=\vec{r}(t_0)+\frac{\vec{r}^{(p)}(t_0)(t-t_0)^p}{p!}+\vec{R}_p(t), \qquad (2.7)$$

де $\dfrac{\vec{R}_p}{(t-t_0)^p}\to\vec{0}$ при $t\to t_0$. З формули (2.7) одержуємо співвідношення $\dfrac{\vec{r}(t)-\vec{r}(t_0)}{(t-t_0)^p}=\dfrac{1}{p!}\vec{r}^{(p)}(t_0)+\dfrac{\vec{R}_p(t)}{(t-t_0)^p}$, звідки

$$\lim_{t\to t_0}\frac{\vec{r}(t)-\vec{r}(t_0)}{(t-t_0)^p}=\frac{1}{p!}\vec{r}^{(p)}(t_0).$$

Враховуючи, що вектор $\dfrac{\vec{r}(t)-\vec{r}(t_0)}{(t-t_0)^p}$ паралельний січній M_0M (*рис. 3*), а також означення 2.4, закінчуємо доведення теореми.

Якщо крива, що задана рівнянням (2.1) гладка і не містить особливих точок, то рівняння її дотичної можна записати у вигляді

$$\vec{\rho}=\vec{r}(t)+\lambda\vec{r}(t),$$

де $\lambda\in R^1$ — параметр.

Якщо ж ця крива задана в параметричній формі (2.5), то рівняння дотичної до неї в точці $M(x(t),y(t),z(t))$ набирає вигляду

$$\frac{X-x(t)}{x'(t)}=\frac{Y-y(t)}{y'(t)}=\frac{Z-z(t)}{z'(t)}, \qquad (2.8)$$

де X, Y, Z — координати рухомої точки по дотичній.

Означення 2.6. *Нормальною площиною кривої в точці M називають площину, що проходить через точку M перпендикулярно до дотичної в цій точці.*

Знаючи, наприклад, рівняння (2.8), рівняння нормальної площини кривої в точці M легко записуємо у вигляді

$$(X-x(t))x'(t)+(Y-y(t))y'(t)+(Z-z(t))z'(t)=0, \qquad (2.9)$$

де X, Y, Z — координати рухомої точки по нормальній площині.

На завершення параграфа розглянемо питання про особливі точки плоских аналітичних кривих.

Припустимо, що крива l, задана рівнянням (2.1), лежить в площині ω, аналітична на проміжку (a,b), і в точці $t_0 \in (a,b)$ виконуються умови:

1) $\vec{r}'(t_0) = \vec{r}''(t_0) = \ldots = \vec{r}^{(p-1)}(t_0) = \vec{0},\ \vec{r}^{(p)}(t_0) \neq \vec{0}$;

2) $\vec{r}^{(p)}(t_0) \| \vec{r}^{(p+1)}(t_0) \| \ldots \| \vec{r}^{(q-1)}(t_0) \| \vec{r}^{(q)}(t_0), q > p$. (2.10)

Розкладемо $\vec{r}(t)$ в ряд Тейлора в околі точки t_0 і випишемо рівність

$$\overrightarrow{M_0M} = \vec{r}^{(p)}(t_0)\frac{(t-t_0)^p}{p!} + \ldots + \vec{r}^{(q)}(t_0)\frac{(t-t_0)^q}{q!} + \ldots,$$

в якій M — точка кривої l, що відповідає значенню параметра t.

З другого боку, вектор $\overrightarrow{M_0M}$ завжди можна розкласти по неколінеарних векторах $\vec{r}^{(p)}(t_0)$, $\vec{r}^{(q)}(t_0)$ з деякими коефіцієнтами $\alpha(t)$, $\beta(t)$:

$$\overrightarrow{M_0M} = \alpha(t)\vec{r}^{(p)}(t_0) + \beta(t)\vec{r}^{(q)}(t_0). \tag{2.11}$$

Враховуючи умови (2.10), можна твердити, що головна частина коефіцієнта $\alpha(t)$ при $t \to t_0$ буде $(t-t_0)^p / p!$ (наступні члени ряду Тейлора мають більший порядок малості), а головна частина коефіцієнта $\beta(t)$ буде $(t-t_0)^q / q!$ (попередні члени ряду Тейлора колінеарні з $\vec{r}^{(p)}(t_0)$ і їх складові по $\vec{r}^{(q)}(t_0)$ дорівнюють $\vec{0}$, а наступні члени — вищого порядку малості). Знаки коефіцієнтів $\alpha(t)$ і $\beta(t)$ співпадають з знаками їх головних частин, тобто при $t > t_0$ вони обидва додатні, а при $t < t_0$ знаки $\alpha(t), \beta(t)$, залежать від парності показників p, q відповідно.

Взагалі при $t < t_0$ можливі чотири випадки:

1) p непарне, q парне, $\alpha < 0,\ \beta > 0$;

2) p непарне, q непарне, $\alpha < 0,\ \beta < 0$;

3) p парне, q непарне, $\alpha > 0,\ \beta < 0$;

4) p парне, q парне, $\alpha > 0,\ \beta > 0$.

Кожному з цих випадків відповідає певна будова кривої в околі точки M_0.

Здійснимо паралельний перенос площини ω на вектор $\overrightarrow{M_0O}$. При цьому площина ω, крива l, точки M_0 і M перейдуть в площину ω', криву l', точки O і M' відповідно, причому $\overrightarrow{M_0M} \equiv \overrightarrow{OM'}$. Розіб'ємо площину ω', в якій лежить крива l', на чверті, як вказано на *рис. 4*. Якщо $t \to t_0$, причому $t > t_0$, то $\alpha(t)$ і $\beta(t)$ додатні при любих p і q. З розкладу (2.11) випливає, що при цьому точка M' прямує по кривій l' до точки O з першої чверті, як показано на *рис.4*. Якщо $t < t_0$, то при $t \to t_0$ точка M' прямує до точки O з другої, третьої, четвертої або першої чверті відповідно до випадків 1), 2), 3), 4). При цьому в усіх випадках крива l' в точці O має дотичну, яка визначається вектором $\vec{r}^{(p)}(t_0)$. Зобразимо криву l' в околі точки O відповідно до випадків 1)$-$4) *на рисунках 5-8.*

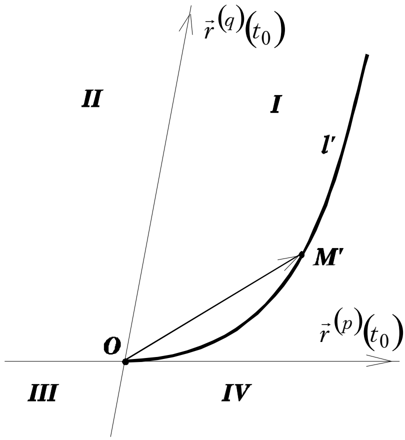

Рис. 4.

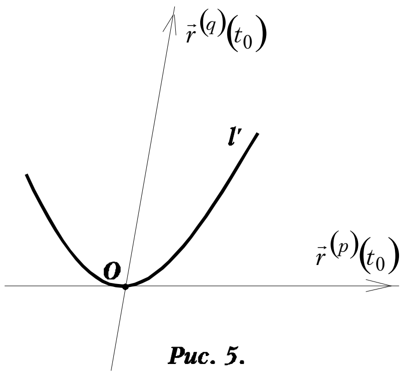

Рис. 5.

Зрозуміло, що поведінка кривої l в околі точки M_0 аналогічна поведінці кривої l' в околі точки O.

Таким чином, існує чотири типи особливих точок M_0 на плоскій кривій l (точки O на кривій l').

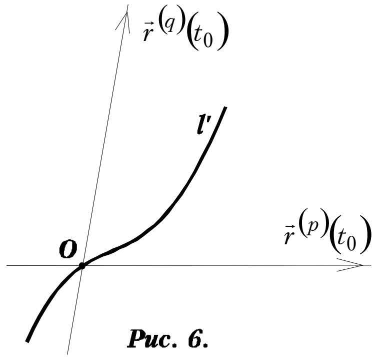

Рис. 6.

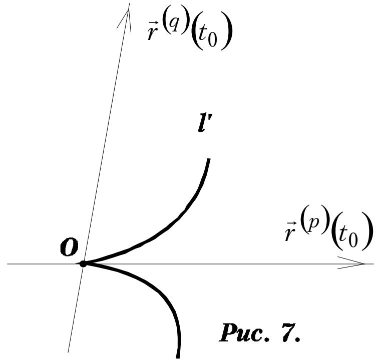

Рис. 7.

Відповідно до випадків 1) — 4) їх називають: *точка основного типу, точка перегину, точка звороту першого роду і точка звороту другого роду*.

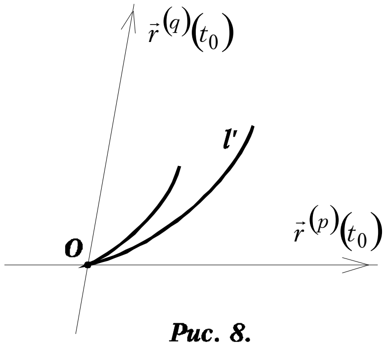

Рис. 8.

Вправи

1. Довести, що годографом вектор-функції $\vec r = \vec a t + \vec b$, де $\vec a$ і $\vec b$ сталі вектори, є пряма.
2. Довести, що годографом вектор-функції $\vec r = \vec a \cos t + \vec b \sin t$, де $\vec a$ і $\vec b$ сталі неколінеарні вектори, є еліпс.

   <u>*Доведення*</u>. Розглянемо афінну систему координат з початком в полюсі O і осями, що визначаються векторами $\vec a$ і $\vec b$. Якщо $\vec e_1$ і $\vec e_2$ — одиничні вектори цих осей, то $\vec a = |\vec a| \vec e_1$, $\vec b = |\vec b| \vec e_2$. Тоді параметричні рівняння годографа мають вигляд $x = |\vec a| \cos t$, $y = |\vec b| \sin t$. Звідси випливає, що годографом заданої вектор-функції є еліпс, який у введеній системі координат має рівняння $\dfrac{x^2}{\vec a^2} + \dfrac{y^2}{\vec b^2} = 1$.

3. Визначити, що є годографом вектор-функції:

   а) $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}_1 \operatorname{ch} t + \vec{r}_2 \operatorname{sh} t$;

   б) $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}_1 t + \vec{r}_2 t^2$,

   де $\vec{r}_0, \vec{r}_1, \vec{r}_2$ — сталі вектори, причому $\vec{r}_1 \nparallel \vec{r}_2$.

4. Написати векторне рівняння кола, яке в декартовій системі координат має рівняння $x^2 + y^2 = R^2$, прийнявши за параметр:

   а) кут між радіусом-вектором точки кола і додатним напрямком осі абсцис;

   б) довжину дуги кола.

5. Як рухається точка по годографу вектор-функції
$$\vec{r} = \frac{a}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right)\vec{i} + \frac{b}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)\vec{j} ,$$
   коли параметр t змінюється від $-\infty$ до $+\infty$? Яке перетворення параметра треба зробити, щоб параметричні рівняння годографа набрали вигляду $x = a \operatorname{ch} \varphi,\ y = b \operatorname{sh} \varphi$?

6. В яких точках дотична до годографа вектор-функції $\vec{r} = \left(3t - t^3\right)\vec{i} + 3t^2\vec{j} + \left(3t + t^3\right)\vec{k}$ паралельна до площини, яка в репері $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ має рівняння $3x + y + z + 2 = 0$?

7. Знайти геометричне місце точок перетину дотичних до годографа вектор-функції $\vec{r} = a\cos t\vec{i} - a\sin t\vec{j} + be^t\vec{k}$ з площиною $\left(0, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

8. Довести, що плоскою кривою, в якої довжина відрізку нормалі від точки на кривій до точки перетину з віссю абсцис декартової системи координат на площині є величина стала, є коло з центром на осі абсцис. Записати векторне рівняння цієї кривої.

Розв'язання. Сумістимо полюс з початком декартової системи координат і базисні вектори позначимо через $\vec{i}$ та $\vec{j}$. Нехай шукана крива в репері $\left(\vec{i}, \vec{j}\right)$ має параметричні рівняння $x = x,\ y = y(x)$.

Точку перетину нормалі до кривої, що проведена в точці $M\left(x, y(x)\right)$, з віссю абсцис позначимо буквою $N.$ Використовуючи рівняння нормалі, знаходимо довжину відрізка MN і прирівнюємо її до сталої величини a. Одержуємо рівняння

$$|y|\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}=a .$$

Перетворюючи його, приходимо до наступного рівняння

$$dx=\pm\frac{ydy}{\sqrt{a^2-y^2}} .$$

Інтегруючи почленно, одержуємо, що $x=\mp\sqrt{a^2-y^2}+c$, де c — стала інтегрування. Звідси $(x-c)^2+y^2=a^2$. При фіксованому c одержуємо рівняння кола радіуса a з центром на осі абсцис. Його векторне рівняння: $\vec{r}=(c+a\cos t)\vec{i}+a\sin t\vec{j}$.

9. Записати векторне рівняння плоскої кривої, довжина відрізку дотичної якої від точки дотику до точки перетину з віссю абсцис не залежить від точки дотику (трактриса).

10. Скласти рівняння дотичної до плоскої кривої, рівняння якої записане в полярній системі координат.

11. Знайти дотичну в особливій точці кривої, що задана в репері $\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ параметричними рівняннями

$$x=t^2;\; y=\frac{t^3}{3};\; z=\frac{t^4}{12} .$$

12. Коло радіуса a котиться без ковзання по прямій g. Знайти векторне рівняння кривої γ, яку описує фіксована точка M кола. Вияснити характер особливих точок кривої (циклоїда).

Розв'язання. Приймемо пряму g за вісь абсцис. Нехай в початковий момент точка M знаходиться в початку координат, який співпадає з полюсом O. Позначимо через t кут між вертикальним радіусом кола і радіусом кола, проведеним в точку M циклоїди (*рис. 9*).

Радіус-вектор точки M подамо у вигляді $\vec{r}(t)=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CM}$.

Очевидно, $\overrightarrow{AC}=a\vec{j}$. Оскільки коло котиться без ковзання, то довжина відрізка OA дорівнює довжині дуги кола $\overset{\cup}{AM}$, звідки $\overrightarrow{OA} = at\vec{i}$. Оскільки $\overrightarrow{CM} = -\left(\vec{i}\sin t + \vec{j}\cos t\right)a$, то $\vec{r}(t) = a\left\{(t - \sin t)\vec{i} + (1 - \cos t)\vec{j}\right\}$. Вектор $\vec{r}\,'(t) = a\left\{(1 - \cos t)\vec{i} + \sin t\vec{j}\right\}$ перетворюється на $\vec{0}$ в особливих точках циклоїди при $t = 2k\pi$. Але в цих точках $\vec{r}\,'' = a\vec{j}$, звідки випливає, що дотична в них паралельна осі ординат. Це свідчить про те, що особливої точки циклоїди — точки звороту першого роду.

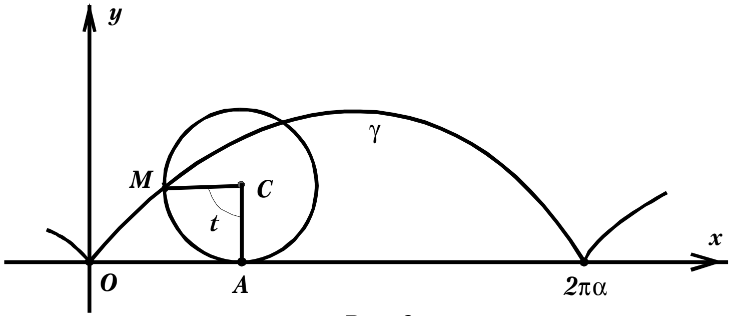

Рис. 9.

13. Довести, що множина точок площини, яка в декартовій системі координат визначається рівнянням

$$|x|^{\frac{2}{3}} + |y|^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$$

(астроїда), є аналітичною кривою. Знайти її особливі точки. Встановити тип особливих точок.

<u>*Вказівка.*</u> Перейти до параметричного завдання кривої: $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$. Особливі точки: $(0;a)$, $(0;-a)$, $(a;0)$, $(-a;0)$ — точки звороту першого роду.

14. Що можна сказати про поведінку годографа аналітичної в точці t_0 вектор-функції $\vec{r}(t)$ в околі цієї точки, якщо:

а) $\vec{r}\,'(t_0) = \vec{r}\,''(t_0) = \vec{r}\,'''(t_0) = \ldots = \vec{0}$;

б) $\vec{r}\,'(t_0) = \ldots = \vec{r}^{(p-1)}(t_0) = \vec{0}$, $\vec{0} \neq \vec{r}^{(p)}(t_0) \| \vec{r}^{(p+1)}(t_0) \| \vec{r}^{(p+2)}(t_0) \| \ldots$

§ 3. ДОВЖИНА ДУГИ КРИВОЇ. ПРИРОДНА ПАРАМЕТРИЗАЦІЯ. ПОНЯТТЯ ПРО ДОТИК КРИВИХ

Нагадаємо, що відображення f множини X в множину Y називають *неперервним в точці* $x_0 \in X$, якщо для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ існує число $\delta > 0$ таке, що для $x \in X$ відстань між точками $f(x_0)$ та $f(x)$ менша за ε, як тільки відстань між точками x_0 та x менша за δ.

Відображення f називають *неперервним на множині* X, якщо воно неперервне в кожній точці цієї множини.

Неперервне на множині X відображення f: $X \to f(X)$ називають *топологічним* або *гомеоморфізмом*, якщо воно бієктивне (взаємно-однозначне), і обернене відображення f^{-1} неперевне на множині $f(X)$. При цьому множини X і $f(X)$ називають *гомеоморфними* або *топологічно еквівалентними*.

Криву, гомеоморфну відкритому інтервалу прямої, назвемо ***елементарною*** кривою.

Відображення f_1: $X_1 \to f_1(X_1)$ називають *звуженням відображення* f на $X_1 \subset X$, якщо для довільного $x \in X_1$ $f_1(x) = f(x)$.

Дугу годографа l вектор-функції $\vec{r}(t)$, яка відповідає інтервалу (a,b) зміни параметра t, позначимо через $l(a,b)$. Доведемо спочатку допоміжне твердження.

Лема 3.1. *Нехай рівнянням* $\vec{r} = \vec{r}(t)$ *визначена гладка крива* $l(a,b)$, *причому* $\vec{r}\,'(t_0) \neq \vec{0}$, $t_0 \in (a,b)$. *Тоді існує такий інтервал* $T = (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \subset (a,b)$, *на якому дуга кривої* $l(T)$ *топологічно еквівалентна* T.

Доведення. Введемо в просторі V^3 довільний репер $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Тоді крива $l(a,b)$ визначатиметься параметричними рівняннями (2.5), причому $x(t),\ y(t),\ z(t) \in C^1_{(a,b)}$. Позначимо відображення інтервала (a,b) в множину $l(a,b)$, що здійснюється за формулами (2.5), через f.

Нехай $M^*(t^*)$ – довільна точка $l(a,b)$, $t^* \in (a,b)$. Відстань між точками M^* і $M(t) \in l(a,b)$ визначається за формулою

$\rho(M^*,M) = \sqrt{\left(x(t^*) - x(t)\right)^2 + \left(y(t^*) - y(t)\right)^2 + \left(z(t^*) - z(t)\right)^2}$ і стає меншою будь-якого числа $\varepsilon > 0$ як тільки

$$\left|x(t^*) - x(t)\right| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{3}}; \left|y(t^*) - y(t)\right| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{3}}; \left|z(t^*) - z(t)\right| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{3}}.$$

З неперервності функцій $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ на (a, b) випливає існування такого числа $g > 0$, що останні нерівності мають місце як тільки $\left|t^* - t\right| < g$. Отже, відображення f неперервне на проміжку (a,b).

Точка $M(t_0)$ за умовою леми є звичайною. Нехай, для означеності, $x'(t_0) \neq 0$. За теоремою 2.1 існує такий окіл $T \subset (a,b)$ точки t_0, в якому крива l є простою дугою, тобто перше рівняння (2.5) розв'язується відносно t, причому $t = \varphi(x)$ є неперервною на проміжку $\left(x(t_0 - \delta),\ x(t_0 + \delta)\right)$ функцією.

Зауважимо, що серед точок дуги кривої $l(T)$ немає жодних двох з однаковими абсцисами. Позначимо через f^0 звуження відображення f на інтервал T і розглянемо відображення f^*: $l(T) \to T$, яке точці $M(x,y,z) \in l(T)$ ставить у відповідність точку $\varphi(x) \in T$. Легко бачити, що відображення f^* обернене по відношенню до відображення f^0 і неперервне на множині $l(T)$. Лему доведено.

Зауваження 3.1. *Існування такого околу T_0 точки t_0, на якому звуження f_0 відображення f є бієкція, можна довести методом від супротивного.*

Припустимо, що такого околу не існує. Тоді в як завгодно малому околі t_0 можна вказати t_1 і t_2 $(t_1 \neq t_2)$ такі, що

$$x(t_1) = x(t_2), y(t_1) = y(t_2), z(t_1) = z(t_2).$$

За теоремою про середнє значення маємо

$$x(t_1) - x(t_2) = x'(\xi_1)(t_1 - t_2),$$
$$y(t_1) - y(t_2) = y'(\xi_2)(t_1 - t_2),$$
$$z(t_1) - z(t_2) = z'(\xi_3)(t_1 - t_2),$$

де ξ_1, ξ_2, ξ_3 лежать між t_1 і t_2. Звідси випливає, що

$$x'(\xi_1) = y'(\xi_2) = z'(\xi_3) = 0.$$

Оскільки t_1 і t_2 як завгодно близькі до t_0, то з неперервності функцій $x'(t), y'(t), z'(t)$ випливає, що

$$x'(t_0) = y'(t_0) = z'(t_0) = 0,$$

отже $\vec{r}\,'(t_0) = \vec{0}$, що суперечить умові.

Наслідок 3.1. *У всякої звичайної точки гладкої параметризації існує окіл, в якому вона визначає елементарну криву.*

Розглянемо тепер дугу $\gamma = l(T_1, T_2)$ кривої l при умові, що інтервал (T_1, T_2) належить проміжку T, про який йшла мова в лемі 3.1. Виконаємо розбиття відрізка $[T_1, T_2]$ на n частин точками

$$t_0 = T_1 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{n-1} < t_n = T_2.$$

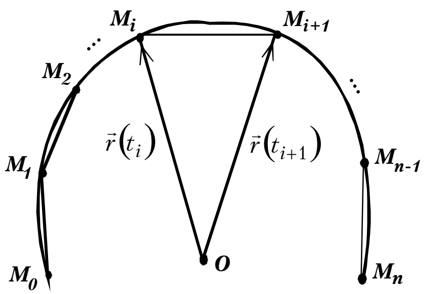

Рис. 10.

При цьому, використовуючи лему 3.1, можна твердити, що дуга $\overset{\cup}{M_0 M_n}$ кривої l $(M_0 = M(T_1), M_n = M(T_2))$ теж розіб'ється на n дуг точками $M_i = M(t_i)$ $(i = 0,1,2,\ldots,n)$, які є кінцями векторів $\vec{r}(t_i)$ $(i = 0,1,2,\ldots,n)$ відповідно, причому порядок їх розміщення на кривій l такий, як вказано на *рисунку 10*. Ламану $M_0 M_1 M_2 \ldots M_n$ позначимо через Γ. Довжину $s(\Gamma)$ ламаної Γ визначає рівність

$$s(\Gamma) = \sum_{i=1}^{n-1} M_i M_{i+1} = \sum_{i=0}^{n-1} \left| \vec{r}\left(t_{i+1}\right) - \vec{r}\left(t_i\right) \right|.$$

Дуга γ має довжину $s(\gamma)$, якщо границя

$$s(\gamma) = \lim_{\max \Delta t_i \to 0} s(\Gamma)$$

існує і не залежить від способу розбиття відрізка $\left[T_1, T_2\right]$. Тут позначено $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$.

Теорема 3.1. *Нехай рівнянням $\vec{r} = \vec{r}(t)$ на проміжку (a, b) задана регулярна крива другого порядку і в точці $t_0 \in (a, b)$ $\vec{r}\,'(t_0) \neq \vec{0}$. Тоді дуга γ цієї кривої має довжину, яка обчислюється за формулою*

$$S(\gamma) = \int_{T_1}^{T_2} \left| \vec{r}\,'(t) \right| dt .$$

<u>*Доведення*</u>. Розглянемо суму

$$g(\Gamma) = \sum_{i=0}^{n-1} \left| \vec{r}\,'\left(t_i\right) \right| \Delta t_i$$

і покажемо, що

$$\lim_{\max \Delta t_i \to 0} \left(s(\Gamma) - g(\Gamma) \right) = 0. \tag{3.1}$$

Випишемо нерівності

$$\left| s(\Gamma) - g(\Gamma) \right| \leq \sum_{i=0}^{n-1} \left\| \vec{r}\left(t_{i+1}\right) - \vec{r}\left(t_i\right) \right| - \left| \vec{r}\,'\left(t_i\right) \right| \Delta t_i \right| \leq$$

$$\leq \sum_{i=0}^{n-1} \left| \vec{r}\left(t_{i+1}\right) - \vec{r}\left(t_i\right) - \vec{r}\,'\left(t_i\right) \Delta t_i \right|$$

і скористаємося формулами Тейлора

$$\vec{r}\left(t_{i+1}\right) = \vec{r}\left(t_i\right) + \vec{r}\,'\left(t_i\right) \Delta t_i + \frac{\vec{Q}_i \left(\Delta t_i\right)^2}{2!}$$

при $i = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$.

В репері $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ $\vec{Q}_i$ має вигляд (див. § 1)

$$\vec{Q}_i = x''\left(\xi_{i_1}\right)\vec{i} + y''\left(\xi_{i_2}\right)\vec{j} + z''\left(\xi_{i_3}\right)\vec{k},$$

де $\xi_{i_1}, \xi_{i_2}, \xi_{i_3}$ — точки з проміжку $\left[T_1, T_2\right]$. Оскільки функції $x''(t)$, $y''(t)$, $z''(t)$ неперервні на $\left[T_1, T_2\right]$, то вони обмежені на цьому відрізку. Тому й

$$\left|\vec{Q}_i\right| = \sqrt{x''^2\left(\xi_{i_1}\right) + y''^2\left(\xi_{i_2}\right) + z''^2\left(\xi_{i_3}\right)}$$

рівномірно по i обмежений деякою сталою $0 < C < \infty$. Тоді

$$\left|s(\Gamma) - g(\Gamma)\right| \le \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\left|\vec{Q}_i\right|\left(\Delta t_i\right)^2}{2!} \le \frac{C}{2} \max \Delta t_i \sum_{i=0}^{n-1} \Delta t_i =$$

$$= \frac{C}{2} \max \Delta t_i \left(T_2 - T_1\right) \xrightarrow[\max \Delta t_i \to 0]{} 0,$$

що доводить співвідношення (3.1). В цьому разі покладемо

$$s(\gamma) = \lim_{\max \Delta t_i \to 0} g(\Gamma)$$

Але $g(\Gamma)$ є інтегральною сумою неперервної на відрізку $\left[T_1, T_2\right]$ функції $\left|\vec{r}\,'(t)\right|$, тобто

$$\lim_{\max \Delta t_i \to 0} g(\Gamma) = \int_{T_1}^{T_2} \left|\vec{r}\,'(t)\right| dt,$$

що й треба було довести.

Зауваження 3.2. *Умови теореми 3.1 можна послабити. Читача, який зацікавиться цим питанням, відсилаємо до розділу «Спрямлювані криві» будь-якого досить повного курсу математичного аналізу.*

Теорема 3.1 має локальний характер. Можливість її розповсюдження на глобальний випадок дає наступне твердження.

Теорема 3.2. *Нехай рівнянням $\vec{r} = \vec{r}(t)$ на проміжку (а, в) задана регулярна крива l другого порядку і $\gamma\left[t_1, t_2\right]$ — дуга кривої l, гомеоморфна замкненому відрізку $\left[t_1, t_2\right] \subset (a, b)$. Тоді довжина цієї дуги існує і визначається за формулою*

$$s(\gamma)=\int_{t_1}^{t_2}\left|\vec{r}\,'(t)\right|dt\,. \tag{3.2}$$

Доведення теореми 3.2 повторює доведення теореми 3.1.

Якщо у формулі (3.2) t_2 покласти змінною, що дорівнює t, то довжина дуги кривої $\gamma_t = l[t_1, t]$ стає функцією від t:

$$s(t)=\int_{t_1}^{t}\left|\vec{r}\,'(\xi)\right|d\xi\,. \tag{3.3}$$

Продиференціювавши останню рівність по t і беручи до уваги, що підінтегральна функція $\left|\vec{r}\,'(t)\right|$ неперервна при всіх $t\in[t_1, t_2]$, маємо

$$\frac{ds(t)}{dt}=\left|\vec{r}\,'(t)\right|. \tag{3.4}$$

Якщо на дузі $l[t_1, t_2]$ немає особливих точок, то $\left|\vec{r}\,'(t)\right|>0$, отже функція $s(t)$ монотонно зростає на цьому відрізку. Цього достатньо для існування оберненої до $s=s(t)$ функції $t=t(s)$, визначеної на відрізку $[s(t_1), s(t_2)]=S_0$.

В такому випадку на відрізку S_0 дугу γ кривої l можна задати векторним рівнянням $\vec{r}=\vec{r}(t(s))=\vec{r}_1(s)$, в якому роль параметра відіграє довжина дуги кривої.

Якщо довжину дуги γ_t відраховувати від точки $M(t_0)\in\gamma[t_1, t_2]$, де t_0 — внутрішня точка відрізка $[t_1, t_2]$, то при $t<t_0$ формула (3.3) дає довжину дуги з протилежним знаком.

Означення 3.1. *Якщо крива задана на відрізку $(s_1, s_2)\subset R^1$ рівнянням $\vec{r}=\vec{r}(s)$, де s — довжина дуги вздовж цієї кривої, то параметр s називають природним і кажуть, що крива l задана в природній параметризації.*

Якщо крива l задана рівнянням $\vec{r}=\vec{r}(s)$ в природній параметризації, то і в цьому випадку має місце формула (3.3), тобто

$$s = \int_{s_1}^{s} \left|\vec{r}\,'(\xi)\right| d\xi,$$

звідки диференціюванням по s одержуємо, що $1 = \left|\vec{r}\,'(s)\right|$.

Отже, похідна вектор-функції $\vec{r}(s)$ по довжині дуги її годографа є одиничний вектор.

Припустимо, що треба вивчити поведінку деякої кривої в досить малому околі певної її точки з вказаною точністю. Тоді можна підібрати другу криву, яка має добре відомі властивості і в розглядуваному околі мало відрізняється від даної кривої. Тим самим ми складаємо уявлення і про задану криву в даному околі її точки. Дамо нижче точне означення поняття "*мало відрізняється*".

Розглянемо дві криві l_1 і l_2, що мають спільну точку M_0. Припустимо, що обидві вони задані в природній параметризації рівняннями $\vec{r} = \vec{r}_1(s)$ і $\vec{r} = \vec{r}_2(s)$ відповідно. Для простоти вважатимемо, що $\vec{r}_1(0) = \vec{r}_2(0) = \overrightarrow{OM_0}$, де точка O — полюс.

Будемо вважати дані криві регулярними m-го порядку і надалі похідну від вектор-функції по природному параметру позначатимемо через $\dot{\vec{r}}$ (замість $\vec{r}\,'(s)$).

Якщо $\dot{\vec{r}}_1(0) \nparallel \dot{\vec{r}}_2(0)$, то дотичні до кривих l_1 і l_2 в точці M_0 не співпадають, отже ці криві перетинаються в точці M_0.

Якщо ж вектори $\dot{\vec{r}}_1(0)$ і $\dot{\vec{r}}_2(0)$ колінеарні, то дотичні до кривих l_1 і l_2 в точці M_0 співпадають, тобто дані криві дотикаються в цій точці. Вектори $\dot{\vec{r}}_1(0)$ і $\dot{\vec{r}}_2(0)$ одиничні, тому вони або співпадають, або відрізняються знаком. Будемо вважати надалі, що завжди має місце перший випадок, бо інакше на одній з кривих, наприклад l_1, змінимо напрямок відліку довжини дуги від точки M_0 на протилежний, тобто замість параметра s введемо $-s$. Тоді $\dot{\vec{r}}_1(0)$ змінює знак на протилежний і ми приходимо до першого випадку.

Змістимось з точки M_0 на відстань s вздовж кожної кривої в бік додатного приросту довжини дуги. Позначимо $\vec{r}_1(s) = \overrightarrow{OM_1}$, $\vec{r}_2(s) = \overrightarrow{OM_2}$, як показано на *рис. 11*.

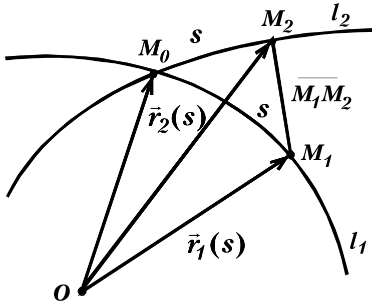

Рис. 11.

Отже, $\overset{\cup}{M_0M_1} = \overset{\cup}{M_0M_2} = s$.

При $s \to 0$ точки M_i прямують по кривих l_i до точки M_0 $(i = 1,\ 2)$, а довжина відрізка M_1M_2 прямує до нуля, тобто є нескінченно малою величиною при $s \to 0$. При цьому чим вищий порядок малості M_1M_2 відносно s при $s \to 0$, тим "*менше відрізняються*" криві l_1 і l_2 в околі точки M_0.

Означення 3.2. *Говорять, що криві l_1 і l_2 мають в точці M_0 дотик n-го порядку, якщо нескінченно мала M_1M_2 не нижче $n+1$-го порядку малості відносно нескінченно малої* s *при $s \to 0$. Якщо при цьому M_1M_2 є нескінченно мала точно $n+1$-го порядку, то говорять, що криві l_1 і l_2 мають в точці M_0 дотик точно n-го порядку.*

Випишемо умови, при яких криві l_1 і l_2 мають дотик n-го порядку $(n \le m)$. Для цього розкладемо вектор-функцію $\vec{r}_1(s)$ і $\vec{r}_2(s)$ за формулою Тейлора в околі точки $s = 0$ і запишемо їх різницю у вигляді

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \vec{r}_2(s) - \vec{r}_1(s) = \left(\dot{\vec{r}}_2(0) - \dot{\vec{r}}_1(0)\right)s + \left(\ddot{\vec{r}}_2(0) - \ddot{\vec{r}}_1(0)\right)\frac{s^2}{2!} + \ldots$$
$$+ \left(\overset{(n)}{\vec{r}_2}(0) - \overset{(n)}{\vec{r}_1}(0)\right)\frac{s^n}{n!} + \left(\vec{R}_n^{(2)}(s) - \vec{R}_n^{(1)}(s)\right),$$

де $\vec{R}_n^{(i)}(s)$ $(i = 1,\ 2)$ — залишкові члени розкладів, тобто

$$\lim_{s\to 0}\frac{\vec{R}_n^{(i)}(s)}{s^n}=\vec{0}\quad (i=1,2).$$

Якщо

$$\dot{\vec{r}}_1(0)=\dot{\vec{r}}_2(0),\ \ddot{\vec{r}}_1(0)=\ddot{\vec{r}}_2(0),\ldots,\overset{(n)}{\vec{r}_1}(0)=\overset{(n)}{\vec{r}_2}(0), \tag{3.5}$$

то $\lim\limits_{s\to 0}\dfrac{\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right|}{s^n}=0$, тобто M_1M_2 є нескінченно мала порядку не менше $n+1$ по відношенню до s при $s\to 0$.

Якщо $n+1\le m$, то вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$ можна подати у вигляді

$$\overrightarrow{M_1M_2}=\left(\dot{\vec{r}}_2(0)-\dot{\vec{r}}_1(0)\right)s+\ldots+\left(\overset{(n+1)}{\vec{r}_2}(0)-\overset{(n+1)}{\vec{r}_1}(0)\right)\frac{s^{n+1}}{(n+1)!}+$$
$$+\left(\vec{R}_{n+1}^{(2)}(s)-\vec{R}_{n+1}^{(1)}(s)\right),$$

де

$$\lim_{s\to 0}\frac{\vec{R}_{n+1}^{(i)}(s)}{s^{n+1}}=\vec{0}\quad (i=1,2).$$

Нехай разом з (3.5) виконується умова

$$\overset{(n+1)}{\vec{r}_2}(0)-\overset{(n+1)}{\vec{r}_1}(0)\ne\vec{0}. \tag{3.6}$$

Тоді

$$\lim_{s\to 0}\frac{M_1M_2}{s^{n+1}}=\left|\overset{(n+1)}{\vec{r}_2}(0)-\overset{(n+1)}{\vec{r}_1}(0)\right|\frac{1}{(n+1)!}\ne 0,$$

тобто криві l_1 і l_2 в точці M_0 мають дотик точно n-го порядку.

Якщо $\dot{\vec{r}}_1(0)\ne\dot{\vec{r}}_2(0)$, то має місце дотик нульового порядку. При цьому криві l_1 і l_2 в точці M_0 мають різні дотичні, тобто перетинаються.

Зауваження 3.3. *Неважко переконатися, що умови (3.5) є також необхідними для того, щоб криві l_1 і l_2 мали в точці M_0 дотик n-го порядку.*

Вправи

1. Знайти довжину дуги кривої l, заданої в репері $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ параметричними рівняннями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$.
2. Знайти довжину простої дуги кривої l, яка в репері $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ визначена рівняннями $y = y(x)$, $z = z(x)$.
3. В декартовій системі координат, що визначена полюсом O і ортами $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, крива l задана рівняннями
$$x^3 = 3a^2y, \quad 2xz = a^2 .$$
Знайти довжину дуги кривої l між площинами, що мають рівняння $y = a/3$, $y = 9a$.

<u>*Розв'язання*</u>. Приймемо за параметр x і виразимо через нього y і z: $y = \dfrac{x^3}{3a^2}$; $z = \dfrac{a^2}{2x}$. Якщо y змінюється від $\dfrac{a}{3}$ до $9a$, то при цьому параметр x змінюється від a до $3a$. Знаходимо похідні
$$y' = \frac{x^2}{a^2}; z' = -\frac{a^2}{2x^2}.$$
Тоді шукана довжина дуги
$$s = \int_a^{3a} \sqrt{1 + \frac{x^4}{a^4} + \frac{a^4}{4x^4}}dx = \int_a^{3a} \frac{a^4 + 2x^4}{2x^2a^2}dx = 9a.$$

4. Знайти довжину дуги гвинтової лінії $\vec{r} = a\cos t\vec{i} + a\sin t\vec{j} + bt\vec{k}$ від точки перетину з площиною $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$, де O — полюс, до довільної точки M.
5. Виписати формулу для обчислення довжини дуги плоскої кривої, яка задана рівнянням $\rho = \rho(\varphi)$ в полярній системі координат.
6. Знайти довжину дуги кривої, заданої в репері $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ параметричними рівняннями $x = a\,\mathrm{ch}\,t$, $y = a\,\mathrm{sh}\,t$, $z = at$, між точками O і t.

7. Записати векторне рівняння ланцюгової лінії, яка в декартовій системі координат задана рівнянням $y = a\,\mathrm{ch}\dfrac{x}{a}$, в природній параметризації.

Розв'язання. Початок декартової системи координат на площині, в якій задано рівняння ланцюгової лінії, виберемо за полюс O. Відлік довжини дуги почнемо від точки $M_0(0, a)$, яку називають вершиною цієї кривої, в бік зростання абсциси x. Тоді $s = \int\limits_0^x \sqrt{1 + \mathrm{sh}^2\dfrac{x}{a}}dx = a\,\mathrm{sh}\dfrac{x}{a}$. Виражаємо y та x через s:

$$y = a\sqrt{1 + \mathrm{sh}^2\frac{x}{a}} = a\sqrt{1 + \frac{s^2}{a^2}} = \sqrt{a^2 + s^2},\ x = a\,\mathrm{arcsh}\frac{s}{a}.$$

Отже, шукане рівняння має вигляд:

$$\vec{r} = a\,\mathrm{arcsh}\frac{s}{a}\vec{i} + \sqrt{a^2 + s^2}\vec{j}.$$

8. Записати векторне рівняння гвинтової лінії в природній параметризації.

9. Нехай регулярні криві другого порядку l_i $(i=1,2)$ в репері $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ задано рівняннями $y = f_i(x)$, $z = g_i(x)$, $(i=1,2)$ і M_0 їх звичайна спільна точка, що відповідає значенню аргумента $x = x_0$. Якщо при $x = x_0$

$$f_1' = f_2',\ g_1' = g_2',\ f_1'' = f_2'',\ g_1'' = g_2'', \tag{3.7}$$

то ці криві в точці M_0 мають дотик другого порядку. Довести.

Розв'язання. Нехай в репері $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ крива l задана рівняннями $y = f(x)$, $z = g(x)$ і $M(x_0, y_0, z_0)$ $(y_0 = f(x_0),\ z_0 = g(x_0))$ її звичайна точка. Перейдемо до природної параметризації цієї кривої в околі точки M_0, відраховуючи довжину дуги s від точки M_0 в бік зростання x.

Одержимо рівняння

$$x = x(s),\ y = f(x(s)),\ z = g(x(s)),\ \text{де } x(0) = x_0, \tag{3.8}$$

причому $ds = \sqrt{1 + f_x'^2 + g_x'^2}dx$. Застосувавши формули диференціювання складної та оберненої функцій, одержимо співвідношення

$$\dot{x} = \frac{1}{\sqrt{1 + f_x'^2 + g_x'^2}}; \quad \ddot{x} = -\frac{\dfrac{d^2 s}{dx^2}}{\left(\dfrac{ds}{dx}\right)^3} = -\frac{f_x' \cdot f_x'' + g_x' \cdot g_x''}{\left(1 + f_x'^2 + g_x'^2\right)^2};$$

$$\dot{y} = f_x' \cdot \dot{x};\ \ddot{y} = f_x'' \cdot \dot{x}^2 + f_x' \cdot \ddot{x};\ \dot{z} = g_x' \cdot \dot{x}; \tag{3.9}$$

$$\ddot{z} = g_x'' \cdot \dot{x}^2 + g_x' \cdot \ddot{x}.$$

Враховуючи (3.9) та (3.7), одержуємо, що для заданих кривих l_1 і l_2, рівняння яких записано в природній параметризації у вигляді (3.8), при $s = 0$ значення $\dot{x}$, $\ddot{x}$, $\dot{y}$, $\ddot{y}$, $\dot{z}$, $\ddot{z}$ відповідно співпадають, тобто виконується умова (3.5) для $n = 2$.

Відзначимо, що умови (3.7) є також необхідними, що випливає із співвідношень

$$f_x' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}};\ f_x'' = \frac{\ddot{y}\dot{x} - \ddot{x}\dot{y}}{\dot{x}^3};\ g_x' = \frac{\dot{z}}{\dot{x}};\ g_x'' = \frac{\ddot{z}\dot{x} - \ddot{x}\dot{z}}{\dot{z}^3}.$$

10. Нехай регулярні криві m-го порядку l_i $(i = 1,\ 2)$ в репері $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ задано параметричними рівняннями $x = x_i(t)$, $y = y_i(t)$, $z = z_i(t)$ $(i = 1,\ 2)$ і M_0 — їх звичайна спільна точка, що відповідає значенню параметра t_0. Якщо при $t = t_0$

$$x_1' = x_2',\ x_1'' = x_2'',\ldots,\ x_1^{(n)} = x_2^{(n)},$$
$$y_1' = y_2',\ y_1'' = y_2'',\ldots,\ y_1^{(n)} = y_2^{(n)},$$
$$z_1' = z_2',\ z_1'' = z_2'',\ldots,\ z_1^{(n)} = z_2^{(n)},$$

де $n \le m$, то ці криві в точці M_0 мають дотик n-го порядку. Довести.

11. В декартовій системі координат на площині парабола задана рівнянням $y = x^2$. Знайти векторне рівняння кола, яке лежить в цій площині і має з параболою в початку координат дотик другого порядку.

12. Який порядок дотику мають плоскі криві l_1 і l_2, що задані в декартовій системі координат рівняннями $x^2 + y^2 - 6x + 6y + 10 = 0$ та $\sqrt{x} + \sqrt{y} - 2 = 0$, в точці $A(1,1)$?

13. Довести, що довжина дуги γ кривої l (теорема 3.2), визначена за формулою (3.2), співпадає з точною верхньою гранню множини довжин всіх ламаних, вписаних в цю дугу (див. *рис. 10*).

§ 4. ТРИГРАННИК ФРЕНЕ

Нехай рівнянням $\vec{r} = \vec{r}(t)$ на проміжку $(a,b) \subset R^1$ задано регулярну криву другого порядку l і M_0 — довільна точка цієї кривої, яка відповідає значенню параметра $t = t_0 \in (a,b)$. Проведемо через точку M_0 довільну площину ω, визначивши її одиничним вектором $\vec{m}$, ортогональним до неї. Змістимось по кривій l з точки $M_0(t_0)$ в точку $M(t)$ і оцінимо відстань точки M від площини ω, яка дорівнює довжині перпендикуляра MP, опущеного з точки M на цю площину (*рис. 12*).

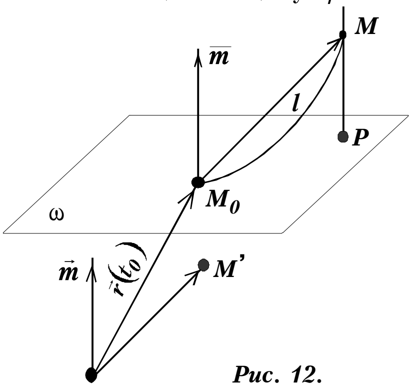

Рис. 12.

Напрямлений відрізок з початком в точці M_0 еквіполентний вектору $\vec{m}$, позначимо через $\overline{m}$.

Якщо $t \to t_0$, то точка M рухається до точки M_0 по кривій l, а точка P теж рухається до точки M_0 по площині ω. При цьому відстань PM прямує до нуля, тобто є нескінченно малою величиною разом з $t - t_0$.

Означення 4.1. *Скажемо, що в точці M_0 крива l має з площиною ω дотик другого порядку, якщо PM є нескінченно малою не нижче третього порядку малості відносно $t - t_0$ при $t \to t_0$, тобто* $\dfrac{PM}{(t - t_0)^2} \underset{(t \to t_0)}{\to} 0$.

Означення 4.2. *Площина ω, яка має з кривою l в точці M_0 дотик другого порядку, називається стичною площиною кривої l в цій точці.*

Теорема 4.1. *Якщо l — регулярна крива другого порядку і*

$$r'(t_0) \nparallel r''(t_0), \tag{4.1}$$

то в точці $M_0(t_0)$ існує єдина стична площина цієї кривої, яка паралельна до векторів $\vec{r}'(t_0)$ і $\vec{r}''(t_0)$.

<u>Доведення.</u> Розглянемо вектор зсуву $\overrightarrow{M_0M} \equiv \overrightarrow{OM'} = \vec{r}(t) - \vec{r}(t_0)$ і, розклавши вектор-функцію $\vec{r}(t)$ в околі точки t_0 за формулою Тейлора, подамо його у вигляді

$$\overrightarrow{M_0M} = \vec{r}'(t_0)(t - t_0) + \vec{r}''(t_0)\frac{(t - t_0)^2}{2!} + \vec{\varepsilon}(t, t_0)\frac{(t - t_0)^2}{2!},$$

де $|\varepsilon(t, t_0)| \to 0$ при $t \to t_0$. Очевидно, $PM = \left|\text{пр.}_{\vec{m}}\, \overrightarrow{OM'}\right|$ (або, що те саме, $PM = \left|\text{пр.}_{\vec{m}}\, \overline{M_0M}\right|$), звідки

$$PM = \left|\vec{m} \cdot \overrightarrow{OM'}\right| = \left|\vec{m}\vec{r}'(t_0)(t - t_0) + \vec{m}\vec{r}''(t_0)\frac{(t - t_0)^2}{2!} + \vec{m}\vec{\varepsilon}(t, t_0)\frac{(t - t_0)^2}{2!}\right|.$$

З останньої рівності випливає, що площина ω є стичною площиною кривої l в точці M_0 тоді і тільки тоді, коли

$$\begin{cases} \vec{m}\vec{r}'(t_0) = 0, \\ \vec{m}\vec{r}''(t_0) = 0. \end{cases} \qquad (4.2)$$

Оскільки нульовий вектор вважається паралельним до будь-якого вектора, то з (4.1) випливає, що вектори $\vec{r}'(t_0)$, $\vec{r}''(t_0)$ не нульові. Тоді рівності (4.2) рівносильні умовам: $\vec{m} \perp \vec{r}(t_0)$, $\vec{m} \perp \vec{r}''(t_0)$. Це свідчить про те, що стична площина ω кривої l в точці M_0 існує та єдина, бо вона паралельна до неколінеарних векторів $\vec{r}'(t_0)$, $\vec{r}''(t_0)$. Теорема доведена.

Зауваження 4.1*. Якщо умова (4.1) не виконується і точка M_0 — звичайна точка кривої l, то будь-яка площина, що містить в собі дотичну до цієї кривої в точці M_0, є стичною.*

Означення 4.3*. Точки кривої l, в яких умова (4.1) не виконується, назвемо точками розпрямлення цієї кривої.*

Якщо крива l задана в природній параметризації рівнянням $\vec{r} = \vec{r}(s)$, то $\dot{\vec{r}}$ є одиничний вектор (див. § 3) і, згідно леми 1.1, $\ddot{\vec{r}} \perp \dot{\vec{r}}$. Тому умова (4.1) виконується завжди, коли вектори $\dot{\vec{r}}$ і $\ddot{\vec{r}}$ не нульові. Таким чином, рівність

$$\ddot{\vec{r}} = \vec{0} \tag{4.3}$$

є необхідною і достотною умовою, того, що звичайна точка кривої є точкою розпрямлення.

Якщо рівність (4.3) виконується при всіх $s \in (s_1, s_2)$, то $\dot{\vec{r}}(s) = \vec{r}_0$ на цьому відрізку, де $\vec{r}_0$ — сталий вектор. Інтегруючи останню рівність, одержуємо, що $\vec{r}(s) = \vec{r}_0 s + \vec{g}_0$, де $\vec{g}_0$ — теж сталий вектор. Отже (див. вправу 1 після § 2), крива l на відрізку (s_1, s_2) вироджується в пряму.

Зауваження 4.2. *Оскільки* $\vec{r}\,'(t_0) \neq \vec{0}$, *то, користуючись теоремами 3.1, 3.2, можна твердити, що в деякому околі точки* t_0 *має місце рівність (3.3), в якій замість* t_1 *покладено* t_0. *Тоді з рівності (3.4) випливає, що*

$$\lim_{t \to t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0} = \lim_{t \to t_0} \frac{\overset{\cup}{M_0 M}}{t - t_0} \neq 0 .$$

Отже, $t - t_0$ має при $t \to t_0$ той самий порядок малості що й $\overset{\cup}{M_0 M}$. Тому в означенні 4.1 можна вважати, що порядок малості PM визначається по відношенню до довжини дуги $\overset{\cup}{M_0 M}$, що гарантує його інваріантність відносно зміни параметра t.

Зауваження 4.3. *Послідовним диференціюванням по параметру* s *складної функції* $\vec{r} = \vec{r}(t(s))$, *де* s — *довжина дуги, одержуємо рівності*

$$\begin{aligned} \dot{\vec{r}} &= \vec{r}\,' \cdot \dot{t}, \\ \ddot{\vec{r}} &= \vec{r}\,'' \cdot \dot{t}^2 + \vec{r}\,' \cdot \ddot{t}. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Вони свідчать про те, що в точці M_0 *з (4.1) випливає умова* $\dot{\vec{r}} \nparallel \ddot{\vec{r}}$ *і навпаки, тобто якщо точка* M_0 *є точкою розпрямле-*

ння в одній параметризації, то вона є такою при будь-якій параметризації кривої l. Крім того, з (4.4) випливає, що вектори $\dot{\vec{r}}$, $\ddot{\vec{r}}$, $\vec{r}\,'$, $\vec{r}\,''$, лежать в одній площині, тобто стична площина не залежить від вибору параметра вздовж кривої l.

Роль стичної площини полягає в тому, що якщо знехтувати нескінченно малими вище другого порядку по відношенню до $t - t_0$, то просторову криву в досить малому околі точки M_0 можна вважати плоскою, розташованою в стичній площині. З поняттям стичної площини кривої пов'язано ряд геометричних об'єктів, до вивчення яких ми переходимо.

Означення 4.4. *Нормаль в заданій точці кривої, яка належить її стичній площині в цій точці, назвемо головною нормаллю.*

Означення 4.5. *Нормаль в заданій точці кривої, перпендикулярну до її стичної площини в цій точці, назвемо бінормаллю.*

Зрозуміло, що дотична, головна нормаль і бінормаль в точці M_0 кривої l утворюють між собою прямі кути. Це дає можливість з точкою M_0 пов'язати декартову систему координат, початок якої співпадає з точкою M_0, а осі — з дотичною, головною нормаллю і бінормаллю. При цьому роль координатних площин відіграватимуть:

а) стична площина (проходить через дотичну і головну нормаль);

б) нормальна площина (проходить через головну нормаль і бінормаль);

в) спрямна площина (проходить через дотичну і бінормаль).

Означення 4.6. *Сукупність шести побудованих вище координатних осей і площин назвемо тригранником Френе (або основним чи супровідним тригранником) кривої l в точці M_0.*

Відкладемо на координатних осях тригранника Френе одиничні напрямлені відрізки $\bar{t}$, $\bar{n}$, $\bar{b}$ з початками в точці M_0 так, як вказано на *рис.13*. При цьому обов'язковою умовою вважатимемо те, щоб трійка $\bar{t}$, $\bar{n}$, $\bar{b}$ була правою. Вектори, еквіполентні напрямленим відрізкам $\bar{t}$, $\bar{n}$, $\bar{b}$ позначимо через $\vec{t}$, $\vec{n}$, $\vec{b}$ відповідно і назвемо ортами тригранника Френе.

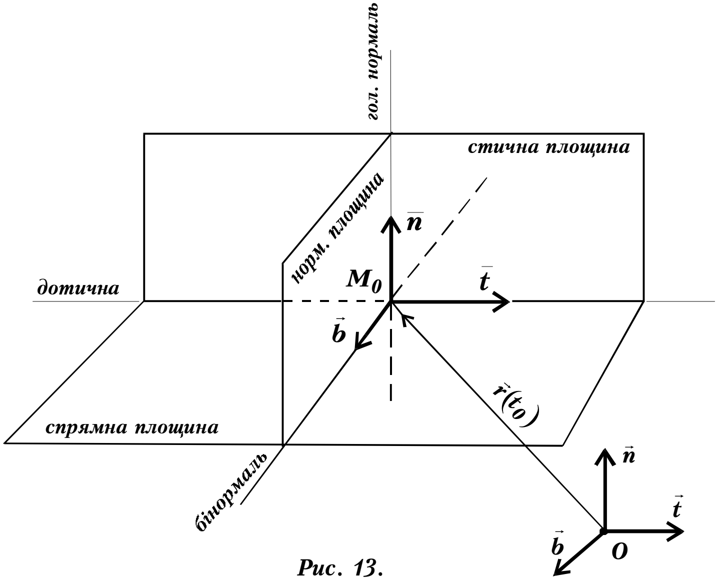

Рис. 13.

<u>*Покладемо:*</u>

а) $\vec{t} = \dfrac{\vec{r}'(t_0)}{|\vec{r}'(t_0)|}$, оскільки вектор $\vec{r}'(t_0)$ паралельний дотичній до кривої l в точці M_0;

б) $\vec{b} = \dfrac{[\vec{r}'(t_0), \vec{r}''(t_0)]}{|[\vec{r}'(t_0), \vec{r}''(t_0)]|}$, оскільки вектори $\vec{r}'(t_0)$ і $\vec{r}''(t_0)$ паралельні стичній площині, а їх векторний добуток паралельний бінормалі;

в) $\vec{n} = [\vec{b}, \vec{t}]$, отже трійка $\vec{t}$, $\vec{n}$, $\vec{b}$ права.

Якщо крива l задана в природній параметризації, то покладемо:

а) $t = \dot{\vec{r}}$;

б) $\vec{n} = \frac{\ddot{\vec{r}}}{\left|\ddot{\vec{r}}\right|}$; оскільки вектор $\ddot{\vec{r}}$ паралельний стичній площині і перпендикулярний до вектора $\dot{\vec{r}}$ (лема 1.1), а отже паралельний головній нормалі;

в) $\vec{b} = \left[\vec{t}, \vec{n}\right]$.

Припустимо тепер, що в репері $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ крива l має параметричні рівняння $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$. Позначимо

$$A = \begin{vmatrix} y'(t_0) & z'(t_0) \\ y''(t_0) & z''(t_0) \end{vmatrix},\ B = \begin{vmatrix} z'(t_0) & x'(t_0) \\ z''(t_0) & x''(t_0) \end{vmatrix},\ C = \begin{vmatrix} x'(t_0) & y'(t_0) \\ x''(t_0) & y''(t_0) \end{vmatrix}$$

і випишемо рівняння елементів тригранника Френе в точці M_0, залишаючи доведення читачеві.

Рівняння дотичної:

$$\frac{x - x(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{y - y(t_0)}{y'(t_0)} = \frac{z - z(t_0)}{z'(t_0)}.$$

Рівняння нормальної площини:

$$\left(x - x(t_0)\right)x'(t_0) + \left(y - y(t_0)\right)y'(t_0) + \left(z - z(t_0)\right)z'(t_0) = 0.$$

Рівняння бінормалі:

$$\frac{x - x(t_0)}{A} = \frac{y - y(t_0)}{B} = \frac{z - z(t_0)}{C}.$$

Рівняння стичної площини:

$$\left(x - x(t_0)\right)A + \left(y - y(t_0)\right)B + \left(z - z(t_0)\right)C = 0.$$

Рівняння головної нормалі:

$$\frac{x - x(t_0)}{z'(t_0)B - y'(t_0)C} = \frac{y - y(t_0)}{x'(t_0)C - z'(t_0)A} = \frac{z - z(t_0)}{y'(t_0)A - x'(t_0)B}.$$

Рівняння спрямної площини:

$$\begin{vmatrix} x - x(t_0) & y - y(t_0) & z - z(t_0) \\ x'(t_0) & y'(t_0) & z'(t_0) \\ A & B & C \end{vmatrix} = 0.$$

Вправи

1. Скласти рівняння елементів супровідного тригранника для гвинтової лінії, заданої векторним рівнянням $\vec{r} = a\cos t\vec{i} + a\sin t\vec{j} + bt\vec{k}$ в точці $t = 0$.

<u>*Розв'язання.*</u> Обчислимо спочатку значення функції $y = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$ та їх похідних першого і другого порядків в точці $t = 0$. Маємо:

$$x(0) = a, \quad x'(0) = 0, \quad x''(0) = -a,$$
$$y(0) = 0, \quad y'(0) = a, \quad y''(0) = 0,$$
$$z(0) = 0, \quad z'(0) = b, \quad z''(0) = 0.$$

Рівняння дотичної: $\dfrac{x-a}{0} = \dfrac{y}{a} = \dfrac{z}{b}$.

Рівняння нормальної площини: $ay + bz = 0$.

Рівняння бінормалі:

$$\frac{x-a}{\begin{vmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{y}{\begin{vmatrix} b & 0 \\ 0 & -a \end{vmatrix}} = \frac{z}{\begin{vmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{vmatrix}} \quad \text{або} \quad \frac{x-a}{0} = \frac{y}{-ab} = \frac{z}{a^2}.$$

Рівняння стичної площини: $by - az = 0$.

Рівняння головної нормалі:

$$\frac{x-a}{b(-ab) - aa^2} = \frac{y}{0 \cdot a^2 - b \cdot 0} = \frac{z}{a \cdot 0 - 0(-ab)};$$

або $\quad y = z = 0.$

Рівняння спрямної площини: $x - a = 0$.

2. Обчистити вектори $\vec{t}, \vec{n}, \vec{b}$ для гвинтової лінії в точці $M_0\ (a,0,0)$.

<u>*Розв'язання*</u>. Точці M_0 відповідає значення параметра $t = 0$. Отже

$$\vec{t}(0) = \frac{\vec{r}\,'(0)}{|\vec{r}\,'(0)|} = \frac{0 \cdot \vec{i} + a\vec{j} + b\vec{k}}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\vec{j} + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\vec{k};$$

$$\vec{b}(0)=\frac{[\vec{r}'(0),\vec{r}''(0)]}{\|[\vec{r}'(0),\vec{r}''(0)]\|}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & a & b\\ -a & 0 & 0\end{vmatrix}:\|[\vec{r}'(0),\vec{r}''(0)]\|=$$

$$=\frac{0\cdot\vec{i}-ab\vec{j}+a^2\vec{k}}{\sqrt{a^2b^2+a^4}}=\frac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}}\vec{j}+\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\vec{k};$$

$$\vec{n}(0)=\left[\vec{b}(0),\vec{t}(0)\right]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & \dfrac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}} & \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\\ 0 & \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} & \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\end{vmatrix}=-\vec{i}.$$

3. Скласти рівняння елементів супровідного тригранника гіперболічної гвинтової лінії $\vec{r}(t)=a\operatorname{ch}t\vec{i}+a\operatorname{sh}t\vec{j}+bt\vec{k}$ в точці $M_0\ (a,0,0)$. Обчислити вектори $\vec{t},\ \vec{n},\ \vec{b}$ в цій точці.

4. В репері $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ крива задана параметричними рівняннями $x=\dfrac{2}{t},\ y=\ln t,\ z=-t^2$. Знайти на цій кривій такі точки, в яких бінормаль паралельна до площини $x-y+8z+2=0$.

5. Записати векторні рівняння елементів тригранника Френе.

6. Довести, що головні нормалі гвинтової лінії перетинають пряму, що проходить через полюс O паралельно вектору $\vec{k}$ (вісь OZ).

7. Знайти годограф вектор-функції $\vec{t}=\vec{t}(t)$, де $\vec{t}(t)$ — орт тригранника Френе гвинтової лінії в точці $M(t)$.

§ 5. КРИВИНА ТА СКРУТ ПРОСТОРОВОЇ КРИВОЇ. ФОРМУЛИ ФРЕНЕ

Будемо вважати, що крива *l*, задана рівнянням $\vec{r} = \vec{r}(s)$ в природній параметризації, є регулярною кривою третього порядку і не містить точок розпрямлення.

Означення 5.1. *Швидкість обертання вектора $\vec{t}$ (або, що те ж саме, швидкість обертання дотичної) в заданій точці M кривої l по відношенню до шляху s, пройденого по кривій, назвемо кривиною кривої l в даній точці.*

Кривину кривої *l* в точці $M(s)$; шлях, пройдений по кривій *l*, виходячи з точки $M(s)$; кут відповідного повороту вектора $\vec{t}(s)$ позначимо через $k(s)$; Δs; $\Delta\varphi$. Тоді з означення 5.1 і леми 1.2 одержуємо співвідношення

$$k(s) = \lim_{\Delta s \to 0}\left|\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}\right| = \left|\dot{\vec{t}}\right|,$$

звідки, враховуючи, що $\vec{t} = \dot{\vec{r}}$, остаточно маємо:

$$k(s) = \left|\ddot{\vec{r}}\right|. \tag{5.1}$$

Зауваження 5.1. *Кривина кривої не може набирати від'ємних значень. Крім того, враховуючи (4.3), можна стверджувати, що рівність $k(s) = 0$ при всіх $s \in (s_1, s_2)$ є необхідною і достатньою умовою виродження кривої l в пряму на цьому проміжку.*

Припустимо, що точка $M(s)$ рухається по кривій *l*. Разом з нею рухається і тригранник Френе, побудований в цій точці. При цьому трійка $\vec{t}(s)$, $\vec{n}(s)$, $\vec{b}(s)$ його ортів обертається навколо полюса *O* як тверде тіло. Для аналітичної характеристики цього обертання важливу роль відіграють формули Френе, які виражають вектори $\dot{\vec{t}}$, $\dot{\vec{n}}$, $\dot{\vec{b}}$ через $\vec{t}(s)$, $\vec{n}(s)$, $\vec{b}(s)$.

Теорема 5.1. *Справедливі рівності (формули Френе):*

$$\dot{\vec{t}} = k\vec{n},$$

$$\dot{\vec{n}} = \chi\vec{b} - k\vec{t}\ , \tag{5.2}$$

$$\dot{\vec{b}} = -\chi\vec{n}\ ,$$

де $k(s)$ *— кривина кривої* l *в точці* $M(s)$, $\chi(s)$ *— скаляр, який назвемо скрутом кривої* l *в цій точці.*

<u>Доведення.</u> Рівності $\dot{\vec{t}} = \ddot{\vec{r}} = \left|\ddot{\vec{r}}\right|\vec{n} = k\vec{n}$ доводять першу формулу (5.2).

Для доведення третьої формули Френе випишемо співвідношення

$$\dot{\vec{b}} = \left[\vec{t},\vec{n}\right]' = \left[\dot{\vec{t}},\vec{n}\right] + \left[\vec{t},\dot{\vec{n}}\right] = \left[k\vec{n},\vec{n}\right] + \left[\vec{t},\dot{\vec{n}}\right] = \left[\vec{t},\dot{\vec{n}}\right].$$

Оскільки $\vec{n}(s)$ одиничний вектор, то за лемою 1.1 $\dot{\vec{n}}\perp\vec{n}(s)$. Крім того, $\vec{t}(s)\perp\vec{n}(s)$. Отже, вектор $\left[\vec{t},\dot{\vec{n}}\right]$ паралельний вектору $\vec{n}$ і відрізняється від нього лише скалярним множником, який ми позначаємо через $-\chi$, тобто $\left[\vec{t},\dot{\vec{n}}\right] = -\chi\vec{n}$.

Справедливість другої формули (5.2) випливає з рівностей

$$\dot{\vec{n}} = \left[\vec{b},\vec{t}\right]' = \left[-\chi\vec{n},\vec{t}\right] + \left[\vec{b},k\vec{n}\right] = \chi\vec{b} - k\vec{t}\ .$$

Теорему доведено. Зауважимо, що модуль скруту має просте геометричне тлумачення. Дійсно, з третьої формули Френе випливає, що $\left|\dot{\vec{b}}\right| = |\chi|$. Застосовуючи лему 1.2, отримуємо

$$|\chi| = \left|\dot{\vec{b}}\right| = \lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\psi}{\Delta s}\right|,$$

де $\Delta\psi$ — кут повороту бінормалі при зміщенні з точки $M(s)$ по кривій l на шлях Δs.

Таким чином, модуль скруту кривої l в точці M дорівнює швидкості обертання бінормалі в цій точці.

На відміну від кривини скрут може набирати і від'ємних значень. Роль скруту просторової кривої ілюструє наступне твердження.

Теорема 5.2. *Для того, щоб крива l була плоскою на проміжку $(s_1, s_2) \subset R^1$, необхідно і досить, щоб її скрут дорівнював нулю в усіх його точках.*

Доведення. Необхідність очевидна. Дійсно, якщо крива l плоска, то стична площина її одна і та ж сама в усіх точках кривої l на проміжку (s_1, s_2), а саме — площина, в якій лежить ця крива. Тому швидкість обертання бінормалі в кожній точці з (s_1, s_2) кривої l дорівнює нулю, отже і скрут кривої $\chi = 0$.

Достатність. Оскільки $\chi = 0$, то з третьої формули Френе випливає, що $\dot{\vec{b}} = \vec{0}$, тобто $\vec{b}(s) = \vec{b}_0$ — сталий вектор на (s_1, s_2). В цьому разі $\vec{t}(s)\vec{b}(s) = \vec{t}(s)\vec{b}_0 = 0$, звідки інтегруванням одержуємо рівність $\vec{r}(s)\vec{b}_0 = c = const$, тобто векторне рівняння площини, в якій розташована крива l. Теорему доведено.

Покажемо тепер, як обчислити скрут кривої у випадку природної параметризації. Випишемо рівності

$$\dot{\vec{r}}(s) = \vec{t}(s),$$

$$\ddot{\vec{r}}(s) = \dot{\vec{t}} = k\vec{n},$$

$$\dddot{\vec{r}}(s) = \dot{k}\vec{n} + k\dot{\vec{n}} = \dot{k}\vec{n} + k\left(\chi\vec{b} - k\vec{t}\right).$$

З них випливає, що

$$\left[\dot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}}\right] = \left[\vec{t}, k\vec{n}\right] = k\vec{b}, \tag{5.3}$$

$$\left(\dot{\vec{r}}\ddot{\vec{r}}\dddot{\vec{r}}\right) = k\vec{b}\left(\dot{k}\vec{n} + k\chi\vec{b} - k^2\vec{t}\right) = k^2\chi. \tag{5.4}$$

Остаточно маємо:

$$\chi = \frac{\left(\dot{\vec{r}}\ddot{\vec{r}}\dddot{\vec{r}}\right)}{\ddot{\vec{r}}^2}.$$

Припустимо тепер, що криву l задано в довільній параметризації рівнянням $\vec{r} = \vec{r}(t)$, і наведемо формули для обчислення кривини та скруту кривої в цьому випадку. Продиференціюємо складну функцію $\vec{r} = \vec{r}(t(s))$, де s — природний параметр, і знайдемо $\dot{\vec{r}}$, $\ddot{\vec{r}}$, $\dddot{\vec{r}}$:

$$\dot{\vec{r}} = \vec{r}\,' \cdot \frac{dt}{ds};$$

$$\ddot{\vec{r}} = \vec{r}\,'' \cdot \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 + \vec{r}\,' \frac{d^2t}{ds^2};$$

$$\dddot{\vec{r}} = \vec{r}\,''' \cdot \left(\frac{dt}{ds}\right)^3 + 3\vec{r}\,'' \frac{dt}{ds}\frac{d^2t}{ds^2} + \vec{r}\,' \frac{d^3t}{ds^3}.$$

З останніх рівностей, в яких щтрихами позначено похідні по параметру t, одержуємо, що

$$\left[\dot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}}\right] = \left[\vec{r}\,', \vec{r}\,''\right]\left(\frac{dt}{ds}\right)^3,$$
$$\left(\dot{\vec{r}}\ddot{\vec{r}}\dddot{\vec{r}}\right) = \left(\vec{r}\,'\vec{r}\,''\vec{r}\,'''\right)\left(\frac{dt}{ds}\right)^6. \tag{5.5}$$

Використовуючи (5.5), з рівностей (5.3) і (5.4) дістанемо:

$$k\vec{b} = \left[\vec{r}\,', \vec{r}\,''\right]\left(\frac{dt}{ds}\right)^3,$$

$$k^2\varkappa^2 = \left(\vec{r}\,'\vec{r}\,''\vec{r}\,'''\right)\left(\frac{dt}{ds}\right)^6,$$

звідки, взявши до уваги (3.4), одержуємо шукані формули:

$$k = \frac{\left|\left[\vec{r}\,', \vec{r}\,''\right]\right|}{\left|\vec{r}\,'\right|^3};\ \ \chi = \frac{\left(\vec{r}\,'\vec{r}\,''\vec{r}\,'''\right)}{\left[\vec{r}\,', \vec{r}\,''\right]^2}.$$

Зауваження 5.2. *Якщо в репері* $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ *криву* l *задано параметричними рівняннями* $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, *то, враховуючи рівності*

$$\vec{r}\,' = \left(x', y', z'\right),\ \vec{r}\,'' = \left(x'', y'', z''\right),\ \mathrm{r}''' = \left(x''', y''', z'''\right),$$
$$\left[\vec{r}\,', \vec{r}\,''\right] = \left(y'z'' - z'y'', z'x'' - x'z'', x'y'' - y'x''\right),$$
$$\left(\vec{r}\,'\vec{r}\,''\vec{r}\,'''\right) = \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix},$$

формули для обчислення кривини та скруту можна записати у вигляді:

$$k=\frac{\sqrt{\left(y'z''-z'y''\right)^2+\left(z'x''-x'z''\right)^2+\left(x'y''-y'x''\right)^2}}{\left(x'^2+y'^2+z'^2\right)^{\frac{3}{2}}}; \quad (5.6)$$

$$\chi=\frac{\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}}{\left(y'z''-z'y''\right)^2+\left(z'x''-x'z''\right)^2+\left(x'y''-y'x''\right)^2}. \quad (5.7)$$

Вправи

1. Обчислити кривину і скрут гвинтової лінії (див. вправу 1 з § 4) в точці $M(t)$.

<u>*Розв'язання*</u>. Спочатку знаходимо координати векторів $\vec{r}\,'$, $\vec{r}\,''$, в репері $\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$:

$$\vec{r}\,'(t)=\left(-a\sin t, a\cos t, b\right),\ \vec{r}\,''(t)=\left(-a\cos t,-a\sin t,0\right),$$

$$\vec{r}\,'''(t)=\left(a\sin t,-a\cos t,0\right).$$

Тоді:
$$\left|\vec{r}\,'(t)\right|^3=\left(a^2+b^2\right)^{\frac{3}{2}};$$

$$\left[\vec{r}\,',\vec{r}\,''\right]=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -a\sin t & a\cos t & b \\ -a\cos t & -a\sin t & 0 \end{vmatrix}=\left(ab\sin t,-ab\cos t,a^2\right);$$

$$\left|\left[\vec{r}\,',\vec{r}\,''\right]\right|=a\sqrt{a^2+b^2};$$

$$\left(\vec{r}\,'\vec{r}\,''\vec{r}\,'''\right)=\begin{vmatrix} -a\sin t & a\cos t & b \\ -a\cos t & -a\sin t & 0 \\ a\sin t & -a\cos t & 0 \end{vmatrix}=a^2b.$$

За формулами (5.6) і (5.7) одержуємо:

$$k=\frac{a}{a^2+b^2};\quad \chi=\frac{b}{a^2+b^2}.$$

2. Знаючи кривину k і скрут χ гвинтової лінії, скласти її векторне рівняння.
3. Обчислити кривину і скрут гіперболічної гвинтової лінії, яка задана рівнянням $\vec{r}(t) = a\,\mathrm{ch}\,t\vec{i} + a\,\mathrm{sh}\,t\vec{j} + at\vec{k}$.
4. Знайти таку функцію $f(t)$, щоб крива $\vec{r}(t) = a\cos t\vec{i} + a\sin t\vec{j} + f(t)\vec{k}$ була плоскою.
5. Довести, що крива, задана рівнянням
$$\vec{r}(t) = \frac{1+t}{1-t}\vec{i} + \frac{1}{1-t^2}\vec{j} + \frac{1}{1+t}\vec{k},,$$
є плоскою та скласти рівняння площини, в якій вона розташована.
6. Знайти кривину і скрут кривої, яка в репері $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ задана рівняннями $y^2 = x,\ x^2 = z$.
7. Якщо криві l_1 і l_2 мають у відповідних точках спільні бінормалі, то вони плоскі. Довести.
8. Знайти такий вектор $\vec{\omega}$, який задовольняє рівності:
$$\dot{\vec{t}} = \left[\vec{\omega}, \vec{t}\right],\ \dot{\vec{n}} = \left[\vec{\omega}, \vec{n}\right],\ \dot{\vec{b}} = \left[\vec{\omega}, \vec{b}\right].$$

Вказівка. Виразити шуканий вектор через $\vec{t}$, $\vec{n}$, $\vec{b}$ і використати формули Френе.

§ 6. СТИЧНЕ КОЛО ПЛОСКОЇ КРИВОЇ

В §§ 6-8 вивчаються плоскі криві. Домовимося вважати, що площина, яка містить криві, про які йде мова, містить також полюс O.

Означення 6.1. *Коло, яке має в точці M_0 з кривою l дотик другого порядку, назвемо її стичним колом в цій точці.*

Нехай крива l в репері $\left(\vec{i}, \vec{j}\right)$ визначена рівнянням $y = y(x)$ а точка M_0 має координати $x = x_0,\ y = y(x_0) = y_0$.

Теорема 6.1. *Якщо l – регулярна крива другого порядку, і точка M_0 не є її точкою розпрямлення, то в цій точці існує стичне коло кривої l, координати центра $(a, в)$ і радіус R якого обчислюються за формулами*

$$a = x_0 - y_0' \frac{1 + y_0'^2}{y_0''};$$

$$b = y_0 + \frac{1 + y_0'^2}{y_0''}; \tag{6.1}$$

$$R = \frac{\left(1 + y_0'^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\left|y_0''\right|},$$

де через y_0' і y_0'' позначено $y'(x_0)$ та $y''(x_0)$ відповідно.

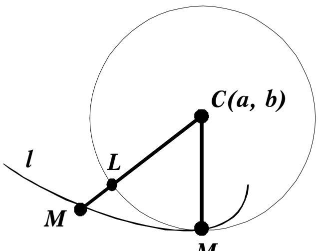

Рис. 14.

<u>*Доведення.*</u> Рівняння шуканого кола запишемо у вигляді

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2,$$

де сталі a, b, R підлягають визначенню.

Змістимось з точки M_0 по кривій l в як завгодно близьку точку M та побудуємо відрізок з вершинами $C(a, b)$ та $M(x, y)$, як вказано на *рисунку 14*. Точку перетину прямої CM з колом (в околі точки M_0) позначимо L. При $x \to x_0$, $LM \to 0$, оскільки точки L і M прямують до точки M_0 по колу і по кривій l

відповідно. Підберемо сталі *a, в, R* так, щоб нескінченно мала LM при $x \to x_0$ мала порядок малості не нижчий трьох відносно $x - x_0$.

Співвідношення $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{CM^2 - CL^2}{LM} = \lim\limits_{x \to x_0} (CM + CL) = 2R$

говорить про те, що порядок малості нескінченно малих $CM^2 - CL^2$ та LM при $x \to x_0$ однаковий. Позначимо $CM^2 - CL^2$ через $\varphi(x) = (x-a)^2 + (y(x) - b)^2 - R^2$ і підберемо сталі *a, в, R* так, щоб нескінченно мала $\varphi(x)$ при $x \to x_0$ мала порядок малості не нижчий трьох відносно $x - x_0$. Для цього необхідно і досить, щоб виконувались рівності:

$$\varphi(x_0) = \varphi'(x_0) = \varphi''(x_0) = 0,$$

які приводять до системи рівнянь

$$\begin{cases} (x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 - R^2 = 0, \\ (x_0 - a) + y_0'(y_0 - b) = 0, \\ 1 + y_0''(y_0 - b) = -y_0'^2. \end{cases}$$

Розв'язуючи цю систему, одержуємо формули (6.1). Неважко встановити, що $y_0'' \neq 0$, оскільки точка M_0 не є точкою розпрямлення за умовою теореми.

Покажемо, що побудоване коло має з кривою l в точці M_0 дотик другого порядку згідно означення 3.2. Для цього досить показати (дивись вправу 9 після § 3), що похідні $y_1'(x_0)$ та $y_1''(x_0)$ від функції $y_1(x)$, заданої неявно співвідношенням

$$F(x, y_1) = (x-a)^2 + (y_1 - b)^2 - R^2 = 0,$$

в якому *a, в, R* визначені в (6.1), дорівнюють y_0' та y_0'' відповідно. Врахувавши, що $y_1(x_0) = y(x_0) = y_0$, випишемо потрібні рівності:

$$y_1'(x_0) = \left.\frac{-\dfrac{\partial F(x, y_1)}{\partial x}}{\dfrac{\partial F(x, y_1)}{\partial y_1}}\right|_{x=x_0} = -\frac{x_0 - a}{y_1(x_0) - b} = -\frac{x_0 - a}{y_0 - b} = \frac{y_0' \dfrac{1 + y_0'^2}{y_0''}}{\dfrac{1 + y_0'^2}{y_0''}} = y_0';$$

$$y_1''(x_0) = \left.\left(-\frac{x - a}{y_1(x) - b}\right)'\right|_{x=x_0} = -\frac{\left(y_1(x_0) - b\right) + \left(x_0 - a\right)\dfrac{x_0 - a}{y_1(x_0) - b}}{\left(y_1(x_0) - b\right)^2} =$$

$$= \frac{\dfrac{1 + y_0'^2}{y_0''} + y_0'^2 \dfrac{1 + y_0'^2}{y_0''}}{\dfrac{\left(1 + y_0'^2\right)^2}{y_0''^2}} = \frac{1 + 2y_0'^2 + y_0'^4}{\left(1 + y_0'^2\right)^2} y_0'' = y_0''.$$

Теорему доведено.

Теорема 6.2. *В умовах теореми 6.1 стичне коло кривої l в точці M_0 єдине.*

Доведення. Припустимо, що в точці M_0 кривої l існують два стичних кола. Безпосередньо з означення 3.2 випливає, що вони в цій точці самі мають дотик другого порядку.

Покажемо, що взагалі не існує двох кіл, які мають таку властиввість. Дійсно, нехай M_0 — точка дотику двох довільних кіл Φ_1 і Φ_2. Для зручності запишемо їх рівняння в декартовій системі координат з початком в точці M_0, вісь абсцис якої співпадає з спільною дотичною кіл Φ_1, Φ_2 в цій точці, а вісь ординат — з прямою, що проходить через їх центри:

$$x^2 + (y - a_1)^2 = R_1^2;$$
$$x^2 + (y - a_2)^2 = R_2^2.$$

З першого рівняння знаходимо, що

$$y'_{M_0} = -\left.\frac{x}{y - a_1}\right|_{M_0} = 0, \quad y''_{M_0} = -\left.\frac{y - a_1 - xy'}{(y - a_1)^2}\right|_{M_0} = \frac{1}{a_1},$$

а з другого одержуємо рівності

$$y'_{M_0} = -\left.\frac{x}{y-a_2}\right|_{M_0} = 0, \quad y''_{M_0} = \frac{1}{a_2}.$$

Кола Φ_1 і Φ_2 мають в точці M_0 дотик другого порядку тоді і тільки тоді, коли $a_1 = a_2$. Зрозуміло, що в цьому випадку ці кола співпадають. Теорему доведено.

Припустимо тепер, що в репері $\left(\vec{i}, \vec{j}\right)$ крива l визначена векторним рівнянням $\vec{r} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$ або параметричними рівняннями

$$x = x(t), \quad y = y(t), \tag{6.2}$$

а точка $M_0 \in l$ має координати $x_0 = x(t_0), \quad y_0 = y(t_0)$. Оскільки M_0 звичайна точка кривої l, то $x'^2(t_0) + y'^2(t_0) \neq 0$. Нехай для означеності $x'(t_0) \neq 0$. Тоді з регулярності кривої l випливає, що $x'(t) \neq 0$ в деякому околі точки t_0. Це дозволяє виписати рівності

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{M_0} = \left.\frac{y'(t)}{x'(t)}\right|_{t_0} = \frac{y'(t_0)}{x'(t_0)};$$

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{M_0} = \left.\frac{\left(\dfrac{y'(t)}{x'(t)}\right)'}{x'(t)}\right|_{t_0} = \frac{x'(t_0)y''(t_0) - y'(t_0)x''(t_0)}{x'^3(t_0)}. \tag{6.3}$$

Оскільки точка M_0 не є точкою розпрямлення, то $\vec{r}'(t_0) \nparallel \vec{r}''(t_0)$. Отже $x'(t_0)y''(t_0) - y'(t_0)x''(t_0) \neq 0$.

Підставляючи вирази (6.3) в рівності (6.1), одержуємо формули для обчислення координат центра (a, $в$) і радіуса R стичного кола в точці M_0 кривої l, заданої параметричними рівняннями (6.2):

$$a = x(t_0) - y'(t_0)\frac{x'^2(t_0) + y'^2(t_0)}{x'(t_0)y''(t_0) - y'(t_0)x''(t_0)};$$

$$b = y(t_0) + x'(t_0)\frac{x'^2(t_0) + y'^2(t_0)}{x'(t_0)y''(t_0) - y'(t_0)x''(t_0)}; \qquad (6.4)$$

$$R = \frac{\left(x'^2(t_0) + y'^2(t_0)\right)^{\frac{3}{2}}}{\left|x'(t_0)y''(t_0) - y'(t_0)x''(t_0)\right|}.$$

Означення 6.2. *Центр і радіус стичного кола в точці* M_0 *кривої* l *назвемо відповідно її центром кривини і радіусом кривини в цій точці.*

Зауваження 6.1. *Знайдемо кривину кривої* l *в точці* M_0, *поклавши у формулі (5.6) замість* $z(t)$ *нуль. Одержимо, що*

$$k = \frac{\left|x'(t_0)y''(t_0) - y'(t_0)x''(t_0)\right|}{\left(x'^2(t_0) + y'^2(t_0)\right)^{\frac{3}{2}}},$$

тобто кривина кривої l *в точці* M_0 *і радіус кривини її в цій точці є взаємно обернені величини.*

Вправи

1. Встановити умови, при яких крива l поводить себе в околі точки M_0 так, як зображено на рис. 14 (частина її лежить зовні, а частина — всередині стичного кола).
2. Довести, що відрізок, який сполучає довільну точку циклоїди з її центром кривини в цій точці, ділиться віссю OX пополам (вісь OX вибрана так, як в прикладі 12 з § 2).
3. Написати рівняння стичного кола кривої, що задана рівнянням $\vec{r} = x\vec{i} + \sin x\vec{j}$, в точці $A\left(\frac{\pi}{2};1\right)$.
4. Коло, задане рівнянням $x^2 + y^2 = 5$, є стичним в точці $A(1;2)$ до параболи, вісь якої паралельна до вісі ординат. Знайти рівняння цієї параболи.

5. Знайти кривину кривої, заданої в репері $\left(\vec{i}, \vec{j}\right)$ рівнянням $F\left(x, y\right) = 0$.
6. Нехай $\vec{r} = \vec{r}\left(s\right)$ природна параметризація кривої l, точка C — центр кривини цієї кривої в точці $M\left(s\right)$. Довести, що $\overrightarrow{MC} = R\left(s\right)\dfrac{\ddot{\vec{r}}}{\left|\ddot{\vec{r}}\right|}$, де $R\left(s\right)$ — радіус кривини кривої l в точці M.

<u>*Розв'язання*</u>. Для плоскої кривої нормаль є одночасно головною нормаллю, тому вектор $\vec{n} = \dfrac{\ddot{\vec{r}}}{\left|\ddot{\vec{r}}\right|}$ приймемо за одиничний вектор нормалі кривої l в точці M. Очевидно, що досить показати співнапрямленість векторів $\overrightarrow{MC}$ і $\vec{n}$. Розглянемо вектор $\vec{p}\left(s\right) = \vec{r}\left(s\right) - \overrightarrow{OM}$ і перенесемо полюс O в точку M. Тоді l є годографом вектор-функції $\vec{p} = \vec{p}\left(s\right)$, причому $\dot{\vec{p}} = \dot{\vec{r}}$, $\ddot{\vec{p}} = \ddot{\vec{r}}$. Введемо на площині декартову систему координат з початком в точці M, визначивши вісі абсцис та ординат одиничними векторами $\vec{t} = \dot{\vec{r}}\left(s\right)$ та $\vec{n}\left(s\right)$ в точці M відповідно. Розклавши вектор $\vec{p}\left(s\right)$ по базисних векторах, знайдемо похідні $\dot{\vec{p}}$ і $\ddot{\vec{p}}$:

$$\dot{\vec{p}} = \dot{x}\vec{t} + \dot{y}\vec{n} \quad \ddot{\vec{p}} = \ddot{x}\vec{t} + \ddot{y}\vec{n}. \tag{6.5}$$

Оскільки в точці M $\dot{\vec{p}} = \vec{t}$, а $\ddot{\vec{p}}$ співнапрямлений з $\vec{n}$, то з рівностей (6.5) випливає, що в цій точці $\dot{x} = 1$, $\dot{y} = 0$, $\ddot{x} = 0$, $\ddot{y} > 0$. Враховуючи, що $x\left(s\right) = y\left(s\right) = 0$, з формул (6.4) знаходимо координати точки C: $a = 0,\ b = \dfrac{1}{\ddot{y}}$. Отже, $b > 0$, тобто точка C лежить на додатній піввісі ординат. Звідси випливає, що вектори $\overrightarrow{MC}$ і $\vec{n}$ співнапрямлені.

На завершення зауважимо, що при зміні напрямку відліку довжини дуги вздовж кривої l вектор $\vec{t} = \dot{\vec{r}}$ змінює знак, а вектор $\ddot{\vec{r}}$ залишається без зміни.

§ 7. ОБВІДНА СІМЕЙСТВА ПЛОСКИХ КРИВИХ. ЕВОЛЮТА ТА ЕВОЛЬВЕНТА

Нехай регулярна крива l другого порядку в репері $\left(\vec{i}, \vec{j}\right)$ задана параметричними рівняннями (6.2) і не містить точок розпрямлення.

Означення 7.1. *Множину центрів кривини кривої l в усіх її точках назвемо **еволютою** цієї кривої і позначимо через l^*.*

Нехай (X, Y) — координати рухомої по еволюті точки C (центра кривини кривої l в точці $M(x(t), y(t))$). Використовуючи формули (6.4), випишемо параметричні рівняння еволюти l^*:

$$\begin{aligned} X &= x(t) - y'(t)\frac{x'^2(t) + y'^2(t)}{x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)}; \\ Y &= y(t) + x'(t)\frac{x'^2(t) + y'^2(t)}{x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)}. \end{aligned} \tag{7.1}$$

З них випливає, що l^* — неперервна крива в тому розумінні, що функції $X = X(t)$, $Y = Y(t)$ неперервні по t. Формули (7.1) часто використовуються при розв'язуванні практичних задач.

Разом з тим, означити еволюту кривої l можна інакше. Припустимо, що рівнянням $\vec{r} = \vec{r}(t, c)$, де $\vec{r}(t, c)$ неперервно диференційована по t і c функція, $c \in (c_1, c_2) \subset R^1$, визначається сімейство плоских кривих Γ, залежне від c, як від параметра.

Означення 7.2. *Гладку криву, визначену на відрізку (c_1, c_2) рівнянням $\vec{r} = \vec{r}_1(c)$, назвемо **обвідною** сімейства Γ, якщо вона в кожній своїй точці $M(c)$ дотикається до кривої цього сімейства, що відповідає значенню параметра c.*

Припустимо, що обвідна сімейства Γ існує. Тоді при всіх $c \in (c_1, c_2)$ має місце співвідношення

$$\vec{r}_t'(t, c)\Big|_{t=t(c)} \,||\, \vec{r}_1'(c), \tag{7.2}$$

де $\vec{r}_1(c) = \vec{r}(t(c), c)$. Але $\vec{r}_1'(c) = \dfrac{d}{dc}\vec{r}(t(c), c) = \vec{r}_t' \cdot \dfrac{dt}{dc} + \vec{r}_c'$.

Враховуючи (7.2), одержуємо, що в кожній точці обвідної сімейства Γ $\vec{r}_t'(t,c) \| \vec{r}_c'(t,c)$, якщо тільки функція $t(c)$ диференційована на проміжку (c_1, c_2).

Нехай $x(t,c)$, $y(t,c)$ — координати вектора $\vec{r}(t,c)$ в репері $(\vec{i}, \vec{j})$.

Означення 7.3. *Криву, визначену рівнянням $\vec{r} = \vec{r}(t(c), c)$, де функція $t = t(c)$ задовольняє рівність*

$$\begin{vmatrix} x_t'(t,c) & y_t'(t,c) \\ x_c'(t,c) & y_c'(t,c) \end{vmatrix} = 0, \tag{7.3}$$

назвемо ***дискримінантною*** *кривою сімейства* Γ.

Зрозуміло, що коли Γ — сімейство гладких кривих без особливих точок і функція $t(c)$ диференційована на проміжку (c_1, c_2), то дискримінантна крива цього сімейства співпадає з його обвідною. В загальному випадку це не так.

Теорема 7.1. *Якщо l — регулярна крива третього порядку і не містить точок розпрямлення, то обвідна сімейства її нормалей та еволюта l^* співпадають.*

Доведення. Для кривою l, заданої в репері $(\vec{i}, \vec{j})$ параметричними рівняннями $x = x(t)$, $y = y(t)$, параметричні рівняння сімейства нормалей запишемо у вигляді

$$\begin{cases} x(t_1, t) = x(t) - t_1 y'(t), \\ y(t_1, t) = y(t) + t_1 x'(t), \end{cases} \tag{7.4}$$

де роль параметра відіграє t. Тоді рівняння (7.3) набирає вигляду

$$\begin{vmatrix} -y'(t) & x'(t) \\ x'(t) - t_1 y''(t) & y'(t) + t_1 x''(t) \end{vmatrix} = 0,$$

звідки

$$t_1 = \frac{x'^2(t) + y'^2(t)}{x'(t) y''(t) - y'(t) x''(t)}. \tag{7.5}$$

Оскільки за умовою l — регулярна крива третього порядку, то функція $t_1(t)$ диференційована по t. Крім того, сімейство нормалей кривої l складається з прямих, тобто гладких кривих без особливих точок.

Підставивши значення t_1 з (7.5) в (7.4), одержуємо вирази (7.1), що завершує доведення.

На підставі доведеної теореми можна сформулювати наступне твердження.

Означення 7.4. *Еволютою регулярної кривої l третього порядку, що не містить точок розпрямлення, назвемо обвідну сімейства її нормалей.*

Для регулярної кривої третього порядку означення 7.1 і 7.4 еквівалентні.

Наслідок 7.1 *(з теореми 7.1). Якщо l — регулярна крива третього порядку і не містить точок розпрямлення, то нормаль в довільній її точці співпадає з дотичною до еволюти у відповідному центрі кривини даної кривої.*

Припустимо тепер, що крива l задана природною параметризацією $\vec{r} = \vec{r}(s)$ і $M(s)$ — довільна точка кривої l, що відповідає значенню параметра s. Позначимо через $C(s)$, $R(s)$ і $\vec{n}(s)$ центр кривини, радіус кривини і одиничний вектор нормалі кривої l в точці $M(s)$ відповідно. При цьому вважатимемо, що $\vec{n}(s) \| \ddot{\vec{r}}$. Тоді (див. вправу 6 з § 6) $\overrightarrow{MC} = R(s)\vec{n}(s)$, звідки

$$\vec{p}(s) = \overrightarrow{OC} = \vec{r}(s) + R(s)\vec{n}(s) \tag{7.6}$$

Рівняння (7.6) розглядатимемо як векторне рівняння еволюти l^*, для якої s не є природним параметром.

Наступне твердження визначає ще одну важливу властивість еволюти.

Теорема 7.2. *Якщо на проміжку $(s_1, s_2) \subset R^1$ радіус кривини $R(s)$ регулярної кривої третього порядку l змінюється монотонно, то $R(s_2) - R(s_1) = \Delta\sigma$, де $\Delta\sigma$ — приріст довжини дуги еволюти при зміщенні з точки $C(s_1)$ в точку $C(s_2)$.*

<u>Доведення.</u> Позначимо через $k(s)$ і $\vec{t}(s)$ кривину та одиничний вектор дотичної кривої l в точці $M(s)$ відповідно. Врахувавши, що $\vec{t}(s)=\dot{\vec{r}}$, $k(s)R(s)=1$, $\dot{\vec{n}}=-k(s)\vec{t}(s)$ (друга формула Френе для випадку плоскої кривої), продиференціюємо по s рівність (7.6). Одержимо, що $\vec{p}'(s)=R'(s)\vec{n}(s)$, звідки $\left|d\vec{p}(s)\right|=\left|dR(s)\right|$.

Позначивши диференціал дуги вздовж еволюти через $d\sigma$, випишемо рівність

$$\left|d\sigma\right|=\left|dR\right|, \tag{7.7}$$

оскільки $\left|d\vec{p}\right|=\left|d\sigma\right|$ при довільній параметризації вздовж кривої (див. § 3). Для означеності припустимо, що функція $R(s)$ на проміжку (s_1,s_2) монотонно зростає. Довжину дуги σ на еволюті будемо відраховувати так, щоб вона зростала разом з зростанням $R(s)$. Тоді в (7.7) можна відкинути знаки модулів і проінтегрувати одержану рівність в межах від s_1 до s_2. Матимемо, що $\sigma(s_2)-\sigma(s_1)=R(s_2)-R(s_1)$. Теорему доведено.

Зауважимо, що в точці s, де функція $R(s)$ досягає мінімуму або максимуму, $R'(s)=0$. Це веде до рівності $\vec{p}'(s)=0$, отже точка $M(s)$ еволюти є особливою. Більш детальне дослідження показує, що ця точка завжди є точкою звороту 1 роду. На доведенні цього твердження ми не зупиняємось.

Ортогональною траєкторією сімейства кривих називають криву, яка перетинає під прямим кутом всі криві цього сімейства.

Означення 7.5. *Ортогональну траєкторію сімейства дотичних даної кривої назвемо її евольвентою.*

Теорема 7.3. *Нехай гладка крива другого порядку l задана рівнянням $\vec{r}=\vec{r}(s)$ в природній параметризації. Тоді векторне рівняння її евольвенти має вигляд*

$$\vec{p}(s)=\vec{r}(s)+(s_0-s)\vec{t}(s), \tag{7.8}$$

де s_0 — параметр, $\vec{t}(s)$ — одиничний вектор дотичної до кривої l в точці $M(s)$.

<u>Доведення</u>. Оскільки кожна точка евольвенти повинна належати дотичній до кривої l, то її радіус-вектор $\vec{p}(s)$ можна подати у

вигляді $\vec{p}(s) = \vec{r}(s) + \lambda\vec{t}(s)$ (див. *рис. 15*). Щоб записати рівняння евольвенти, досить подати параметр λ у вигляді диференційованої функції від s. Оскільки $\left|\vec{t}(s)\right| = 1$, то $|\lambda| = M_1M$.

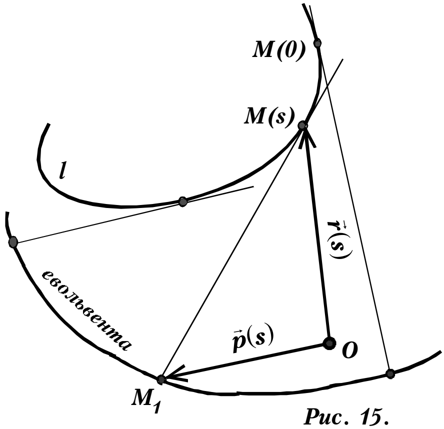

Рис. 15.

Знайдемо дотичний вектор до евольвенти в точці $M_1(s)$:

$$\frac{d\vec{p}}{ds} = \vec{t}(s) + \frac{d\lambda(s)}{ds}\vec{t}(s) + \lambda(s)\dot{\vec{t}}.$$

Оскільки евольвента перетинає дотичну кривої l під прямим кутом, то

$$\frac{d\vec{p}}{ds}\vec{t}(s) = \left(\vec{t}(s)\left(1 + \frac{d\lambda}{ds}\right) + \lambda\dot{\vec{t}}\right)\vec{t}(s) = 0.$$

Враховуючи, що $\vec{t}(s)\perp\dot{\vec{t}}$, маємо, що $\dfrac{d\lambda}{ds} + 1 = 0$. Інтегруючи останню рівність, одержуємо, що $\lambda = s_0 - s$. Отже, рівняння евольвенти має вигляд (7.8), причому ця параметризація не є природною. Теорему доведено.

Зауважимо, що присутність числового параметра s_0 в рівнянні евольвенти вказує на існування нескінченної кількості евольвент кривої l.

Евольвенту кривої l можна побудувати так. Накладемо на криву l гнучку нитку, яка не піддається розтягу, початок якої знаходиться в точці M_0. Якщо нитку натягувати за її кінець і поступово відділяти від кривої l так, щоб вона постійно була напрямлена вздовж дотичної до даної кривої, то її вільний кінець опише евольвенту.

Зауваження 7.1. *Гладка крива третього порядку є евольвентою своєї еволюти.*

На завершення параграфа випишемо рівняння евольвенти кривої l, заданої довільною параметризацією $\vec{r} = \vec{r}(t)$:

$$\vec{p}(t) = r'(t) - \frac{\vec{r}\,'(t)}{\sqrt{\vec{r}\,'^2(t)}} \int \sqrt{\vec{r}\,'^2(t)}dt,$$

або в параметричній формі

$$\begin{cases} X(t) = x(t) - \dfrac{x'(t)}{\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}} \displaystyle\int \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}dt, \\ Y(t) = y(t) - \dfrac{y'(t)}{\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}} \displaystyle\int \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}dt. \end{cases}$$

Вправи

1. Нехай сімейство плоских кривих в репері $(\vec{i}, \vec{j})$ задано рівнянням $F(x, y, a) = 0$, де функція $F(x, y, a)$ неперервно диференційована по x, y, a. Довести, що обвідна цього сімейства, якщо вона існує, належить множині точок $M(x(a), y(a))$, де $x = x(a)$, $y = y(a)$ — розв'язок системи рівнянь

$$F(x, y, a) = 0; \quad \frac{\partial}{\partial a} F(x, y, a) = 0,$$

a — параметр. Множину точок M також називають дискримінантною кривою даного сімейства кривих.

2. Знайти дискримінантну криву та обвідну сімейства напівкубічних парабол $3(y - c)^2 - 2(x - c)^3 = 0$.

Розв'язання. Продиференціювавши по параметру c, одержуємо рівняння $y - c - (x - c)^2 = 0$. Розв'язуємо систему рівнянь

$$\begin{cases} 3(y - c)^2 - 2(x - c)^3 = 0, \\ y - c - (x - c)^2 = 0. \end{cases}$$

Одержуємо дві гілки дискримінантної кривої:

$$\text{а) } \begin{cases} x = c, \\ y = c, \end{cases} \qquad \text{б) } \begin{cases} x = c + \dfrac{2}{3}, \\ y = c + \dfrac{4}{9}. \end{cases}$$

Перша з них — пряма, рівняння якої $y = x$, друга — теж пряма, рівняння якої $y = x + \frac{2}{9}$.

З них тільки друга пряма є обвідною, бо перша являє собою множину особливих точок кривих сімейства.

Зробіть рисунок.

3. Довести, що еволютою циклоїди є конгруентна їй циклоїда.

Розв'язання. Запишемо параметричні рівняння циклоїди в репері $(\vec{i}, \vec{j})$: $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$. Маємо: $x' = a(1 - \cos t)$, $x'' = a \sin t$, $y' = a \sin t$, $y'' = a \cos t$. Рівності (7.1) набирають вигляду $X = a(t + \sin t)$, $Y = -a(1 - \cos t)$. Введемо новий параметр за формулою $t = \pi + \tau$, після чого одержимо рівняння еволюти циклоїди у вигляді

$$X = \pi a + a(\tau - \sin \tau), \quad Y = -2a + a(1 - \cos \tau).$$

Останні свідчать про те, що еволюта циклоїди є конгруентна їй циклоїда, зсунута праворуч на πa і опущена вниз на $2a$.

Зробіть рисунок до цієї задачі.

4. Виписати рівняння еволюти циклоїди, не користуючись формулами (7.1), а як наслідок задачі 2 з § 6.

5. Скласти рівняння еволюти кривої, що задана рівнянням:

   а) $\vec{r} = a \cos t \vec{i} + b \sin t \vec{j}$;

   б) $\vec{r} = a \operatorname{ch} t \vec{i} + b \operatorname{sh} t \vec{j}$.

   Зробити схематичні рисунки.

6. Показати, що еволютою астроїди (див. вправу 13 з § 2) є астроїда.

7. Показати, що еволютою логарифмічної спіралі, що в полярній системі координат задана рівнянням $\rho = ca^{\varphi}$, є логарифмічна спіраль, яка одержується з даної поворотом на деякий кут навколо полюса полярної системи координат.

8. Скласти рівняння евольвент кривої, заданої рівнянням $\vec{r} = t\vec{i} + \frac{t^2}{4}\vec{j}$.

9. Довести, що евольвентою ланцюгової лінії (див. вправу 7 з § 3), яка проходить через її вершину, є трактриса (див. вправу 9 з § 2).

<u>*Розв'язання.*</u> В репері $(\vec{i},\vec{j})$ рівняння ланцюгової лінії $y = a\,\mathrm{ch}\,\dfrac{x}{a}$, а параметричні рівняння трактриси

$$x = a\left(\cos t + \ln\mathrm{tg}\,\frac{t}{2}\right),\; y = a\sin t.$$

Позначимо ці криві через l і l_1 відповідно і зобразимо їх на *рисунку 16*. Параметр t — кут між дотичною до трактриси та віссю OX.

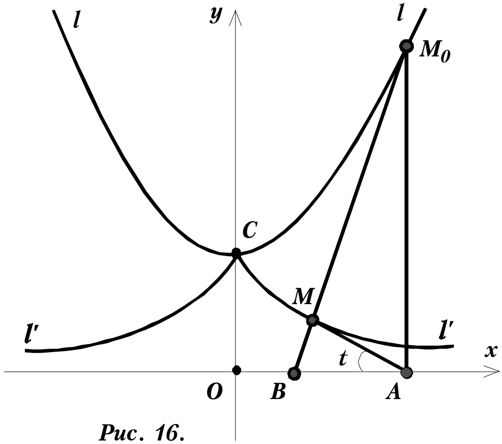

Рис. 16.

При $t = \dfrac{\pi}{2}$ трактриса має особливу точку $C(0,\,a)$. Дотична в ній співпадає з віссю OY і перпендикулярна до дотичної ланцюгової лінії в її вершині C. Покажемо, що крива l є еволютою кривої l_1 (точку C виключимо, бо вона особлива відносно кривої l) в розумінні означення 7.1. З рівняння трактриси маємо

$$y' = a\cos t,\quad x' = a\frac{\cos^2 t}{\sin t},$$

$$y'' = -a\sin t,\quad x'' = -a\cos t\,\frac{1+\sin^2 t}{\sin^2 t},$$

$$x'^2 + y'^2 = a^2\frac{\cos^2 t}{\sin^2 t},\quad x'y'' - x''y' = \frac{a^2\cos^2 t}{\sin^2 t}.$$

За формулами (7.1) знаходимо параметричні рівняння еволюти трактриси:

$$x = a \ln \operatorname{tg} \frac{t}{2}; \quad y = \frac{a}{\sin t}.$$

Переписавши їх у вигляді

$$\operatorname{tg} \frac{t}{2} = e^{\frac{x}{a}}, \quad y = \frac{a}{2}\left(\operatorname{tg} \frac{t}{2} + \operatorname{ctg} \frac{t}{2}\right)$$

і позбувшись параметра t, маємо $y = \dfrac{e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}}{2}$ або $y = a \operatorname{ch} \dfrac{x}{a}$.

Одержали рівняння ланцюгової лінії.

10. Записати рівняння еволюти трактриси, не користуючись формулами (7.1).

<u>*Вказівка*</u>. Спочатку показати, що сталий відрізок MA дотичної до трактриси в рухомій точці M є середнє пропорційне між відповідним відрізком нормалі MB і радіусом кривини трактриси в точці M. Тоді центр кривини цієї кривої M_0 можна одержати при перетині нормалі в точці M та перпендикуляра, встановленого до вісі OX в точці A. Це дає можливість знайти координати точки M_0, які й визначають параметричні рівняння еволюти трактриси (див. *рис. 16*).

§ 8. НАТУРАЛЬНЕ РІВНЯННЯ ПЛОСКОЇ КРИВОЇ

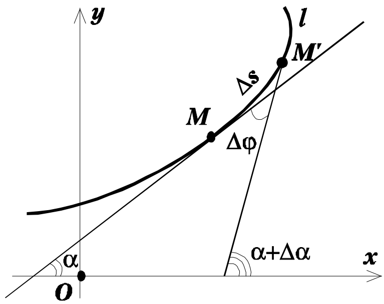

Рис. 17.

В цьому параграфі будемо розглядати гладку криву другого порядку l, задавши її природною параметризацією $\vec{r} = \vec{r}(s)$ або параметричними рівняннями $x = x(s)$, $y = y(s)$ в репері $(\vec{i}, \vec{j})$. Через $\alpha(s)$ позначимо кут, утворений одиничним вектором $\vec{t}(s) = \dot{\vec{r}}$ дотичної до кривої l з віссю абсцис. Зрозуміло (див. *рис. 17*), що приріст кута α при зміщенні по кривій l з точки M в точку M' дорівнює куту $\Delta\varphi$ між дотичними до неї в цих точках. Тоді кривина k кривої l в точці M визначається співвідношенням

$$k = \lim_{\Delta s \to 0}\left|\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}\right| = \lim_{\Delta s \to 0}\left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right| = |\dot{\alpha}|.$$

Домовимось тільки в цьому параграфі, що кривина кривої l може набувати і від'ємних значень, тобто покладемо

$$k = \dot{\alpha} \tag{8.1}$$

Означення 8.1. *Рівняння виду*

$$k = f(s),\ s \in (s_1, s_2) = S \subset R^1, \tag{8.2}$$

назвемо натуральним рівнянням кривої l на проміжку S.

Означення 8.2. *Скажемо, що дві плоскі криві відрізняються лише розташуванням на площині, якщо одна з них може бути суміщена з другою поворотом і паралельним перенесенням в цій площині.*

Теорема 8.1. *Якщо дві криві l_1 і l_2 відрізняються лише розташуванням на площині, то відлік довжини дуги на кожній з них можна узгодити так, що їх натуральні рівняння будуть однаковими.*

Доведення. Встановимо бієктивну відповідність між точками кривих l_1 і l_2, зіставляючи попарно ті точки даних кривих, які збігаються після їх суміщення. За початки відліку довжини дуги на цих кривих виберемо довільні відповідні точки $M_1^0 \in l_1$ та $M_2^0 \in l_2$. Напрямок відліку довжини дуги на даних кривих узгодимо так, щоб у будь-яких відповідних точках $M_1 \in l_1$ та $M_2 \in l_2$ значення довжини дуги s були однаковими. Зрозуміло, що при зміні s на проміжку S для кривої l_1, довжина дуги s вздовж кривої l_2 змінюється на цьому ж проміжку.

Кути $\alpha_1(s)$ і $\alpha_2(s)$ нахилу дотичних до вісі абсцис в точках M_1 і M_2 кривих l_1 і l_2 відповідно відрізняються на сталу величину φ. Дійсно, при обертанні кривої l_1 на деякий кут всі дотичні до неї повернуться на цей самий кут, а паралельне перенесення на напрямки дотичних ніяк не впливає. Продиференціювавши рівність $\alpha_1(s) = \alpha_2(s) + \varphi$ по s, одержимо, що $\dot{\alpha}_1 = \dot{\alpha}_2$.

Наступне твердження є оберненим до теореми 8.1.

Теорема 8.2. *Якщо дві плоскі криві l_1 і l_2 мають однакові натуральні рівняння (8.2) на проміжку S, то вони на цьому проміжку відрізняються лише розташуванням на площині.*

Доведення. Нехай M_1^0 і M_2^0 — початки відліку довжини дуги на кривих l_1 і l_2 відповідно. Перенесемо криву l_1 паралельно на вектор $\overrightarrow{M_1^0 M_2^0}$ і одержимо криву l_1'. Після цього повернемо криву l_1' навколо точки M_2^0 так, щоб одиничний вектор дотичної до неї став одночасно одиничним вектором дотичної до кривої l_2 в точці M_2^0. Одержану криву позначимо через l_1''. Точка M_2^0 спільна для кривих l_1'' і l_2, спільний для них в цій точці також одиничний вектор дотичних $\vec{t}$. Для доведення сформульованої теореми досить показати, що криві l_1'' та l_2 збігаються на проміжку S. За теоремою 8.1 натуральні рівняння кривих l_1'' та l_1 однакові, отже однакові натуральні рівняння кривих l_1'' та l_2. Оскільки при $s = 0$ для останньої пари кривих вектор $\vec{t}$ спільний, то й кут $\alpha(0) = \alpha_0$ нахилу його до вісі абсцис однаковий.

Враховуючи (8.1) і (8.2), для обох кривих l_1'' та l_2 випишемо спільне рівняння $\dot{\alpha} = f(s)$. Інтегруючи в межах від 0 до s, одержимо, що

$$\alpha(s) = \int_0^s f(\xi)d\xi + \alpha_0$$

для обох кривих l_1'' та l_2.

Оскільки вектор $\dot{\vec{r}}$ є одиничним вектором дотичної кривої l, то $\dot{x} = \cos\alpha(s)$, $\dot{y} = \sin\alpha(s)$. Інтегруючи останні рівності в тих самих межах, отримаємо

$$x(s) = \int_0^s \cos\alpha(\xi)d\xi + x(0),\ y(s) = \int_0^s \sin\alpha(\xi)d\xi + y(0). \qquad (8.3)$$

В останніх рівностях $x(0)$ та $y(0)$ — координати точки, що є початком відліку довжини дуги вздовж кривої. Для кривих l_1'' та l_2 така точка спільна, отже параметричні рівняння (8.3) для них однакові, і ці криві збігаються. Теорему доведено.

Наслідок 8.1. *Якою б не була неперервна на проміжку S функція f(s), завжди існує крива, для якої рівняння (8.2) є натуральним.*

Доведення цього твердження повторює доведення теореми 8.2. Слід лише показати, що для кривої l з параметричними рівняннями (8.3) параметр s є природним. Дійсно, продиференціювавши рівності (8.3) по s, одержуємо, що

$$dx = \cos\alpha(s)ds,\ dy = \sin\alpha(s)ds,$$

звідки $\sqrt{dx^2 + dy^2} = |ds|$. Це завершує доведення наслідку.

Відмітимо, що рівняння

$$k = k(s),\ \chi = \chi(s),\ s \in S,$$

називають натуральними рівняннями просторової кривої l.

Вправи

1. Написати натуральне рівняння ланцюгової лінії.

<u>*Розв'язання.*</u> Запишемо рівняння цієї лінії у вигляді $y = a\operatorname{ch}\frac{x}{a}$ $(a > 0)$ в декартовій системі координат. Знайдемо кривину цієї кривої, враховуючи, що $x' = 1,\ x'' = 0,\quad y' = \operatorname{sh}\frac{x}{a}$, $y'' = \frac{1}{a}\operatorname{ch}\frac{x}{a}$:

$$k = \frac{\left|x'y'' - x''y'\right|}{\left(x'^2 + y'^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\frac{1}{a}\operatorname{ch}\frac{x}{a}}{\left(1 + \operatorname{sh}^2\frac{x}{a}\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{a\operatorname{ch}^2\frac{x}{a}}. \tag{8.4}$$

Прийнявши за початок відліку довжини дуги ланцюгової лінії її вершину, що відповідає значенню $x = 0$, довжину дуги знаходимо за формулою

$$s = \int_0^x \sqrt{1 + y'^2(\xi)}\,d\xi = \int_0^x \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2\frac{\xi}{a}}\,d\xi = a\operatorname{sh}\frac{x}{a},$$

звідки $\operatorname{ch}\frac{x}{a} = \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2\frac{x}{a}} = \frac{\sqrt{s^2 + a^2}}{a}$. Тоді з (8.4) одержуємо, що $k = \frac{a}{a^2 + s^2}$. Це і є шукане рівняння.

2. Які криві визначаються натуральним рівнянням $k = a = const$?

<u>*Розв'язання.*</u> Знайдемо одну з таких кривих. Всі інші відрізнятимуться від неї лише розміщенням на площині. З рівняння $\dot{\alpha} = a$ знаходимо, що $\alpha = as$. При $a \neq 0$ за формулами (8.3) одержуємо

$$x = \int_0^s \cos as\,ds = \frac{1}{a}\sin as, \quad y = \int_0^s \sin as\,ds = -\frac{1}{a}\left(\cos as - 1\right).$$

Переходячи до декартової системи координат, одержуємо рівняння кола $x^2 + \left(y - \frac{1}{a}\right)^2 = \frac{1}{a^2}$. Якщо $a = 0$, то шукана крива є прямою.

3. Скласти натуральні рівняння кривих, які в репері $\left(\vec{i}, \vec{j}\right)$ визначаються рівняннями:

   а) $y = x^{\frac{2}{3}}$; б) $x = a(\cos t + t \sin t)$, $y = a(\sin t - t \sin t)$;

   в) $x = a\left(\ln \operatorname{tg} \dfrac{t}{2} + \cos t\right)$, $y = a \sin t$.

4. Які криві визначаються наступними натуральними рівняннями:

   а) $k = \dfrac{1}{as}$; б) $k = \dfrac{a}{a^2 + s^2}$; в) $s^2 + \dfrac{1}{k^2} = 16a^2$?

5. Скласти натуральні рівняння просторової кривої, що визначаються в репері $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ параметричними рівняннями

   $x = a \operatorname{ch} t$, $y = a \operatorname{sh} t$, $z = at$.

§ 9. ПОНЯТТЯ ТОПОЛОГІЧНОГО ПРОСТОРУ ТА ТОПОЛОГІЧНОГО МНОГОВИДУ

Поняття кривої, яке використовувалось в попередніх параграфах, можна значно узагальнити. Для цього спочатку треба ознайомитись з цілим рядом нових об'єктів та їх властивостями, до чого ми й переходимо.

Нехай X — непорожня множина довільної природи, $\mathcal{P}(X)$ — множина всіх її підмножин. Множину $\mathcal{J} \subset \mathcal{P}(X)$ називають топологією на X, якщо вона задовольняє наступним аксіомам:

1. Якщо $U_\lambda \in \mathcal{J}$ для всіх $\lambda \in \mathcal{I}$ (де $\mathcal{I}$ — множина індексів, можливо нескінченна), то $\bigcup\limits_{\lambda \in \mathcal{I}} U_\lambda \in \mathcal{J}$; порожня множина $\varnothing \in \mathcal{J}$.

2. Якщо $U_i \in \mathcal{J}$, $(i=1,2, \ldots ,n)$, то $\bigcap\limits_{i=1}^{n} U_i \in \mathcal{J}$; сама множина $X \in \mathcal{J}$.

Означення 9.1. *Топологічним простором назвемо множину X, на якій визначено топологію, тобто пару $(X, \mathcal{J})$. Елементи з $\mathcal{J}$ назвемо відкритими множинами.*

<u>Приклад</u> 9.1. Нехай $X \neq \varnothing$. Легко бачити, що $(X, \{X, \varnothing\})$ та $(X, \mathcal{P}(X))$ — топологічні простори з топологіями $\mathcal{J}_1 = \{X, \varnothing\}$, $\mathcal{J}_2 = \mathcal{P}(X)$ відповідно. Цей простенький приклад вказує на те, що на будь-якій непорожній множині можна ввести топологію, причому різними способами.

До цього ж висновку приходимо з наступних міркувань. Нехай (E, ρ) — метричний простір з метрикою (відстанню) ρ, $B(a,r) = \{x \in E | \rho(a,x) < r\}$ — відкрита куля з центром в точці $a \in E$ радіуса $r > 0$.

Множину $A \subset E$ називають відкритою, якщо $\forall a \in A$ $\exists B(a, \varepsilon) \subset A$. Позначимо через $\mathcal{J}_0$ множину всіх відкритих в E множин.

Як відомо, побудована множина $\mathcal{T}_0$ задовольняє аксіоми 1, 2, тобто утворює топологію на E. Отже, будь-який метричний простір є топологічним з топологією $\mathcal{T}_0$, про яку говорять, що вона індукована метрикою ρ.

Але на будь-якій множині $X \neq \varnothing$ можна задати метрику ρ, наприклад покласти

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 1, \text{ якщо } x \neq y; \\ 0, \text{ якщо } x = y \end{cases} \quad (x, y \in X).$$

Таким чином, на кожній непорожній множині можна задати метрику, яка, в свою чергу, індукує топологію, перетворюючи цю множину в топологічний простір.

<u>*Приклад*</u> *9.2*. Розглянемо n-вимірний арифметичний векторний простір R^n. Нехай $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ — його довільні елементи. Ввівши в R^n метрику за формулою

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i)^2},$$

одержуємо метричний простір (R^n, ρ), на якому метрика ρ індукує топологію $\mathcal{T}_0$.

Але метрику в R^n можна ввести й інакше:

$$\rho_1(x, y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|,$$

$$\rho_2(x, y) = \max_{1 \le i \le n} |y_i - x_i|.$$

Кожен раз ми одержуємо інший метричний простір, на якому відповідною метрикою індукується своя топологія.

Означення 9.2. *Нехай $(X, \mathcal{T})$ — топологічний простір та $A \subset B \subset X$. Множину B називають околом множини A, якщо $\exists U \in \mathcal{T} \mid A \subset U \subset B$. Якщо $A = \{x\} (x \in X)$, то B — окіл точки $x \in X$.*

Зауважимо, що окіл множини або окіл точки не обов'язково множина відкрита.

Означення 9.3. *Сімейство* $B \subset \mathcal{J}$ *називають базою топології* $\mathcal{J}$ *, якщо для кожної точки* $x \in X$ *та довільного її околу* $B_x \exists V \in B | x \in V \subset B_x$.

Вважають, що простір $(X, \mathcal{J})$ є простором з зчисленною базою, якщо топологія $\mathcal{J}$ має хоч одну базу, що складається не більш ніж з зчисленної кількості елементів.

Приклад 9.3. Множина інтервалів утворює базу топології на множині R^1 дійсних чисел. Множина всіх інтервалів з раціональними кінцями утворює зчисленну базу цієї топології.

Теорема 9.1. *Нехай* $(X, \mathcal{J})$ *— топологічний простір,* $A \subset X$ *. Множина А є околом кожної своєї точки тоді і тільки тоді, коли вона відкрита.*

Доведення. Нехай $A \in \mathcal{J}$. Для $\forall x \in A$ маємо: $\{x\} \subset A \subset A$, отже A — окіл точки x.

Навпаки, нехай A — окіл кожної своєї точки. Тоді

$$\forall x \in A \exists U_x \in \mathcal{J} | \{x\} \subset U_x \subset A .$$

Позначимо: $\bigcup\limits_{x \in A} U_x = U$. Зрозуміло, що $U \in \mathcal{J}$. Але $U_x \subset A$, $\forall x \in A$ отже $U \subset A$. Далі маємо, що $(x \in U_x \subset A) \Rightarrow x \in U$, отже $A \subset U$. Таким чином $A = U$, $A \in \mathcal{J}$, що закінчує доведення.

Означення 9.4. *Нехай* $(X, \mathcal{J})$ *і* $(X', \mathcal{J}')$ *— топологічні простори. Відображення f:* $X \to X'$ *називають неперервним в точці* $x \in X$ *, якщо для довільного околу* U' *точки f(x) в* X' *існує окіл U точки x в X, такий, що* $f(U) \subset U'$.

Відображення f називають топологічним (гомеоморфізмом), якщо:

1) f — бієкція;

2) f і f^{-1} неперервні на X і X' відповідно.

Теорема 9.2. *Відображення f:* $X \to X'$ *неперервне на X тоді і тільки тоді, коли прообраз довільної відкритої множини з* X' *є відкрита множина в X.*

Доведення. Нехай $f^{-1}(U') \in \mathcal{J}, \forall U' \in \mathcal{J}'$. Нехай x — довільна точка з X і V' — довільний окіл точки $f(x)$ в X'. За означенням 9.2

$$\exists A' \in \mathcal{J}' \,|\, f(x) \in A' \subset V'.$$

Тоді $x \in f^{-1}(A') \subset f^{-1}(V')$. Але $f^{-1}(A') \in \mathcal{J}$, тобто $f^{-1}(V')$ — окіл точки x. Отже, відображення f неперервне в точці x.

Навпаки, нехай f неперервне на X. Візьмемо довільне $A' \in \mathcal{J}'$, і нехай x — довільна точка з $f^{-1}(A')$. Оскільки f неперервне в x та A' — окіл точки $f(x)$, то $f^{-1}(A')$ — окіл точки x. Отже, множина $f^{-1}(A')$ є околом будь-якої своєї точки. За теоремою 9.1 $f^{-1}(A') \in \mathcal{J}$, що й потрібно було встановити.

Теорема 9.3. *Нехай відображення $f\colon X \to X'$ є гомеоморфізмом. Тоді $f(\mathcal{J}) = \mathcal{J}'$, тобто гомеоморфізм f переводить топологію на X в топологію на X'.*

Доведення. За означенням 9.4 відображення f неперервне на X, а відображення f^{-1} неперервне на X'. Тоді за теоремою 9.2 $f^{-1}(\mathcal{J}') \subset \mathcal{J}$ і $\left(f^{-1}\right)^{-1}(\mathcal{J}) \subset \mathcal{J}'$, звідки $\mathcal{J}' \subset f(\mathcal{J})$ і $f(\mathcal{J}) \subset \mathcal{J}'$. Отже, $f(\mathcal{J}) = \mathcal{J}'$, що закінчує доведення.

Теорема 9.3 дає можливість задавати топологію на множинах, що гомеоморфні множині, на якій топологія вже відома.

Приклад 9.4. Нехай задано афінний простір A^n. Задамо в ньому довільний репер $R = \{0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$. Тоді кожна точка $x \in A^n$ має своїми координатами впорядковану систему $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ дійсних чисел. Задамо відображення $f\colon R^n \to A^n$, що переводить елемент $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R^n$ в точку $x \in A^n$ з вказаними координатами. Легко переконатися, що f — гомеоморфізм. Приклад 9.2 показує, як одержати топологію на R^n, наприклад, $\mathcal{T}_0$. Тоді за теоремою 9.3 пара $\left(A^n, f\left(\mathcal{T}_0\right)\right)$ — топологічний простір.

Аналогічно вводиться топологія в евклідовому просторі E^n.

Топологічний простір називають відокремлюваним, якщо дві довільні різні його точки мають околи, що не перетинаються.

Нагадаємо, що замиканням $\overline{A}$ множини A називають множину всіх точок дотику, тобто таких точок, кожний окіл якої має з множиною A непорожній переріз.

Топологічний простір називають зв'язним, якщо його не можна подати у вигляді об'єднання двох непорожніх множин A і B таких, що $\overline{A} \cap B = \varnothing$ і $A \cap \overline{B} = \varnothing$.

Сімейство $\left(X_\lambda\right)_{\lambda \in \mathcal{I}}$ підмножин множини X назвемо покриттям цієї множини, якщо $\bigcup\limits_{\lambda \in \mathcal{I}} X_\lambda = X$.

Сформулюємо тепер два важливих означення.

Означення 9.5. *Нехай* $\left(X, \mathcal{T}\right)$ *— відокремлюваний топологічний простір,* n *— вимірною картою називають гомеоморфізм* φ *відкритої підмножини* $U \subset X$ *на* R^n *(або на його відкриту підмножину). При цьому множину* U *називають координатним околом карти* φ.

Означення 9.6. n *— вимірним топологічним многовидом називають зв'язний, відокремлюваний топологічний простір із счисленною базою, який можна покрити координатними околами* n *— вимірних карт.*

Можна довести, що гомеоморфізм переводить топологічний многовид в топологічний многовид тієї ж розмірності.

<u>Приклад</u> 9.5. Простір R^n зв'язний, відокремлюваний. Зчисленну базу у ньому утворює сімейство всіх можливих добутків $\mathcal{I}_1 \times \mathcal{I}_2 \times \ldots \times \mathcal{I}_n$ інтервалів $\mathcal{I}_k \left(k = 1, 2, \ldots, n\right)$ з раціональними кінцями. За карту φ візьмемо тотожне перетворення $R^n \to R^n$ (координатним околом цієї карти є R^n). Отже, R^n — топологічний многовид. Застосовуючи топологічне відобра-

ження, легко показати, що афінний простір A^n та евклідів простір E^n також n — вимірні топологічні многовиди.

<u>*Приклад*</u> *9.6.* Покажемо, що сфера S в просторі E^3 є двовимірним топологічним многовидом.

Зауважимо спочатку, що сфера S в просторі E^3 сама є зв'язним, відокремлюваним топологічним простором із зчисленною базою. Топологією $\mathcal{T}_s$ на сфері складають перерізи сфери з елементами топології $\mathcal{T}$ на E^3.

Відмітимо на сфері полюси A і B, як вказано на *рис.18*.

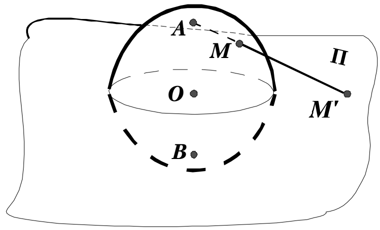

Рис.18.

Нехай Π — площина, яка перпендикулярна AB і проходить через центр сфери O. Розглянемо центральні проектування:

$\varphi: S \setminus \{A\} \to \Pi$ з центра A;

$\psi: S \setminus \{B\} \to \Pi$ з центра B. Множини $S \setminus \{A\}$ та $S \setminus \{B\}$ (сфера з виколотим полюсом) відкриті. Легко бачити, що відображення φ і ψ є гомеоморфізми, тобто φ і ψ — двовимірні карти з координатними околами $S \setminus \{A\}$ та $S \setminus \{B\}$ відповідно. Ці координатні околи покривають сферу S.

Вправи

1. Довести, що проективна площина p^2 є двовимірним топологічним многовидом.
2. Показати, що пряма $d \subset p^2$ не розділяє фігуру $p^2 \setminus d$.
3. Довести, що довільний трьохвісний еліпсоїд і довільний тетраедр гомеоморфні.

§ 10. ПОНЯТТЯ КРИВОЇ В ТОПОЛОГІЧНОМУ МНОГОВИДІ

Нехай $(X, \mathcal{T}_1)$ і $(Y, \mathcal{T}_2)$ — топологічні простори, $f\colon X \to Y$. Відображення $f_1\colon X \to f(X)$, таке, що $f_1(x) = f(x)$, $\forall x \in X$, називають зведенням відображення f.

Якщо зведення відображення f є гомеоморфізм, то f називають вкладенням X в Y. Відображення f називають зануренням X в $У$, якщо в кожної точки $x \in X$ існує окіл U_x такий, що звуження відображення f на цей окіл є вкладенням U_x в Y.

Всяке вкладення є одночасно і занурення. Але існують такі занурення, які не є вкладеннями. Приклади пропонуємо навести читачеві.

Нехай $\mathcal{I}$, $\mathcal{I}'$ — одновимірні топологічні многовиди на числовій прямій R^1 а X^n — деякий n — вимірний топологічний многовид ($n \geq 1$).

Означення 10.1. *Занурення $f\colon \mathcal{I} \to X^n$ та $g\colon \mathcal{I}' \to X^n$ назвемо σ — еквівалентними, якщо існує гомеоморфізм $h\colon \mathcal{I} \to \mathcal{I}'$, такий, що $f = gh$, тобто $f(t) = g(h(t))$, $\forall t \in \mathcal{I}$.*

З властивостей гомеоморфізму одразу випливає, що σ є відношенням еквівалентності на множині L всіх занурень одновимірних многовидів з R^1 в многовид X^n.

Означення 10.2. *Кожний елемент фактор множини L/σ (множини L по відношенню еквівалентності σ) назвемо кривою в многовиді X^n.*

Згідно означення 10.2 крива в X^n — це клас еквівалентних занурень одновимірних топологічних многовидів в X^n. Кожне занурення з множини L однозначно визначає криву в топологічному многовиді X^n.

Еквівалентні занурення f і g множини L мають своїм образом одну підмножину в многовиді X^n. Якщо занурення f є вкладенням, то образ многовиду $\mathcal{I}$ в X^n, тобто $f(\mathcal{I})$ сам є топологічним многовидом.

Зауваження 10.1. Часто криву, що задається вкладенням *f*, ототожнюють з одновимірним многовидом $f(\mathcal{I})$ в многовиді X^n.

Приклад 10.1. $\mathcal{I} = R^1$. Нехай X^n — деяка пряма d (одновимірний евклідів простір E^1). Задамо на d репер $(0,\vec{e})$. Відображення $f: R^1 \to d$, де $f(t)$ — точка з абсцисою t на прямій d, є вкладенням, причому $f\left(R^1\right) = d$. Отже, пряма є частковим випадком кривої в розумінні зауваження 10.1.

Приклад 10.2. $\mathcal{I} = [0;2\pi]$. На евклідовій площині E^2 задамо ортонормований репер $\left(0,\vec{i},\vec{j}\right)$. Розглянемо відображення $\mathcal{I} \to E^2$, що діє за правилом: $f(t) = M(x, y)$, де $x = cos t,$ $y = \sin t$. Легко переконатись, що f є зануренням і не є вкладенням. В цьому прикладі образом відображення f є одиничне коло в E^2 з центром в точці O.

Приклад 10.3. $\mathcal{I}_1 = [0;4\pi]$. Занурення g: $\mathcal{I} \to E^2$ за законом $g(\tau) = M(x,y)$, де $x = \cos\dfrac{\tau}{2}$; $y = \sin\dfrac{\tau}{2}$, еквівалентне зануренню f в прикладі 10.2. Потрібний гомеоморфізм $h: \mathcal{I} \to \mathcal{I}_1$ задається формулою $\tau = 2t$. Отже, в прикладах 10.2 і 10.3 визначена одна і та ж сама крива.

Приклад 10.4. $\mathcal{I}_1 = [0;4\pi]$, $f: \mathcal{I} \to E^2$ діє так само, як в прикладі 10.2. Не зважаючи на те, що образ $f(\mathcal{I}_1)$ такий самий, як образ $g(\mathcal{I}_1)$ в прикладі 10.3, криві, визначені в прикладах 10.4 і 10.3 (або 10.4 і 10.2) різні (переконайтесь в цьому!).

Дійсно, коли t пробігає множину $\mathcal{I}$, точка $f(t)$ пробігає одиничне коло в E^2 з центром O. Коли ж точка t побігає множину $\mathcal{I}_1$, то точка $f(t)$ пробігає це саме коло, але два рази. Зрозуміло, що в багатьох задачах (особливо з механіки) ці випадки слід розрізняти.

<u>*Приклад*</u> *10.5.* В евклідовому просторі E^3 задамо репер $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ і розглянемо в E^3 криву, що визначається зануренням $f: \mathcal{I} \to E^3$. Якщо $f(t) = M(x,y,z)$ $\left(t \in \mathcal{I},\ M \in E^3\right)$, то

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t),\ t \in \mathcal{I}\ .$$

Отже, координати x, y, z точки M є функції параметра t, визначеного на проміжку $\mathcal{I}$. Останні рівняння еквівалентні одному векторному рівнянню

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}.$$

З означення занурення випливає, що $\vec{r} = \vec{r}(t)$ неперервна функція на проміжку $\mathcal{I}$.

Але якщо спочатку записати рівняння виду $\vec{r} = \vec{r}(t)$, де $\vec{r}(t)$ неперервна на $\mathcal{I}$ вектор-функція, то може статися, що це рівняння не визначає взагалі ніякої кривої в розумінні означення 10.2, хоча в розумінні означення, наведеного в § 2, параметризація $\vec{r}(t)$ визначає цілком певну криву в E^3.

Вправи

1. Наведіть приклади відображень, що є зануреннями або вкладеннями.
2. Наведіть приклад занурення, яке не є вкладенням.
3. Визначіть криву в двохвимірному многовиді, що належить трьохвимірному евклідовому простору.

§ 11. ПРО ЛОКАЛЬНІ ВЛАСТИВОСТІ ТОЧКОВИХ МНОЖИН, ЗАДАНИХ НЕЯВНИМИ РІВНЯННЯМИ

Скажемо, що множина точок $\sigma \subset E^3$ задана неявними рівняннями

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0; \\ \Phi(x, y, z) = 0 \end{cases} \qquad (11.1)$$

в репері $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, якщо координати $(x,\ y,\ z)$ кожної точки з σ в цьому репері задовольняють цим рівнянням.

Означення 11.1. *Градієнтом функції $F(x,\ y,\ z)$ назвемо вектор*

$$\nabla\vec{F}(x, y, z) = F_x(x, y, z)\vec{i} + F_y(x, y, z)\vec{j} + F_z(x, y, z)\vec{k}\ , \qquad (11.2)$$

де через F_x, F_y, F_z позначено часткові похідні функції $F(x,y,z)$ по x, y, z відповідно.

Теорема 11.1. *Нехай в деякому околі V_{M_0} точки $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \sigma$ функції $F(x, y, z)$ та $\Phi(x, y, z)$ мають неперервні часткові похідні першого порядку по x, y, z і*

$$\nabla\vec{F}\Big|_{M_0} \not\parallel \nabla\vec{\Phi}\Big|_{M_0}.$$

Тоді існує окіл $V_{M_0}^0 \subset V_{M_0}$ точки M_0, в якому $\gamma = \sigma \cap V_{M_0}^0$ є гладкою кривою, в кожній точці якої існує дотична до неї.

<u>Доведення.</u> З означення градієнта та умови теореми 11.1 випливає, що

$$rang\begin{pmatrix} F_x & F_y & F_z \\ \Phi_x & \Phi_y & \Phi_z \end{pmatrix}_{M_0} = 2\,.$$

В цьому разі принаймі один з мінорів другого порядку цієї матриці відмінний від нуля.

Нехай, для означеності, $\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ \Phi_y & \Phi_z \end{vmatrix}_{M_0} \neq 0\,.$

Тоді за відомою з курсу математичного аналізу теоремою про неявні функції існує окіл $V_{M_0}^0 \subset V_{M_0}$ точки M_0, в якому систему рівнянь (11.1) можна розв'язати відносно y і z: $y = f(x)$, $z = g(x)$, причому функції f і g неперервно диференційовані. Позначимо $x = t$ і випишемо рівняння

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = t\vec{i} + f(t)\vec{j} + g(t)\vec{k},$$

яким в околі $V_{M_0}^0$ точки M_0 визначається гладка крива γ.

В довільній точці $M(t)$ цієї кривої

$$\vec{r}\,' = \vec{i} + f'(t)\vec{j} + g'(t)\vec{k} \neq \vec{0}, \tag{11.3}$$

отже $M(t)$ — її звичайна точка.

За теоремою 2.2 вектор $\vec{r}\,'(t)$ визначає єдину дотичну до кривої γ в точці M.

Випишемо рівняння дотичної до кривої γ в точці $M_0 = M(t_0)$. Зрозуміло, що для $M(t, f(t), g(t)) \in \gamma$ мають місце тотожності

$$F(t, f(t), g(t)) = 0;$$
$$\Phi(t, f(t), g(t)) = 0.$$

Продиференціювавши їх по t, одержимо

$$\frac{dF}{dt} = F_x \cdot 1 + F_y \cdot f'(t) + F_z \cdot g'(t) = 0;$$
$$\frac{d\Phi}{dt} = \Phi_x \cdot 1 + \Phi_y \cdot f'(t) + \Phi_z \cdot g'(t) = 0.$$

Враховуючи (11.2) та (11.3), останні рівності запишемо у вигляді

$$\begin{aligned} \nabla\vec{F}_{M_0} \cdot \vec{r}\,'(t_0) = 0; \\ \nabla\vec{\Phi}_{M_0} \cdot \vec{r}\,'(t_0) = 0. \end{aligned} \tag{11.4}$$

Вектори $\nabla\vec{F}_{M_0}$ та $\nabla\vec{\Phi}_{M_0}$ не нульові (нульовий вектор вважається колінеарним до будь-якого вектора, а за умовою теореми 11.1 вектори $\nabla\vec{F}_{M_0} \not\parallel \nabla\vec{\Phi}_{M_0}$). Тоді з (11.4) випливають співвідношення

$$\nabla\vec{F}_{M_0} \perp \vec{r}\,'(t_0), \ \nabla\vec{\Phi}_{M_0} \perp \vec{r}\,'(t_0).$$

В цьому разі $\vec{r}'(t_0) \parallel \vec{p} = \left[\nabla \vec{F}_{M_0}, \nabla \vec{\Phi}_{M_0}\right]$. Отже, вектор

$$\vec{p} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ F_x & F_y & F_z \\ \Phi_x & \Phi_y & \Phi_z \end{vmatrix}_{M_0}$$

можна прийняти за напрямний вектор дотичної до кривої γ в точці M_0. Позначивши координати точки, що рухається по дотичній, через *X, У, Z,* записуємо рівняння цієї дотичної в репері $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$:

$$\frac{X - x_0}{\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ \Phi_y & \Phi_z \end{vmatrix}_{M_0}} = \frac{Y - y_0}{\begin{vmatrix} F_z & F_x \\ \Phi_z & \Phi_x \end{vmatrix}_{M_0}} = \frac{Z - z_0}{\begin{vmatrix} F_x & F_y \\ \Phi_x & \Phi_y \end{vmatrix}_{M_0}}.$$

Залишаємо читачеві записати рівняння нормальної площини кривої γ в точці M_0.

<u>*Приклад*</u> *11.1.* Записати рівняння дотичної до кривої, що визначається рівняннями $x^2 = 2az$, $y^2 = 2bz$, в довільній точці.

<u>*Розв'язання*</u>*.* Дані рівняння перепишемо у вигляді

$$F(x, y, z) = x^2 - 2az = 0,\ \Phi(x, y, z) = y^2 - 2bz = 0.$$

Тоді $\nabla \vec{F} = \{2x; 0; -2a\}$; $\nabla \vec{\Phi} = \{0; 2y; -2b\}$.

$$\left[\nabla \vec{F}, \nabla \vec{\Phi}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2x & 0 & -2a \\ 0 & 2y & -2b \end{vmatrix} = \left\{ \begin{vmatrix} 0 & -2a \\ 2y & -2b \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -2a & 2x \\ -2b & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 2y \end{vmatrix} \right\} =$$

$$= \{4ay; 4bx; 4xy\}.$$

Запишемо рівняння шуканої дотичної:

$$\frac{X - x}{ay} = \frac{Y - y}{bx} = \frac{Z - z}{xy}.$$

Розглянемо тепер множину точок σ_1 евклідової площини E^2, координати яких в репері $\left(\vec{i}, \vec{j}\right)$ задовольняють рівняння

$$F(x, y) = 0. \qquad (11.5)$$

Припустимо, що в деякому околі U_{M_0} точки $M_0(x_0, y_0) \in \sigma_1$ функція $F(x, y)$ має неперервні часткові похідні по x та y. Якщо в точці M_0 хоч одна з часткових похідних F_x або F_y відмінна від нуля (наприклад, $F'_y\big|_{M_0} \neq 0$), то за теоремою про існування неявної функції існує такий окіл $U^0_{M_0} \subset U_{M_0}$ точки M_0, в якому рівняння (11.5) розв'язується відносно однієї з змінних (в нашому випадку відносно y): $y = f(x)$. Поклавши $x = t$, одержуємо рівняння

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = t\vec{i} + f(t)\vec{j} \, ,$$

причому функція $f(t)$ неперервно диференційована. Цим рівнянням в околі $U^0_{M_0}$ визначається гладка крива $\gamma = U^0_{M_0} \cap \sigma_1$, в кожній точці якої існує єдина дотична, бо $\vec{r}\,'(t) = \vec{i} + f'(t)\vec{j} \neq \vec{0}$ в кожній точці цієї кривої.

Точку $M_0 \in \sigma_1$ назвемо особливою точкою множини σ_1, якщо

$$F_x\big|_{M_0} = F_y\big|_{M_0} = 0 \, . \tag{11.6}$$

Існує ціла теорія, яка розглядає поведінку множини σ_1 в околі особливої точки M_0. Ми познайомимось тут лише з елементами цієї теорії.

Припустимо, що в околі U_{M_0} точки M_0 функція $F(x, y)$ має неперервні часткові похідні другого порядку F_{xx}, F_{xy}, F_{yy}, серед яких хоч одна в точці M_0 не перетворюється в нуль. В цьому випадку точку M_0 називають подвійною особливою точкою.

Будемо вважати, що з множини σ_1 можна в деякому околі $U^0_{M_0} \subset U_{M_0}$ точки M_0 виділити підмножину, що є простою дугою, яка містить цю точку. Нехай рівняння цієї дуги буде $y = f(x)$. Тоді $F(x, f(x)) \equiv 0$.

Продиференціювавши останню рівність по x, одержимо

$$\begin{cases} F_x + F_y f'(x) = 0; \\ F_{xx} + 2F_{xy} \cdot f'(x) + F_{yy} \cdot f'^2(x) + F_y \cdot f''(x) = 0. \end{cases} \qquad (11.7)$$

Розглянемо ці рівності в точці $M_0(x_0; y_0)$. Беручи до уваги (11.6), і поклавши для означеності, що $F_{yy}\big|_{M_0} \neq 0$, від (11.7) переходимо до рівностей

$$\begin{cases} F_x\big|_{M_0} + F_y\big|_{M_0} f'(x_0) = 0; & (11.8) \\ F_{xx}\big|_{M_0} + 2F_{xy}\big|_{M_0} \cdot f'(x_0) + F_{yy}\big|_{M_0} \cdot f'^2(x_0) = 0. & (11.9) \end{cases}$$

У випадку звичайної точки з рівняння (11.8) можна було б визначити кутовий коефіцієнт дотичної $f'(x_0)$ в точці M_0. У випадку особливої точки це можливо через умову (11.6). Отже, має місце наступне твердження.

Теорема 11.2. *Якщо з множини σ_1 можна виділити в околі особливої подвійної точки $M_0\left(F_{yy}\big|_{M_0} \neq 0\right)$ просту дугу γ, що містить цю точку, то кутовий коефіцієнт дотичної до цієї дуги в точці M_0 повинен задовольняти рівняння (11.9).*

Розглянемо три можливих випадки.

I випадок:

$$\Delta = F_{xx}\big|_{M_0} \cdot F_{yy}\big|_{M_0} - F_{xy}^2\big|_{M_0} > 0 .$$

Корені рівняння (11.9) уявні, отже ми приходимо до протиріччя, припустивши, що з множини σ_1 можна виділити просту дугу, яка проходить через точку M_0. В цьому випадку точку M_0 називають ізольованою особливою точкою.

II випадок: $\Delta < 0$. Корені рівняння (11.9) дійсні і різні, тобто в околі точки M_0 існують принаймі дві прості дуги, які містять M_0 і входять до множини σ_1. Таку особливу точку M_0 називають точкою самоперетину або вузловою точкою.

III випадок: $\Delta = 0$. Корені рівняння (11.9) дійсні і рівні.

В цьому випадку можуть зустрітися різні ситуації, які нижче ми проілюструємо на прикладах.

Зауваження 11.1. *Вище ми припустили, що* $F_{yy}\big|_{M_0} \neq 0$. *Якщо ця умова не виконується, а* $F_{xx}\big|_{M_0} \neq 0$ *або* $F_{xy}\big|_{M_0} \neq 0$, *то можна показати, що перетворенням системи координат останні два випадки зводяться до нашого припущення.*

Для більш детального ознайомлення читача з поведінкою множини σ_1 в околі своїх особливих точок рекомендуємо книги [3,10].

Вправи

1. Знайти рівняння дотичної прямої та нормальної площини до кривих, заданих рівняннями

   а) $x^2 + y^2 - z^2 = 1;\ x^2 - y^2 - z^2 = 1$;

   б) $x^2 + y^2 = 1;\ y^2 + z^2 = 1$,

   в довільній точці.

2. Множина σ_1 задана рівнянням

$$F(x, y) \equiv x^3 + x^2y + y^3 + y^2x - x^2 - y^2 = 0. \qquad (11.10)$$

   Визначити тип її точки $M_0(0;0)$.

<u>*Розв'язання.*</u>

$$F_x\big|_{M_0} = \left(3x^2 + 2xy + y^2 - 2x\right)\Big|_{M_0} = 0;$$

$$F_y\big|_{M_0} = \left(3y^2 + 2xy + x^2 - 2y\right)\Big|_{M_0} = 0;$$

$$F_{xx}\big|_{M_0} = \left(6x + 2y - 2\right)\big|_{M_0} = -2;$$

$$F_{xy}\big|_{M_0} = \left(2x + 2y\right)\big|_{M_0} = 0;$$

$$F_{yy}\big|_{M_0} = \left(6y + 2x - 2\right)\big|_{M_0} = -2;$$

$$\Delta = F_{xx}\big|_{M_0} \cdot F_{yy}\big|_{M_0} - F_{xy}^2\big|_{M_0} = 4 > 0.$$

Отже, M_0 є ізольованою подвійною особливою точкою множини σ_1.

Рівняння (11.10) можна звести до наступного:

$$\left(x^2+y^2\right)\left(x+y-1\right)=0,$$

яке розпадається на два рівняння:

$$x^2+y^2=0;$$
$$x+y-1=0.$$

Першому з них задовольняють координати лише точки M_0, друге рівняння є рівняння прямої, яка не проходить через початок координат.

3. Множина σ_1 задана рівнянням

$$F(x,y)\equiv\left(x^2+y^2+a^2\right)^2-4a^2x^2-a^4=0,\ a>0.$$

Визначити тип її точки $M_0(0;0)$.

Розв'язання.

$$F_x\Big|_{M_0}=\left(4x^3+4y^2x-4a^2x\right)\Big|_{M_0}=0;$$

$$F_y\Big|_{M_0}=4\left(x^2y+y^3+a^2y\right)\Big|_{M_0}=0;$$

$$F_{yy}\Big|_{M_0}=4\left(x^2+3y^2+a^2\right)\Big|_{M_0}=4a^2\neq 0;$$

$$F_{xx}\Big|_{M_0}=4\left(3x^2+y^2-a^2\right)\Big|_{M_0}=-4a^2;$$

$$F_{xy}\Big|_{M_0}=8xy\Big|_{M_0}=0;$$

$$\Delta=\left(-4a^2\right)4a^2-0=-16a^2<0.$$

Отже, $M_0\equiv 0$ є вузловою подвійною особливою точкою множини σ_1, яка являє собою лемніскату, зображену на *рис. 19*.

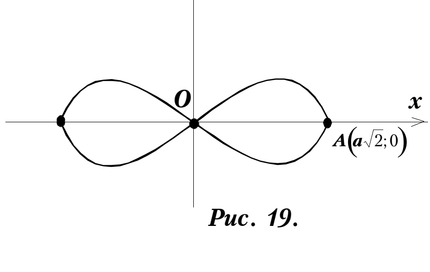

Рис. 19.

4. Множина σ_1 задана рівнянням

$$F(x,y) \equiv y^2 - x^3 = 0 \,.(11.11)$$

Визначити тип її точки $M_0(0;0)$.

<u>*Розв'язання.*</u> Легко перевірити, що в точці M_0

$$F_x = F_y = F_{xx} = F_{xy} = 0; \; F_{yy} = 2 \neq 0 \,.$$

При цьому $\Delta = 0$. Отже, має місце третій випадок.

Рівняння (11.11) можна записати у вигляді

$$\left(y - x\sqrt{x}\right)\left(y + x\sqrt{x}\right) = 0, \;\; x \geq 0 \,.$$

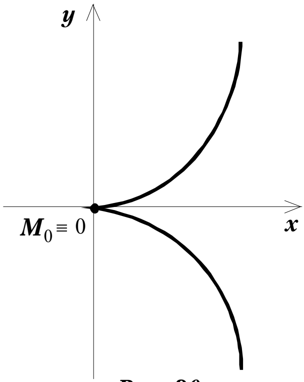

Рис. 20.

Звідси випливає, що множина σ_1 визначається двома рівняннями $y = x\sqrt{x}$, $y = -x\sqrt{x}$ і розпадається на дві гілки, зображені на *рис. 20*.

Точка M_0 — точка звороту першого роду.

5. Множина σ_1 задана рівнянням

$$F(x,y) \equiv \left(y - x^2\right)^2 - x^5 = 0 \,. \; (11.12)$$

Визначити тип її точки $M_0(0;0)$.

<u>*Розв'язання.*</u> Значення часткових похідних першого і другого порядку в точці M_0 ті самі, що в прикладі 4. Знов має місце третій випадок. Але множина σ_1 тепер визначена двома рівняннями

$$\begin{matrix} y = x^2 + x^2\sqrt{x}, \\ y = x^2 - x^2\sqrt{x} \end{matrix} \quad (x \geq 0)$$

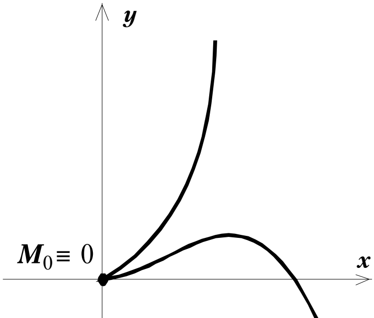

Рис. 21.

і складається з двох гілок, зображених на *рис. 21*.

Ці гілки мають в точці M_0 спільну дотичну і в досить малому околі цієї точки лежать по один бік від дотичної. Отже, точка M_0 — точка звороту II роду.

6. Множина σ_1 задана рівнянням

$$F(x,y) \equiv y^2 - yx^4 - yx^2 + x^6 = 0 .$$

Визначити тип її точки $M_0(0;0)$.

<u>*Розв'язання.*</u> В точці M_0: $F_x = F_y = F_{xx} = F_{xy} = 0$; $F_{yy} = 2$, $\Delta = 0$. Легко бачити, що множина σ_1 розпадається на квадратичну параболу і параболу 4-го порядку: $y = x^2$; $y = x^4$.

Точка M_0 — точка самодотику (*рис. 22*).

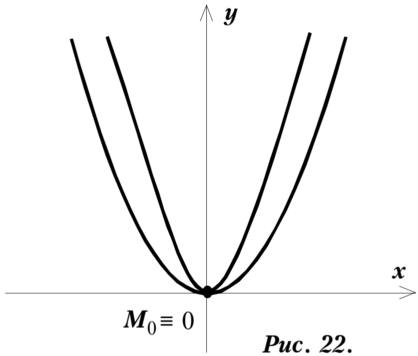

Рис. 22.

Розділ 2

ТЕОРІЯ ЕЛЕМЕНТАРНИХ ПОВЕРХОНЬ

§ 12. ЕЛЕМЕНТАРНІ ПОВЕРХНІ. ЗВИЧАЙНІ ТА ОСОБЛИВІ ТОЧКИ ПОВЕРХНІ

Розглянемо вектор-функцію $\vec{r}(u,v)$ двох скалярних аргументів, тобто вважатимемо, що множина визначення її $D(\vec{r}) \subset R^2$, а множина значень $R(\vec{r}) \subset V^3$. Через $C^k_{D(\vec{r})}$ позначимо множину всіх векторних і скалярних функцій двох скалярних аргументів, для яких в кожній точці $(u,v) \in D(\vec{r})$ існують і неперервні усі часткові похідні до k-того порядку включно.

Нагадаємо, що зв'язну множину точок Γ евклідової площини E^2 називають простою кривою, якщо для всякої точки $x \in \Gamma$ існує такий окіл $U_x \subset E^2$, що множина $\Gamma \cap U_x$ гомеоморфна відкритому відрізку прямої або колу. В останньому випадку просту криву називають замкнутою.

Теорема Жордана говорить про те, що кожна проста замкнута крива розбиває множину точок площини на дві зв'язні підмножини: обмежену і необмежену, для кожної з яких вона є межею. При цьому обмежена підмножина гомеоморфна кругу. Так, наприклад, множини внутрішніх точок еліпса, квадрата, прямокутника і т.д. гомеоморфні відкритому кругу.

Означення 12.1. *Множину точок з R^2, гомеоморфну відкритому кругу, назвемо елементарною областю.*

Наведемо приклад такої області. Для цього розглянемо на площині E^2 декартову систему координат і позначимо через M множину всіх внутрішніх точок прямокутника, що лежить в цій площині. Відобразимо множину M в R^2, поставивши у відповідність кожній точці $A \in \mathrm{M}$ точку $B = (x;y) \in R^2$, де x і y — абсциса та ордината точки A відповідно. Таке відображення є гомеоморфізм, а образ множини M при ньому є елементарною областю.

Означення 12.2. *Годограф вектор-функції* $\vec{r}(u,v)$, *визначеної на елементарній області* σ, *назвемо поверхнею* Φ, *заданою параметризацією* $\vec{r}(u,v)$ *або векторним рівнянням*

$$\vec{r} = \vec{r}(u,v). \tag{12.1}$$

Зауважимо, що в сенсі означення 12.2 довільна непорожня множина точок з E^3 є поверхнею, оскільки її потужність не перевищує потужності елементарної області.

Означення 12.3. *Поверхню* Φ, *гомеоморфну елементарній області* σ, *назвемо елементарною поверхнею.*

Означення 12.4. *Параметризацію* $\vec{r}(u,v)$ *назвемо простою, якщо для будь-якої точки* $(u,v)\in\sigma$ *існує такий окіл* $U_{(u,v)}\subset\sigma$, *на якому годограф вектор-функції* $\vec{r}(u,v)$ *є елементарною поверхнею.*

Говорять, що поверхня Φ є регулярною k-того порядку, якщо її параметризація $\vec{r}(u,v)\in C_\sigma^k$. При $k\ge 1$ поверхню називають гладкою.

Означення 12.5. *Точку* $(u_0,v_0)\in\sigma$ *назвемо звичайною точкою параметризації* $\vec{r}(u,v)$, *якщо вектор-функція* $\vec{r}(u,v)$ *має в цій точці відмінні від* $\vec{0}$ *часткові похідні* $\vec{r}_u = \dfrac{\partial\vec{r}(u,v)}{\partial u}$ *та* $\vec{r}_v = \dfrac{\partial\vec{r}(u,v)}{\partial v}$, *причому*

$$\vec{r}_u(u_0,v_0) \not\parallel \vec{r}_v(u_0,v_0). \tag{12.2}$$

Якщо точка (u_0,v_0) *не є звичайною, то її назвемо особливою точкою цієї параметризації.*

Теорема 12.1. *Якщо всі точки* $(u,v)\in\sigma$ *параметризації* $\vec{r}(u,v)\in C_\sigma^1$ *звичайні, то ця параметризація проста.*

<u>*Доведення.*</u> Нехай $M_0(u_0,v_0)$ – довільна точка поверхні Φ, $(u_0,v_0)\in\sigma$. Розкладемо вектор-функцію (12.1) за ортонормованим базисом

$$\vec{r}(u,v) = x(u,v)\vec{i} + y(u,v)\vec{j} + z(u,v)\vec{k}.$$

Параметричні рівняння поверхні Φ мають вигляд

$$x = x(u,v), y = y(u,v), z = z(u,v). \tag{12.3}$$

Зрозуміло, що функції $x(u,v)$, $y(u,v)$, $z(u,v)$ належать множині C^1_σ, оскільки $\vec{r}(u,v) \in C^1_\sigma$. З умови (12.2) випливає, що

$$\operatorname{rang} \begin{pmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix}_{M_0} = 2,$$

отже, один з мінорів другого порядку цієї матриці відмінний від нуля.

Нехай для певності $\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}_{M_0} \neq 0$.

Використовуючи відому з курсу математичного аналізу теорему про існування та диференційованість неявних функцій, переконуємось в існуванні околу $U_{(u_0,v_0)} \subset \sigma$ точки (u_0,v_0), гомеоморфного своєму образу G при відображенні, що задається першими двома рівностями з (12.3), які розв'язуються відносно u та v:

$$u = u(x,y), v = v(x,y), \tag{12.4}$$

причому функції $u(x,y), v(x,y) \in C^1_G$.

Підставивши вирази (12.4) в треті рівняння (12.3), приходимо до висновку, що на множині G поверхня Φ задається рівнянням виду

$$z = f(x,y),$$

де $f(x,y)$ — неперервна функція від x та y.

Зрозуміло, що множина точок $f(G) \subset \Phi$ гомеоморфна G, а отже, і множині $U_{(u_0,v_0)} \subset \sigma$, тобто є елементарною поверхнею, що закінчує доведення.

Очевидно, що поверхня Φ може бути задана і іншою параметризацією, наприклад, $\vec{r}_0(\varphi,\psi)$, де $(\varphi,\psi) \in \sigma_0 \subset R^2$.

Означення 12.6. *Відображення $h : \sigma \to \sigma_0$, задане рівняннями виду*

$$\varphi = \varphi(u,v), \psi = \psi(u,v),$$

які розв'язуються відносно u та v:

$$u = u(\varphi,\psi), v = v(\varphi,\psi), \tag{12.5}$$

називають дифеоморфізмом, якщо функції $\varphi(u,v), \psi(u,v) \in C^1_\sigma$, *а функції* $u(\varphi,\psi), v(\varphi,\psi) \in C^1_{\sigma_0}$.

Зрозуміло, що відображення h є частковий випадок гомеоморфізму.

Означення 12.7. *Параметризації* $\vec{r}(u,v)$ *і* $\vec{r}_0(\varphi,\psi)$ $\big((u,v) \in \sigma, (\varphi,\psi) \in \sigma_0\big)$ *назвемо еквівалентними, якщо існує дифеоморфізм* $h : \sigma \to \sigma_0$, *такий, що* $\vec{r}(\sigma) = \vec{r}_0(h\sigma)$. *Точки* $(u,v) \in \sigma, (\varphi,\psi) \in \sigma_0$ *еквівалентних параметризацій назвемо відповідними, якщо* $(\varphi,\psi) = h(u,v)$.

Теорема 12.2. *Відповідні точки еквівалентних параметризацій одночасно або звичайні, або особливі.*

<u>*Доведення.*</u> Нехай $(u,v) \in \sigma$ — точка параметризації $\vec{r}(u,v)$, і дифеоморфізм h переводить її в звичайну точку $(\varphi,\psi) \in \sigma_0$ еквівалентної параметризації $\vec{r}_0(\varphi,\psi)$, тобто

$$\vec{r}(u,v) = \vec{r}_0(\varphi(u,v), \psi(u,v)) .$$

Тоді

$$\vec{r}_u(u,v) = \vec{r}_{0_\varphi} \frac{\partial\varphi(u,v)}{\partial u} + \vec{r}_{0_\psi} \frac{\partial\psi(u,v)}{\partial u} ;$$

$$\vec{r}_v(u,v) = \vec{r}_{0_\varphi} \frac{\partial\varphi(u,v)}{\partial v} + \vec{r}_{0_\psi} \frac{\partial\psi(u,v)}{\partial v} . \qquad (12.6)$$

Як відомо з курсу математичного аналізу, якобіан дифеоморфізму h

$$I(h) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial\varphi(u,v)}{\partial u} & \dfrac{\partial\psi(u,v)}{\partial u} \\ \dfrac{\partial\varphi(u,v)}{\partial v} & \dfrac{\partial\psi(u,v)}{\partial v} \end{vmatrix}$$

відмінний від нуля в кожній точці множини σ . Тоді з лінійної незалежності векторів $\vec{r}_{0_\varphi}, \vec{r}_{0_\psi}$ та рівностей (12.6) випливає лінійна незалежність (не паралельність) векторів $\vec{r}_u(u,v)$, $\vec{r}_v(u,v)$. Останнє означає, що точка (u,v) — звичайна точка параметризації $\vec{r}(u,v)$.

Аналогічно легко показати, що із звичайності точки (u,v) випливає звичайність точки (φ,ψ), врахувавши, що дифеоморфізм $h^{-1}:\sigma_0\to\sigma$ задається рівняннями (12.5), і якобіан

$$I(h^{-1})=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial u(\varphi,\psi)}{\partial\varphi} & \dfrac{\partial v(\varphi,\psi)}{\partial\varphi}\\ \dfrac{\partial u(\varphi,\psi)}{\partial\psi} & \dfrac{\partial v(\varphi,\psi)}{\partial\psi}\end{vmatrix}$$

відмінний від нуля в кожній точці множини σ_0. Теорему доведено.

***Зауваження 12.1**. Якщо параметризація $\vec{r}(u,v)$ поверхні Φ проста, то простою є всяка еквівалентна їй параметризація.*

Як правило, при дослідженні поверхні одночасно використовують лише еквівалентні її параметризації. Тому там, де це не викликає непорозумінь, звичайною (особливою) будемо називати саму точку $M_0(u_0,v_0)$ поверхні Φ, якій відповідає звичайна (особлива) точка (u_0,v_0) її параметризації $\vec{r}(u,v)$.

Непорозуміння можуть виникнути, якщо точка $M_0(u_0,v_0)$ є точкою самоперетину поверхні Φ, тобто відповідає ще одній точці $(u_1,v_1)\in\sigma$, такій, що $(u_1,v_1)\neq(u_0,v_0)$. Такі точки ми виключимо з розгляду. Поверхні ми будемо вивчати в "малому", тобто досліджувати локальні їх властивості, а тому надалі обмежимося вивченням лише елементарних поверхонь без особливих точок.

***Зауваження 12.2**. Розглянемо довільну площину, що проходить через полюс O і задамо в ній декартову систему координат UOV. Відобразимо множину $\sigma\subset R^2$ в цю площину, поставивши у відповідність кожній точці $(u,v)\in\sigma$ точку площини з абсцисою u та ординатою v в обраній системі координат. Зрозуміло, що множина σ та її образ σ^* при здійсненому відображенні гомеоморфні. Тому зручно ці множини ототожнити, ототожнивши їх відповідні точки при цьому гомеоморфізмі.*

Вправи

1.Виписати векторне рівняння поверхні обертання.

Розв'язання. Поверхнею обертання називають фігуру, утворену обертанням плоскої кривої γ навколо деякої прямої (вісі обертання), що лежить в тій самій площині Π, що й сама крива. Задамо в E^3 декартову систему координат XYZ з початком в полюсі O так, щоб вісь OZ була віссю обертання, і введемо ще одну декартову систему координат ZOU в площині Π, де $(OU) = \Pi \bigcap (XOY)$ (дивись *рисунок 23*). Будемо вважати, що крива γ в системі координат ZOU визначається параметричними рівняннями $u = u, z = f(u)$. Кут XOU позначимо через φ. В той час, коли кут φ пробігає проміжок $[0,2\pi]$, точка $M \in \gamma$ описує коло γ_M з центром в точці $O' \in OZ$, яке лежить в площині, перпендикулярній до вісі OZ. Позначимо $\Phi = \bigcup\limits_{M \in \gamma} \gamma_M$. Легко бачити, що координати x, y, z довільної точки фігури Φ виражаються формулами $x = u\cos\varphi,\ y = u\sin\varphi,\ z = f(u)$. Отже, множина Φ — годограф вектор-функції

$$\vec{r} = u\cos\varphi\vec{i} + u\sin\varphi\vec{j} + f(u)\vec{k}\ , \qquad (12.7)$$

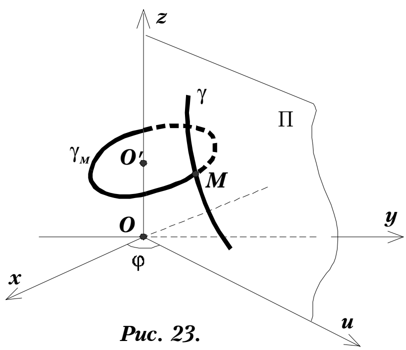

Рис. 23.

де $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ — орти системи координат X, Y, Z, $u \in (u_1, u_2) \subset R^1$, $\varphi \in [0,2\pi] \subset R^1$. В сенсі означення 12.2 рівняння (12.7) не визначає поверхню, бо множина точок $(u, \varphi) \in G = (u_1, u_2) \times [0,2\pi]$ не є елементарною областю. Але годограф вектор-функції (12.7) на множині $G^* = (u_1, u_2) \times (0,2\pi)$ є поверхнею, бо G^* — елементарна область.

Таким чином, якщо з фігури Φ вирізати меридіан, що відповідає значенню $\varphi = 0$, то одержимо поверхню обертання Φ^*, задану рівнянням (12.7) на елементарній області G^*.

Нехай крива γ гладка. Якщо $O \notin (u_1, u_2)$, тобто крива γ не перетинає вісь OZ, то в усіх точках $(u, \varphi) \in G^*$ вектори $\vec{r}_u = (\cos\varphi, \sin\varphi, f'(u))$ та $\vec{r}_v = u(-\sin\varphi, \cos\varphi, 0)$ не нульові і не колінеарні. Це означає, що в області G^* параметризація (12.7) проста, тобто для всякої точки $(u, \varphi) \in G^*$ існує такий окіл $U_{(u,\varphi)} \subset G^*$, на якому годограф вектор-функції (12.7) є елементарною поверхнею.

2. Довести, що відкритий круг гомеоморфний площині.

<u>*Розв'язання*</u> досить провести для одиничного круга. В площині E^2 виберемо декартову систему координат XOY і розглянемо одиничний круг з центром в точці O. Потрібний гомеоморфізм задамо так:

а) початок координат переводимо в себе;

б) точку $A \neq O$ з координатами x, y переводимо в точку A' з координатами

$$\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} tg\left(\frac{\pi}{2} \sqrt{x^2 + y^2} \right); \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} tg\left(\frac{\pi}{2} \sqrt{x^2 + y^2} \right) \right).$$

Це відображення легко сконструювати, перейшовши до декартової системи координат від полярної системи координат $(0, \rho, \varphi)$, $(\rho \in [0; +\infty)$, $\varphi \in [0; 2\pi))$, полярна вісь якої співпадає з додатною піввіссю OX, поставивши у відповідність точці O саму цю точку, а точці $A \neq O$ з координатами (ρ, φ) — точку A' з координатами $\left(tg\frac{\pi\rho}{2}; \varphi \right)$.

3. Довести, що параболоїд обертання є елементарною поверхнею.

<u>*Розв'язування*</u> полягає у встановленні гомеоморфізму між параболоїдом обертання і площиною, яка проходить через його вершину і перпендикулярна до вісі обертання, за допомогою паралельного проектування в напрямку цієї вісі з наступним використанням попередньої задачі.

4. Написати рівняння поверхні, яка утворюється при обертанні трактриси навколо своєї бази (псевдосфера).

Вказівка. В площині XOZ задамо трактрису параметричними рівняннями $x = a\sin u,\ z = a\left(\ln tg\frac{u}{2} + \cos u\right)$, де $u \in (0,\pi) \subset R^1$. Вісь OZ називають базою цієї кривої. Виписуємо векторне рівняння псевдосфери

$$\vec{r} = a\sin u\cos v\vec{i} + a\sin u\sin v\vec{j} + a\left(\ln tg\frac{u}{2} + \cos u\right)\vec{k}\ , \quad (12.8)$$

де $v \in [0,2\pi) \subset R^1$.

Зробіть рисунок. Переконайтеся, що рівняння (12.8) на множині точок $(u,v) \in M = (0,\pi)\times(0,2\pi)$ визначає поверхню в сенсі означення (12.2), причому всі точки множини M, що не включаються в множину $N = \left\{\left(\frac{\pi}{2};v\right)\right\} \subset M$, є звичайними точками параметризації (12.8).

§ 13. КООРДИНАТНА СІТКА ПОВЕРХНІ. ДОТИЧНА ПЛОЩИНА І НОРМАЛЬ ДО ПОВЕРХНІ

Визначимо елементарну поверхню Φ на елементарній області σ рівнянням (12.1). Нехай $M_0(u_0, v_0)$ – довільна точка цієї поверхні. Через цю точку проходять дві криві l_1 і l_2, що лежать на поверхні Φ і визначаються рівняннями $\vec{r} = \vec{r}(u, v_0)$ і $\vec{r} = \vec{r}(u_0, v)$ відповідно, причому u і v набувають таких значень, при яких $(u_0, v), (u, v_0) \in \sigma$. Криві l_1 і l_2 називають координатними лініями поверхні Φ u-типу і v-типу відповідно. Отже, через кожну точку поверхні проходять дві координатні лінії. Числа u і v називають криволінійними координатами точки M_0.

Означення 13.1. *Множину всіх координатних ліній поверхні назвемо її координатною сіткою.*

Легко переконатися, що всякі дві різні координатні лінії одного типу поверхні Φ не мають спільних точок.

Означення 13.2. *Площину, що містить звичайну точку $M_0(u_0, v_0)$ гладкої поверхні Φ, визначеної рівнянням (12.1), і паралельну до векторів $\vec{r}_u(u_0, v_0)$, $\vec{r}_v(u_0, v_0)$, назвемо дотичною площиною до цієї поверхні в точці M_0. Пряму, що проходить через точку M_0 і перпендикулярну до дотичної площини, назвемо нормаллю до поверхні Φ в цій точці.*

Зауваження 13.1. *Дотична площина в точці M_0 поверхні Φ не змінюється при переході від параметризації $\vec{r}(u,v)$ до будь-якої еквівалентної параметризації $\vec{r}_0(\varphi, \psi)$.*

Дійсно, з рівностей (12.6) випливає, що вектори $\vec{r}_u\big|_{M_0}$, $\vec{r}_v\big|_{M_0}$, $\vec{r}_{0\varphi}\big|_{M_0}$, $\vec{r}_{0\psi}\big|_{M_0}$ лежать в одній площині.

Задамо довільну криву γ, що лежить на поверхні Φ, рівнянням

$$\vec{r} = \vec{r}(u(t)v(t)), \qquad (13.1)$$

де при $t \in (t_1, t_2) = T \subset R^1$ $(u(t),\ v(t)) \subset \sigma,$ $u_0 = u(t_0),$ $v_0 = v(t_0),$ $t_0 \in T,$ функції $u(t), v(t) \in C_T^1$ і $u'(t_0), v'(t_0)$ не дорівнюють нулю одночасно.

Теорема 13.1. *Крива γ в точці $M_0 \in \Phi$ має єдину дотичну, яка лежить в дотичній площині до поверхні Φ в точці M_0.*

Доведення. Оскільки M_0 — звичайна точка гладкої поверхні Ц, то γ є гладкою кривою, для якої M_0 — звичайна точка. Це випливає з рівності

$$\vec{r}_t(u(t_0), v(t_0)) = \vec{r}_u(u_0, v_0)u'(t_0) + \vec{r}_v(u_0, v_0)v'(t_0)\,. \qquad (13.2)$$

В цьому разі до кривої γ в точці M_0 існує єдина дотична, яка визначається напрямним вектором $\vec{r}_\gamma = \vec{r}_t(u(t_0), v(t_0)) \neq \vec{0}$. При цьому вектори $\vec{r}_u(u_0, v_0), \vec{r}_v(u_0, v_0)$ є напрямними векторами дотичних до координатних ліній поверхні Φ в точці M_0. З (13.2) випливає, що вектори $\vec{r}_u(u_0, v_0), \vec{r}_v(u_0, v_0)$ і $\vec{r}_\gamma$ лежать в одній площині, оскільки вони лінійно-залежні. Тоді дотична до кривої γ в точці M_0 лежить в дотичній площині до поверхні Φ в цій точці (див. *рис. 24*).

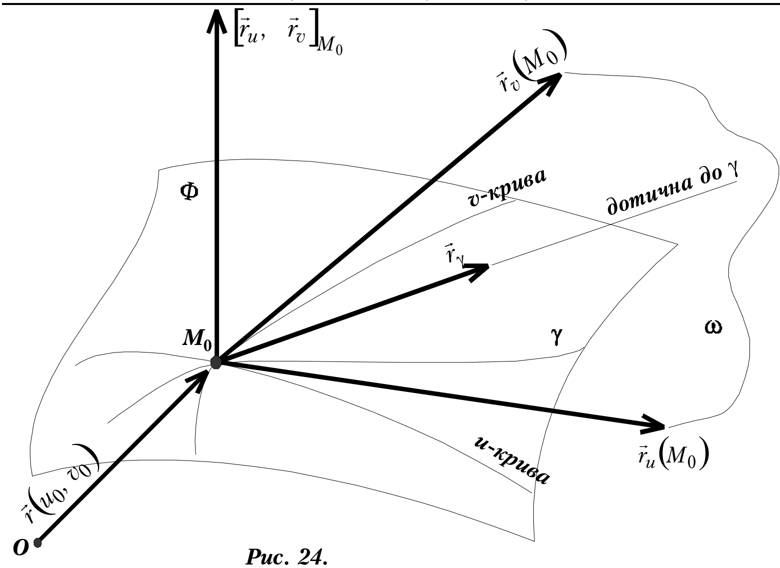

Рис. 24.

Випишемо рівняння нормалі і дотичної площини до поверхні Ф в точці M_0, скориставшись параметричними рівняннями (12.3) цієї поверхні. За напрямний вектор нормалі оберемо вектор

$$\vec{p} = [\vec{r}_u(u_0, v_0), \vec{r}_v(u_0, v_0)] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}_{(u_0, v_0)}$$

і позначимо визначники

$$\begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix}_{(u_0, v_0)}, \quad \begin{vmatrix} z_u & x_u \\ z_v & x_v \end{vmatrix}_{(u_0, v_0)}, \quad \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}_{(u_0, v_0)}$$

через *A, B, C* відповідно. Тоді рівняння нормалі і дотичної площини набирають вигляду

$$\frac{x - x(u_0, v_0)}{A} = \frac{y - y(u_0, v_0)}{B} = \frac{z - z(u_0, v_0)}{C}; \qquad (13.3)$$

$$(x - x(u_0, v_0))A + (y - y(u_0, v_0))B + (z - z(u_0, v_0))C = 0. \quad (13.4)$$

Нехай тепер поверхня Φ_0 задана в деякому ортонормованому репері рівнянням

$$F(x, y, z) = 0, \qquad (13.5)$$

де функція $F(x,y,z)$ має неперервні часткові похідні по кожному з аргументів. На практиці часто буває досить складно записати рівняння поверхні Φ_0 у формі (12.1). Але в цьому немає потреби, якщо рівняння дотичної площини шукається в точці $M_0(x_0,y_0,z_0)\in\Phi_0$, в якій градієнт функції $F(x,y,z)$ відмінний від $\vec{0}$.

Теорема 13.2. *Якщо функція $F(x,y,z)$ неперервно диференційовна по кожній змінній і в точці $M_0(x_0,y_0,z_0)\in\Phi_0$, $\nabla\vec{F}\big|_{M_0}\neq\vec{0}$, то поверхня Φ_0, що визначена рівнянням (13.5), має в цій точці єдину дотичну площину.*

<u>*Доведення.*</u> Дійсно, покладемо, наприклад, $F_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0$. За теоремою про існування неявної функції в деякому околі точки M_0 поверхню Φ_0 можна визначити рівнянням виду $z=f(x,y)$, де функція $f(x,y)$ неперервно диференційована по кожному з аргументів, або векторним рівнянням $\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+f(x,y)\vec{k}$. При цьому вектори $\vec{r}_x\big|_{M_0}=\big(1{,}0,f_x(x_0,y_0)\big)$ і $\vec{r}_y\big|_{M_0}=\big(0{,}1,f_y(x_0,y_0)\big)$ не колінеарні і визначають дотичну площину ω до поверхні Φ_0 в точці M_0.

Випишемо тепер рівняння цієї площини. Рівнянням $\vec{r}=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{k}$ задамо довільну гладку криву γ_0 , яка при $t\in T$ лежить на поверхні Φ_0, причому $t_0\in T$, $x_0=x(t_0)$, $y_0=y(t_0)$, $z_0=z(t_0)$ і точка M_0 — звичайна точка цієї кривої. Тоді для всіх $t\in T$ $F(x(t),y(t),z(t))=0$, звідки

$$F_x\cdot x'(t)+F_y\cdot y'(t)+F_z\cdot z'(t)=0,\quad t\in T.$$

Остання рівність при $t=t_0$ набирає вигляду

$$\nabla\vec{F}\big|_{M_0}\cdot\vec{r}\,'(t_0)=0,$$

тобто $\nabla\vec{F}\big|_{M_0}\perp\vec{r}\,'(t_0)$, і вектор $\vec{r}\,'(t_0)\neq\vec{0}$ визначає напрям дотичної до кривої γ_0 в точці M_0. Оскільки крива γ_0 довільна і дотична до неї в цій точці лежить в площині ω, то вектор $\nabla\vec{F}\Big|_{M_0}$ визначає напрям нормалі до поверхні Φ_0 в точці M_0. Отже, рівняння

$$\frac{x - x_0}{F_x\big|_{M_0}} = \frac{y - y_0}{F_y\big|_{M_0}} = \frac{z - z_0}{F_z\big|_{M_0}} \qquad (13.6)$$

і $$(x - x_0)F_x\big|_{M_0} + (y - y_0)F_y\big|_{M_0} + (z - z_0)F_z\big|_{M_0} = 0 \qquad (13.7)$$

визначають відповідно нормаль і дотичну площину до поверхні ω в точці M_0.

Вправи

1. Написати рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні, що задана рівнянням $\vec{r} = (2u - v)\vec{i} + (u^2 + v^2)\vec{j} + (u^3 - v^3)\vec{k}$ в точці $M(3;5;7)$.

<u>*Розв'язання.*</u> Визначимо спочатку значення параметрів u і v, які відповідають точці M. Для цього розв'яжемо систему рівнянь

$$2u - v = 3, \quad u^2 + v^2 = 5, \quad u^3 - v^3 = 7, \qquad (13.8)$$

перші два з яких приводять до квадратного рівняння $5u^2 - 12u + 4 = 0$, яке має два корені: $u_1 = 2,\ u_2 = 0{,}4.$ Відповідно, $v_1 = 1, v_2 = -\dfrac{11}{5}$. З двох пар (u_1, v_1) і (u_2, v_2) третє рівняння системи (13.8) задовольняє лише перша. Отже, точці M відповідають значення параметрів $u = 2, v = 1$. Врахувавши, що в точці M $x_u = 2,\ x_v = -1,\ y_u = 2 \cdot 2 = 4,\ y_v = 2,\ z_u = 3 \cdot 2^2 = 12,\ z_v = -3,$ обчислюємо визначники:

$$A = \begin{vmatrix} 4 & 12 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -36, \quad B = \begin{vmatrix} 12 & 2 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = -6, \quad C = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 8.$$

Використавши (13.4) та (13.3), виписуємо шукані рівняння дотичної площини та нормалі відповідно:

$$18x + 3y - 4z - 41 = 0, \quad \frac{x - 3}{18} = \frac{y - 5}{3} = \frac{z - 7}{-4}.$$

2. Написати рівняння дотичної площини та нормалі в довільній точці трьохвісного еліпсоїда, заданого канонічним рівнянням.

<u>*Розв'язання.*</u> Нехай в ортонормованому репері еліпсоїд визначений рівнянням

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

і точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ належить еліпсоїду. Запишемо це рівняння у вигляді (13.5), поклавши

$$F(x,y,z)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1,$$

Тоді $\nabla\vec{F}\Big|_{M_0}=\frac{2x_0}{a^2}\vec{i}+\frac{2y_0}{b^2}\vec{j}+\frac{2z_0}{c^2}\vec{k}$. Записуємо рівняння дотичної площини у вигляді (13.7):

$$(x-x_0)\frac{2x_0}{a^2}+(y-y_0)\frac{2y_0}{b^2}+(z-z_0)\frac{2z_0}{c^2}=0.$$

Враховуючи, що точка M_0 належить еліпсоїду, маємо остаточно:

$$\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}+\frac{zz_0}{c^2}=1\,.$$

Використавши (13.6), виписуємо рівняння нормалі до еліпсоїда в точці M_0 :

$$\frac{a^2(x-x_0)}{x_0}=\frac{b^2(y-y_0)}{y_0}=\frac{c^2(z-z_0)}{z_0}.$$

3. В точці $M_0\left(u=2; v=\frac{\pi}{4}\right)$ поверхні, заданої рівнянням $\vec{r}=u\cos v\vec{i}+u\sin v\vec{j}+u\vec{k}$, виписати рівняння дотичної площини і нормалі, а також виписати рівняння дотичної до v-кривої, що містить точку M_0.

4. Виписати рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні, заданої рівнянням $x^2-2y^2-3z^2=4$ в точці $M_0(3{,}1{,}-1)$.

5. Довести, що дотичні площини до поверхні, яка в ортонормованому репері визначається рівнянням $xyz=a^3$, утворюють з координатними площинами тетраедр сталого об'єму.

6. Показати, що дотична площина в довільній точці поверхні, яка в ортонормованому репері визначена рівнянням $x^{2/3} + y^{2/3} + z^{2/3} = a^{2/3}$, відтинає на координатних осях відрізки, сума квадратів довжин яких є величина стала.
7. Нехай M_0 — звичайна точка гладкої поверхні Ф, визначеної параметризацією (12.1), P — точка поверхні Ф, ω — дотична площина до цієї поверхні в точці M_0, d — відстань між точками M_0 і P, h — відстань від точки P до площини ω. Довести, що $\dfrac{h}{d} \to 0$ при $P \to M_0$.

§ 14. ПЕРША КВАДРАТИЧНА ФОРМА ПОВЕРХНІ ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ

Першою квадратичною формою гладкої поверхні Φ з векторною параметризацією $\vec{r}(u,v),\, u,v \in \sigma,$ називають вираз

$$J_1 = E(u,v)du^2 + 2F(u,v)dudv + G(u,v)dv^2, \qquad (14.1)$$

де

$$E(u,v) = \vec{r}_u(u,v)\vec{r}_u(u,v),$$
$$F(u,v) = \vec{r}_u(u,v)\vec{r}_v(u,v),$$
$$G(u,v) = \vec{r}_v(u,v)\vec{r}_v(u,v).$$

Оскільки $J_1 = (\vec{r}_u du + \vec{r}_v dv)^2$, і поверхня Φ за домовленістю параграфу 12 не містить особливих точок, то ця квадратична форма є додатно визначеною і обертається в нуль лише при $du = dv = 0$.

Застосуємо першу квадратичну форму для знаходження довжини дуги кривої на поверхні, кута між кривими на поверхні та обчислення площі області на поверхні.

Рівнянням (13.1) задамо на поверхні Φ довільну регулярну криву γ, дуга якої $\gamma(T_1,T_2)$ має довжину s, що визначається за формулою (3.2). Тоді маємо

$$s = \int_{T_1}^{T_2} \sqrt{\vec{r}_t^{\,2}}\,dt = \int_{T_1}^{T_2} \sqrt{(\vec{r}_u \cdot u'(t) + \vec{r}_v \cdot v'(t))^2}\,dt = \int_{T_1}^{T_2} \sqrt{J_1},$$

де J_1 — перша квадратична форма поверхні Φ.

Рівнянням $\vec{r} = \vec{r}(u_1(t), v_1(t))$ визначимо на цій поверхні ще одну гладку криву γ_1. Нехай криві γ і γ_1 мають спільну точку $M(u,v)$. Нагадаємо, що під кутом між цими кривими в точці M розуміють кут φ між їх дотичними в цій точці. Знайдемо цей кут, відшукавши кут між напрямними векторами $d\vec{r} = \vec{r}_u du + \vec{r}_v dv$ і $d_1\vec{r} = \vec{r}_u du_1 + \vec{r}_v dv_1$ цих дотичних:

$$\cos\phi = \frac{d\vec{r} \cdot d_1\vec{r}}{|d\vec{r}||d_1\vec{r}|} =$$

$$= \frac{Edudu_1 + F(dudv_1 + du_1dv) + Gdvdv_1}{\sqrt{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2}\sqrt{Edu_1^2 + 2Fdu_1dv_1 + Gdv_1^2}}.$$

Для знаходження кута між координатними лініями поверхні Ф в точці M в останній формулі покладемо, наприклад, $du_1 = dv = 0$ і одержимо

$$\cos\varphi = \pm\frac{F}{\sqrt{EG}}.$$

Приходимо до висновку, що координатна сітка поверхні є ортогональною (її координатні лінії перетинаються під прямим кутом) тоді і тільки тоді, коли $F = 0$ для всіх точок $(u, v) \in \sigma$.

Припустимо, що D — область з σ, обмежена кусково-гладким контуром, а Г — годограф гладкої вектор-функції $\vec{r}(u, v)$ на множині D.

Означимо поняття площі області Г. Для цього розіб'ємо цю область сіткою координатних ліній на криволінійні паралелограми. Розглянемо один з них, позначивши його вершини через

$M_0(u,v)$, $M_1(u+\Delta u, v)$, $M_2(u, v+\Delta v)$, $M_3(u+\Delta u, v+\Delta v)$, таким чином, щоб Δu та Δv були додатними. Замінимо цей паралелограм звичайним паралелограмом, побудованим на напрямлених відрізках $\bar{r}_u \cdot \Delta u$ та $\bar{r}_v \cdot \Delta v$ з початками в точці $M(u,v)$ як на сторонах. Зрозуміло, що останній паралелограм лежить в дотичній площині до поверхні Ф в точці $M(u,v)$. Його площу ΔS знайдемо за формулою $\Delta S = \left|\left[\vec{r}_u, \vec{r}_v\right]\right| \Delta u \Delta v.$

Але з рівності $\left|\left[\vec{r}_u, \vec{r}_v\right]\right|^2 + \left(\vec{r}_u \cdot \vec{r}_v\right)^2 = \vec{r}_u^{\,2} \cdot \vec{r}_v^{\,2}$ випливає, що

$$\left|\left[\vec{r}_u, \vec{r}_v\right]\right| = \sqrt{EG - F^2},$$

отже, $\Delta S = \sqrt{EG - F^2}\,\Delta u \cdot \Delta v$, де коефіцієнти E, F, G обраховано в точці $M(u,v)$.

Зауваження 14.1. *Вираз $EG - F^2$ називають дискримінантом першої квадратичної форми поверхні Ф. Зрозуміло, що він не може набувати від'ємних значень і перетворюватися в 0.*

Аналогічно поступимо з кожним криволінійним паралелограмом здійсненого розбиття і складемо суму площ усіх одержаних прямолінійних паралелограмів:

$$\sum_{\Gamma} \Delta S = \sum_{\Gamma} \sqrt{EG - F^2} \Delta u \cdot \Delta v.$$

Означення 14.1. *Якщо існує границя, яка не залежить ні від способу розбиття області* Γ *координатними лініями, ні від вибору параметризації поверхні* Φ*, то цю границю назвемо площею області* Γ.

Оскільки $\sqrt{EG - F^2}$ є неперервна функція від u та v, то вказана границя існує і не залежить від способу розбиття області Γ на криволінійні паралелограми, причому

$$S_{\Gamma} = \iint_{D} \sqrt{EG - F^2} dudv \,. \tag{14.1}$$

Залишається показати, що одержана величина не залежить від вибору параметризації поверхні Φ. Для цього перейдемо до довільної її еквівалентної параметризації $\vec{r}_0(\varphi, \psi)$. Використавши означення (12.7) і співвідношення (12.6), отримуємо рівності

$$\left[\vec{r}_u, \vec{r}_v\right] = \left[\vec{r}_{0\varphi}, \vec{r}_{0\psi}\right] \frac{\partial \varphi(u,v)}{\partial u} \frac{\partial \psi(u,v)}{\partial v} + \left[\vec{r}_{0\psi}, \vec{r}_{0\varphi}\right] \frac{\partial \psi(u,v)}{\partial u} \frac{\partial \varphi(u,v)}{\partial v} =$$
$$= \left(\frac{\partial \varphi(u,v)}{\partial u} \frac{\partial \psi(u,v)}{\partial v} - \frac{\partial \psi(u,v)}{\partial u} \frac{\partial \varphi(u,v)}{\partial v} \right) \left[\vec{r}_{0\varphi}, \vec{r}_{0\psi}\right] = \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u,v)} \left[\vec{r}_{0\varphi}, \vec{r}_{0\psi}\right],$$

звідки маємо $\quad \sqrt{EG - F^2} = \left| \dfrac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u,v)} \right| \sqrt{\tilde{E}\tilde{G} - \tilde{F}^2},$

де $\tilde{E}, \tilde{F}, \tilde{G}$ – коефіцієнти першої квадратичної форми поверхні в криволінійних координатах (φ, ψ). Тоді вираз (14.1) набирає вигляду

$$\iint_{D} \sqrt{EG - F^2} dudv = \iint_{D} \sqrt{\tilde{E}\tilde{G} - \tilde{F}^2} \left| \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u,v)} \right| dudv.$$

Скориставшись формулою заміни змінних в подвійному інтегралі, одержуємо рівність

$$\iint\limits_{D} \sqrt{EG - F^2}\, dudv = \iint\limits_{\tilde{D}} \sqrt{\tilde{E}\tilde{G} - \tilde{F}^2}\, d\varphi d\psi,$$

в якій через $\tilde{D}$ позначено область, гомеоморфну області D при переході до параметризації $\vec{r}_0(\varphi, \psi)$.

Адитивність площі поверхні випливає з адитивності подвійного інтеграла. Дійсно, нехай область Γ розбивається кусково-гладкою кривою на дві області — Γ_1 та Γ_2 і нехай D_1 та D_2 — відповідні області в σ . Тоді

$$\iint\limits_{D} \sqrt{EG - F^2}\, dudv = \iint\limits_{D_1} \sqrt{EG - F^2}\, dudv + \iint\limits_{D_2} \sqrt{EG - F^2}\, dudv,$$

тобто $S_\Gamma = S_{\Gamma 1} + S_{\Gamma 2}$, що й являє собою властивість адитивності площі поверхні.

Таким чином при обчисленні площі поверхні можна розбивати цю поверхню на частини і для кожної з них використовувати свою параметризацію.

Відмітимо, що першу квадратичну форму поверхні часто називають її лінійним елементом.

Вправи

1. Знайти першу квадратичну форму сфери.
2. Знайти першу квадратичну форму псевдосфери.

Розв'язання. Виписуємо векторне рівняння псевдосфери у вигляді (12.8).

Маємо

$$\vec{r}_u = \left(a\cos u \cos v, \quad a\cos u \sin v, \quad a\frac{\cos^2 u}{\sin u} \right),$$

$$\vec{r}_v = \left(-a\sin u \sin v, \quad a\sin u \cos v, \quad 0 \right).$$

Отже,

$$E = a^2\left(\cos^2 u + \frac{\cos^4 u}{\sin^2 u} \right) = \frac{a^2 \cos^2 u}{\sin^2 u}; \quad F = 0; \quad G = a^2 \sin^2 u,$$

звідки $J_1 = a^2\left(\mathrm{ctg}^2\, u du^2 + \sin^2 u dv^2 \right)$.

3. Знайти кут між кривими, що визначаються співвідношеннями $u=-v,\ u=v$ на прямому гелікоїді, заданому векторним рівнянням $\vec{r}=u\cos v\vec{i}+u\sin v\vec{j}+av\vec{k}$.

<u>*Розв'язання.*</u> Очевидно, рівняння заданих кривих l_1 і l_2 мають вигляд $\vec{r}_1=-v\cos v\vec{i}-v\sin v\vec{j}+av\vec{k}$ і $\vec{r}_1=v\cos v\vec{i}+v\sin v\vec{j}+av\vec{k}$ відповідно . Тоді

$$\vec{r}_1{}'=(-\cos v+v\sin v,\quad -\sin v-v\cos v,\quad a);$$

$$\vec{r}_2{}'=(\cos v-v\sin v,\quad \sin v+v\cos v,\quad a).$$

Беручи до уваги, що криві l_1 і l_2 перетинаються в точці $M(0;0)$, одержуємо, що $(-1,\ 0,\ a)$, $(1,\ 0,\ a)$ — напрямні вектори дотичних до цих кривих в точці M. Отже, $\cos\varphi=\dfrac{a^2-1}{a^2+1}$.

Застосуємо до розв'язування цієї задачі лінійний елемент поверхні. Оскільки $\vec{r}_u=(\cos v,\quad \sin v,\quad 0)$, $\vec{r}_v=(-u\sin v,\quad u\cos v,\quad a)$, то $E=1,\ F=0,\ G=u^2+a^2$. Покладемо $du_1=-dv_1$ для кривої l_1 і $du_2=dv_2$ для кривої l_2. Тоді

$$\cos\varphi=\left.\frac{-dv_1dv_2+(u^2+a^2)dv_1dv_2}{(1+u^2+a^2)|dv_1dv_2|}\right|_{u=0}=\pm\frac{a^2-1}{a^2+1}.$$

4. Знайти периметр і внутрішні кути криволінійного трикутника, визначеного співвідношеннями $v=1,\quad u=\pm\frac{1}{2}av^2$, який розташований на поверхні з лінійним елементом $J_1=du^2+(u^2+a^2)dv^2$.

5. Знайти площу чотирикутника, обмеженого кривими, що задано співвідношеннями $u=0,\quad u=a,\quad v=0,\quad v=1$ на прямому гелікоїді.

<u>*Розв'язання*</u>. Цьому чотирикутнику в множині σ відповідає прямокутник, тому шуканий подвійний інтеграл легко подати у вигляді повторного, тобто

$$S=\int_0^a du\int_0^1 \sqrt{u^2+a^2}\,dv=\int_0^a \sqrt{u^2+a^2}\,du=\frac{a}{2}\left(\sqrt{2}+\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right).$$

6. Знайти площу криволінійного трикутника, визначеного співвідношеннями $u=\pm av$, $v=1$ на поверхні з лінійним елементом $J_1=du^2+(u^2+a^2)dv^2$.

7. Знайти першу квадратичну форму поверхні обертання.

Розв'язання. Скористаємось рівнянням (12.7) і випишемо вектори

$$\vec{r}_u=\left(\cos\varphi \quad \sin\varphi, \quad f'(u)\right), \quad \vec{r}_\varphi=\left(u\sin\varphi, \quad u\cos\varphi, \quad 0\right).$$

Тоді коефіцієнти першої квадратичної форми

$E(u,\varphi)=1+f'^2(u), \quad F(u,\varphi)=0, \quad G(u,\varphi)=u^2,$

тобто $J_1=\left(1+f'^2(u)\right)du^2+u^2d\varphi^2$.

8. Виписати першу квадратичну форму поверхні, заданої в ортонормованому репері рівнянням $z=f(x,y)$.

9. Координатну сітку на поверхні називають чебишевською, якщо дуги координатних ліній одного типу, що містяться між двома лініями другого типу, мають однакові довжини. Довести, що координатна сітка поверхні є чебишевською тоді і тільки тоді, коли $E_v=0, \quad G_u=0$.

§ 15. ДРУГА КВАДРАТИЧНА ФОРМА ПОВЕРХНІ. ОСНОВНА ФОРМУЛА ДЛЯ КРИВИНИ КРИВОЇ НА ПОВЕРХНІ. ТЕОРЕМА МЕНЬЄ

Рівнянням (12.1) на елементарній області σ задамо регулярну другого порядку поверхню Φ без особливих точок.

Означення 15.1. *Другою квадратичною формою поверхні Φ назвемо вираз*

$$J_2 = L(u,v)du^2 + 2M(u,v)dudv + N(u,v)dv^2,$$

де $$L = \frac{(\vec{r}_{uu}, \vec{r}_u, \vec{r}_v)}{\sqrt{EG - F^2}}, \quad M = \frac{(\vec{r}_{uv}, \vec{r}_u, \vec{r}_v)}{\sqrt{EG - F^2}}, \quad N = \frac{(\vec{r}_{vv}, \vec{r}_u, \vec{r}_v)}{\sqrt{EG - F^2}}, \quad (15.1)$$

а $EG - F^2$ — дискримінант першої квадратичної форми цієї поверхні.

Позначимо вектор $\dfrac{[\vec{r}_u, \vec{r}_v]}{\sqrt{EG - F^2}}$ через $\vec{m}(u,v)$. Легко бачити, що цей вектор одиничний і напрямлений вздовж нормалі до поверхні Φ в точці $M_0(u,v) \in \Phi$. Надалі будемо називати вектор $\vec{m}(u,v)$ одиничним вектором нормалі поверхні Φ в цій точці.

Теорема 15.1. *Справджується рівність*

$$J_2 = -d\vec{r} \cdot d\vec{m}. \qquad (15.2)$$

Доведення. Оскільки вектор-функція $\vec{m}(u,v) \in C^1_\sigma$, то можна виписати рівності

$$\begin{aligned} d\vec{r} \cdot d\vec{m} &= (\vec{r}_u du + \vec{r}_v dv)(\vec{m}_u du + \vec{m}_v dv) = \\ &= \vec{r}_u \vec{m}_u du^2 + (\vec{r}_u \vec{m}_v + \vec{r}_v \vec{m}_u) dudv + +\vec{r}_v \vec{m}_v dv^2. \end{aligned} \qquad (15.3)$$

Взявши до уваги, що $\vec{m}\vec{r}_u = 0,\ \vec{m}\vec{r}_v = 0,$ і продиференціювавши останні тотожності по кожному з аргументів, одержуємо рівності

$$\begin{aligned} &\vec{m}_u \vec{r}_u + \vec{m}\vec{r}_{uu} = 0; \quad \vec{m}_v \vec{r}_u + \vec{m}\vec{r}_{uv} = 0; \\ &\vec{m}_u \vec{r}_v + \vec{m}\vec{r}_{vu} = 0; \quad \vec{m}_v \vec{r}_v + \vec{m}\vec{r}_{vv} = 0; \end{aligned} \qquad (15.4)$$

Врахувавши рівності (15.1), подамо коефіцієнти другої квадратичної форми у вигляді

$$L = \vec{r}_{uu}\vec{m}, \quad M = \vec{r}_{uv}\vec{m}, \quad N = \vec{r}_{vv}\vec{m},$$

Тоді рівності (15.4) ведуть до співвідношень

$$\vec{r}_u \cdot \vec{m}_u = -L; \quad \vec{r}_u \cdot \vec{m}_v = \vec{r}_v \cdot \vec{m}_u = -M; \quad \vec{r}_v \cdot \vec{m}_v = -N,$$

враховуючи які, від (15.3) переходимо до (15.2), що закінчує доведення теореми.

Задамо тепер на поверхні Φ регулярну криву другого порядку l рівнянням $\vec{r} = \vec{r}(u(s), v(s))$ в природній параметризації, і нехай $M_0(u, v)$ не є її точкою розпрямлення. За першою формулою Френе $\dot{\vec{t}} = k\vec{n}$, або $\ddot{\vec{r}} = k\vec{n}$, де k — кривина, а $\vec{n}$ — одиничний вектор головної нормалі кривої l в точці M_0. Домноживши останню рівність скалярно на вектор $\vec{m}$, маємо

$$\ddot{\vec{r}}\vec{m} = k\vec{n}\vec{m} = k\cos\theta , \tag{15.5}$$

де θ — кут між одиничними векторами $\vec{m}$ і $\vec{n}$.

Справджуються рівності:

$$\dot{\vec{r}} = \vec{r}_u \cdot \frac{du}{ds} + \vec{r}_v \cdot \frac{dv}{ds};$$

$$\ddot{\vec{r}} = \vec{r}_{uu}\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + \vec{r}_{uv} \cdot \frac{du}{ds} \cdot \frac{dv}{ds} + \vec{r}_u \frac{d^2u}{ds^2} + \tag{15.6}$$

$$+ \vec{r}_{vu} \cdot \frac{du}{ds} \cdot \frac{dv}{ds} + \vec{r}_{vv}\left(\frac{dv}{ds}\right)^2 + \vec{r}_v \frac{d^2v}{ds^2}.$$

Домноживши останню рівність скалярно на $\vec{m}$, одержуємо співвідношення

$$\ddot{\vec{r}}\vec{m} = \vec{r}_{uu}\vec{m}\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2\vec{r}_{uv}\vec{m}\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + \vec{r}_{vv}\vec{m}\left(\frac{dv}{ds}\right)^2 =$$

$$= L\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2M\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + N\left(\frac{dv}{ds}\right)^2,$$

звідки, взявши до уваги рівності (15.5), одержуємо основну формулу для кривини кривої на поверхні:

$$k\cos\theta = \frac{Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2}{Edu^2 + 2Fdudv + Ndv^2}. \tag{15.7}$$

Якщо точка M_0 на поверхні фіксована, то права частина рівності (15.7) залежить лише від відношення диференціалів $\dfrac{du}{dv}$ або $\dfrac{dv}{du}$ (хоча б один з диференціалів відмінний від нуля), в чому неважко переконатися, поділивши чисельник і знаменник дробу в цій рівності на dv або du .

Але відношення $\frac{du}{dv}$ або $\frac{dv}{du}$ визначають напрямок дотичної до кривої l в точці M_0. Дійсно, з (15.6) при $du \neq 0$ випливає, що

$$d\vec{r} = du\left(\vec{r}_u + \vec{r}_v \frac{dv}{du}\right),$$

і оскільки du — скаляр, то згадана дотична визначається відношенням $\frac{dv}{du}$, тому що вектор $d\vec{r}$ напрямлений вздовж неї (паралельний до неї).

Таким чином, права частина рівності (15.7) має одне і те ж саме значення для всіх кривих типу кривої l на поверхні Ф, що мають в точці M_0 спільну дотичну. Зрозуміло, що у випадку, коли всі ці криві мають до того ж спільну стичну площину в точці M_0, кривини їх в цій точці співпадають.

Підсумок проведеним міркуванням підводить наступне твердження.

Теорема 15.2. *(Меньє). Для всіх регулярних кривих другого порядку на поверхні Ф, для кожної з яких звичайна точка $M_0(u,v)$ цієї поверхні є власною звичайною точкою, і які в цій точці мають спільну дотичну, справджується рівність*

$$k\cos\theta = k_0 = const. \tag{15.8}$$

Зауважимо, що у формулюванні останньої теореми ми опустили вимогу, що точка M_0 не є точкою розпрямлення кривої l. Дійсно, в протилежному випадку ця точка є точкою розпрямлення кожної з кривих, про які йде мова, і рівність (15.8) набирає вигляду $0 \cdot \cos\theta = 0$, причому кут θ не визначений і може набувати довільних значень з проміжку $[0;\pi]$.

Означення 15.2. *Константу k_0 називають нормальною кривиною поверхні в напрямку цієї дотичної (або в напрямку $dv : du$ поверхні Ф в точці M_0).*

Нормальна кривина поверхні не зобов'язана бути додатною. Знак k_0 залежить від величини кута θ. Введемо ще одне нове поняття.

Означення 15.3. *Центром кривини просторової кривої l в точці $M_0 \in l$ назвемо таку точку C_l на її головній нормалі в точці M_0, що вектори $\overrightarrow{M_0C_l}$ і $\vec{n}$ співнапрямлені, $\left|\overrightarrow{M_0C_l}\right| = 1 : k_l$, де $\vec{n}$ — одиничний вектор головної нормалі, $k_l \neq 0$ — кривина кривої l в точці M_0. Під нормальним перерізом поверхні Φ в точці M_0 розуміють її переріз площиною, що містить нормаль до цієї поверхні в цій точці.*

Теорема 15.3. *(наслідок з теореми Меньє). Нехай нормальним перерізом поверхні Φ в точці M_0, площина якого містить дотичну, про яку йшлося в теоремі Меньє, є регулярна крива другого порядку γ, для якої точка M_0 є звичайною і кривина k_γ в точці M_0 відмінна від нуля. Тоді центр кривини кривої l в точці M_0 є проекцією на її стичну площину в цій точці центру кривини кривої γ в точці M_0.*

<u>*Доведення*</u>. Очевидно, криві l і γ мають в точці M_0 спільну дотичну. Оскільки крива γ плоска, то її нормаль і головна нормаль в точці M_0 співпадають з нормаллю до поверхні Φ в цій точці. Отже, для кривої γ в точці M_0 $\cos\theta$ дорівнює або 1, або -1, тобто число k_0 з рівності (15.8) дорівнює або k_γ, або $-k_\gamma$.

Припустимо, що $k_0 = k_\gamma > 0$. Тоді для кривої l в точці M_0 маємо

$$k_l \cdot \cos\theta = k_\gamma, \tag{15.9}$$

причому кут θ — гострий і $k_l \neq 0$. Позначимо через C_l і C_γ центри кривини в точці M_0 кривих l і γ відповідно. Тоді з (15.9) одержуємо, що $M_0C_l = M_0C_\gamma \cos\theta$, тобто кут $M_0C_lC_\gamma$ прямий (див. *рис.25*). Дотична до кривої l в точці M_0 перпендикулярна площині трикутника $M_0C_lC_\gamma$, оскільки вона перпендикулярна до векторів $\vec{n}$ і $\vec{m}$. Тоді пряма C_lC_γ перпендикулярна до цієї дотичної, а отже, і до стичної площини кривої l в точці M_0, що закінчує доведення.

Якщо ж $k_0 = -k_\gamma < 0$, то $k_l \cdot \cos\theta = -k_\gamma$, тобто кут θ тупий. В цьому разі $M_0C_l = -\cos\theta \cdot M_0C_\gamma = M_0C_\gamma \cos(\pi - \theta)$ і твердження теореми залишається в силі (див. *рис. 26*).

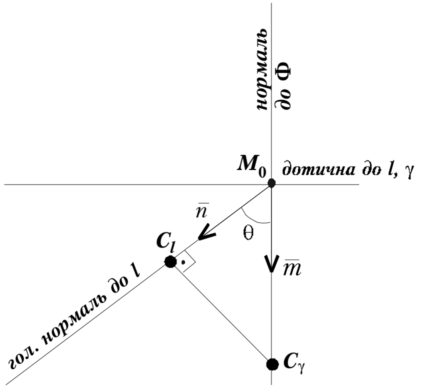

Рис. 25.

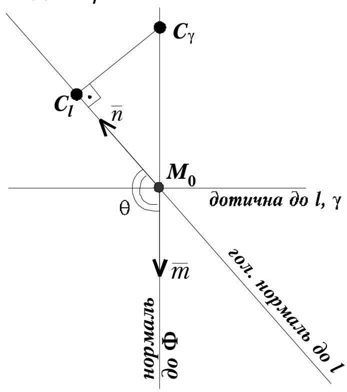

Рис. 26.

Покажемо тепер, що довільний нормальний переріз γ поверхні Ф в деякому околі точки M_0 можна розглядати як регулярну криву другого порядку, для якої M_0 є звичайною точкою. Дійсно, за теоремою 12.1 існує елементарна множина G, на якій ця поверхня разом з точкою M_0 визначена рівнянням виду $z = f(x, y)$ в обраному ортонормованому репері. За теоремою про існування неявної функції $f(x, y) \in C_G^2$. Нехай рівняння площини нормального перерізу в цьому репері має вигляд $Ax + By + Cz + D = 0$. Тоді цей переріз визначається системою рівнянь

$$\begin{cases} F(x, y, z) = f(x, y) - z = 0, \\ \Phi(x, y, z) = Ax + By + Cz + D = 0. \end{cases}$$

Функції $F(x, y, z)$ та $\Phi(x, y, z)$ задовольняють умови теореми 11.1, і градієнти цих функцій в точці M_0 не паралельні. Застосувавши теорему 11.1 та теорему про існування неявних функцій, приходимо до висновку, що існує такий окіл цієї точки, в якому переріз γ є регулярною кривою другого порядку, для якої M_0 є звичайною точкою.

Вправи

1. Обчислити другу квадратичну форму для поверхні, визначеної параметричними рівняннями

$$x = u\cos v, \quad y = u\sin v, \quad z = av.$$

Розв'язання. Знаходимо похідні

$$\begin{aligned}
&x_u = \cos v, && y_u = \sin v, && z_u = 0,\\
&x_v = -u\sin v, && y_v = u\cos v, && z_v = a,\\
&x_{uu} = 0, && y_{uu} = 0, && z_{uu} = 0,\\
&x_{uv} = -\sin v, && y_{uv} = \cos v, && z_{uv} = 0,\\
&x_{vv} = -u\cos v, && y_{vv} = -u\sin v, && z_{vv} = 0.
\end{aligned}$$

Виписуємо коефіцієнти першої квадратичної форми:

$$E = \vec{r}_u^{\,2} = \cos^2 v + \sin^2 v = 1;$$

$$F = \vec{r}_u \cdot \vec{r}_v = -u\sin v \cdot \cos v + u\sin v \cdot \cos v + 0 \cdot a = 0;$$

$$G = \vec{r}_v^{\,2} = u^2\sin^2 v + u^2\cos^2 v + a^2 = u^2 + a^2;$$

$$\sqrt{EG - F^2} = \sqrt{u^2 + a^2}.$$

Тепер можна обчислити коефіцієнти другої квадратичної форми.

$$L(u,v) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \cos v & \sin v & 0 \\ -u\sin v & u\cos v & a \end{vmatrix}}{\sqrt{u^2 + a^2}} = 0;$$

$$M(u,v) = \frac{\begin{vmatrix} -\sin v & \cos v & 0 \\ \cos v & \sin v & 0 \\ -u\sin v & u\cos v & a \end{vmatrix}}{\sqrt{u^2 + a^2}} = -\frac{a}{\sqrt{u^2 + a^2}};$$

$$N(u,v) = \frac{\begin{vmatrix} u\cos v & -u\sin v & 0 \\ \cos v & \sin v & 0 \\ -u\sin v & u\cos v & a \end{vmatrix}}{\sqrt{u^2 + a^2}} = 0.$$

Отже, $J_2 = -\dfrac{2a}{\sqrt{u^2 + a^2}}\,dudv.$

2. Обчислити другу квадратичну форму поверхні обертання.

Розв'язання. Використаємо задачу 7 з параграфу 14 і випишемо вектори

$$\vec{r}_{uu} = (0;\quad 0;\quad f''(u)),\ \ \vec{r}_{u\varphi} = (-\sin\varphi;\quad \cos\varphi;\quad 0),$$

$$\vec{r}_{\varphi\varphi} = (-u\cos\varphi,\ -u\sin\varphi,\ 0).$$

Врахувавши, що $\sqrt{EG - F^2} = \sqrt{u^2\left(1 + f'^2(u)\right)}$, обчислюємо коефіцієнти другої квадратичної форми:

$$L(u,\varphi) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 0 & f''(u) \\ \cos\varphi & \sin\varphi & f'(u) \\ -u\sin\varphi & u\cos\varphi & 0 \end{vmatrix}}{\sqrt{u^2\left(1 + f'^2(u)\right)}} = \frac{uf''(u)}{|u|\sqrt{1 + f'^2(u)}};$$

$$M(u,\varphi) = \frac{\begin{vmatrix} -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ \cos\varphi & \sin\varphi & f'(u) \\ -u\sin\varphi & u\cos\varphi & 0 \end{vmatrix}}{|u|\sqrt{1 + f'^2(u)}} = 0;$$

$$N(u,\varphi) = \frac{\begin{vmatrix} -u\cos\varphi & -u\sin\varphi & 0 \\ \cos\varphi & \sin\varphi & f'(u) \\ -u\sin\varphi & u\cos\varphi & 0 \end{vmatrix}}{|u|\sqrt{1 + f'^2(u)}} = \frac{u^2 f'(u)}{|u|\sqrt{1 + f'^2(u)}}.$$

Отже, $J_2 = \dfrac{f''(u)du^2}{\sqrt{1 + f'^2(u)}} + \dfrac{uf'(u)d\varphi^2}{\sqrt{1 + f'^2(u)}}$, коли $u > 0$ і

$$J_2 = \frac{f''(u)du^2}{\sqrt{1 + f'^2(u)}} - \frac{uf'(u)d\varphi^2}{\sqrt{1 + f'^2(u)}}, \text{ коли } u < 0.$$

3. Обчислити другу квадратичну форму псевдосфери.

Розв'язання. Розглядатимемо псевдосферу як поверхню, утворену обертанням трактриси навколо своєї бази (див. задачі 1, 4 з параграфу 12).

Випишемо параметричні рівняння трактриси в площині ZOU:

$$z = a\left(\ln tg\frac{t}{2} + \cos t\right), \quad u = a\sin t.$$

Тоді рівняння псевдосфери матиме вигляд

$$\vec{r} = a\sin t\cos\varphi\vec{i} + a\sin t\sin\varphi\vec{j} + a\left(\ln tg\frac{t}{2} + \cos t\right)\vec{k}, \qquad (15.10)$$

де $t \in (0;\pi)$. Знаходимо

$$z'_t = \frac{a\cos^2 t}{\sin t}; \quad u'_t = a\cos t; \quad f'(u) = \frac{z'_t}{u'_t} = ctg\ t \quad (t \neq \frac{\pi}{2});$$

$$f''_{uu} = \frac{df'(u)}{du} = \frac{\frac{d}{dt}f'(u)}{u'_t} = -\frac{1}{a\sin^2 t\cos t}.$$

Скориставшись попередньою задачею, маємо при $u > 0$:

$$J_2 = -\frac{a^2\cos^2 t}{a\sin^2 t\cos t\sqrt{1+ctg^2 t}}dt^2 + \frac{a\sin tctg\ t}{\sqrt{1+ctg^2 t}}du^2 =$$

$$= a(-ctg\ t\ dt^2 + \sin t\cos t d\varphi^2).$$

Можна безпосередньо знаходити J_2, виходячи з рівняння (15.10).

4. Знайти другу квадратичну форму поверхні (катеноїд), заданої векторним рівнянням

$$\vec{r} = ach\frac{u}{a}\cos v\vec{i} + ach\frac{u}{a}\sin v\vec{j} + u\vec{k}.$$

5. Виписати другу квадратичну форму сфери. Довести, що друга її квадратична форма пропорційна першій.

6. Довести, що при довільному введенні криволінійних координат на площині її друга квадратична форма тотожно дорівнює нулеві.

7. Виписати другу квадратичну форму поверхні, заданої в ортонормованому репері рівнянням $z = f(x, y)$.

8. Знайти нормальну кривину параболоїда, заданого рівнянням

$$z = \frac{1}{2}(ax^2 + by^2)$$

в точці $(0;0)$ в напрямку, що визначений відношенням $dx : dy$.

Розв'язання. Запишемо рівняння параболоїда у векторній формі:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + \frac{1}{2}(ax^2 + by^2)\vec{k}.$$

Тоді

$$\vec{r}_x = (1; \quad 0; \quad ax), \quad \vec{r}_y = (0; \quad 1; \quad by),$$

$$\vec{r}_{xx} = (0;\quad 0;\quad a),\quad \vec{r}_{xy} = (0;\quad 0;\quad 0),\quad \vec{r}_{yy} = (0;\quad 0;\quad b),$$

$$E(0;0) = 1 + a^2x^2\Big|_{x=0} = 1,\quad F(0;0) = abxy\big|_{x=0,y=0} = 0,$$

$$G(0;0) = 1 + b^2y^2\Big|_{y=0} = 1.$$

В точці $(0;0)$ маємо також, що

$$\vec{r}_{xx} = (0;\quad 0;\quad a),\quad \vec{r}_{xy} = (0;\quad 0;\quad 0),\quad \vec{r}_{yy} = (0;\quad 0;\quad b),$$

отже, в цій точці $L = a,\quad M = 0,\quad N = b.$

Тоді шукана кривина

$$k_0 = \frac{adx^2 + bdy^2}{dx^2 + dy^2}.$$

9. Застосувати теорему Меньє до доведення твердження: *перпендикуляр, проведений через центр сфери до площини її малого круга, проходить через центр останнього*.

§ 16. ОСНОВНА ВЕКТОР-ФУНКЦІЯ ПОВЕРХНІ. ГОЛОВНІ НАПРЯМКИ

Як і раніше, розглядатимемо поверхню Φ без особливих точок, визначену векторним рівнянням (12.1) на елементарній множині σ, причому $\vec{r}(u,v) \in C_{\sigma}^{2}$.

Зафіксуємо точку $M_0(u,v) \in \Phi$ і площину, що містить вектори $\vec{r}_u,\ \vec{r}_v,$ позначимо через ω. Зрозуміло, що ця площина проходить через полюс O і паралельна до дотичної площини поверхні Φ в точці M_0. Похідні $\vec{m}_u$ і $\vec{m}_v$ від одиничної вектор-функції $\vec{m}(u,v)$ в точці M_0 за лемою 1 з параграфу 1 лежать в площині ω, оскільки $\vec{m}(u,v)$ — одиничний вектор нормалі до поверхні Φ.

Множину всіх векторів, які належать площині ω, позначимо через V^2.

Теорема 16.1. *Рівностями*

$$A(\vec{r}_u) = \vec{m}_u, \quad A(\vec{r}_v) = \vec{m}_v \tag{16.1}$$

визначається єдина лінійна функція $A(\vec{u})$, *яка відображає множину* V^2 *в себе.*

<u>*Доведення*</u>. Нехай $\vec{u}$ — довільний вектор з V^2. Оскільки $\vec{r}_u \nparallel \vec{r}_v$, то цей вектор можна подати у вигляді $\vec{u} = \alpha\vec{r}_u + \beta\vec{r}_v$, де α і β — дійсна числа. Функцію $A(\vec{u})$ задамо формулою

$$A(\vec{u}) = \alpha\vec{m}_u + \beta\vec{m}_v. \tag{16.2}$$

Очевидно, з (16.2) випливає (16.1). Покажемо, що функція $A(\vec{u})$ лінійна.

Для цього досить довести, що для $\forall\vec{a},\vec{b} \in V^2$ і $\forall\lambda \in R^1$:

1) $A(\vec{a}+\vec{b}) = A(\vec{a}) + A(\vec{b})$;

2) $A(\lambda\vec{a}) = \lambda A(\vec{a})$.

Доведемо, наприклад, першу з останніх рівностей, залишивши доведення другої читачеві.

Розклавши вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ по базису $\vec{r}_u, \vec{r}_v$ множини V^2, маємо

$$\vec{a} = a_1\vec{r}_u + a_2\vec{r}_v; \quad \vec{b} = b_1\vec{r}_u + b_2\vec{r}_v, \quad \{a_1, \quad b_1, \quad a_2, \quad b_2\} \subset R_1.$$

Тоді

$$A(\vec{a} + \vec{b}) = A\big((a_1 + b_1)\vec{r}_u + (a_2 + b_2)\vec{r}_v\big) = (a_1 + b_1)\vec{m}_u + (a_2 + b_2)\vec{m}_v =$$
$$= (a_1\vec{m}_u + a_2\vec{m}_v) + (b_1\vec{m}_u + b_2\vec{m}_v) = A(\vec{a}) + B(\vec{b}).$$

Залишається показати, що іншої лінійної функції, яка відображає $V^2 \to V^2$ і має властивості (16.1), не існує. Припустимо супротивне, тобто, що така функція $B(\vec{u})$ існує. Але тоді справджується рівність

$$B(\vec{a} \in V^2) = B(a_1\vec{r}_u + a_2\vec{r}_v) = a_1B(\vec{r}_u) + a_2B(\vec{r}_v) = a_1\vec{m}_u + a_2\vec{m}_v,$$

яка свідчить про те, що функція $B(\vec{u})$ діє так само, як і функція $A(\vec{u})$, тобто ми прийшли до суперечності, що закінчує доведення.

Означення 16.1. *Побудовану функцію $A(\vec{u})$ назвемо основною вектор-функцією поверхні Φ в точці M_0.*

Означення 16.2. *Функцію $B(\vec{u}) : V^2 \to V^2$ назвемо симетричною, якщо для $\forall \vec{a}, \vec{b} \in V^2$*

$$\vec{a}B(\vec{b}) = \vec{b}B(\vec{a}).$$

Теорема 16.2. *Основна вектор-функція поверхні Φ в точці M_0 симетрична.*

<u>Доведення</u>. Зі співвідношень (15.4) випливають рівності

$$\vec{r}_v \cdot A(\vec{r}_u) = \vec{r}_v \cdot \vec{m}_u = -M(u, v),$$
$$\vec{r}_u \cdot A(\vec{r}_v) = \vec{r}_u \cdot \vec{m}_v = -M(u, v),$$

звідки

$$\vec{r}_u A(\vec{r}_v) = \vec{r}_v A(\vec{r}_u). \tag{16.3}$$

Тоді для $\forall \vec{a}, \vec{b} \in V^2$

$$\vec{a}A(\vec{b}) = (a_1\vec{r}_u + a_2\vec{r}_v)A(b_1\vec{r}_u + b_2\vec{r}_v) = (a_1\vec{r}_u + a_2\vec{r}_v)(b_1A(\vec{r}_u) + b_2A(\vec{r}_v)) =$$
$$= a_1b_1\vec{r}_u \cdot A(\vec{r}_u) + +a_1b_2\vec{r}_u \cdot A(\vec{r}_v) + a_2b_1\vec{r}_v \cdot A(\vec{r}_u) + a_2b_2\vec{r}_v \cdot A(\vec{r}_v) =$$
$$= a_1b_1\vec{r}_u \cdot A(\vec{r}_u) + a_1b_2\vec{r}_v \cdot A(\vec{r}_u) + a_2b_1\vec{r}_u \cdot A(\vec{r}_v) + a_2b_2\vec{r}_v \cdot A(\vec{r}_v) = \vec{b}A(\vec{a}),$$

що й свідчить про симетричність функції $A(\vec{u})$.

Нагадаємо, що вектор $\vec{e} \neq \vec{0}$ називають власним вектором лінійної вектор-функції $A(\vec{u})$, який відповідає власному значенню $\lambda \in R^1$, якщо $A(\vec{e}) = \lambda\vec{e}$. Легко бачити, що разом із власним вектором $\vec{e}$ довільний колінеарний йому вектор є власним вектором цієї функції з тим самим власним значенням λ. Тому природно розглянути пару напрямків, що визначаються власними векторами $\vec{e}$ та $-\vec{e}$ і назвати їх об'єднання власним напрямком функції $A(\vec{u})$, який відповідає власному значенню λ.

Теорема 16.3. *Основна вектор-функція $A(\vec{u})$ поверхні Φ в точці M_0 має не менше двох ортогональних власних напрямків.*

Доведення. В площині ω введемо ортонормований репер $(\vec{i}, \vec{j})$ і будемо шукати власний вектор $\vec{e}$ у вигляді суми $\vec{e} = x\vec{i} + y\vec{j}$, де числа x та y — невідомі. Тоді $A(x\vec{i} + y\vec{j}) = \lambda(x\vec{i} + y\vec{j})$, де число λ теж невідоме.

Покладемо

$$A(\vec{i}) = a_{11}\vec{i} + a_{12}\vec{j}, \quad A(\vec{j}) = a_{21}\vec{i} + a_{22}\vec{j}. \tag{16.4}$$

Тоді з рівності

$$x\left(a_{11}\vec{i} + a_{12}\vec{j}\right) + y\left(a_{21}\vec{i} + a_{22}\vec{j}\right) = \lambda(x\vec{i} + y\vec{j})$$

одержуємо систему рівнянь

$$a_{11}x + a_{21}y = \lambda x, \quad a_{12}x + a_{22}y = \lambda y$$

з трьома невідомими. Перепишемо її у вигляді

$$(a_{11} - \lambda)x + a_{21}y = 0, \quad a_{12}x + (a_{22} - \lambda)y = 0 \tag{16.5}$$

однорідної системи рівнянь, яка має ненульові розв'язки тоді і тільки тоді, коли її детермінант

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

тобто, коли

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 0. \tag{16.6}$$

Домноживши перше рівняння (16.4) скалярно на вектор $\vec{j}$, а друге — на вектор $\vec{i}$, і взявши до уваги симетричність функції $A(\vec{u})$, переконуємось, що $a_{12} = a_{21}$. Врахувавши цю рівність, знаходимо розв'язки квадратного рівняння (16.6) :

$$\lambda_{1,2} = \frac{a_{11} + a_{22}}{2} \pm \sqrt{\frac{(a_{11} - a_{22})^2}{4} + a_{12}^2}\,.$$

Очевидно, рівняння (16.6) завжди має дійсні корені.

Випадок 1: $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Підставивши $\lambda = \lambda_1$ в систему рівнянь (16.5) і відкинувши одне з рівнянь (вони лінійно залежні), знаходимо ненульовий розв'язок системи з точністю до скалярного множника. Нехай один з цих розв'язків (x_1, y_1). Тоді вектор $\vec{e}_1 = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}$ визначає власний напрямок функції $A(\vec{u})$, тобто $A(\vec{e}_1) = \lambda_1\vec{e}_1$. Аналогічно корінь λ_2 визначає з точністю до скалярного множника ненульовий вектор $\vec{e}_2$ такий, що $A(\vec{e}_2) = \lambda_2\vec{e}_2$.

З симетричності функції $A(\vec{u})$ випливає, що $\lambda_1\vec{e}_1\vec{e}_2 = \lambda_2\vec{e}_1\vec{e}_2$, тобто $(\lambda_1 - \lambda_2)\vec{e}_1\vec{e}_2 = 0$, звідки $\vec{e}_1\vec{e}_2 = 0$, отже, власні напрямки функції $A(\vec{u})$ взаємно ортогональні.

Випадок 2: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$. В цьому разі $a_{11} - a_{22} = 0$ і $a_{12} = 0$, тому $\lambda = a_{11} = a_{22}$. Рівняння системи (16.5) перетворюються на тотожності. Це означає, що довільний ненульовий вектор з множини V^2 є власним вектором функції $A(\vec{u})$, тобто ця функція має безліч власних напрямків, з яких, звичайно, можна вибрати пару ортогональних. Теорему доведено.

Означення 16.3. *Власні напрямки основної вектор-функції поверхні Φ в точці $M_0 \in \Phi$ назвемо головними напрямками на поверхні в цій точці.*

Таким чином, у випадку 1 (основний випадок) в точці M_0 на поверхні Φ існує точно два взаємно ортогональних головних напрямків, а у випадку 2 (особливий випадок) довільний власний напрямок основної вектор-функції $A(\vec{u})$ в точці M_0 є головним.

На закінчення параграфу сформулюємо наступне твердження.

Теорема 16.4. *При переході до еквівалентної параметризації поверхні Φ її основна вектор-функція в точці M_0 не змінюється, отже, не змінюються і головні напрямки.*

<u>*Доведення.*</u> Нехай $\vec{r}_1(x, y)$ — еквівалентна параметризація поверхні Ф. Продиференціюємо вектори $\vec{r} = \vec{r}(u(x, y), v(x, y))$ та $\vec{m} = \vec{m}(u(x, y), v(x, y))$ по x та y:

$$\begin{aligned} \vec{r}_x &= \vec{r}_u u_x + \vec{r}_v v_x, \qquad \vec{r}_y = \vec{r}_u u_y + \vec{r}_v v_y, \\ \vec{m}_x &= \vec{m}_u u_x + \vec{m}_v v_x, \quad \vec{m}_y = \vec{m}_u u_y + \vec{m}_v v_y. \end{aligned} \tag{16.7}$$

Нехай $\vec{a}$ — довільний вектор, що належить площині ω. В цій площини лежать усі чотири вектори $\vec{r}_u$, $\vec{r}_v$, $\vec{r}_x$, $\vec{r}_y$. Подамо вектор $\vec{a}$ у вигляді розкладу $\vec{a} = \beta_1\vec{r}_x + \beta_2\vec{r}_y$. Враховуючи (16.7), маємо

$$\vec{a} = (\beta_1 u_x + \beta_2 u_y)\vec{r}_u + (\beta_1 v_x + \beta_2 v_y)\vec{r}_v,$$

звідки

$$\begin{aligned} A(\vec{a}) = (\beta_1 u_x + \beta_2 u_y)\vec{m}_u + (\beta_1 v_x + \beta_2 v_y)\vec{m}_v = \beta_1(u_x\vec{m}_u + v_x\vec{m}_v) + \\ + \beta_2(\vec{m}_u u_y + \vec{m}_v v_y) = \beta_1\vec{m}_x + \beta_2\vec{m}_y = A_1(\vec{a}), \end{aligned}$$

де $A_1(\vec{u})$ — основна вектор-функція в точці M_0 поверхні Ф, визначеної параметризацією $\vec{r}_1(x, y)$.

Вправи

1. Наведіть приклад лінійної функції, яка переводить простір V^2 в себе, якщо ω — довільна площина.
2. Наведіть приклад лінійної симетричної функції, яка переводить простір V^2 в себе, якщо ω — довільна площина.

§ 17. ГОЛОВНІ КРИВИНИ. ФОРМУЛА ЕЙЛЕРА ТА ТЕОРЕМА РОДРІГА. ГАУСОВА КРИВИНА ПОВЕРХНІ. ІНДИКАТРИСА ДЮПЕНА

Дослідимо кривини нормальних перерізів в точці M_0 поверхні Ф, яка розглядалась в параграфах 15, 16.

Нехай γ — довільний нормальний переріз цієї поверхні в точці $M_0(u,v)$, k_γ — його кривина в цій точці. Позначимо через $\tilde{k}$ добуток $k_\gamma \cdot \cos\theta$ (дивись параграф 15). Оскільки для нормального перерізу $\cos\theta$ дорівнює або 1, або −1, то $k_\gamma = \left|\tilde{k}\right|$. Тоді формула (15.7) набирає вигляду

$$\tilde{k} = \frac{J_2}{J_1}, \tag{17.1}$$

де коефіцієнти першої і другої квадратичних форм обраховано в точці M_0.

Остання рівність пов'язує кривину нормального перерізу γ в точці M_0 і напрям дотичної до нього в цій точці. Рівність (17.1) перепишемо у вигляді

$$\tilde{k} = -\frac{d\vec{r}d\vec{m}}{ds^2} = -\frac{d\vec{r}}{ds}\cdot\frac{d\vec{m}}{ds}.$$

З означення основної вектор-функції поверхні Ф випливає, що $A(d\vec{r}) = d\vec{m}$, звідки $\frac{d\vec{m}}{ds} = A\left(\frac{d\vec{r}}{ds}\right)$. Нагадаємо, що $\frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{t}$, де $\vec{t}$ — одиничний вектор дотичної до кривої γ в точці M_0.

Припустимо спочатку, що має місце основний випадок, тобто $\lambda_1 \neq \lambda_2$ (дивись попередній параграф). Через $\vec{t}_1$ і $\vec{t}_2$ позначимо одиничні вектори, паралельні до першого і другого головних напрямків поверхні Ф в точці M_0 відповідно. Кут між векторами $\vec{t}_1$ і $\vec{t}$ позначимо через φ.

Справджуються рівності

$$\tilde{k} = -\frac{d\vec{r}}{ds}A\left(\frac{d\vec{r}}{ds}\right) = -\vec{t}A(\vec{t}) = -\left(\vec{t}_1\cos\varphi + \vec{t}_2\sin\varphi\right)A\left(\vec{t}_1\cos\varphi + \vec{t}_2\sin\varphi\right) =$$
$$= -\left(\vec{t}_1\cos\varphi + \vec{t}_2\sin\varphi\right)\left(\lambda_1\cos\varphi\vec{t}_1 + \lambda_2\sin\varphi\vec{t}_2\right),$$

або

$$\tilde{k} = -\lambda_1 \cos^2 \varphi - \lambda_2 \sin^2 \varphi. \qquad (17.2)$$

Поклавши в останній рівності $\varphi = 0$ та $\varphi = \frac{\pi}{2}$, одержимо, відповідно, $\tilde{k}_1 = -\lambda_1$ та $\tilde{k}_2 = -\lambda_2$, де $k_i = \left|\tilde{k}_i\right|$ $(i = 1{,}2)$ — кривини нормальних перерізів поверхні Φ в точці M_0, дотичні до яких в цій точці паралельні до першого і другого головних напрямків в точці M_0 відповідно.

Означення 17.1. *Вказані нормальні перерізи назвемо головними перерізами поверхні Φ в точці M_0, а її нормальні кривини в цій точці, що відповідають цим перерізам, — головними кривинами поверхні Φ в точці M_0.*

Запишемо (17.2) у вигляді рівності

$$\tilde{k} = \tilde{k}_1 \cos^2 \varphi + \tilde{k}_2 \sin^2 \varphi, \qquad (17.3)$$

яку називають формулою Ейлера, що пов'язує кривину довільного нормального перерізу поверхні Φ в точці M_0 з її головними кривинами в цій точці.

В особливому випадку $(\lambda_1 = \lambda_2)$ з формули (17.3) одержуємо, що $\tilde{k} = -\lambda_1 = -\lambda_2$, тобто кривини всіх нормальних перерізів поверхні Φ в точці M_0 однакові і дорівнюють $\left|\lambda_1\right|$. В цьому випадку M_0 будемо називати *точкою заокруглення* або *омбілічною точкою.*

Теорема 17.1. *Одна з головних кривин поверхні Φ в точці M_0 є мінімальною, а друга — максимальною в множині всіх її нормальних кривин у цій точці.*

Доведення. Нехай, для означеності, $\tilde{k}_2 > \tilde{k}_1$. З рівності $\tilde{k} = \tilde{k}_1 + (\tilde{k}_2 - \tilde{k}_1)\sin^2 \varphi$ випливає, що максимальне значення $\tilde{k} = \tilde{k}_2$ одержується при $\varphi = \frac{\pi}{2}$, а мінімальне $\tilde{k} = \tilde{k}_1$ — при $\varphi = 0$, звідки одразу випливає твердження теореми 17.1, оскільки в особливому випадку всі нормальні кривини поверхні Φ в точці M_0 однакові.

Зауважимо, що в основному випадку, коли $\tilde{k}_1$ і $\tilde{k}_2$ не є числами протилежних знаків, то кривини головних перерізів поверхні Φ в точці M_0 є екстремальними в множині кривин усіх нормальних перерізів цієї поверхні в цій точці. Якщо ж $\tilde{k}_1$ і $\tilde{k}_2$ мають протилежні знаки, то мінімальна кривина нормального перерізу дорівнює нулеві, а максимальна — $\max\left\{\left|\tilde{k}_1\right|, \ \left|\tilde{k}_2\right|\right\}$.

Теорема 17.2 *(Родріга). Напрямок $\frac{du}{dv}$ або $\frac{dv}{du}$ поверхні Φ в точці M_0 є головним тоді і тільки тоді, коли*

$$d\vec{m} = -\tilde{k}d\vec{r}, \tag{17.4}$$

де $\tilde{k}$ — нормальна кривина поверхні Φ в цьому напрямку.

<u>Доведення</u>. Необхідність. Нехай напрямок $du : dv$ на поверхні Φ в точці M_0 головний. Тоді в цьому напрямку $d\vec{m} = A\left(d\vec{r}\right) = \lambda d\vec{r}$, де λ — власне число основної вектор-функції поверхні Φ в цій точці. Але з (17.2) випливає, що $\lambda = -\tilde{k}$, де $\tilde{k}$ — головна кривина цієї поверхні в точці M_0, яка відповідає цьому головному напрямку.

Достатність. Нехай в напрямку $\frac{du}{dv}$ (або $\frac{dv}{du}$) поверхні в точці M_0 справджується рівність (17.4). Тоді $A\left(d\vec{r}\right) = -\tilde{k}d\vec{r}$ і цей напрямок є власним напрямком основної вектор-функції $A(\vec{u})$ в точці M_0, що відповідає її власному значенню $-\tilde{k}$. За означенням цей напрямок є головним напрямком поверхні Φ в точці M_0.

В особливому випадку формула (17.4) справедлива для довільного напрямку поверхні Φ в цій точці.

Означення 17.2. *Добуток та півсуму головних кривин поверхні Φ в точці M_0 називають, відповідно, гаусовою (повною) та середньою її кривиною в цій точці і позначають через K та H.*

Теорема 17.3. *Для гаусової та середньої кривин поверхні Φ в точці M_0 справджуються рівності*

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}, \tag{17.5}$$

$$2H = \frac{EN + LG - 2MF}{EG - F^2}, \qquad (17.6)$$

де коефіцієнти квадратичних форм J_1, J_2 *обчислено в цій точці.*

<u>*Доведення.*</u> Формулу (17.4) запишемо у вигляді

$$\vec{m}_u du + \vec{m}_v dv = -\tilde{k}(\vec{r}_u du + \vec{r}_v dv),$$

де $\dfrac{du}{dv}$ визначає головний напрямок поверхні в точці M_0. Домноживши останню рівність скалярно по черзі на вектори $\vec{r}_u$ і $\vec{r}_v$, одержимо систему рівнянь

$$\begin{cases} Ldu + Mdv = \tilde{k}(Edu + Fdv), \\ Mdu + Ndv = \tilde{k}(Fdu + Gdv), \end{cases} \qquad (17.7)$$

яку можна записати у вигляді

$$\begin{cases} (L - \tilde{k}E)du + (M - \tilde{k}F)dv = 0, \\ (M - \tilde{k}F)du + (N - \tilde{k}G)dv = 0. \end{cases}$$

Остання система рівнянь має ненульовий розв'язок $\{du, dv\}$, що визначає головний напрямок поверхні Ф в точці M_0, отже, детермінант цієї системи рівнянь дорівнює нулеві:

$$\begin{vmatrix} L - \tilde{k}E & M - \tilde{k}F \\ M - \tilde{k}F & N - \tilde{k}G \end{vmatrix} = 0.$$

Відносно $\tilde{k}$ одержали квадратне рівняння

$$(EG - F^2)\tilde{k}^2 + (2MF - EN - LG)\tilde{k} + (LN - M^2) = 0. \qquad (17.8)$$

Враховуючи теорему Вієта і означення 17.2, одержуємо формули (17.5) та (17.6), що закінчує доведення.

Зауважимо, що головні кривини поверхні Ф в точці M_0 є коренями рівняння (17.8).

Визначимо тепер головні напрямки поверхні Ф в цій точці, тобто відповідні значення $du : dv$ або $dv : du$. Для цього повернемося до системи рівнянь (17.7) і зауважимо, що одночасно $Edu + Fdv$ та $Fdu + Gdv$ не можуть перетворюватися в нуль, бо в протилежному випадку $du = dv = 0$, оскільки $EG - F^2 \neq 0$. А du і dv одночасно в нуль не перетворюються.

Нехай, для означеності, $Edu + Fdv \neq 0$. Тоді з першого рівняння системи (17.7) знаходимо $\tilde{k}$ і підставляємо його вираз у друге рівняння цієї системи. Після перетворень одержуємо рівняння

$$(LF - ME)du^2 + (LG - NE)dudv + (MG - NF)dv^2 = 0. \quad (17.9)$$

Якщо точка M_0 омбілічна, то довільний напрямок поверхні Ф в ній головний, тобто (17.9) є тотожність, тому коефіцієнти її дорівнюють нулеві. Отже, маємо рівності

$$\frac{L}{E} = \frac{M}{F} = \frac{N}{G}, \quad (17.10)$$

які становлять необхідну і достатню умову омбілічності точки M_0 .

Нехай точка M_0 не є омбілічною. Тоді хоч один коефіцієнт в лівій частині рівності (17.9) відмінний від нуля. Нехай, для означеності, $MG - NF \neq 0$. Тоді і $du \neq 0$, бо в протилежному випадку з (17.9) маємо, що $(MG - NF)dv^2 = 0,$ звідки $dv = 0$, що неможливо. Поділимо рівняння (17.9) на du^2 і одержимо квадратне рівняння відносно $(du : dv)$, що зобов'язане мати два дійсні розв'язки, які й визначають головні напрями поверхні Ф в точці M_0 .

Аналогічні міркування неважко провести, припускаючи, що відмінний від нуля або коефіцієнт $LF - ME$, або коефіцієнт $LG - NE$.

Зауважимо, що омбілічну точку, в якій нормальна кривина поверхні дорівнює нулеві, називають *точкою уплощення* поверхні.

Означення 17.3. *Точку $M_0 \in Ф$ назвемо еліптичною, гіперболічною або параболічною, якщо гаусова кривина поверхні Ф в ній , відповідно, додатна, від'ємна або дорівнює нулеві.*

Частковим випадком параболічної точки є точка уплощення, а частковим випадком еліптичної точки є омбілічна точка, що не є точкою уплощення.

Оскільки дискримінант першої квадратичної форми завжди додатний, то знак гаусової кривини поверхні Ф визначається виразом $LN - M^2$ (дискримінант другої квадратичної форми).

Відкладемо в кожному напрямку $du : dv$ вектор, довжина якого дорівнює $\left|\tilde{k}\right|^{-1/2}$, де $\tilde{k}$ — нормальна кривина поверхні в цьому напрямку. Множину кінців цих відрізків (крім полюса O) називають *індикатрисою кривини* поверхні Φ в точці M_0 або *індикатрисою Дюпена* в цій точці. Зрозуміло, що індикатриса належить площині ω (див. параграф 16).

Теорема 17.4. *Індикатриса Дюпена є еліпс в еліптичній точці, пара спряжених гіпербол — в гіперболічній точці та пара паралельних прямих — в параболічній точці, яка не є точкою уплощення.*

Доведення. Введемо у площині ω афінну систему координат з початком в полюсі O, визначивши координатні осі векторами $\vec{r}_u$ і $\vec{r}_v$, взявши їх за базисні вектори. Нехай x та y — координати точки P індикатриси, яка відповідає напрямку $du : dv$. Цьому ж напрямку відповідає точка $P'(-x,-y)$, тобто індикатриса Дюпена є центральною фігурою. Має місце рівність

$$x\vec{r}_u + y\vec{r}_v = \left|\frac{1}{\tilde{k}}\right|^{\frac{1}{2}} \cdot \vec{\tau},$$

де $\vec{r}$ — орт вектора $\overrightarrow{OP}$ дорівнює або $\dfrac{\vec{r}_u du + \vec{r}_v dv}{\left|\vec{r}_u du + \vec{r}_v dv\right|}$, або протилежному йому вектору. В обох випадках $x : u = y : v$, тому справджуються рівності

$$Ex^2 + 2Fxy + Gy^2 = \frac{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2}{\left|Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2\right|} = \frac{Ex^2 + 2Fxy + Gy^2}{\left|Lx^2 + 2Mxy + Ny^2\right|}.$$

Звідси одержуємо наступне рівняння

$$\left|Lx^2 + 2Mxy + Ny^2\right| = 1. \tag{17.11}$$

Навпаки, якщо координати точки $P_0 \in \omega$ задовольняють останні рівняння, то неважко переконатись, що вона належить індикатрисі Дюпена в точці M_0, тобто це рівняння і є рівнянням індикатриси.

З курсу аналітичної геометрії відомо, що останнім рівнянням визначається:

а) еліпс, якщо $LN - M^2 = \delta > 0$;

б) пара спряжених гіпербол, якщо $\delta < 0$;

в) пара паралельних прямих, якщо $\delta = 0$.

Вправи

1. Знайти головні напрямки, головні кривини, гаусову та середню кривини поверхні (прямого гелікоїда), визначеної векторним рівнянням $\vec{r} = u\cos v\vec{i} + u\cos v\vec{j} + av\vec{k}$ в довільній точці.

<u>*Розв'язання.*</u> Скориставшись задачею 1 з параграфу 15, виписуємо коефіцієнти квадратичних форм J_1 та J_2 :

$$E = 1, \quad F = 0, \quad G = u^2 + a^2, \quad L = 0, \quad N = 0, \quad M = -\frac{a}{\sqrt{u^2 + a^2}}.$$

Гаусова кривина $K = \dfrac{-a^2}{(u^2 + a^2)(u^2 + a^2)} = \dfrac{-a^2}{(u^2 + a^2)^2}$.

Це означає, що при $u = const$, тобто на v-кривій прямого гелікоїда, що є гвинтовою лінією, гаусова кривина поверхні є стале число. Середня кривина $H = 0$.

Головні кривини шукаємо з рівняння (17.8): $(u^2 + a^2)\tilde{k}^2 - \dfrac{a^2}{u^2 + a^2} = 0$, звідки $\tilde{k}^2 = \dfrac{a^2}{\left(u^2 + a^2\right)^2}$, тобто

$$\tilde{k}_1 = \frac{a}{u^2 + a^2}, \quad \tilde{k}_2 = -\frac{a}{u^2 + a^2}.$$

Головні напрямки шукаємо з рівняння (17.9):

$\dfrac{a}{\sqrt{u^2 + a^2}}du^2 - \dfrac{\left(u^2 + a^2\right)a}{\sqrt{u^2 + a^2}}dv^2 = 0,$ звідки $du^2 = \left(u^2 + a^2\right)dv^2,$ тобто

відношення $\dfrac{du}{dv} = \pm\sqrt{u^2 + v^2}$ визначають два головних напрямки.

2. Обчислити гаусову та середню кривини в довільній точці поверхні, яка визначена в ортонормованому репері рівнянням $z = f(x, y)$. Показати, що якщо її друга квадратична форма є тотожний нуль, то ця поверхня є або площиною, або частиною площини.

3. Обчислити головні кривини та головні напрямки поверхні, що задана в ортонормованому репері рівнянням $z = xy$, в точці $M_0(1,1,1)$.

4. Довести, що в довільній точці поверхні, визначеної в деякому ортонормованому репері параметричними рівняннями $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z = \lambda u$ одним з головних перерізів є пряма.

5. Знайти гаусову кривину в довільній точці поверхні, утвореної:

   а) головними нормалями;

   б) бінормалями регулярної просторової кривої без точок розпрямлення.

6. Обчислити повну і середню кривини поверхні обертання в довільній точці.

   Вказівка. Поверніться до задачі 2 з параграфу 15 і використайте формулу (17.5). Переконайтеся, що

$$K = \frac{u^3 f'(u) f''(u)}{u^2(1+f'^2(u))} : u^2(1+f'^2(u)) = \frac{f'(u)f''(u)}{u(1+f'^2(u))^2}.$$

   Для обчислення середньої кривини використайте формулу (17.6).

7. Обчислити гаусову кривину псевдосфери в довільній точці.

   Розв'язання. Скористаємось задачею 3 з параграфу 15 та попередньою задачею. Одержуємо, що

$$K = \frac{ctgt\left(-\dfrac{1}{a\sin^2 t\cos t}\right)}{a\sin t(1+ctg^2 t)^2} = -\frac{1}{a^2} \qquad (t \neq \frac{\pi}{2}).$$

8. Катеноїдом називають поверхню, яка одержується при обертанні ланцюгової лінії навколо осі OX (дивись задачу 7 з параграфу 3). Знайти середню кривину цієї поверхні в довільній точці.

9. Показати, що омбілічні точки поверхні, визначеної рівнянням

$$\vec{r} = \left(\frac{u^2}{2} + v\right)\vec{i} + \left(u + \frac{v^2}{2}\right)\vec{j} + uv\vec{k},$$

   належать кривим, що визначаються на цій поверхні співвідношеннями $u = v$ та $u + v + 1 = 0$.

10. На поверхні, рівняння якої $\vec{r} = \left(u^2 + v^2\right)\vec{i} + \left(u^2 - v^2\right)\vec{j} + uv\vec{k}$, задано точку $M_0(u = 1, v = 1)$. Обчислити головні кривини цієї поверхні в точці M_0 , виписати рівняння дотичних до її головних перерізів в цій точці, знайти кривину нормального перерізу в точці M_0 площиною, що містить дотичну до кривої, визначеної на поверхні співвідношенням $v = u^2$.

11. Довести, що єдиною поверхнею з ненульовою гаусовою кривиною, всі точки якої омбілічні, є сфера або частина сфери.

<u>*Розв'язання*</u>. Нехай M_0 — довільна точка сфери. Довільний нормальний переріз сфери в цій точці є велике коло сфери, а кривина кола в довільній точці є величина, обернена до його радіусу. Отже, кривини всіх нормальних перерізів в точці M_0 однакові і дорівнюють $\frac{1}{R}$, де R — радіус сфери. Точка M_0 омбілічна і гаусова кривина сфери в ній дорівнює $\frac{1}{R^2}$.

Навпаки, нехай довільна точка $M_0(u,v)$ поверхні Ф омбілічна. Тоді з умови (17.10) випливає, що існує такий скаляр $\lambda(u,v)$, що $L = \lambda E$, $M = \lambda F$, $N = \lambda G$. Тоді $-\vec{m}_u \vec{r}_u = \lambda \vec{r}_u^{\,2}$, $-\vec{m}_u \vec{r}_v = \lambda \vec{r}_u \vec{r}_v$, або $(\vec{m}_u + \lambda \vec{r}_u)\vec{r}_u = 0$, $(\vec{m}_u + \lambda \vec{r}_u)\vec{r}_v = 0$. Враховуючи рівність $(\vec{m}_u + \lambda \vec{r}_u)\vec{m} = 0$, одержуємо, що вектор $\vec{m}_u + \lambda \vec{r}_u = \vec{0}$. Аналогічно переконуємось, що й $\vec{m}_v + \lambda \vec{r}_v = \vec{0}$. Таким чином,

$$\vec{m}_u = -\lambda \vec{r}_u, \quad \vec{m}_v = -\lambda \vec{r}_v. \tag{17.12}$$

Продиференціювавши перше з двох останніх рівнянь по v, а друге по u, одержуємо рівності

$$\vec{m}_{uv} = -\lambda_v \vec{r}_u - \lambda \vec{r}_{uv}, \quad \vec{m}_{vu} = -\lambda_u \vec{r}_v - \lambda \vec{r}_{vu},$$

звідки $\lambda_v \vec{r}_u - \lambda_u \vec{r}_v = 0$. Якщо б λ_u або λ_v були відмінні від нуля, то вектори $\vec{r}_u$ і $\vec{r}_v$ були б колінеарні, що неможливо. Отже, $\lambda = const \neq 0$.

Інтегруючи рівняння (17.12), одержуємо векторне рівняння

$(\vec{r} - \vec{r}_0)^2 = \frac{1}{\lambda^2}$, яке визначає сферу.

12. Дослідити форму поверхні в околі її еліптичної, гіперболічної та параболічної точок.
13. Визначити множину параболічних точок на поверхні, рівняння якої $\vec{r} = (u+v)\vec{i} + uv\vec{j} + (u^3 + v^3)\vec{k}$.
14. З'ясувати типи точок на трьохвісному еліпсоїді та гіперболічному параболоїді.
15. В ортонормованому репері рівнянням $z = 2x^2 + \frac{9}{2}y^2$ задано поверхню. Виписати рівняння її індикатриси Дюпена в точці $M_0(0,0,0)$.

§ 18. ДЕЯКІ СПЕЦІАЛЬНІ ЛІНІЇ НА ПОВЕРХНІ (ЛІНІЇ КРИВИНИ, АСИМПТОТИЧНІ ТА ГЕОДЕЗИЧНІ ЛІНІЇ). СПРЯЖЕНІ СІТКИ

Продовжимо вивчення тієї ж поверхні Ф, що й у попередньому параграфі.

Означення 18.1. *Лінією кривини на поверхні Ф називають таку криву, в кожній точці якої дотична до неї напрямлена вздовж одного з головних напрямків поверхні Ф в цій точці.*

Нагадаємо, що головні напрямки в точці $M_0 \in \Phi$ не визначені в двох випадках:

а) якщо M_0 точка уплощення (у ній всі нормальні кривини поверхні дорівнюють нулю і довільний напрямок є головним);

б) якщо M_0 омбілічна точка, що не є точкою уплощення (в цій точці індикатриса Дюпена є коло, довільний напрямок теж є головним).

Головні напрямки в точці M_0 визначаються рівнянням (17.9), отже, має місце твердження: для того, щоб регулярна крива $l : \vec{r} = \vec{r}(u(t), v(t))$ другого порядку на поверхні Ф була лінією кривини, необхідно і досить, щоб диференціали du, dv вздовж неї в кожній її точці задовольняли рівняння (17.9), де коефіцієнти квадратичних форм J_1 і J_2 взято в цій точці, тобто (17.9) стає диференціальним рівнянням, що зводиться до двох диференціальних рівнянь виду

$$\frac{du}{dv} = f_1(u,v), \quad \frac{du}{dv} = f_2(u,v)$$

(замість $\frac{du}{dv}$ може стояти $\frac{dv}{du}$ в залежності від того, який з диференціалів dv або du не перетворюється в нуль). З теорії диференціальних рівнянь відомо, що у випадку гладких функцій $f_1(u,v)$ і $f_2(u,v)$ через кожну точку $M_0(u,v) \in \Phi$ проходить єдина інтегральна крива першого та єдина інтегральна крива другого з цих рівнянь. Таким чином, лінії кривини поверхні Ф утворюють на ній ортогональну сітку, оскільки дві лінії кривини, що містять точку M_0, ортогональні в цій точці.

Теорема 18.1. *Для того, щоб координатна сітка поверхні Ф, яка не містить омбілічних точок, співпадала з її сіткою ліній кривини, небхідно і досить, щоб коефіцієнти F і M першої та другої квадратичних форм цієї поверхні тотожно дорівнювали нулю.*

Доведення. *Достатність*. Нехай $F(u,v) = M(u,v) = 0$. Тоді диференціальне рівняння виду (17.9) набирає вигляду

$$\big(L(u,v)G(u,v) - N(u,v)E(u,v)\big)du \cdot dv = 0.$$

Оскільки всі три коефіцієнти рівняння (17.9) не перетворюються в нуль одночасно, то різниця $L(u,v)G(u,v) - N(u,v)E(u,v)$ в нуль не перетворюється, отже $dudv = 0$.

Рівняннями $du = 0$ та $dv = 0$ визначається координатна сітка поверхні Ф.

Необхідність. Нехай координатні лінії поверхні Ф є її лініями кривини. Тоді вздовж них тотожно виконується рівність (17.9), яка вздовж u-кривих має вигляд $LF - ME = 0$, а вздовж v-кривих — $MG - NF = 0$ відповідно. Два останні рівняння утворюють однорідну систему відносно $F(u,v)$, $M(u,v)$. Детермінант останньої дорівнює $L(u,v)G(u,v) - N(u,v)E(u,v)$. Якщо припустити, що в деякій точці (u,v) $F(u,v)$ і $M(u,v)$ не перетворюються в нуль одночасно, то в ній повинен перетворюватися в нуль цей детермінант, що неможливо, бо тоді в цій точці нулями є всі три коефіцієнти рівняння (17.9). Теорема доведена.

Означення 18.2. *Напрямок $du : dv$ (або $dv : du$) на поверхні Ф в точці $M_0(u,v)$ називають асимптотичним, якщо нормальна кривина поверхні в цьому напрямку дорівнює нулеві. Криву на поверхні називають асимптотичною лінією, якщо напрямок її дотичної у кожній точці є асимптотичним для цієї поверхні.*

Безпосередньо з означень 18.2 і 17.3 випливає, що в еліптичній точці поверхні асимптотичного напрямку не існує, в гіперболічній точці існує два асимптотичних напрямки, в параболічній точці — один. В точці уплощення довільний напрямок є асимптотичним.

З співвідношення (17.1) одразу одержуємо диференціальне рівняння асимптотичних ліній

$$L(u,v)du^2 + 2M(u,v)dudv + N(u,v)dv^2 = 0. \tag{18.1}$$

Теорема 18.2. *Для того, щоб координатна сітка поверхні* Φ*, яка не містить омбілічних точок, співпадала з сіткою її асимптотичних ліній, необхідно і досить, щоб коефіцієнти* L *і* N *її другої квадратичної форми тотожно дорівнювали нулю.*

Доведення. *Достатність.* Нехай $L(u,v) = N(u,v) = 0$. Тоді (18.1) зводиться до рівняння $M(u,v)dudv = 0$. Якщо б в деякій точці (u,v) коефіцієнт M перетворився в нуль, то в цій точці нулями були б усі коефіцієнти другої квадратичної форми, тобто ця точка була б омбілічною (точкою уплощення). Тоді $dudv = 0$.

Необхідність. Якщо координатні криві поверхні Φ є асимптотичними лініями, то вздовж них виконується умова (18.1). Використовуючи її для u-кривої, одержуємо $L(u,v) = 0$. Аналогічно, для v-кривої $N(u,v) = 0$, що завершує доведення теореми.

Означення 18.3. *Геодезичною кривиною* k_g *кривої* l *на поверхні* Φ *в точці* $M_0(u,v) \in l$ *називають кривину в цій точці ортогональної проекції* l_g *цієї кривої на дотичну площину* α *до поверхні* Φ *в точці* M_0.

Означення 18.4. *Криву на поверхні* Φ *називають геодезичною лінією, якщо в кожній її точці геодезична кривина дорівнює нулю.*

Сформулюємо просту ознаку, яка іноді дає можливість розпізнати геодезичну лінію на поверхні.

Теорема 18.3. *Для того, щоб крива* l *була геодезичною лінією поверхні* Φ*, необхідно і досить, щоб її головна нормаль в кожній точці, де кривина кривої відмінна від нуля, співпадала з нормаллю до поверхні в цій точці.*

Доведення. Для зручності скористаємося *рисунком 27*, на якому штриховкою зображено поверхню Φ^*, що є проектуючою циліндричною поверхнею кривої l на площину α в околі точки M_0, (TT_1) — дотична до кривої l в точці M_0.

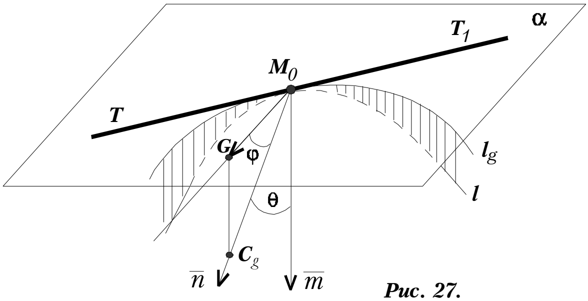

Рис. 27.

Нехай, для означеності, кут θ між одиничним вектором нормалі до поверхні в точці M_0 і одиничним вектором $\vec{n}$ головної нормалі кривої l в цій точці, і C_γ — центр кривини кривої l в точці M_0. Спроектувавши ортогонально точку $C_г$ на площину α, одержимо точку G. В околі точки M_0 криві l та l_g лежать на поверхні Ф* і мають спільну дотичну TT_1 в точці M_0, причому крива l_g є нормальним перерізом поверхні Ф* в цій точці в напрямку дотичної TT_1, а пряма M_0G є нормаллю до цієї поверхні в точці M_0. Тоді $k_l \cdot \sin\theta$ — нормальна кривина поверхні Ф* в точці M_0 в напрямку дотичної TT_1, якщо напрям на прямій M_0G задати напрямленим відрізком $\overrightarrow{M_0G}$. За теоремою Меньє кривина $k_g = k_l \cdot \sin\theta$. Отже, щоб кривина k_g дорівнювала нулеві, необхідно і досить, щоб $\sin\theta = 0,$ тобто, щоб кут $\theta = 0$, що закінчує доведення.

Зауважимо, що довільна пряма, яка лежить на поверхні Ф, є її геодезичною лінією.

Знайдемо геодезичну кривину k_g кривої l в точці M_0. Припустимо спочатку, що ця крива задана в природній параметризації. Тоді $k_g = \left|k_l \cos\varphi\right|$, де φ — кут між головними нормалями кривих l та l_g в точці M_0. На *рис. 27* $\varphi = \dfrac{\pi}{2} - \theta$. Звідси

$$k_g = \left|\left(\ddot{\vec{r}}, \dot{\vec{r}}, \vec{m}\right)\right| \tag{18.2}$$

Перейдемо до довільної параметризації кривої l, вважаючи, що вектори $\vec{r}\,'$ та $\dot{\vec{r}}$ однаково напрямлені. Справджуються рівності

$$\dot{\vec{r}} = \vec{r}_t' t'(s) = \vec{r}_t' \frac{1}{\left|\vec{r}_t'\right|}; \qquad \ddot{\vec{r}} = \vec{r}_{tt}'' \cdot \frac{1}{\left|\vec{r}_t'\right|^2} + \vec{r}_t' \cdot \left(\frac{1}{\left|\vec{r}_t'\right|}\right)_s',$$

з яких, врахувавши співвідношення (18.2), одержуємо, що

$$k_g = \frac{1}{\left|\vec{r}'\right|^3} \left|\left(\vec{r}'', \vec{r}', \vec{m}\right)\right|, \tag{18.3}$$

де диференціювання проводиться по аргументу t.

Формула (18.3) одразу приводить до диференціального рівняння геодезичної лінії:

$$\left(\vec{r}''(u(t), v(t)),\ \vec{r}'(u(t), v(t)), \left[\vec{r}_u(u(t), v(t)),\ \ \vec{r}_v(u(t), v(t))\right]\right) = 0. \tag{18.4}$$

Можна довести (див., наприклад, [8]), що через кожну точку поверхні Ф в довільному напрямку можна провести і до того ж єдину геодезичну лінію.

Означення 18.4. *Два напрямки на поверхні* Ф *в точці* M_0 *називають спряженими, якщо прямі, які визначають ці напрямки і проходять через полюс О, є спряженими діаметрами індикатриси Дюпена цієї поверхні в точці* M_0.

Враховуючи рівняння (17.11) та відому з курсу аналітичної геометрії умову спряженості двох діаметрів алгебраїчної кривої другого порядку, що мають напрямки $du : dv$ та $du_1 : dv_1$, випишемо необхідну і достатню умову спряженості цих напрямків на поверхні Ф в точці M_0:

$$Ldudu_1 + M(dudv_1 + dvdu_1) + dvdv_1 = 0\ .$$

Нехай дві сім'ї кривих на поверхні утворюють сітку, тобто через кожну точку цієї поверхні проходить по одній кривій кожної з цих сімей.

Цю сітку називають спряженою, якщо будь-які дві її криві, що належать різним сімействам, в кожній точці поверхні визначають спряжені напрямки.

Легко переконатися, що коли координатна сітка поверхні Ф є спряженою, то коефіцієнт $M(u,v)$ другої квадратичної форми цієї поверхні є тотожний нуль.

Вправи

1. Показати, що у випадку, коли координатна сітка поверхні Ф без омбілічних точок є сіткою ліній кривини, то ця сітка ортогональна і спряжена.
2. Довести, що на площині та сфері довільна гладка крива є лінією кривини.
3. Знайти лінії кривини прямого гелікоїда (див. вправу 1 з § 17).

Розв'язання. Виписуємо рівняння ліній кривини виду (17.9):

$$(a^2 + u^2)dv^2 - du^2 = 0,$$

звідки маємо: $v = \pm \ln\left(u + \sqrt{u^2 + a^2}\right) + c$, де c — довільна стала.

4. Знайти лінії кривини довільної циліндричної поверхні.
5. Показати, що координатні лінії поверхні обертання (див. вправу 2 з § 15) є її лініями кривини.

Вказівка. Коефіцієнти L і M квадратичних форм цієї поверхні, що визначена рівнянням (12.7), в усіх її точках дорівнюють нулю.

6. Довести, що на поверхні, всі точки якої гіперболічні, асимптотичні лінії утворюють сітку.
7. Для того, щоб крива на поверхні була асимптотичною лінією, необхідно і досить, щоб вона була або прямою, або мала в кожній точці дотичну площину до поверхні своєю стичною площиною. Довести.
8. Скласти рівняння асимптотичних ліній поверхні обертання.
9. Знайти асимптотичні лінії катеноїда (див. вправу 8 з § 17).

Розв'язання. Запишемо векторне рівняння катеноїда у вигляді рівняння поверхні обертання: $\vec{r} = chu\cos v\vec{i} + chu\sin v\vec{j} + u\vec{k}$. Знаходимо коефіцієнти другої квадратичної форми:

$$\vec{r}_u = (shu\cos v,\quad shu\sin v,\quad 1),\qquad \vec{r}_v = (-chu\sin v,\quad chu\cos v,\quad 0),$$

$$\vec{r}_{uu} = (chu\cos v,\quad chu\sin v,\quad 0),\quad \vec{r}_{uv} = (-shu\sin v,\quad shu\cos v,\quad 0),$$

$$\vec{r}_{vv} = (-chu\cos v,\quad chu\sin v,\quad 0),$$

$$E = sh^2u\cos^2 v + sh^2u\sin^2 v + 1 = sh^2u + 1 = ch^2u,\ \ F = 0,\ \ G = ch^2u,$$

$$\sqrt{EG - F^2} = \sqrt{ch^4u} = ch^2u,\ \ M = 0,\ \ L = -\frac{ch^2u}{ch^2u} = -1,\ \ N = \frac{ch^2u}{ch^2u} = 1.$$

Виписуємо рівняння асимптотичних ліній у вигляді (18.1): $-du^2+2\cdot 0dudv+dv^2=0$, звідки $u\pm v=const$.

10. Показати, що асимптотичними лініями прямого гелікоїда є прямолінійні твірні та їх ортогональні траєкторії — гвинтові лінії.
11. Показати, що поверхня, на якій довільна регулярна крива є асимптотичною лінією, є або площина, або частина площини.
12. Знайти геодезичні лінії на сфері.
13. Показати, що сітка ліній кривини на поверхні є спряженою сіткою.
14. В точці $M_0(1{,}1{,}1)$ поверхні, що визначена в ортонормованому репері рівнянням $xyz=1$, знайти напрямок, спряжений з напрямком $\vec{a}=(1,-2,1)$.

Розв'язання. Мають місце рівності:

$$\vec{r}=\left(x,\quad y,\quad \frac{1}{xy}\right),\qquad \vec{r}_x=\left(1,\quad 0,\quad \frac{1}{x^2y}\right),\qquad \vec{r}_y=\left(0,\quad 1,\quad -\frac{1}{xy^2}\right),$$
$$\vec{r}_{xx}=\left(0,\quad 0,\quad \frac{2}{x^3y}\right),\quad \vec{r}_{xy}=\left(0,\quad 0,\quad \frac{1}{x^2y^2}\right),\quad \vec{r}_{yy}=\left(0,\quad 0,\quad \frac{2}{xy^3}\right).$$

Значення мішаних добутків

$$\left(\vec{r}_{xx},\quad \vec{r}_x,\quad \vec{r}_y\right)=\frac{2}{x^3y};\quad \left(\vec{r}_{xy},\quad \vec{r}_x,\quad \vec{r}_y\right)=\frac{1}{x^2y^2};\quad \left(\vec{r}_{yy},\quad \vec{r}_x,\quad \vec{r}_y\right)=\frac{2}{xy^3}$$

в точці M_0 відповідно дорівнюють 2, 1, 2. Умова спряженості напрямків виглядає так:

$$2dxdx_1+\left(dxdy_1+dydx_1\right)+2dydy_1=0.$$

Для напрямку $\vec{a}=(1,-2,1)$ $\dfrac{dy}{dx}=-2$, тобто спряжений напрямок $\dfrac{dy_1}{dx_1}$ знаходимо з рівняння

$$2dx_1+(dy_1-2dx_1)-4dy_1=0.$$

Одержуємо, що $\dfrac{dy_1}{dx_1}=0$, тобто для вектора $\vec{b}$, який визначає спряжений напрямок, можна покласти $x=1, y=0$, Третю координату знаходимо з умови паралельності вектора $\vec{b}$ до дотичної площини поверхні в точці M_0. Градієнт $\nabla\vec{F}\Big|_{M_0} = (1,1,1)$ перпендикулярний вектору $\vec{b}$, звідки знаходимо третю координату $z = -1$. Отже, вектор $\vec{b} = (1,0,-1)$ визначає шуканий напрямок.

15. Скласти диференціальні рівняння сім'ї кривих на поверхні Ф, що утворюють спряжену сітку з сім'єю координатних ліній $u = const$ $(v = const)$.

16. Довести, що криві, визначені рівнянням $v^2du^2 - u^2dv^2$ на прямому гелікоїді, утворюють спряжену сітку.
17. Скласти диференціальне рівняння сім'ї кривих на поверхні Ф, що утворюють спряжену сітку з сім'єю ліній $\varphi(u,v) = c$.

Вказівка. Умову спряженості запишемо у вигляді

$$Ldu \cdot \frac{du_1}{dv_1} + M\left(du + dv\frac{du_1}{dv_1}\right) + Ndv = 0.$$

Знаходимо, що $\dfrac{du_1}{dv_1} = -\dfrac{\frac{\partial\varphi}{\partial v}}{\frac{\partial\varphi}{\partial u}}$ і підставляємо в попереднє рівняння.

§ 19. ВНУТРІШНЯ ГЕОМЕТРІЯ ПОВЕРХНІ

Внутрішня геометрія поверхні вивчає ті властивості цієї поверхні, які визначаються її першою квадратичною формою. Сюди, як ми бачили, належать задачі про обчислення довжини дуги кривої на поверхні, кута між такими кривими, площі частини поверхні. В цьому параграфі ми розглянемо ще деякі поняття, що належать до внутрішньої геометрії поверхні.

Будемо вважати, що поверхня Φ, яку ми вивчали в попередньому параграфі, є регулярною поверхнею третього порядку.

Для зручності введемо нові позначення криволінійних координат, коефіцієнтів квадратичних форм та деяких векторів:

$$u = u^1,\ v = u^2,\ E = g_{11},\ F = g_{12} = g_{21},$$

$$G = g_{22},\ L = b_{11},\ M = b_{12} = b_{21},\ N = b_{22},$$

$$\vec{r}_u = \vec{r}_1,\ \vec{r}_v = \vec{r}_2,\ \vec{r}_{uu} = \vec{r}_{11},\ \vec{r}_{uv} = \vec{r}_{vu} = \vec{r}_{12} = \vec{r}_{21},\ \vec{r}_{vv} = \vec{r}_{22}.$$

В нових позначеннях квадратичні форми поверхні Φ виглядають так:

$$J_1 = \sum_{\alpha=1}^{2}\sum_{\beta=1}^{2} g_{\alpha\beta} du^{\alpha} du^{\beta}, \quad J_2 = \sum_{\alpha=1}^{2}\sum_{\beta=1}^{2} b_{\alpha\beta} du^{\alpha} du^{\beta}.$$

Надалі будемо вважати, що по індексах α і β, які пробігають значення $\{1,2\}$, проводиться сумування без виписування знаку суми, тобто дві останні рівності набирають вигляду

$$J_1 = g_{\alpha\beta} du^{\alpha} du^{\beta}, \quad J_2 = b_{\alpha\beta} du^{\alpha} du^{\beta}.$$

Взагалі у випадку, коли в одночленному виразі деякий індекс стоїть знизу і зверху, вважатимемо, що по ньому відбувається сумування в межах від одиниці до двох.

Зауважимо також, що в цьому параграфі ми не будемо вказувати множину значень індексу, якщо вона становить {1.2}. Так, наприклад, формули

$$g_{ij} = \vec{r}_i \vec{r}_j, \quad b_{ij} = \vec{r}_{ij} \vec{m} \tag{19.1}$$

визначають шість коефіцієнтів квадратичних форм J_1 та J_2.

Розкладемо кожний вектор $\vec{r}_{ij}$ в заданій точці поверхні Φ за трьома векторами $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{m}$ в цій самій точці, де, як і раніше, $\vec{m}$ — одиничний вектор нормалі до поверхні Φ:

$$\vec{r}_{ij} = \Gamma_{ij}^{1} \vec{r}_1 + \Gamma_{ij}^{2} \vec{r}_2 + a_{ij} \vec{m}. \tag{19.2}$$

Фактично формула (19.2) містить в собі три рівності, оскільки $a_{ij}=a_{ji}$, $\Gamma_{ij}^{k}=\Gamma_{ji}^{k}$. Підрахуємо тепер коефіцієнти в рівності (19.2). Помноживши її скалярно на вектор $\vec{m}$, одержимо, що $\vec{r}_{ij}\vec{m}=a_{ij}$, тобто, враховуючи (19.1), маємо рівність $a_{ij}=b_{ij}$. Тоді розклад (19.2) набирає вигляду

$$\vec{r}_{ij}=\Gamma_{ij}^{1}\vec{r}_1+\Gamma_{ij}^{2}\vec{r}_2+b_{ij}\vec{m}. \tag{19.3}$$

Залишилося знайти шість коефіцієнтів Γ_{ij}^{k}. Позначимо скалярні добутки $\vec{r}_k\vec{r}_{ij}$ через Γ_{kij}. Очевидно, $\Gamma_{kij}=\Gamma_{kji}$.

Помножимо рівність (19.3) скалярно спочатку на $\vec{r}_1$, а потім на $\vec{r}_2$. Одержимо

$$\Gamma_{1ij}=\Gamma_{ij}^{1}g_{11}+\Gamma_{ij}^{2}g_{21},\quad \Gamma_{2ij}=\Gamma_{ij}^{1}g_{12}+\Gamma_{ij}^{2}g_{22}. \tag{19.4}$$

Розв'язуючи систему (19.4) відносно Γ_{ij}^{1} та Γ_{ij}^{2}, отримуємо

$$\Gamma_{ij}^{1}=\frac{1}{g_{11}g_{22}-g_{12}^2}\left(g_{22}\Gamma_{1ij}-g_{12}\Gamma_{2ij}\right),$$

$$\Gamma_{ij}^{2}=\frac{1}{g_{11}g_{22}-g_{12}^2}\left(-g_{12}\Gamma_{1ij}+g_{11}\Gamma_{2ij}\right).$$

Позначимо

$$g^{11}=\frac{g_{22}}{g_{11}g_{22}-g_{12}^2};\ g^{12}=g^{21}=-\frac{g_{12}}{g_{11}g_{22}-g_{12}^2};\ g^{22}=\frac{g_{11}}{g_{11}g_{22}-g_{12}^2}$$

і попередні рівності запишемо у вигляді

$$\Gamma_{ij}^{1}=g^{11}\Gamma_{1ij}+g^{12}\Gamma_{2ij},\quad \Gamma_{ij}^{2}=g^{21}\Gamma_{1ij}+g^{22}\Gamma_{2ij}.$$

Останні дві формули об'єднаємо в одну:

$$\Gamma_{ij}^{k}=g^{k\alpha}\Gamma_{\alpha ij}, \tag{19.5}$$

де сумування проводиться по індексу α.

Врахувавши (19.1), випишемо рівності

$$\vec{r}_i\vec{r}_j=g_{ij},\quad \vec{r}_j\vec{r}_k=g_{jk},\quad \vec{r}_k\vec{r}_i=g_{ki}$$

і продиференціюємо їх по u^k, u^i та u^j відповідно. Маємо

$$\vec{r}_{ik}\vec{r}_j+\vec{r}_i\vec{r}_{jk}=\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k};$$

$$\vec{r}_{ji}\vec{r}_k + \vec{r}_j\vec{r}_{ki} = \frac{\partial g_{ik}}{\partial u^i};$$

$$\vec{r}_{kj}\vec{r}_i + \vec{r}_k\vec{r}_{ij} = \frac{\partial g_{ki}}{\partial u^j}.$$

Додавши почленно дві останні рівності і віднявши від їх суми першу, одержимо

$$2\vec{r}_k\vec{r}_{ij} = \frac{\partial g_{ki}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k}. \tag{19.6}$$

Звідси випливає рівність

$$\Gamma_{kij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ki}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k}\right).$$

Таким чином,

$$\Gamma_{111} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{11}}{\partial u^1}; \quad \Gamma_{112} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{11}}{\partial u^2}; \quad \Gamma_{122} = \frac{\partial g_{12}}{\partial u^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{22}}{\partial u^1}.$$

Замінивши в цих формулах 1 на 2 і навпаки, одержуємо ще три вирази для Γ_{kij}. Ці вирази називають *символами Кристофеля першого роду.* Вони виражаються через похідні від коефіцієнтів першої квадратичної форми. З (19.5) випливає, що Γ_{ij}^k виражаються через коефіцієнти першої квадратичної форми та їх часткові похідні $\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k}$. Вирази Γ_{ij}^k називають *символами Кристофеля другого роду.* Ми їх явно виписувати не будемо.

Відмітимо, що формули (19.3) носять назву *дерівакційних формул Гауса.*

***Теорема 19.1.* (*Гауса*).** *Повна кривина поверхні* Φ *визначається першою квадратичною формою цієї поверхні, отже, належить до її внутрішньої геометрії.*

Доведення. Формулу (19.6) запишемо у вигляді рівності

$$\vec{r}_{ij}\vec{r}_k = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k}\right)$$

і продиференціюємо її по u^l:

$$\vec{r}_{ijl}\vec{r}_k + \vec{r}_{ij}\vec{r}_{kl} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial u^j \partial u^l} + \frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial u^i \partial u^l} - \frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial u^k \partial u^l}\right). \tag{19.7}$$

Остання рівність справджується при всіх $i, j, k, l \in \{1,2\}$, тому в ній можна поміняти місцями індекси j і l:

$$\vec{r}_{ilj}\vec{r}_k + \vec{r}_{il}\vec{r}_{kj} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial u^l \partial u^j} + \frac{\partial^2 g_{lk}}{\partial u^i \partial u^j} - \frac{\partial^2 g_{il}}{\partial u^k \partial u^j}\right).$$

Віднімаючи почленно від (19.7) останню рівність, одержимо

$$\vec{r}_{ij}\vec{r}_{kl} - \vec{r}_{il}\vec{r}_{kj} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial u^k \partial u^l} + \frac{\partial^2 g_{kl}}{\partial u^i \partial u^j} - \frac{\partial^2 g_{ki}}{\partial u^i \partial u^l} - \frac{\partial^2 g_{il}}{\partial u^k \partial u^i}\right).$$

Ця формула при різних значеннях $i, j, k, l \in \{1,2\}$ веде або до тотожностей, або до рівності

$$\vec{r}_{11}\vec{r}_{22} - \vec{r}_{12}\vec{r}_{12} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{11}}{\partial u^2 \partial u^2} + \frac{\partial^2 g_{22}}{\partial u^1 \partial u^1} - 2\frac{\partial^2 g_{12}}{\partial u^1 \partial u^2}\right) = \Gamma\,. \quad (19.8)$$

Випишемо тепер три формули (19.3)

$$\vec{r}_{11} = \Gamma_{11}^{\alpha}\vec{r}_{\alpha} + b_{11}\vec{m}, \quad \vec{r}_{12} = \Gamma_{12}^{\gamma}\vec{r}_{\gamma} + b_{12}\vec{m}, \quad \vec{r}_{22} = \Gamma_{22}^{\beta}\vec{r}_{\beta} + b_{22}\vec{m}$$

та скалярні добутки

$$\vec{r}_{11}\vec{r}_{22} = \Gamma_{11}^{\alpha}\Gamma_{22}^{\beta}\vec{r}_{\alpha}\vec{r}_{\beta} + b_{11}b_{22}\vec{m}^2,$$

$$\vec{r}_{12}\vec{r}_{12} = \Gamma_{12}^{\gamma}\Gamma_{12}^{\delta}\vec{r}_{\gamma}\vec{r}_{\delta} + b_{12}^2\vec{m}^2\,.$$

Підставляючи одержані вирази у формулу (19.8), маємо

$$\Gamma_{11}^{\alpha}\Gamma_{22}^{\beta}g_{\alpha\beta} - \Gamma_{12}^{\gamma}\Gamma_{12}^{\delta}g_{\gamma\delta} + b_{11}b_{22} - b_{12}^2 = \Gamma,$$

або
$$b_{11}b_{22} - b_{12}^2 = \Gamma_{12}^{\gamma}\Gamma_{12}^{\delta}g_{\gamma\delta} - \Gamma_{11}^{\alpha}\Gamma_{22}^{\beta}g_{\alpha\beta} - \Gamma.$$

Останню рівність називають формулою Гауса. Взявши до уваги означення гаусової кривини поверхні та формулу для її обчислення, завершуємо доведення теореми.

Теорема 19.2. *Геодезична кривина кривої l на поверхні Φ належить до внутрішньої геометрії цієї поверхні.*

Доведення. Повернемось до теореми 18.3. Очевидно, геодезична кривина k_g кривої l в точці M_0 визначається за формулою

$$k_g = \left|\overline{M_0 G}\right|.$$

В нових позначеннях рівняння кривої l запишемо у вигляді $\vec{r} = \vec{r}\left(u^1(s), u^2(s)\right)$, де s — природний параметр вздовж неї, отже

$$\dot{\vec{r}} = \vec{r}_1\dot{u}^1 + \vec{r}_2\dot{u}^2,$$

$$\ddot{\vec{r}} = \vec{r}_{ij}\dot{u}^i\dot{u}^j + \vec{r}_1\ddot{u}^1 + \vec{r}_2\ddot{u}^2.$$

Скориставшись дериваційними формулами (19.3), одержимо

$$\ddot{\vec{r}} = \Gamma^1_{ij}\dot{u}^i\dot{u}^j\vec{r}_1 + \Gamma^2_{ij}\dot{u}^i\dot{u}^j\vec{r}_2 + b_{ij}\dot{u}^i\dot{u}^j\vec{m} + \vec{r}_1\ddot{u}^1 + \vec{r}_2\ddot{u}^2.$$

Тоді

$$\overline{M_0G} = \left(\ddot{u}^1 + \Gamma^1_{ij}\dot{u}^i\dot{u}^j\right)\vec{r}_1 + \left(\ddot{u}^2 + \Gamma^2_{ij}\dot{u}^i\dot{u}^j\right)\vec{r}_2. \qquad (19.9)$$

Знайдемо модуль цього напрямленого відрізка. Для цього рівність (19.9) помножимо векторно на вектор $\vec{t} = \vec{r}_1\dot{u}^1 + \vec{r}_2\dot{u}^2$ і одержимо

$$\left[\vec{t}, \overline{M_0G}\right] = \left[\vec{r}_1, \vec{r}_2\right]\left(\dot{u}^1\left(\ddot{u}^2 + \Gamma^2_{ij}\dot{u}^i\dot{u}^j\right) + \dot{u}^2\left(\ddot{u}^1 + \Gamma^1_{ij}\dot{u}^i\dot{u}^j\right)\right).$$

Беручи до уваги, що $\left|\left[\vec{t}, \overline{M_0G}\right]\right| = \left|\overline{M_0G}\right|$, приходимо до рівності

$$k_g = \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}\left|\dot{u}^1\left(\ddot{u}^2 + \Gamma^2_{ij}\dot{u}^i\dot{u}^j\right) + \dot{u}^2\left(\ddot{u}^1 + \Gamma^1_{ij}\dot{u}^i\dot{u}^j\right)\right|,$$

яка завершує доведення теореми.

На закінчення сформулюємо без доведення відому теорему Гауса-Бонне.

Теорема 19.3. *Нехай на поверхні Ф визначено область F, обмежену кусково-гладким замкнутим контуром* γ, *що складається з дуг* $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n$, *які утворюють в спільних кінцях кути* $\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n$. *Справджується рівність*

$$\sum_{k=1}^{n}\int_{\gamma_k} k_g ds + \sum_{k=1}^{n}\left(\pi - \phi_k\right) = 2\pi - \iint_F K d\sigma, \qquad (19.10)$$

де k_g *— геодезична кривина контуру* γ, *K — гаусова кривина поверхні Ф,* $d\sigma$ *— елемент площі поверхні.*

Припустимо тепер, що $n = 3$, а дуги $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ — геодезичні лінії на поверхні Ф. Тоді рівність (19.10) набирає вигляду

$$\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 = \pi + \iint_F K d\sigma,$$

звідки випливає, що сума внутрішніх кутів геодезичного трикутника:

а) більша π на поверхні, де $K > 0$;

б) менша π на поверхні, де $K < 0$;

в) дорівнює π на поверхні, де $K = 0$.

Неважко показати, що на сфері має місце випадок а), на псевдосфері – випадок б) і на площині – випадок в).

Як відомо, властивість б) характерна для площини Лобачевського. Виявляється, що площина Лобачевського в малому допускає ізометричне відображення на поверхню сталої від'ємної гаусової кривини (наприклад, псевдосферу). Цей факт вперше встановив італійський математик Бельтрамі в 1868 році, побудувавши таким чином модель площини Лобачевського.

Ізометричними називають такі поверхні, між якими можна встановити бієктивну відповідність, яка б зберігала довжини відповідних дуг на цих поверхнях. Цю відповідність часто називають вигинанням однієї поверхні на другу. Неважко переконатись, що внутрішня геометрія поверхні інваріантна відносно її вигинання.

Вправи

1. Доведіть, використовуючи теорему Гаусса-Бонне, що сума внутрішніх кутів довільного трикутника на евклідовій площині дорівнює розгорнутому куту.
2. Обчисліть площу сферичного двокутника на сфері радіуса r з кутом A.
3. Знайдіть площу довільного сферичного трикутника і покажіть, що сума мір його кутів більша за p, не користуючись теоремою Гаусса-Бонне.
4. Нехай V^3 – трьохвимірний евклідів векторний простір над полем R^1. Множину $E \neq \varnothing$ називають двохвимірним еліптичним простором (площиною) Рімана, якщо існує сюр'єкція $\pi : V^3 \setminus \{\vec{0}\} \to E$, що має властивість
$$\pi(\vec{x}) = \pi(\vec{y}) \Leftrightarrow \vec{x} \parallel \vec{y}.$$
Побудуйте модель Рімanової площини і доведіть, що будь-які дві прямі цієї площини перетинаються.

Вказівка. Скористайтеся тим, що означення Рімanової площини відрізняється від означення проективної площини лише тим, що множина V^3 є евклідовим простором, що дає змогу ввести поняття відстані $\rho(M_1, M_2)$ між точками M_1 та M_2 з множини E за допомогою скалярного добутку векторів з V^3. Наприклад, це можна зробити, поклавши

$$\cos\frac{\rho(M_1, M_2)}{r} = \frac{\left|\vec{m}_1 \cdot \vec{m}_2\right|}{\left|\vec{m}_1\right|\left|\vec{m}_2\right|},$$

де число $r > 0$ називають радіусом кривини простору E, $\pi(\vec{m}_1) = M_1$, $\pi(\vec{m}_2) = M_2$.

Далі можна використати якусь з моделей проективної площини, наприклад, в'язку прямих в трьохвимірному просторі.

§ 20. ПОНЯТТЯ ПОВЕРХНІ В ТОПОЛОГІЧНИХ МНОГОВИДАХ. КЛІТЧАСТІ МНОГОВИДИ

Нехай G і G' — p-вимірні топологічні многовиди в просторі R^p, а X^n — деякий n-вимірний многовид ($n \geq p$). Говорять, що занурення $f\colon\ G \to X^n$ та $g\colon\ G' \to X^n$ знаходяться у відношенні σ, якщо існує гомеоморфізм $h\colon\ G \to G'$ такий, що $f = gh$. Легко бачити, що σ є відношенням еквівалентності на множині P занурень p-вимірних многовидів з R^p в X^n.

Означення 20.1. *Елементи факторпростору P/σ називають p-вимірними поверхнями в топологічному многовиді X^n.*

Пригадавши означення 10.2, приходимо до висновку, що поняття одновимірної поверхні та кривої в многовиді X^n співпадають.

Якщо занурення f і g еквівалентні, то $f(G) = g(G')$. Якщо f є вкладенням, то його зведення $f_1 : G \to f(G)$ є гомеоморфізм, отже множина $f(G)$ є топологічним многовидом в X^n. В цьому випадку досить часто поверхню, яка визначається відображенням f, утотожнюють з многовидом $f(G)$ і називають *елементарною* поверхнею.

В просторі E^3 задамо ортонормований репер і розглянемо занурення $f : G \to E^3$, де G — область, що гомеоморфна R^2 (елементарна область), яке точку $(u^1, u^2) \in G$ переводить в точку $M \in E^3$ з координатами

$$x = x\left(u^1, u^2\right),\ y = y\left(u^1, u^2\right),\ z = z\left(u^1, u^2\right) \qquad (20.1)$$

в обраному репері. Останні рівності є параметричними рівняннями цієї поверхні.

Якщо наперед виписати рівняння виду (20.1), де функції x, y, z неперервні в області G, то в сенсі означення 20.1 можна взагалі не визначити ніякої поверхні, хоча в сенсі означення 12.2 ці рівняння визначатимуть цілком певну поверхню. Більше того, рівняння (20.1) одночасно визначають і криву в E^3, якщо користуватись означенням кривої з параграфу 2. Тобто довільну непорожню множину точок з E^3 в сенсі цього означення кривої та означення 12.2 можна називати як кривою, так і поверхнею, поки не вказано вектор-функції, годографом якої є ця множина. Звичайно, в сенсі цих означень жодна непорожня множина з E^3 не може бути елементарною кривою і елементарною поверхнею одночасно.

Означення 20.2. *Кліткою назвемо довільний топологічний многовид, гомеоморфний простому многокутнику. При цьому образ вершини многокутника назвемо вершиною клітки, а образ сторони — стороною клітки.*

Означення 20.3. *Двовимірний топологічний многовид назвемо клітчастим, якщо він допускає клітчасте покриття, тобто його можна покрити скінченною кількістю кліток так, що дві довільні різні клітки або не мають спільних точок, або мають спільну вершину чи спільну сторону.*

Кількість вершин клітчастого многовиду Φ позначимо через a, кількість сторін — через b і кількість кліток — через c. Число $a + c - b$ називають *ейлеровою характеристикою многовиду* Φ. Можна довести, що ейлерова характеристика не залежить від способу розбиття многовиду Φ на клітки. Зовсім очевидно, що ейлерова характеристика многовиду не змінюється при гомеоморфізмі, тобто є топологічним інваріантом.

Теорема 20.1 *(теорема Ейлера для многогранників). Ейлерова характеристика довільного опуклого многогранника дорівнює двом.*

Доведення. Безпосереднім підрахунком переконуємось, що твердження теореми справджується для тетраедра. Неважко переконатись, що тетраедр, як і довільний опуклий многогранник, гомеоморфний сфері (переконайтесь!), отже, довільний опуклий многогранник гомеоморфний тетраедру. Останній факт означає, що ейлерова характеристика довільного опуклого многогранника така ж сама, як у тетраедра, тобто два.

Якщо береться до уваги порядок, у якому вказуються кінці сторони клітки, то ця сторона вважається орієнтованою. Сторони AB і BA клітки вважаються орієнтованими протилежно. Якщо вважати сторону AB орієнтованою, то можна ввести узгоджену орієнтацію всієї клітки, тобто всіх її сторін. Дійсно, кінець B сторони AB вважатимемо початком сторони BC, яка теж стає орієнтованою. Кінець C сторони BC вважатимемо початком сторони CD і так далі. Зрозуміло, що кожну клітку можна орієнтувати двома способами (другий спосіб одержимо, взявши за основу не сторону AB, а сторону BA).

Нехай клітки Φ_1 і Φ_2 мають спільну сторону. Вважають, що ці клітки орієнтовані однаково, якщо в орієнтаціях цих кліток спільна сторона орієнтована протилежно.

Означення 20.4. *Клітчастий многовид називають орієнтованим, якщо існує таке його клітчасте покриття, в якому клітки можна орієнтувати так, що кожні дві з них, які мають спільну сторону, будуть орієнтованими однаково. В протилежному випадку клітчастий многовид називають неорієнтованим.*

Легко переконатись, що орієнтованість многовиду є топологічним інваріантом, тобто зберігається при гомеоморфізмі. Безпосередньо легко переконатись, що тетраедр являє собою орієнтований многовид. Звідси випливає, що орієнтованими многовидами є сфера та довільний опуклий многогранник. Прикладом неорієнтованого многовиду є так званий листок Мьобіуса. Він одержується з прямокутника $ABCD$ шляхом утотожнення (склеювання) точок відрізків BC і DA, симетричних відносно центра симетрії цього прямокутника. Переконайтесь самостійно, що листок Мьобіуса є неорієнтованим многовидом.

Можна довести, що клітчастий многовид не може бути орієнтованим і неорієнтованим одночасно, тобто, цю властивість можна встановити, скористувавшись будь-яким його клітчастим покриттям, що робить розв'язування цієї задачі конструктивним.

Вправи

1. Показати, що евклідова площина є елементарною поверхнею.

2. Визначити циліндричну поверхню в просторі E^3.

Розв'язання. Нехай $G = \{(u,v) \in R^2 | 0 \le u \le 2\pi\}$ — смуга в R^2. В просторі E^3 задамо ортонормований репер і розглянемо відображення $f\colon G \to E^3$, що діє за законом $f(u,v) = M(x,y,z)$, де $x = \cos u, y = \sin u, z = v$. Це відображення є зануренням, але не є вкладенням, оскільки воно не ін'єктивне. Клас еквівалентних занурень, який визначається вказаним відображенням, і є циліндричною поверхнею в сенсі означення 20.1, причому образ $f(G)$ є циліндром, що в обраному репері визначається рівнянням $x^2 + y^2 = 1$.

3. Визначити конічну поверхню в сенсі означення 20.1.
4. Довести, що еліпсоїд гомеоморфний сфері, гіперболічний параболоїд гомеоморфний відкритому кругу, однополорожнинний гіперболоїд гомеоморфний відкритому кільцю.
5. Знайти ейлерову характеристику замкнутого кільця.
6. Знайти ейлерову характеристику тора.
7. Довести, що проективна площина є двовимірним неорієнтованим топологічним многовидом.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Атанасян Л.С., Гуревич Г.Б.* Геометрия. Ч. 2. — М.: Просвещение, 1976. — 447 с.
2. *Базылев В.Т., Дуничев К.И.* Геометрия. Ч. 2. — М.: Просвещение, 1975. — 368 с.
3. *Кованцов М.І.* Диференціальна геометрія. — Київ: Вища школа, 1973. — 276 с.
4. *Колмогоров А.М., Фомін С.В.* Елементи теорії функцій і функціонального аналізу. — Київ: Вища школа, 1974. — 456 с.
5. *Теплінський Ю.В.* Елементи теорії кривих. — Кам'янець-Подільський: науково-видавничий відділ К-ПДПІ, 1995. — 92 с.
6. *Кошмаренко В.Д., Носаль Т.В.* Теорія кривих ліній в диференціальній геометрії. — Київ: Вид. КДПІ, 1989. — 40 с.
7. *Норден А.П.* Краткий курс дифференциальной геометрии. — М.: ФИЗМАТГИЗ, 1958. — 244 с.
8. *Погорелов А.В.* Лекции по дифференциальной геометрии. — Харьков: Изд. харьковского госуниверситета, 1967. 165 с.
9. *Погорелов А.В.* Дифференциальная геометрия. — М.: Наука, 1969. — 176 с.
10. *Рашевский П.К.* Курс дифференциальной геометрии. — М.: Гостехиздат, 1950. — 428 с.
11. *Фиников С.П.* Курс дифференциальной геометрии. — М.: Гостехиздат, 1952. — 343 с.
12. *Воднев В.Г.* и др. Сборник задач и упражнений по дифференциальной геометрии. — Мн.: Высшая школа, 1970. — 374 с.