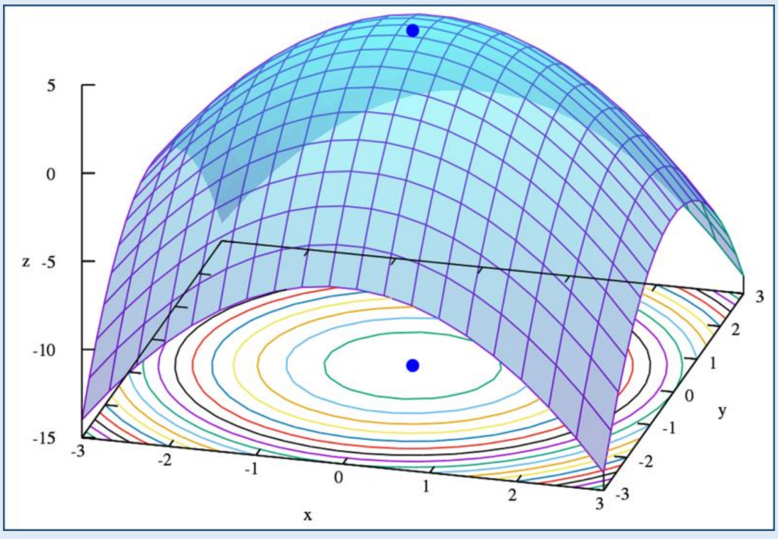
Кам’янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка

У. В. ГУДИМА,
Т. В. ДУМАНСЬКА

МЕТОДИ ОПТИМІЗАЦІЇ. ПРАКТИКУМ

НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНИЙ ПОСІБНИК



ЕЛЕКТРОННЕ ВИДАННЯ НА CD-ROM

Кам’янець-Подільський

2021

УДК 519.852
ББК 22.183.41я73
Г93

Рекомендовано вченою радою Кам’янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка (протокол № 2 від 28 січня 2021 року)

РЕЦЕНЗЕНТИ:

Н. М. Сорич, кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри математики Кам’янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка;

І. В. Семенишина, кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри математичних дисциплін, інформатики і моделювання Подільського державного аграрно-технічного університету;

Л. М. Михайлова, кандидат технічних наук, професор, директор навчально-наукового інституту енергетики Подільського державного аграрно-технічного університету.

Гудима У. В., Думанська Т. В.
Г93 **Методи оптимізації. Практикум:** навчально-методичний посібник. [Електронний ресурс]. Кам’янець-Подільський: Кам’янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2021. 1 електрон. опт. диск (CD-ROM); 12 см.

У посібнику наведено приклади формування математичних моделей деяких задач практичного змісту, розв’язування задач лінійного і лінійного дискретного програмування, приклади розв’язування матричних ігор та задач дробово-лінійного програмування методами лінійного програмування, методи розв’язування задач опуклого квадратичного програмування. Зроблено підбір задач для самостійного розв’язування.

Навчальний посібник призначений для підготовки фахівців першого (бакалаврського) рівня вищої освіти, які навчаються за освітньо-професійною програмою Комп’ютерні науки та інформаційні технології спеціальності 122 Комп’ютерні науки та інформаційні технології, і буде корисним при вивченні курсів з теорії і методів оптимізації, дослідження операцій.

УДК 519.852
ББК 22.183.41я73

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

ПРИКЛАДИ РОЗВ’ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Приклад 1 ***(Побудова математичної моделі задачі лінійного програмування)***

Приклад 2 ***(Зведення задачі лінійного програмування до канонічної форми)***

Приклад 3 ***(Графічний метод розв’язування задачі лінійного програмування)***

Приклад 4 ***(Симплексний метод розв’язування задачі лінійного програмування)***

Приклад 5 ***(Симплексний метод розв’язування задачі лінійного програмування зі стандартним базисом)***

Приклад 6 ***(Метод штучного базису відшукання допустимого базисного розв’язку задачі лінійного програмування)***

Приклад 7 ***(Двоїсті задачі лінійного програмування)***

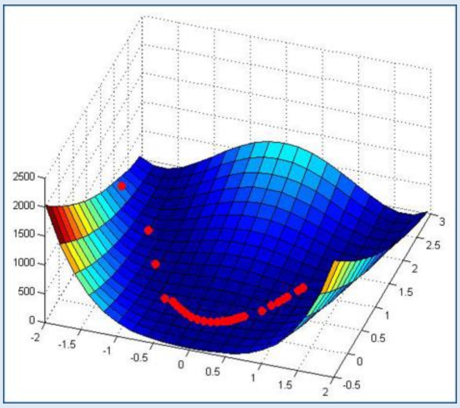
Приклад 8 ***(Двоїстий симплексний метод розв’язування задачі лінійного програмування)***

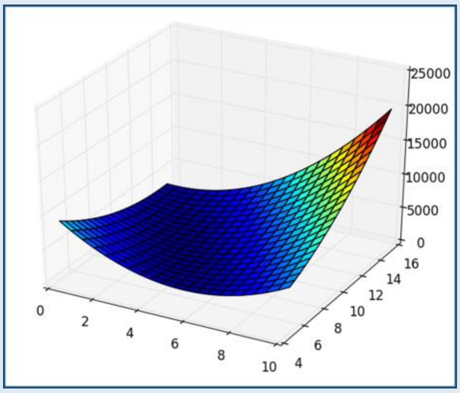
Приклад 9 ***(Метод потенціалів розв’язування збалансованої транспортної задачі)***

Приклад 10 ***(Метод потенціалів розв’язування відкритої транспортної задачі)***

Приклад 11 ***(Угорський метод розв’язування задачі про оптимальні призначення)***

Приклад 12 ***(Метод Мака розв’язування задачі про оптимальні призначення)***

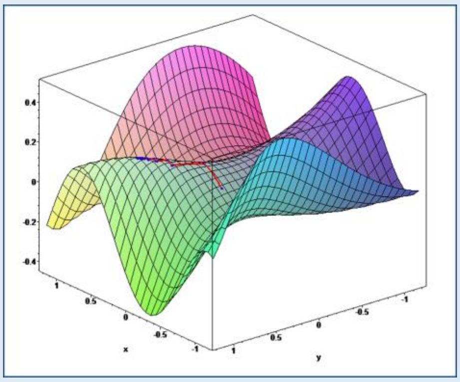




Приклад 13 ***(Перший метод Гоморі розв'язування повністю цілочислової задачі лінійного програмування)***
Приклад 14 ***(Другий метод Гоморі розв'язування частково цілочислової задачі лінійного програмування)***
Приклад 15 ***(Третій метод Гоморі розв'язування повністю цілочислової задачі лінійного програмування)***
Приклад 16 ***(Метод Дальтона-Ллевеліна розв'язування задачі дискретного програмування)***
Приклад 17 ***(Розв'язування матричної гри, що допускає розв'язок у чистих стратегіях)***
Приклад 18 ***(Розв'язування матричної гри методами лінійного програмування)***
Приклад 19 ***(Графічний метод розв'язування задачі дробово-лінійного програмування)***
Приклад 20 ***(Розв'язування задачі дробово-лінійного програмування методами лінійного програмування)***
Приклад 21 ***(Квадратичний симплекс-метод розв'язування задачі опуклого квадратичного програмування)***

ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ



Міністерство освіти і науки України
Кам’янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка

Навчальне електронне видання на CD-ROM

ГУДИМА Уляна Василівна,
кандидат фізико-математичних наук, доцент,
завідувач кафедри математики
Кам’янець-Подільського національного університету
імені Івана Огієнка

ДУМАНСЬКА Тетяна Володимирівна,
кандидат педагогічних наук, старший викладач
кафедри математики Кам’янець-Подільського національного
університету імені Івана Огієнка

МЕТОДИ ОПТИМІЗАЦІЇ. ПРАКТИКУМ

НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНИЙ ПОСІБНИК

Електронне видання на CD-ROM

Один електронний оптичний диск (CD-ROM).
Об’єм даних 22,3. Мб. Обл.-вид. арк. 6,9. Підп. 22.04.2021. Тираж 7. Зам. № 930.

Видавець і виготовлювач Кам’янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка, вул. Огієнка, 61, м. Кам’янець-Подільський, 32300

Свідоцтво про внесення до державного реєстру суб'єктів видавничої справи
серії ДК № 3382 від 05.02.2009 р.

ПЕРЕДМОВА

Сучасна педагогічна модель навчання фахівців спеціальності 122 Комп’ютерні науки та інформаційні технології вимагає ґрунтовної математичної підготовки, однією із складових якої є дослідження екстремальних задач, які спрямовані на відшукання найкращого (оптимального) рішення. Екстремальні задачі знайшли своє застосування у різних галузях людської діяльності: під час розв’язування проблем планування, проектування виробничих процесів, у військовій справі тощо.

При дослідженні екстремальних задач можна виділити основні етапи: побудова математичних моделей процесів, в яких мають відображатися найсуттєвіші фактори і умови, постановка відповідної математичної задачі; встановлення умов існування допустимих та оптимальних розв’язків; аналіз властивостей множини допустимих розв’язків; пошук методу розв’язування, аналіз отриманих результатів. Розв’язування таких задач передбачає знання основ теорії множин, математичного аналізу, лінійної алгебри, теорії ймовірностей та математичної статистики.

Під час розв’язування конкретних задач, перш за все, необхідно вибрати метод, який забезпечить скінченний оптимальний розв’язок задачі. У посібнику детально розглянуто приклади розв’язування типових оптимізаційних задач в скінченновимірних просторах як в аналітичній, так і в графічній формах. Крім того, представлено набір вправ для закріплення пройденого матеріалу. Основна частина посібника присвячена задачам лінійного та опуклого квадратичного програмування.

Метою посібника є ознайомлення студентів із методами пошуку оптимального розв’язку та набуття ними обчислювальних навиків розв’язування найбільш поширених задач лінійного та нелінійного програмування, їх практичної реалізації, яка досягається шляхом вивчення алгоритмів наступних методів:

- графічний метод розв’язування задач лінійного програмування;
- симплексний метод розв’язування задач лінійного програмування;
- метод штучного базису відшукання допустимого базисного розв’язку задачі лінійного програмування;
- двоїстий симплексний метод розв’язування задач лінійного програмування;
- метод потенціалів розв’язування транспортних задач;
- угорський метод та метод Мака розв’язування задач про призначення;
- методи Гоморі розв’язування цілочислових задач лінійного програмування;
- метод Дальтона-Ллевеліна розв’язування дискретної задачі лінійного програмування;
- розв’язування матричних ігор методами лінійного програмування;
- графічний метод розв’язування задачі дробово-лінійного програмування;
- розв’язування задачі дробово-лінійного програмування шляхом зведення її до задачі лінійного програмування;
- квадратичний симплексний метод розв’язування задачі опуклого квадратичного програмування.

ПРИКЛАДИ РОЗВ’ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

__Приклад 1.__ ***(Побудова математичної моделі задачі лінійного програмування).*** (Задача про оптимальний раціон). Для відгодівлі тварин використовують два види кормів A_1, A_2, що містять поживні речовини B_1, B_2, B_3. Кількість одиниць кожної поживної речовини, що міститься в одиниці кожного корму, мінімальна добова потреба у кожній поживній речовині при відгодівлі тварин, а також вартість одиниці корму наведено в таблиці 1.

Таблиця 1

Поживні речовини	**Види корму**		**Мінімальна добова потреба у поживних речовинах**
	A_1	A_2	
B_1	3	3	11
B_2	2	1	7
B_3	2	5	15
Вартість одиниці продукції	4	6	

Скласти математичну модель для визначення оптимального добового раціону для відгодівлі тварин, щоб задовольнити їх мінімальні добові потреби в поживних речовинах і при цьому загальна вартість раціону була б мінімальна.

Розв’язання. Нехай x_1 – кількість одиниць корму A_1, а x_2 – кількість одиниць корму A_2, що входять в раціон.

Зрозуміло, що $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$.

Тоді такий раціон буде містити поживних речовин:

B_1 – $3x_1 + 3x_2$ одиниць,

B_2 – $2x_1 + x_2$ одиниць,

B_3 – $2x_1 + 5x_2$ одиниць.

Враховуючи, що добова норма поживних речовин B_1, B_2, B_3 не може бути менша ніж 11, 7, 15 відповідно, то отримаємо систему нерівностей:

$$3x_1 + 3x_2 \geq 11,$$

$$2x_1 + x_2 \geq 7,$$

$$2x_1 + 5x_2 \geq 15.$$

Вартість x_1 одиниць корму A_1 становить $4x_1$, а x_2 одиниць корму A_2 – $6x_2$. Загальна вартість раціону буде $z = 4x_1 + 6x_2$.

Отже, математична модель задачі полягає у відшуканні такого вектора $x = (x_1, x_2)$, який надає мінімального значення функції

$$z = 4x_1 + 6x_2$$

за умов

$$3x_1 + 3x_2 \geq 11,$$

$$2x_1 + x_2 \geq 7,$$

$$2x_1 + 5x_2 \geq 15,$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$$

<u>Приклад 2</u> ***(Зведення задачі лінійного програмування до канонічної форми)***. Звести задачу лінійного програмування до канонічної форми:

знайти

$$\min z = 2x_1 + 3x_2 - x_3 - 7x_4 \tag{1}$$

за умов

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 4x_3 - 3x_4 \ge 9, \\ 5x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 3, \\ -x_1 - 5x_2 + x_3 - x_4 \ge -3, \end{aligned} \tag{2}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_3 \ge 0,\ x_4 \ge 0. \tag{3}$$

Розв'язання. Зауважимо, що $x_1 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0$, а на змінну x_2 не накладено жодних умов. Тому введемо заміну: $x_2 = x_2' - x_2''$, $x_2' \ge 0, x_2'' \ge 0$.

Задача (1)-(3) є задачею на відшукання мінімуму, а тому перейдемо до задачі відшукання максимуму функції: $-z = -2x_1 - 3x_2 + x_3 + 7x_4$.

Від лівої частини першого обмеження системи обмежень (2) віднімемо додаткову змінну $x_5 \ge 0$, третє обмеження помножимо на (-1) та до лівої частини додамо додаткову змінну $x_6 \ge 0$.

Одержимо задачу лінійного програмування, еквівалентну задачі (1)-(3), записану в канонічній формі:

знайти

$$\max(-z) = -2x_1 - 3x_2' + 3x_2'' + x_3 + 7x_4$$

за умов

$$\begin{gathered} 2x_1 - x_2' + x_2'' + 4x_3 - 3x_4 - x_5 = 9, \\ 5x_1 + 2x_2' - 2x_2'' - x_3 + 2x_4 = 3, \\ x_1 + 5x_2' - 5x_2'' - x_3 + x_4 + x_6 = 3, \\ x_1 \ge 0,\ x_2' \ge 0,\ x_2'' \ge 0,\ x_3 \ge 0,\ x_4 \ge 0,\ x_5 \ge 0,\ x_6 \ge 0. \end{gathered}$$

<u>Приклад 3</u>. ***(Графічний метод розв'язування задачі лінійного програмування).*** Графічним методом розв'язати таку задачу лінійного програмування:

знайти

$$\max(\min) z = x_1 - x_2 \tag{4}$$

за умов

$$\begin{gathered} -5x_1 + 3x_2 \geq -15, \\ x_1 - x_2 \geq 1, \\ x_1 + 2x_2 \geq 4, \\ 4x_1 + 7x_2 \leq 28, \end{gathered} \tag{5}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \tag{6}$$

Розв'язання. Проведемо на координатній площині x_1Ox_2 прямі: $-5x_1 + 3x_2 = -15$, $x_1 - x_2 = 1$, $x_1 + 2x_2 = 4$, $4x_1 + 7x_2 = 28$, які на рис. 1 позначені відповідно 1, 2, 3, 4. Кожна з цих прямих поділяє площину на дві півплощини. Визначимо, яка саме з півплощин визначається відповідною нерівністю. Оскільки точка $O(0,0)$ не належить жодній з прямих 1, 2, 3, 4, то підставляємо її координати у ліві частини нерівностей (5). Маємо:

$$\begin{gathered} -5 \cdot 0 + 3 \cdot 0 = 0 > -15\,; \\ 0 - 0 = 0 < 1; \\ 0 + 2 \cdot 0 = 0 < 4; \\ 4 \cdot 0 + 7 \cdot 0 < 28. \end{gathered}$$

Оскільки координати точки $O(0,0)$ задовольняють першу та четверту нерівності системи (5), то ці нерівності визначають ті півплощини, на які прямі 1 та 4 розділяють координатну площину x_1Ox_2, які містять точку $O(0,0)$.

Оскільки координати точки $O(0,0)$ не задовольняють другому та третьому обмеженням системи (5), то ці обмеження визначають ті півплощини, на які прямі 2 та 3 розділяють x_1Ox_2, які не містять точку $O(0,0)$.

Частина перетину знайдених півплощин, що міститься в першій чверті є чотирикутник з вершинами *A*, *B*, *C*, *D*.

Будуємо вектор $\overline{n}(1,-1)$ та лінію рівня l функції $z = x_1 - x_2$, яка перетинає чотирикутник *ABCD*. Будемо паралельно переміщати цю лінію у напрямку вектора $\overline{n}(1,-1)$ до тих пір, поки вона не стане опорною для *ABCD*.

Перетином такої опорної прямої і чотирикутника *ABCD* є точка A. Тому точка A є точкою, в якій функція $z = x_1 - x_2$ досягає на чотирикутнику *ABCD* свого найбільшого значення.

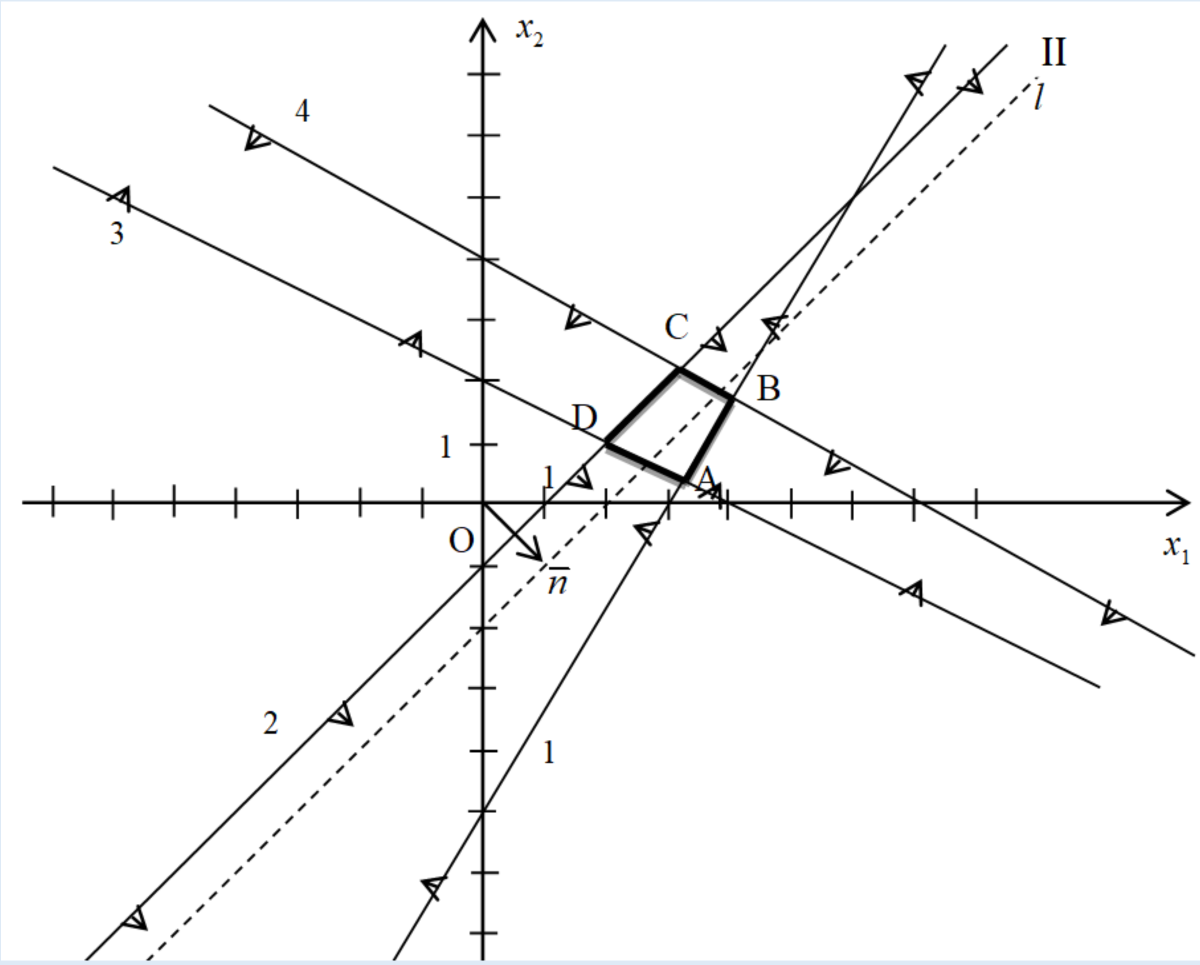


Рис. 1.

Оскільки точка A є перетином прямих 1 та 3, то для відшукання її координат розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} -5x_1 + 3x_2 = -15, \\ x_1 + 2x_2 = 4. \end{cases}$$

Розв'язком даної системи є $x_1 = \dfrac{42}{13}$, $x_2 = \dfrac{5}{13}$.

Отже, $A\left(\frac{42}{13},\frac{5}{13}\right)$, а $\max\left\{z=x_1-x_2:\text{за умов (5), (6)}\right\}=\frac{42}{13}-\frac{5}{13}=\frac{37}{13}$.

Будемо далі переміщати лінію рівня l у напрямку вектора $(-\vec{n})(-1,1)$ до тих пір, поки вона не стане опорною до чотирикутника *ABCD*.

Перетином такої опорної прямої і чотирикутника *ABCD* є відрізок *DC*. Тому цей відрізок і є множиною оптимальних розв'язків задачі $\min\left\{z=x_1-x_2:\text{за умов (5), (6)}\right\}$.

Для відшукання координат точки *D* розв'язуємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} x_1-x_2=1, \\ x_1+2x_2=4. \end{cases}$$

Розв'язком системи буде точка $D(2,1)$.

Для відшукання координат точки *C* розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} x_1-x_2=1, \\ 4x_1+7x_2=28. \end{cases}$$

Отримаємо точку $C\left(\frac{35}{11},\frac{24}{11}\right)$.

Відрізок

$$DC=\left\{(x_1,x_2):(x_1,x_2)=(1-\alpha)(2,1)+\alpha\left(\frac{35}{11},\frac{24}{11}\right),0\le\alpha\le1\right\}=$$

$$=\left\{(x_1,x_2):(x_1,x_2)=\left(2(1-\alpha)+\frac{35}{11}\alpha,(1-\alpha)+\frac{24}{11}\alpha\right)=\left(\frac{13}{11}\alpha+2,\frac{13}{11}\alpha+1\right),0\le\alpha\le1\right\}.$$

Наприклад, при $\alpha=\frac{1}{2}$ отримаємо точку $E\left(\frac{57}{22},\frac{35}{22}\right)$ відрізка *DC*, яка разом з точками *D*, *C* та іншими точками відрізка *DC* є оптимальним розв'язком задачі відшукання найменшого значення функції $z=x_1-x_2$ на чотирикутнику *ABCD*.

З урахуванням зазначеного вище знаходимо, що

$$\min\left\{z=x_1-x_2:\text{за умов (5), (6)}\right\}=2-1=1.$$

<u>Приклад 4</u> ***(Симплексний метод розв'язування задачі лінійного програмування).*** Розв'язати симплекс методом задачу лінійного програмування:

знайти

$$\min z = -x_1 + x_3 - x_4 \tag{7}$$

за умов

$$\begin{array}{c} 3x_1 + 4x_2 - x_3 + 7x_4 = 2, \\ -2x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 1, \end{array} \tag{8}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0, \tag{9}$$

якщо вектор $x^0 = (1,0,1,0)$ є допустимим базисним розв'язком задачі (7)-(9).

Розв'язання. Зведемо задачу (7)-(9) до канонічної форми:

знайти

$$\max(-z) = x_1 - x_3 + x_4 \tag{10}$$

за умов

$$\begin{array}{c} 3x_1 + 4x_2 - x_3 + 7x_4 = 2, \\ -2x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 1, \end{array} \tag{11}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0. \tag{12}$$

Для задачі (10)-(12) випишемо вектори умов:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix},\ A_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix},\ A_4 = \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Перевіримо, чи вектор $x^0 = (1,0,1,0)$ є допустимим розв'язком задачі (10)-(12): усі координати вектора x^0 невід'ємні, крім того,

$$\begin{array}{c} 3 \cdot 1 + 4 \cdot 0 - 1 + 7 \cdot 0 = 2, \\ -2 \cdot 1 + 3 \cdot 0 + 3 \cdot 1 - 4 \cdot 0 = 1. \end{array}$$

Отже, вектор $x^0 = (1,0,1,0)$ є допустимим розв'язком задачі(10)-(12).

Розглянемо вектори умов A_1, A_3, що відповідають додатнім координатам вектора x^0. Розглянемо рівність $\alpha_1 A_1 + \alpha_3 A_3 = 0$:

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\alpha_1 - \alpha_3 \\ -2\alpha_1 + 3\alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Звідси

$$\begin{cases} 3\alpha_1 - \alpha_3 = 0; \\ -2\alpha_1 + 3\alpha_3 = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_3 = 3\alpha_1; \\ -2\alpha_1 + 3 \cdot 3\alpha_1 = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_3 = 3\alpha_1; \\ \alpha_1 = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_3 = 0; \\ \alpha_1 = 0. \end{cases}$$

З урахування того, що $\alpha_1 = \alpha_3 = 0$, робимо висновок, що вектори умов A_1, A_3 є лінійно незалежними, а тому вектор x_0 є допустимим базисним розв'язком.

Для вектора x^0 змінні x_1, x_3 – базисні, а x_2, x_4 – небазисні. Виразимо вектори умов, що відповідають небазисним координатам через вектори умов, що відвідають базисним координатам:

$$A_2 = \alpha_{12} A_1 + \alpha_{32} A_3,$$

$$A_4 = \alpha_{14} A_1 + \alpha_{34} A_3.$$

Знайдемо коефіцієнти розкладу:

$$A_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \alpha_{12} A_1 + \alpha_{32} A_3 = \alpha_{12} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} + \alpha_{32} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\alpha_{12} - \alpha_{32} \\ -2\alpha_{12} + 3\alpha_{32} \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} 3\alpha_{12} - \alpha_{32} = 4; \\ -2\alpha_{12} + 3\alpha_{32} = 3; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_{12} = \dfrac{15}{7}; \\ \alpha_{32} = \dfrac{17}{7}. \end{cases}$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \end{pmatrix} = \alpha_{14} A_1 + \alpha_{34} A_3 = \alpha_{14} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} + \alpha_{34} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\alpha_{14} - \alpha_{34} \\ -2\alpha_{14} + 3\alpha_{34} \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} 3\alpha_{14} - \alpha_{34} = 7; \\ -2\alpha_{14} + 3\alpha_{34} = -4; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_{14} = \dfrac{17}{7}; \\ \alpha_{34} = \dfrac{2}{7}. \end{cases}$$

Заповнюємо симплексну таблицю (див. таблицю 2), що відповідає вектору x^0:

Таблиця 2

$c_{баз.}$	*Баз. зм.*	*Зн. баз. зм.*	$c_{небаз.}$ *і небаз. зм.*	
			0	1
			x_2	x_4
1	x_1	1	$\frac{15}{7}$	$\frac{17}{7}$
-1	x_3	1	$\boxed{\frac{17}{7}}$	$\frac{2}{7}$ ←
	$-z$	0	$-\frac{2}{7}$	$\frac{8}{7}$
			Δ_2 ↑	Δ_4

Обраховуємо $-z$, Δ_2, Δ_4:

$$-z = 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 = 0,$$

$$\Delta_2 = 1 \cdot \frac{15}{7} + (-1) \cdot \frac{17}{7} - 0 = -\frac{2}{7},$$

$$\Delta_4 = 1 \cdot \frac{17}{7} + (-1) \cdot \frac{2}{7} - 1 = \frac{8}{7}.$$

Симплекс-різниця $\Delta_2 < 0$ та стовпець, що їй відповідає містить додатні елементи, тому за допомогою кроку алгоритму симплексного методу переходимо до наступної таблиці. Стовпець, що відповідає симплекс-різниці $\Delta_2 = -\frac{2}{7}$ буде розв'язуючим стовпцем. Виділимо його стрілкою. Шукаємо мінімальне відношення значень базисних змінних до відповідних додатних елементів розв'язуючого стовпця: $\min\left\{1:\frac{15}{7};1:\frac{17}{7}\right\}=\frac{7}{17}$. Рядок, що відповідає знайденому відношенню (рядок, що відповідає змінній x_3), буде розв'язуючим, а елемент $\frac{17}{7}$, що стоїть на перетині розв'язуючого рядка та розв'язуючого стовпця є розв'язуючим елементом. Скориставшись правилами переходу до наступної симплекс-таблиці симплексного методу, отримуємо таблицю 3:

Таблиця 3

Баз. зм.	*Зн. баз. зм.*	*небаз. зм.*	
		x_3	x_4
x_1	$\frac{2}{17}$	$-\frac{15}{17}$	$\frac{37}{17}$
x_2	$\frac{7}{17}$	$\frac{7}{17}$	$\frac{2}{17}$
$-z$	$\frac{2}{17}$	$\frac{2}{17}$	$\frac{20}{17}$
		Δ_3	Δ_4

Оскільки в таблиці 3 усі симплексні різниці невід'ємні, то вектор $x^*=x^1=\left(\frac{2}{17},\frac{7}{17},0,0\right)$ буде оптимальним розв'язком задачі (10)-(12) і $\max(-z)=\frac{2}{17}$, а, отже, вектор $x^*=\left(\frac{2}{17},\frac{7}{17},0,0\right)$ є оптимальним розв'язком задачі (7)-(9) і $\min z=-\frac{2}{17}$.

<u>Приклад 5</u> ***(Симплексний метод розв'язування задачі лінійного програмування зі стандартним базисом).*** Симплексним методом розв'язати задачу лінійного програмування:

знайти

$$\max z = -2x_1 + x_2 + 7x_4 + 6x_5 \tag{13}$$

за умов

$$\begin{gathered} x_1 + 3x_4 + 4x_5 = 3, \\ x_2 + 6x_4 - 2x_5 = 7, \\ x_3 + 3x_4 + 7x_5 = 10, \end{gathered} \tag{14}$$

$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}. \tag{15}$$

Розв'язання. Випишемо вектори умов для задачі (13)-(15):

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ A_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ A_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix},\ A_5 = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, що вектор $x^0 = (3, 7, 10, 0, 0)$ є допустимим базисним розв'язком цієї задачі. Заповнюємо таблицю, що відповідає цьому вектору (табл. 4).

Таблиця 4

$c_{баз.}$	*Баз. зм.*	*Зн. баз. зм.*	$c_{небаз.}$ *і небаз. зм.*	
			7	6
			x_4	x_5
–2	x_1	3	3	$\boxed{4}$ ←
1	x_2	7	6	–2
0	x_3	10	3	7
	z	1	–7	–16
			Δ_4	Δ_5 ↑

Обраховуємо z, Δ_4, Δ_5:

$$z=(-2)\cdot 3+1\cdot 7+0\cdot 10=1,$$

$$\Delta_4=(-2)\cdot 3+1\cdot 6+0\cdot 3-7=-7,$$

$$\Delta_5=(-2)\cdot 4+1\cdot(-2)+0\cdot 7-6=-16.$$

З симплекс-таблиці 4 бачимо, що серед симплекс-різниць Δ_4, Δ_5 є від'ємні, тому переходимо до наступної симплекс-таблиці за допомогою алгоритму симплексного методу. Обираємо $\min\{-7;-16\}=-16$. Отже, стовпець, що відповідає симплекс-різниці $\Delta_5=-16$ буде розв'язуючим. Виділимо його стрілкою. Шукаємо мінімальне відношення значень базисних змінних до додатних елементів розв'язуючого стовпця, тобто $\min\{3:4;10:7\}=\dfrac{3}{4}$. Рядок, що відповідає знайденому відношенню, тобто рядок відповідний змінній x_1, буде розв'язуючим, а елемент 4, що стоїть на перетині розв'язуючого рядка та розв'язуючого стовпця є розв'язуючим елементом. Скориставшись правилами переходу до наступної симплекс-таблиці симплексного методу, отримуємо таблицю 5.

Таблиця 5

Баз. зм.	*Зн. баз. зм.*	*небаз. зм.*	
		x_4	x_1
x_5	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$
x_2	$\frac{17}{2}$	$\frac{15}{2}$	$\frac{1}{2}$
x_3	$\frac{19}{4}$	$-\frac{9}{4}$	$-\frac{7}{4}$
z	13	5	4
		Δ_4	Δ_1

Оскільки в таблиці 5 усі симплексні різниці невід'ємні, то вектор $x^* = x^1 = \left(0, \frac{17}{2}, \frac{19}{4}, 0, \frac{3}{4}\right)$ буде оптимальним розв'язком задачі (13)-(15), а 13 – оптимальним значенням цільової функції цієї задачі.

<u>Приклад 6</u> ***(Метод штучного базису відшукання допустимого базисного розв'язку задачі лінійного програмування).*** Розв'язати задачу лінійного програмування, знайшовши перший допустимий базисний розв'язок методом штучного базису:

знайти

$$\min z = 4x_1 - x_2 + x_3 + x_4 \tag{16}$$

за умов

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 4, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 3, \end{aligned} \tag{17}$$

$$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,4}. \tag{18}$$

Розв'язання. Зведемо задачу (16)-(18) до канонічної форми:

знайти

$$\max(-z) = -4x_1 + x_2 - x_3 - x_4 \tag{19}$$

за умов

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 4, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 3, \end{aligned} \tag{20}$$

$$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,4}. \tag{21}$$

Випишемо вектори умов для задачі (19)-(21):

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix},\ A_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix},\ A_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Оскільки серед векторів $A_j,\ j = \overline{1,4}$, немає двох одиничних лінійно незалежних векторів, то знайдемо допустимий базисний розв'язок задачі (19)-(21) методом штучного базису. Для цього складемо допоміжну задачу лінійного програмування таким чином: до лівої частини першого обмеження системи (20) додаємо штучну змінну x_5, а до лівої частини другого обмеження – штучну змінну x_6 ($x_5 \geq 0, x_6 \geq 0$) та розв'яжемо наступну задачу лінійного програмування:

знайти

$$\max \omega = -x_5 - x_6 \tag{22}$$

за умов

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 4, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + x_6 = 3, \end{aligned} \tag{23}$$

$$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,6}. \tag{24}$$

Вектор $x^0 = (0,0,0,0,4,3)$ – допустимий базисний розв'язок допоміжної задачі (22)-(24). Заповнюємо симплекс-таблицю, що відповідає вектору x^0 (табл. 6).

Таблиця 6

$c_{баз.}$	*Баз. зм.*	*Зн. баз. зм.*	$c_{небаз.}$ *і небаз. зм.*			
			0	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4
–1	x_5	4	1	2	–1	1
–1	x_6	3	$\boxed{2}$	–1	2	–1
	ω	–7	–3	–1	–1	0
			Δ_1	Δ_2	Δ_3	Δ_4

Обраховуємо ω, Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4:

$$\omega = (-1)\cdot 4 + (-1)\cdot 3 = -7,$$

$$\Delta_1 = (-1)\cdot 1 + (-1)\cdot 2 - 0 = -3,$$

$$\Delta_2 = (-1)\cdot 2 + (-1)\cdot(-1) - 0 = -1,$$

$$\Delta_3 = (-1)\cdot(-1) + (-1)\cdot 2 - 0 = -1,$$

$$\Delta_4 = (-1)\cdot 1 + (-1)\cdot(-1) - 0 = 0.$$

Оскільки серед симплекс-різниць Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4 є від'ємні, то переходимо до наступної симплекс-таблиці за допомогою симплекс-методу. Стовпець, що відповідає найменшій серед від'ємних симплексних різниць $\Delta_1 = -3$ буде розв'язуючим стовпцем. Шукаємо $\min\{4:1;3:2\} = \min\left\{4;\frac{3}{2}\right\} = \frac{3}{2}$. Отже, рядок, що відповідає змінній x_6 – розв'язуючий. Елемент 2, що є перетином розв'язуючого рядка та розв'язуючого стовпця, – розв'язуючий елемент. Переходимо до наступної симплекс-таблиці (табл. 7).

Таблиця 7

Баз. зм.	*Зн. баз. зм.*	*небаз. зм.*			
		x_6	x_2	x_3	x_4
x_5	$\frac{5}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\boxed{\frac{5}{2}}$	-2	$\frac{3}{2}$
x_1	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$
ω	$-\frac{5}{2}$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{5}{2}$	2	$-\frac{3}{2}$
		Δ_6	Δ_2	Δ_3	Δ_4

Оскільки серед симплексних різниць Δ_6, Δ_2, Δ_3, Δ_4 є від'ємні, то вектор $x^1 = \left(\frac{3}{2},0,0,0,\frac{5}{2},0\right)$ не є оптимальним розв'язком задачі (22)-(24). Стовпець, що відповідає найменшій від'ємній симплекс-різниці $\Delta_2 = -\frac{5}{2}$ буде розв'язуючим стовпцем. Рядок, що відповідає змінній x_5 є розв'язуючим рядком (оскільки розв'язуючий стовпець містить один додатний елемент $\frac{5}{2}$), а елемент $\frac{5}{2}$, що є перетином розв'язуючого рядка та розв'язуючого стовпця – розв'язуючий елемент. Переходимо до наступної симплекс-таблиці (табл. 8).

Таблиця 8

Баз. зм.	*Зн. баз. зм.*	*небаз. зм.*			
		x_6	x_5	x_3	x_4
x_2	1	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$-\frac{4}{5}$	$\frac{3}{5}$
x_1	2	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$-\frac{1}{5}$
ω	0	1	1	0	0
		Δ_6	Δ_5	Δ_3	Δ_4

Оскільки усі симплекс-різниці невід'ємні, то вектор $x^2 = (2,1,0,0,0,0)$ буде оптимальним розв'язком допоміжної задачі (22)-(24). Оскільки штучні змінні x_5, x_6 рівні нулю, то вектор $\tilde{x}^0 = (2,1,0,0)$ є допустимим базисним розв'язком задачі (19)-(21).

Перейдемо до розв'язання задачі (19)-(21). Скористаємося таблицею 8. Викреслимо стовпці, що відповідають штучним змінним x_5, x_6, і перерахуємо симплексні різниці та значення цільової функції $(-z) = -4x_1 + x_2 - x_3 - x_4$ (табл. 9).

Таблиця 9

$c_{баз.}$	*Баз. зм*	*Зн. баз. зм.*	$c_{небаз.}$ *і небаз. зм.*	
			–1	–1
			x_3	x_4
1	x_2	1	$-\frac{4}{5}$	$\frac{3}{5}$
–4	x_1	2	$\boxed{\frac{3}{5}}$	$-\frac{1}{5}$ ←

Продовження таблиці 9

	$-z$	-7	$-\frac{11}{5}$	$\frac{12}{5}$
			$\tilde{\Delta}_3$	$\tilde{\Delta}_4$

Обраховуємо $-z$, $\tilde{\Delta}_3$, $\tilde{\Delta}_4$:

$$-z = 1\cdot 1 + (-4)\cdot 2 = -7,$$

$$\tilde{\Delta}_3 = 1\cdot\left(-\frac{4}{5}\right) + (-4)\cdot\frac{3}{5} - (-1) = -\frac{11}{5},$$

$$\tilde{\Delta}_4 = 1\cdot\frac{3}{5} + (-4)\cdot\left(-\frac{1}{5}\right) - (-1) = \frac{12}{5}.$$

Оскільки серед симплекс-різниць є від'ємна, то вектор $\tilde{x}^0 = (2,1,0,0)$ не є оптимальним розв'язком для задачі (19)-(21), тому переходимо до наступної симплекс-таблиці (табл. 10).

Таблиця 10

Баз. зм.	*Зн. баз. зм.*	*небаз. зм.*	
		x_1	x_4
x_2	$\frac{11}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{1}{3}$
x_3	$\frac{10}{3}$	$\frac{5}{3}$	$-\frac{1}{3}$
z	$\frac{1}{3}$	$\frac{11}{3}$	$\frac{5}{3}$
		$\tilde{\Delta}_1$	$\tilde{\Delta}_4$

Оскільки симплекс-різниці в останній симплекс-таблиці невід'ємні, то $\tilde{x}^1 = \left(0, \frac{11}{3}, \frac{10}{3}, 0\right)$ є оптимальним розв'язком задачі (19)-(21), а, отже, і оптимальним для задачі (16)-(18). Оскільки $\max(-z) = \frac{1}{3}$, то $\min z = -\frac{1}{3}$.

<u>Приклад 7</u> ***(Двоїсті задачі лінійного програмування).*** До наведеної задачі лінійного програмування записати двоїсту, знайти оптимальний розв'язок однієї з пар двоїстих задач та за цим розв'язком визначити оптимальний розв'язок іншої задачі:

знайти

$$\min z = 6x_1 - 5x_2 \tag{25}$$

за умов

$$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 &\le 3, \\ 5x_1 + 6x_2 &\le 7, \\ x_1 - 2x_2 &\le 4, \end{aligned} \tag{26}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \tag{27}$$

Розв'язання. Зведемо задачу (25)-(27) до канонічної форми:

знайти

$$\max(-z) = -6x_1 + 5x_2 \tag{28}$$

за умов

$$\begin{array}{l} 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 3, \\ 5x_1 + 6x_2 + x_4 = 7, \\ x_1 - 2x_2 + x_5 = 4, \end{array} \left\| \begin{array}{l} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{array} \right. \tag{29}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0, x_5 \ge 0. \tag{30}$$

Двоїстою до задачі (28)-(30) буде задача:

знайти

$$\min \omega = 3y_1 + 7y_2 + 4y_3 \tag{31}$$

за умов

$$
\begin{aligned}
3y_1 + 5y_2 + y_3 &\geq -6,\\
4y_1 + 6y_2 - 2y_3 &\geq 5,\\
y_1 &\geq 0,\\
y_2 &\geq 0,\\
y_3 &\geq 0.
\end{aligned} \tag{32}
$$

Розв'яжемо задачу (28)-(30). Вектор $x^0 = (0,0,3,7,4)$ є допустимим базисним розв'язком для цієї задачі. Заповнимо симплекс-таблицю, що відповідає x^0 (табл. 11).

Таблиця 11

$c_{баз.}$	*Баз. зм.*	*Зн. баз. зм.*	$c_{небаз.}$ *і небаз. зм.*	
			-6	5
			x_1	x_2
0	x_3	3	3	$\boxed{4}$
0	x_4	7	5	6
0	x_5	4	1	-2
	$-z$	0	6	-5
			Δ_1	Δ_2

Обраховуємо $-z$, Δ_4, Δ_5:

$$-z = 0 \cdot 3 + 0 \cdot 7 + 0 \cdot 4 = 0,$$

$$\Delta_1 = 0 \cdot 3 + 0 \cdot 5 + 0 \cdot 1 - (-6) = 6,$$

$$\Delta_2 = 0 \cdot 4 + 0 \cdot 6 + 0 \cdot (-2) - 5 = -5.$$

Оскільки $\Delta_2 < 0$, то вектор x^0 не є оптимальним розв'язком задачі (28)-(30), тому переходимо до наступної симплекс-таблиці. Стовпець, що відповідає $\Delta_2 = -5$ буде розв'язуючим. Шукаємо мінімальне відношення значень базисних змінних до додатних елементів розв'язуючого стовпця, тобто $\min\{3:4, 7:6\} = \left\{\frac{3}{4}, \frac{7}{6}\right\} = \frac{3}{4}$. Рядок, що відповідає змінній x_3, буде розв'язуючим, а елемент 4, що стоїть на перетині розв'язуючого рядка та розв'язуючого стовпця є розв'язуючим елементом. Переходимо до наступної симплекс-таблиці (табл. 12).

Таблиця 12

Баз. зм.	*Зн. баз. зм.*	*небаз. зм.*	
		x_1	x_3
x_2	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$
x_4	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$
x_5	$\frac{11}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$
	$\frac{15}{4}$	$\frac{39}{4}$	$\frac{5}{4}$
	z	Δ_1	Δ_3

Оскільки $\Delta_1 = \frac{39}{4} > 0$, $\Delta_3 = \frac{5}{4} > 0$, то вектор $x^1 = \left(0, \frac{3}{4}, 0, \frac{5}{2}, \frac{11}{2}\right)$ буде оптимальним розв'язком задачі (28)-(30), а вектор $x^* = \left(0, \frac{3}{4}\right)$ – оптимальним для задачі (25)-(27) та $\max(-z) = \frac{15}{4}$, $\min z = -\frac{15}{4}$.

Згідно з другою теоремою двоїстості для вектора $x^1 = \left(0, \frac{3}{4}, 0, \frac{5}{2}, \frac{11}{2}\right)$ та оптимального розв’язку $y^* = \left(y_1^*, y_2^*, y_3^*\right)$ двоїстої задачі (31), (32) будуть виконуватися рівності:

$$\left(3y_1^* + 5y_2^* + y_3^* + 6\right) \cdot 0 = 0,$$
$$\left(4y_1^* + 6y_2^* - 2y_3^* - 5\right) \cdot \frac{3}{4} = 0,$$

$$y_1^* \cdot 0 = 0,$$
$$y_2^* \cdot \frac{5}{2} = 0,$$
$$y_3^* \cdot \frac{11}{2} = 0.$$

Звідси маємо, що:

$$\begin{cases} 4y_1^* + 6y_2^* - 2y_3^* - 5 = 0, \\ y_2^* = 0, \\ y_3^* = 0. \end{cases}$$

Розв’язавши цю систему рівнянь, отримаємо, що $y^* = \left(\frac{5}{4}, 0, 0\right)$ – оптимальний розв’язок задачі (31)-(32), а $\min \omega = \frac{15}{4}$.

<u>Приклад 8</u> ***(Двоїстий симплексний метод розв'язування задачі лінійного програмування).*** Розв'язати задачу лінійного програмування двоїстим симплекс-методом:

знайти

$$\min z = 6x_1 + 4x_2 \tag{33}$$

за умов

$$\begin{aligned} 4x_1 + 2x_2 &\geq 7, \\ x_1 + 4x_2 &\geq 6, \end{aligned} \tag{34}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \tag{35}$$

Розв'язання. Зведемо задачу (33)-(35) до канонічної форми:

знайти

$$\max(-z) = -6x_1 - 4x_2 \tag{36}$$

за умов

$$\begin{aligned} 4x_1 + 2x_2 - x_3 &= 7, \\ x_1 + 4x_2 - x_4 &= 6, \end{aligned} \tag{37}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0. \tag{38}$$

Запишемо задачу (36)-(38) у еквівалентному вигляді:

знайти

$$\max(-z) = -6x_1 - 4x_2 \tag{39}$$

за умов

$$\begin{aligned} -4x_1 - 2x_2 + x_3 &= -7, \\ -x_1 - 4x_2 + x_4 &= -6, \end{aligned} \tag{40}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0. \tag{41}$$

Вектор $x^0=(0,0,-7,-6)$ буде псевдопланом для задачі (36)-(38). Заповнюємо симплекс-таблицю, що відповідає x^0 (табл. 13).

Таблиця 13

$c_{баз.}$	*Баз. зм.*	*Зн. баз. зм.*	$c_{небаз.}$ *і небаз. зм.*	
			–6	–4
			x_1	x_2
0	x_3	–7	$\boxed{-4}$	–2
0	x_4	–6	–1	–4
	$-z$	0	6	4
			Δ_1	Δ_2

Обраховуємо $-z$, Δ_1, Δ_2:

$$-z=0\cdot(-7)+0\cdot(-6)=0,$$

$$\Delta_1=0\cdot(-4)+0\cdot(-1)-(-6)=6,$$

$$\Delta_2=0\cdot(-2)+0\cdot(-4)-(-4)=4.$$

Оскільки всі симплексні різниці невід'ємні та серед компонентів псевдоплану $x^0=(0,0,-7,-6)$ є від'ємні, то вибираємо найменшу серед від'ємних координат вектора x^0: $\min\{-7;-6\}=-7$. Рядок, що відповідає знайденій координаті буде розв'язуючим рядком – його відділяємо стрілкою. Знаходимо найбільше відношення серед відношень симплексних різниць до відповідних від'ємних елементів розв'язуючого рядка:

$$\max\{6:(-4),4:(-2)\}=\max\left\{-\frac{6}{4};-\frac{4}{2}\right\}=\max\left\{-\frac{3}{2};-2\right\}=-\frac{3}{2}.$$

Стовпець, що відповідає знайденому відношенню – розв'язуючий стовпець, його відділяємо стрілкою.

На перетині розв'язуючого рядка та стовпця знаходиться розв'язуючий елемент – «–4», який виділимо прямокутником.

Переходимо до другої симплекс-таблиці (правила переходу до наступної симплекс-таблиці такі ж як і в симплексному методі) (табл. 14).

Таблиця 14

Баз. зм.	*Зн. баз. зм.*	*небаз. зм.*	
		x_3	x_2
x_1	$\frac{7}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
x_4	$-\frac{17}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\boxed{-\frac{7}{2}}$ ←
$-z$	$-\frac{21}{2}$	$\frac{3}{2}$	1
		Δ_3	Δ_2 ↑

Псевдоплан $x^1 = \left(\frac{7}{4}, 0, 0, -\frac{17}{4}\right)$ містить від'ємну компоненту, тому не є оптимальним розв'язком задачі (36)-(38). Здійснимо черговий крок двоїстого симплекс-методу. Рядок, що відповідає координаті $x_4 = -\frac{17}{4}$ буде розв'язуючим. Знаходимо

$$\max\left\{\frac{3}{2} : \left(-\frac{1}{4}\right), 1 : \left(-\frac{7}{2}\right)\right\} = \max\left\{-6, -\frac{2}{7}\right\} = -\frac{2}{7}.$$

Стовпець, що відповідає знайденому найбільшому відношенню – розв'язуючий стовпець, а $-\frac{7}{2}$ – розв'язуючий елемент. Переходимо до наступної симплексної таблиці (табл. 15).

Таблиця 15

Баз. зм.	*Зн. баз. зм.*	*небаз. зм.*	
		x_3	x_4
x_1	$\frac{8}{7}$	$-\frac{2}{7}$	$\frac{1}{7}$
x_2	$\frac{17}{14}$	$\frac{1}{14}$	$-\frac{2}{7}$
$-z$	$-\frac{82}{7}$	$\frac{10}{7}$	$\frac{2}{7}$
		Δ_3	Δ_4

Псевдоплан $x^2 = \left(\frac{8}{7}, \frac{17}{14}, 0, 0\right)$ не містить від'ємних координат, а, отже, є оптимальним розв'язком задачі (36)-(38) і $\max(-z) = -\frac{82}{7}$.

Звідси, отримаємо, що $x^* = \left(\frac{8}{7}, \frac{17}{14}\right)$ – оптимальний розв'язок задачі (33)-(35), а $\min z = \frac{82}{7}$.

<u>Приклад 9</u> ***(Метод потенціалів розв'язування збалансованої транспортної задачі).*** Розв'язати транспортну задачу, що визначається таблицею 16.

Таблиця 16

$a_i \backslash b_j$	80	10	10	60
50	1	2	5	1
70	7	9	4	1
40	5	4	3	2

Розв'язання. Перевіримо умову балансу: $50+70+40=160$, $80+10+10+60=160$. Отже, транспортна задача збалансована.

1. Розв'яжемо цю задачу, знайшовши її допустимий базисний розв'язок методом північно-західного кута.

Позначимо через x_{ij} $(i=\overline{1,3},\ j=\overline{1,4})$ – кількість продукції, що планується перевезти з *i*-го пункту виробництва в *j*-ий пункт споживання.

Розглянемо клітинку, розташовану якнайдалі на північному заході, тобто клітинку (1,1). Покладемо $x_{11}^0=\min\{50;80\}=50$. Оскільки запаси першого пункту виробництва вичерпані, то покладемо $x_{12}^0=x_{13}^0=x_{14}^0=0$ та вилучаємо з розгляду клітинки, що відповідають змінним x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14} (див. табл. 17). Зрозуміло, що потреби першого споживача задоволенні в обсязі 50 од., а тому надалі його потреба в продукції буде становити 80 – 50 = 30 од.

Розглянемо клітинку (2,1), яка знаходиться якнайдалі на північному заході новоутвореної таблиці. Покладемо $x_{21}^0=\min\{70;30\}=30$. Потреби першого споживача задоволенні повністю, тому покладемо $x_{31}^0 = 0$ та клітинки, що відповідають змінним x_{21}, x_{31}, вилучаємо з розгляду таблиці, яку отримали на другому кроці (див. табл. 17). З другого пункту виробництва вивезли 30 од. продукції, а тому там залишилося 70 – 30 = 40 од. продукції.

Розглянемо клітинку (2,2), розташовану якнайдалі на північному заході таблиці, яка утворилась після перших двох кроків. Покладемо $x_{22}^0 = \min\{40;10\} = 10$. Оскільки потреби другого споживача задоволені, то $x_{32}^0 = 0$, а клітинку, що відповідає змінній x_{32}, вилучаємо з розгляду (див. табл. 17). Запаси другого пункту виробництва будуть становити 40 – 10 = 30 од.

Розглянемо клітинку (2,3), розташовану якнайдалі на північному заході таблиці, яка утворилась після перших трьох кроків. Покладемо $x_{23}^0 = \min\{30;10\} = 10$. Оскільки потреби третього пункту споживання задоволені, то покладаємо $x_{33}^0 = 0$ і клітинки, що відповідають змінним x_{23}, x_{33}, вилучаємо з розгляду (див. табл. 17). Запаси другого пункту виробництва будуть становити 30 – 10 = 20 од.

Розглянемо клітинку (2,4), яка розташована якнайдалі на північному заході таблиці, що утворилась після перших чотирьох кроків. Покладемо $x_{24}^0 = \min\{20;60\} = 20$. Запаси другого пункту виробництва вичерпані, а потреби третього пункту споживання зменшилися на 20 од. і становлять 60 – 20 = 40 од.

Розглянемо незаповнену клітинку (3,4). Покладемо $x_{34}^0 = 40$. Запаси усіх пунктів виробництва вичерпані та потреби пунктів споживання задоволені (див. табл. 17).

Вектор $x^0 = (50,0,0,0,30,10,10,20,0,0,0,40)$ – невироджений допустимий базисний розв’язок транспортної задачі заданої таблицею 17.

Таблиця 17

a_i \ b_j	80	10	10	60	
50	1 50	2 0	5 0	1 0	$u_1 = 0$
70	7 30	9 10	4 10	1 20	$u_2 = 6$
40	5 0	4 0	3 0	2 40	$u_3 = 7$
	$v_1 = 1$	$v_2 = 3$	$v_3 = -2$	$v_4 = -5$	

Для дослідження базисного розв'язку x^0 на оптимальність складаємо систему рівнянь:

$$u_1 + v_1 = 1;\ u_2 + v_3 = 4;$$

$$u_2 + v_1 = 7;\ u_2 + v_4 = 1;$$

$$u_2 + v_2 = 9;\ u_3 + v_4 = 2.$$

Взявши $u_1 = 0$, знаходимо послідовно $v_1 = 1$, $u_2 = 6$, $v_2 = 3$, $v_3 = -2$; $v_4 = -5$; $u_3 = 7$.

Маємо далі, що

$$\Delta_{12} = u_1 + v_2 - c_{12} = 0 + 3 - 2 = 1,$$

$$\Delta_{13} = u_1 + v_3 - c_{13} = 0 - 2 - 5 = -7,$$

$$\Delta_{14} = u_1 + v_4 - c_{14} = 0 - 5 - 1 = -6,$$

$$\Delta_{31} = u_3 + v_1 - c_{31} = 7 + 1 - 5 = 3,$$

$$\Delta_{32} = u_3 + v_2 - c_{32} = 7 + 3 - 4 = 6,$$

$$\Delta_{33} = u_3 + v_3 - c_{33} = 7 - 2 - 3 = 2.$$

Бачимо, що серед Δ_{ij} є більші нуля. Тому перший базисний розв'язок x^0 не є оптимальним. Знаходимо $\max\limits_{\substack{1 \le i \le 3, \\ 1 \le j \le 4}} \Delta_{ij} = \Delta_{32} = 6$. Тоді покладемо $x_{32}^1 = \theta \ge 0$.

Щоб не порушити умову збалансованості будуємо цикл, який має вигляд: (3,2), (3,4), (2,4), (2,2). У клітинках (3,2) і (2,4) додаємо θ, а у клітинках (3,4) та (2,2) віднімаємо θ (див. табл. 18).

Таблиця 18

a_i \ b_j	80	10	10	60
50	1 50	2	5	1
70	7 30	9 $10 - \theta$	4 10	1 $20 + \theta$
40	5	4 θ	3	2 $40 - \theta$

Покладемо θ рівне найменшому з чисел, від яких воно віднімається: $\theta = \min\{10, 40\} = 10 = x_{22}^0$. Тоді отримаємо, що $x_{22}^1 = 0$, $x_{24}^1 = 30$, $x_{32}^1 = 10$, $x_{34}^1 = 30$. Елементи усіх інших клітинок, що не входили до циклу, перенесемо без змін у наступну таблицю. Отримаємо новий базисний допустимий розв'язок $x^1 = (50, 0, 0, 0, 30, 0, 10, 30, 0, 10, 0, 30)$. Для цього розв'язку змінна x_{22} стала небазисною, а змінна x_{32} – базисною.

Занесемо дані про новий базисний розв'язок у наступну таблицю (див. табл. 19).

Таблиця 19

b_j / a_i	80	10	10	60	
50	1 50	2	5	1	$u_1 = 0$
70	7 $30 - \theta$	9	4 10	1 $30 + \theta$	$u_2 = 6$
40	5 θ	4 10	3	2 $30 - \theta$	$u_3 = 7$
	$v_1 = 1$	$v_2 = -3$	$v_3 = -2$	$v_4 = -5$	

Тепер уже досліджуємо на оптимальність базисний розв'язок x^1. Для цього складаємо систему рівнянь типу $u_i + v_j = c_{ij}$, які відповідають базисним змінним цього розв'язку:

$$u_1 + v_1 = 1;\ u_2 + v_4 = 1;$$

$$u_2 + v_1 = 7;\ u_3 + v_2 = 4;$$

$$u_2 + v_3 = 4;\ u_3 + v_4 = 2.$$

Взявши $u_1 = 0$, знаходимо послідовно $v_1 = 1$, $u_2 = 6$, $v_3 = -2$, $v_4 = -5$, $u_3 = 7$, $v_2 = -3$.

Маємо далі, що

$$\Delta_{12} = u_1 + v_2 - c_{12} = 0 - 3 - 2 = -5,$$

$$\Delta_{13} = u_1 + v_3 - c_{13} = 0 + (-2) - 5 = -7,$$

$$\Delta_{14} = u_1 + v_4 - c_{14} = 0 - 5 - 1 = -6,$$

$$\Delta_{22} = u_2 + v_2 - c_{22} = 6 - 3 - 9 = -6,$$

$$\Delta_{31} = u_3 + v_1 - c_{31} = 7 + 1 - 5 = 3,$$

$$\Delta_{33} = u_3 + v_3 - c_{33} = 7 - 2 - 3 = 2\,.$$

Знаходимо $\max\limits_{\substack{1 \le i \le 3,\\ 1 \le j \le 4}} \Delta_{ij} = \Delta_{31} = 3$. Тоді покладемо $x_{31}^2 = \theta$. Будуємо цикл: (3,1), (3,4), (2,4), (2,1). Знаходимо θ: $\theta = \min\{30, 30\} = 30$; оскільки при переході до наступного допустимого базисного розв'язку змінні $x_{21}^2 = 0$ та $x_{34}^2 = 0$, то з базису виводимо змінну, що міститься в клітинці з більшою вартістю, тобто змінну x_{21}^2 та знаходимо решту координат базисного допустимого розв'язку x^2. Отримаємо, що $x^2 = (50, 0, 0, 0, 0, 0, 10, 60, 30, 10, 0, 0)$ (див. табл. 20).

Таблиця 20

b_j / a_i	80	10	10	60	
50	1 50	2	5	1	$u_1 = 0$
70	7	9	4 $10 - \theta$	1 $60 + \theta$	$u_2 = 3$
40	5 30	4 10	3 θ	2 $0 - \theta$	$u_3 = 4$
	$v_1 = 1$	$v_2 = 0$	$v_3 = 1$	$v_4 = -2$	

Досліджуємо базисний розв'язок x^2 на оптимальність. Для цього складаємо систему рівнянь типу $u_i + v_j = c_{ij}$, які відповідають базисним змінним x_{11}, x_{23}, x_{24}, x_{31}, x_{32}, x_{34} цього розв'язку:

$$u_1 + v_1 = 1;\; u_3 + v_1 = 5;$$

$$u_2 + v_3 = 4;\; u_3 + v_2 = 4;$$

$$u_2 + v_4 = 1;\; u_3 + v_4 = 2\,.$$

Взявши $u_1 = 0$, знаходимо послідовно $v_1 = 1$, $u_3 = 4$, $v_2 = 0$, $v_4 = -2$, $u_2 = 3$, $v_3 = 1$.

Маємо далі, що

$$\Delta_{12} = u_1 + v_2 - c_{12} = 0 - 0 - 2 = -2\,,$$

$$\Delta_{13} = u_1 + v_3 - c_{13} = 0 + 1 - 5 = -4\,,$$

$$\Delta_{14} = u_1 + v_4 - c_{14} = 0 - 2 - 1 = -3\,,$$

$$\Delta_{21} = u_2 + v_1 - c_{21} = 3 + 1 - 7 = -3\,,$$

$$\Delta_{22} = u_2 + v_2 - c_{22} = 3 + 0 - 9 = -6\,,$$

$$\Delta_{33} = u_3 + v_3 - c_{33} = 4 + 1 - 3 = 2\,.$$

Серед симплекс різниць тільки $\Delta_{33} > 0$. Покладемо $x_{33}^3 = \theta$. Будуємо цикл: (3,3), (3,4), (2,4), (2,3). З таблиці знаходимо $\theta = \min\{0,10\} = 0$. Тоді змінну x_{34} виводимо з базису, а змінну x_{33} вводимо в базис. Отже, $x^3 = (50,0,0,0,0,0,10,60,30,10,0,0)$ (див. табл. 21).

Таблиця 21

b_j / a_i	80	10	10	60	
50	1 50	2	5	1	$u_1 = 0$
70	7	9	4 10	1 60	$u_2 = 5$
40	5 30	4 10	3 0	2	$u_3 = 4$
	$v_1 = 1$	$v_2 = 0$	$v_3 = -1$	$v_4 = -4$	

Базисними змінними для x^3 будуть: x_{11}, x_{23}, x_{24}, x_{31}, x_{32}, x_{33}.

Досліджуємо базисний розв'язок x^3 на оптимальність.

$$u_1 + v_1 = 1;\ u_3 + v_1 = 5;$$

$$u_2 + v_3 = 4;\ u_3 + v_2 = 4;$$

$$u_2 + v_4 = 1;\ u_3 + v_3 = 3.$$

Взявши $u_1 = 0$, знаходимо $v_1 = 1$, $u_3 = 4$, $v_2 = 0$, $v_3 = -1$, $u_2 = 5$, $v_4 = -4$.

Обраховуємо симплекс-різниці:

$$\Delta_{12} = u_1 + v_2 - c_{12} = 0 - 0 - 2 = -2,$$

$$\Delta_{13} = u_1 + v_3 - c_{13} = 0 - 1 - 5 = -6,$$

$$\Delta_{14} = u_1 + v_4 - c_{14} = 0 - 4 - 1 = -5,$$

$$\Delta_{21} = u_2 + v_1 - c_{21} = 5 + 1 - 7 = -1,$$

$$\Delta_{22} = u_2 + v_2 - c_{22} = 5 + 0 - 9 = -4,$$

$$\Delta_{34} = u_3 + v_4 - c_{34} = 4 - 4 - 2 = -2.$$

Оскільки усі симплекс-різниці недодатні, то вектор $x^3 = (50;0;0;0;0;0;10;60;30;10;0;0)$ є оптимальним розв'язком заданої транспортної задачі і $\min z = 50\cdot 1 + 10\cdot 4 + 60\cdot 1 + 30\cdot 5 + 10\cdot 4 = 340$.

Розв'яжемо транспортну задачу, інформація про яку задана в таблиці 16, знайшовши її допустимий базисний розв'язок за допомогою методу мінімальної вартості. Знаходимо клітинку, що містить мінімальну вартість перевезення: (1,1), (1,4), (2,4). Обираємо довільну з цих клітинок. Розглянемо клітинку (1,1). Покладемо $x_{11}^0 = \min\{50;80\} = 50$. Оскільки запаси першого пункту виробництва вичерпані, то покладемо $x_{12}^0 = x_{13}^0 = x_{14}^0 = 0$ і клітинки, що відповідають змінним x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14} вилучаємо з розгляду. Потреби першого споживача зменшаться на 50 од. і будуть становити 80 – 50 = 30 (див. табл. 22).

Серед клітинок, що залишилися обираємо ту, що відповідає найменшій вартості перевезення – (2,4). Покладемо $x_{24}^0 = \min\{70;60\} = 60$. Оскільки потреби четвертого споживача задоволені, то покладаємо $x_{34}^0 = 0$ і клітинки, що відповідають змінним x_{24}, x_{34} вилучаємо з розгляду. Запаси другого пункту будуть становити 70 – 60 = 10 од. (див. табл. 22).

Серед клітинок, що залишилися обираємо ту, що відповідають найменшій вартості перевезення – (3,3). Покладемо $x_{33}^0 = \min\{40;10\} = 10$. Оскільки потреби третього споживача задоволенні, то покладаємо $x_{23}^0 = 0$, а клітинки, що відповідають змінним x_{23}, x_{33} вилучаємо з розгляду. Кількість одиниць продукції у третьому пункті виробництва становить 40 – 10 = 30 од. (див. табл. 22).

Серед клітинок, що залишилися обираємо клітинку, що відповідає найменшій вартості перевезення – (3,2). Покладемо $x_{32}^0 = \min\{30;10\} = 10$. Потреби другого споживача задоволенні, тому покладаємо $x_{22}^0 = 0$ і клітинки, що відповідають змінним x_{22}, x_{32} вилучаємо з розгляду. Кількість одиниць продукції, що залишається у третього постачальника буде становити 30 – 10 = 20 од. (див. табл. 22).

Серед клітинок, що залишилися обираємо клітинку, що відповідає найменшій вартості перевезення – (3,1). Покладемо $x_{31}^0 = \min\{20;30\} = 20$. Перший пункт споживання ще потребує 30 – 20 = 10 од. продукції (див. табл. 22).

Покладемо $x_{21}^0 = 10$. Запаси усіх пунктів виробництва вичерпані та потреби пунктів споживання задоволені (див. табл. 22).

Таблиця 22

b_j / a_i	80	10	10	60
50	1 50	2 0	5 0	1 0
70	7 10	9 0	4 0	1 60
40	5 20	4 10	3 10	2 0

Отримаємо допустимий базисний вектор

$$x^0 = (50, 0, 0, 0, 10, 0, 0, 60, 20, 10, 10, 0).$$

Досліджуємо базисний розв'язок x^0 на оптимальність. Для цього складаємо систему рівнянь типу $u_i + v_j = c_{ij}$, які відповідають базисним змінним:

$$u_1 + v_1 = 1;\ u_3 + v_1 = 5;$$

$$u_2 + v_1 = 7;\ u_3 + v_2 = 4;$$

$$u_2 + v_4 = 1;\ u_3 + v_3 = 3.$$

Взявши $u_1 = 0$, знаходимо послідовно $v_1 = 1$, $u_2 = 6$, $v_4 = -5$, $u_3 = 4$, $v_2 = 0$, $v_3 = -1$.

Маємо далі, що

$$\Delta_{12} = u_1 + v_2 - c_{12} = 0 + 0 - 2 = -2,$$

$$\Delta_{13} = u_1 + v_3 - c_{13} = 0 - 1 - 5 = -6,$$

$$\Delta_{14} = u_1 + v_4 - c_{14} = 0 - 5 - 1 = -6,$$

$$\Delta_{22} = u_2 + v_2 - c_{22} = 6 + 0 - 9 = -3,$$

$$\Delta_{23} = u_2 + v_3 - c_{23} = 6 - 1 - 4 = 1,$$

$$\Delta_{34} = u_3 + v_4 - c_{34} = 4 - 5 - 2 = -3.$$

Симплекс-різниця $\Delta_{23} > 0$, тому x^0 не є оптимальним розв'язком. Покладемо $x_{23}^1 = \theta$. Будуємо цикл: (2,3), (3,3), (3,1), (2,1) (див. табл.23).

Таблиця 23

a_i \ b_j	80	10	10	60	
50	1 50	2	5	1	$u_1 = 0$
70	7 $10 - \theta$	9	4 θ	1 60	$u_2 = 6$
40	5 $20 + \theta$	4 10	3 $10 - \theta$	2	$u_3 = 4$
	$v_1 = 1$	$v_2 = 0$	$v_3 = -1$	$v_4 = -5$	

Знаходимо $\theta = \min\{10,10\} = 10$. Оскільки при переході до наступного допустимого базисного розв'язку змінні $x_{21}^1 = 0$ та $x_{33}^1 = 0$, то з базису виводимо змінну, що міститься в клітинці з більшою вартістю, тобто змінну x_{21}^1 та знаходимо решту координат. Отримаємо, що $x^1 = (50,0,0,0,0,0,10,60,30,10,0,0)$. Розв'язку x^1 відповідає таблиця 21. Як було показано у пункті 1 вектор $x^1 = (50,0,0,0,0,0,10,60,30,10,0,0)$ є оптимальним розв'язком заданої транспортної задачі.

<u>Приклад 10</u> ***(Метод потенціалів розв'язування відкритої транспортної задачі).*** Розв'язати транспорту задачу, задану таблицею

200 \ 260	100	60	80	20
120	2	4	3	2
30	7	3	2	3
50	4	6	1	5

Розв'язання. Маємо $\sum_{i=1}^{3} a_i = 200 < \sum_{j=1}^{4} b_j = 260$. Отже, умова балансу не виконується і тому транспортна задача є відкритою. Для розв'язування цієї відкритої транспортної задачі вводимо додатковий фіктивний четвертий пункт виробництва з обсягом необхідної продукції 60 = 260 – 200, поклавши вартості перевезень з фіктивного пункту виробництва в пункти споживання рівними нулю.

Отримаємо збалансовану транспортну задачу (див. табл.24).

Таблиця 24

a_i \ b_j	100	60	80	20
120	2	4	3	2
30	7	3	2	3
50	4	6	1	5
60	0	0	0	0

Розв'яжемо отриману закриту транспортну задачу. Побудуємо перший базисний розв'язок методом північно-західного кута (див. табл. 25).

Таблиця 25

a_i \ b_j	100	60	80	20	
120	2 100	4 20	3	2	$u_1 = 0$
30	7	3 30	2	3	$u_2 = -1$
50	4	6 $10 - \theta$	1 $40 + \theta$	5	$u_3 = 2$
60	0	0 θ	0 $40 - \theta$	0 20	$u_4 = 1$
	$v_1 = 2$	$v_2 = 4$	$v_3 = -1$	$v_4 = -1$	

Для цього розв’язку $x_{11}^0 = 100$, $x_{12}^0 = 20$, $x_{22}^0 = 30$, $x_{32}^0 = 10$, $x_{33}^0 = 40$, $x_{43}^0 = 40$, $x_{44}^0 = 20$. Решта координат рівні нулю.

Для дослідження цього базисного розв’язку на оптимальність складаємо систему рівнянь:

$$u_1 + v_1 = 2;$$

$$u_1 + v_2 = 4;$$

$$u_2 + v_2 = 3;$$

$$u_3 + v_2 = 6;$$

$$u_3 + v_3 = 1;$$

$$u_4 + v_3 = 0;$$

$$u_4 + v_4 = 0.$$

Взявши $u_1 = 0$, знаходимо:

$$\begin{aligned} &u_1 = 0, && v_1 = 2, \\ &u_2 = -1, && v_2 = 4, \\ &u_3 = 2, && v_3 = -1, \\ &u_4 = 1, && v_4 = -1. \end{aligned}$$

Обчислюємо $\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}$:

$$\Delta_{13} = 0 - 1 - 3 = -4\,,\ \Delta_{14} = 0 - 1 - 2 = -3\,,\ \Delta_{21} = -1 + 2 - 7 = -6\,,$$

$$\Delta_{23} = -1 - 1 - 2 = -4\,,\ \Delta_{24} = -1 - 1 - 3 = -5\,,\ \Delta_{31} = 2 + 2 - 4 = 0\,,$$

$$\Delta_{34} = 2 - 1 - 5 = -4\,,\ \Delta_{41} = 1 + 2 - 0 = 3\,,\ \Delta_{42} = 1 + 4 - 0 = 5\,.$$

Бачимо, що серед Δ_{ij} є більші за нуль. Тоді перший базисний розв'язок x^0 не є оптимальним. Знаходимо $\max\limits_{\substack{1 \le i \le 4, \\ 1 \le j \le 4}} \Delta_{ij} = \Delta_{42} = 5$.

Покладемо $x_{42}^1 = \theta$. Складаємо цикл: (4,2), (3,2), (3,3), (4,3).

Знаходимо, що $\theta = \min\{10, 40\} = 10$.

Тоді для нового базисного розв'язку будемо мати $x_{11}^1 = 100$, $x_{12}^1 = 20$, $x_{22}^1 = 30$, $x_{33}^1 = 50$, $x_{42}^1 = 10$, $x_{43}^1 = 30$, $x_{44}^1 = 20$, решта координат рівні нулю. Занесемо дані про новий базисний розв'язок в таблицю (див. табл. 26).

Таблиця 26

a_i \ b_j	100	60	80	20	
120	2 100	4 $20 - \theta$	3	2 θ	$u_1 = 0$
30	7	3 30	2	3	$u_2 = -1$

Продовження таблиці 26

50	4	6	1 50	5	u_3 = –3
60	0	0 10 + θ	0 30	0 20 – θ	u_4 = –4
	v_1 = 2	v_2 = 4	v_3 = 4	v_4 = 4	

Для дослідження базисного розв'язку x^1 на оптимальність складаємо систему рівнянь:

$$u_1 + v_1 = 2;$$

$$u_1 + v_2 = 4;$$

$$u_2 + v_2 = 3;$$

$$u_3 + v_3 = 1;$$

$$u_4 + v_2 = 0;$$

$$u_4 + v_3 = 0;$$

$$u_4 + v_4 = 0.$$

Взявши $u_1 = 0$, знаходимо:

$$\begin{array}{ll} u_1 = 0, & v_1 = 2, \\ u_2 = -1, & v_2 = 4, \\ u_3 = -3, & v_3 = 4, \\ u_4 = -4, & v_4 = 4. \end{array}$$

Обчислюємо $\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}$:

$$\Delta_{13} = 0 + 4 - 3 = 1,\ \Delta_{14} = 0 + 4 - 2 = 2,\ \Delta_{21} = -1 + 2 - 7 = -6,$$

$$\Delta_{23} = -1 + 4 - 2 = 1,\ \Delta_{24} = -1 + 4 - 3 = 0,\ \Delta_{31} = -3 + 2 - 4 = -5,$$

$$\Delta_{32} = -3 + 4 - 6 = -5,\ \Delta_{34} = -3 + 4 - 5 = -4,\ \Delta_{41} = -4 + 2 - 0 = -2.$$

Бачимо, що серед Δ_{ij} є більші за нуль. Тоді базисний розв'язок x^1 не є оптимальним. Знаходимо $\max\limits_{\substack{1\le i\le 4,\\ 1\le j\le 4}} \Delta_{ij} = \Delta_{14} = 2$.

Покладемо $x_{14}^2 = \theta$. Складаємо цикл: (1,4), (4,4), (4,2), (1,2).

Знаходимо, що $\theta = \min\{20, 20\} = 20$. Оскільки при переході до наступного допустимого базисного розв'язку змінні $x_{12}^2 = 0$ та $x_{44}^2 = 0$, то з базису виводимо змінну, що міститься в клітинці з більшою вартістю, тобто змінну x_{12} та знаходимо решту координат базисного допустимого розв'язку x^2. Отримаємо, що $x^2 = (100, 0, 0, 20, 0, 30, 0, 0, 0, 0, 50, 0, 0, 30, 30, 0)$ (див. табл. 27).

Таблиця 27

a_i \ b_j	100	60	80	20	
120	2 100	4	3	2 20	$u_1 = 0$
30	7	3 $30 - \theta$	2 θ	3	$u_2 = 1$
50	4	6	1 50	5	$u_3 = -1$
60	0	0 $30 + \theta$	0 $30 - \theta$	0 0	$u_4 = -2$
	$v_1 = 2$	$v_2 = 2$	$v_3 = 2$	$v_4 = 2$	

Для дослідження базисного розв'язку x^2 на оптимальність складаємо систему рівнянь:

$$u_1 + v_1 = 2;$$

$$u_1 + v_4 = 2;$$

$$u_2 + v_2 = 3;$$

$$u_3 + v_3 = 1;$$

$$u_4 + v_2 = 0;$$

$$u_4 + v_3 = 0;$$

$$u_4 + v_4 = 0.$$

Взявши $u_1 = 0$, знаходимо:

$$\begin{array}{ll} u_1 = 0, & v_1 = 2, \\ u_2 = 1, & v_2 = 2, \\ u_3 = -1, & v_3 = 2, \\ u_4 = -2, & v_4 = 2. \end{array}$$

Обчислюємо $\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}$:

$$\Delta_{12} = 0 + 2 - 4 = -2, \ \Delta_{13} = 0 + 2 - 3 = -1, \ \Delta_{21} = 1 + 2 - 7 = -4,$$

$$\Delta_{23} = 1 + 2 - 2 = 1, \ \Delta_{24} = 1 + 2 - 3 = 0, \ \Delta_{31} = -1 + 2 - 4 = -3,$$

$$\Delta_{32} = -1 + 2 - 6 = -5, \ \Delta_{34} = -1 + 2 - 5 = -4, \ \Delta_{41} = -2 + 2 - 0 = 0.$$

Бачимо, що серед Δ_{ij} є більші нуля. Тоді базисний розв'язок x^2 не є оптимальним. Знаходимо $\max\limits_{\substack{1 \le i \le 4, \\ 1 \le j \le 4}} \Delta_{ij} = \Delta_{23} = 1$.

Покладемо $x_{23}^3 = \theta$. Складаємо цикл: (2,3), (4,3), (4,2), (2,2).

Знаходимо, що $\theta = \min\{30, 30\} = 30$. Оскільки при переході до наступного допустимого базисного розв'язку змінні $x_{22}^3 = 0$ та $x_{43}^3 = 0$, то з базису виводимо змінну, що міститься в клітинці з більшою вартістю, тобто змінну x_{22} та знаходимо решту координат базисного допустимого розв'язку x^3. Отримаємо, що $x^3 = (100, 0, 0, 20, 0, 0, 30, 0, 0, 0, 50, 0, 0, 60, 0, 0)$ (див. табл. 28).

Таблиця 28

a_i \ b_j	100	60	80	20	
120	2 100	4	3	2 20	$u_1 = 0$
30	7	3	2 30	3	$u_2 = 0$
50	4	6	1 50	5	$u_3 = -1$
60	0	0 60	0 0	0 0	$u_4 = -2$
	$v_1 = 2$	$v_2 = 2$	$v_3 = 2$	$v_4 = 2$	

Для дослідження базисного розв'язку x^3 на оптимальність складаємо систему рівнянь:

$$u_1 + v_1 = 2;$$

$$u_1 + v_4 = 2;$$

$$u_2 + v_3 = 2;$$

$$u_3 + v_3 = 1;$$

$$u_4 + v_2 = 0;$$

$$u_4 + v_3 = 0.$$

Взявши $u_1 = 0$, знаходимо:

$$\begin{aligned} u_1 &= 0, & v_1 &= 2, \\ u_2 &= 0, & v_2 &= 2, \\ u_3 &= -1, & v_3 &= 2, \\ u_4 &= -2, & v_4 &= 2. \end{aligned}$$

Обчислюємо $\Delta_{ij}= u_i + v_j - c_{ij}$:

$$\Delta_{12} = 0 + 2 - 4 = -2\,,\ \Delta_{13} = 0 + 2 - 3 = -1,\ \Delta_{21} = 0 + 2 - 7 = -5\,,$$

$$\Delta_{22} = 0 + 2 - 3 = -1,\ \Delta_{24} = 0 + 2 - 3 = -1,\ \Delta_{31} = -1 + 2 - 4 = -3\,,$$

$$\Delta_{32} = -1 + 2 - 6 = -5\,,\ \Delta_{34} = -1 + 2 - 5 = -4\,,\ \Delta_{41} = -2 + 2 - 0 = 0\,.$$

Оскільки усі симплекс-різниці недодатні, то вектор

$$x^3 = \left(100, 0, 0, 20, 0, 0, 30, 0, 0, 0, 50, 0, 0, 60, 0, 0\right)$$

є оптимальним розв’язком для допоміжної закритої транспортної задачі, а вектор $x^* = \left(100, 0, 0, 20, 0, 0, 30, 0, 0, 0, 50, 0\right)$ буде оптимальним для заданої відкритої транспортної задачі і $\min z = 100 \cdot 2 + 20 \cdot 2 + 30 \cdot 2 + 50 \cdot 1 = 350$.

<u>Приклад 11</u> ***(Угорський метод розв'язування задачі про оптимальні призначення).*** Угорським методом розв'язати задачу про оптимальні призначення з матрицею витрат *C*:

$$C = \begin{Vmatrix} 10 & 5 & 9 & 18 & 11 \\ 13 & 19 & 6 & 12 & 14 \\ 3 & 2 & 4 & 4 & 5 \\ 18 & 9 & 12 & 17 & 15 \\ 11 & 6 & 14 & 19 & 10 \end{Vmatrix}.$$

Розв'язання. Використаємо алгоритм угорського методу:

1. Віднімемо в матриці C від кожного елемента рядка його мінімальний елемент. В результаті отримаємо еквівалентну матрицю витрат C_1:

$$C_1 = \begin{Vmatrix} 5 & 0 & 4 & 13 & 6 \\ 7 & 13 & 0 & 6 & 8 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 3 \\ 9 & 0 & 3 & 8 & 6 \\ 5 & 0 & 8 & 13 & 4 \end{Vmatrix}.$$

2. Віднімемо в матриці C_1 від кожного елемента стовпця його мінімальний елемент. В результаті отримаємо еквівалентну матрицю C_2:

$$C_2 = \begin{Vmatrix} 4 & 0 & 4 & 11 & 3 \\ 6 & 13 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 3 & 6 & 3 \\ 4 & 0 & 8 & 11 & 1 \end{Vmatrix}.$$

3. Проглядаємо послідовно рядки матриці C_2, починаючи з першого. Якщо рядок має лише один непозначений нуль, то позначаємо його позначкою * та закреслюємо за допомогою позначки ^ решту нулів в цьому ж стовпці. Нуль вважається позначеним, якщо він має позначку *. Повторюємо ці дії, поки кожний рядок не буде мати непозначених нулів, або буде мати їх принаймні два.

4. Проглядаємо послідовно стовпці матриці C_2, починаючи з першого. Якщо стовпець має лише один непозначений нуль, то позначаємо його позначкою * та закреслюємо за допомогою позначки ^ решту нулів в цьому ж рядку. Нуль вважається позначеним, якщо він має позначку *. Повторюємо ці дії, поки кожний стовпець не буде мати непозначених нулів, або буде мати їх принаймні два.

5. Дії п.п. 3 і 4 повторюємо послідовно (якщо необхідно) поки не трапиться один з трьох можливих випадків:

5.1) кожний рядок має 0^*;

5.2) є принаймні два непозначені нулі в деяких рядках і деяких стовпцях матриці витрат;

5.3) немає непозначених нулів і кількість нулів з позначкою * менша від кількості рядків.

6. У випадку 5.1) задача про оптимальні призначення розв'язана: x_{ij}, що відповідають 0^*, дорівнюють 1, решта x_{ij} дорівнюють 0. У випадку 5.2) довільно вибираємо один з непозначених нулів, позначаємо його позначкою *, закреслюємо решту нулів в тому ж рядку і в тому ж стовпці і повертаємося до пункту 3. У випадку 5.3) переходимо до п.7.

Застосовуємо дії пунктів 3-6 до матриці C_2. Домовившись тут і далі позначати через c_{ij} елемент розглядуваної на відповідному етапі матриці витрат, який знаходиться на перетині i-го рядку та j-го стовпця.

$$C_2 = \begin{array}{c} \left\|\begin{matrix} 4 & 0^* & 4 & 11 & 3 \\ 6 & 13 & 0^* & 4 & 5 \\ 0^* & 0^\wedge & 2 & 0^\wedge & 0^\wedge \\ 8 & 0^\wedge & 3 & 6 & 3 \\ 4 & 0^\wedge & 8 & 11 & 1 \end{matrix}\right\| \begin{matrix} \# \\ \\ \\ \# \\ \# \end{matrix} \\ \# \end{array}$$

Згідно з пунктом 3 позначимо $c_{12} = 0^*$, оскільки $c_{12} = 0$ є єдиним непозначеним нулем першого рядка матриці C_2, та закреслимо за допомогою позначки ^ $c_{32} = 0$, $c_{42} = 0$, $c_{52} = 0$: $c_{32} = 0^\wedge$, $c_{42} = 0^\wedge$, $c_{52} = 0^\wedge$, оскільки $c_{32} = 0$, $c_{42} = 0$, $c_{52} = 0$ знаходяться у другому стовпці. Далі позначаємо позначкою * $c_{23} = 0$: $c_{23} = 0^*$. Згідно з пунктом 4 позначаємо позначкою * $c_{31} = 0$: $c_{31} = 0^*$ та закреслюємо за допомогою позначки ^ $c_{34} = 0$, $c_{35} = 0$: $c_{34} = 0^\wedge$, $c_{35} = 0^\wedge$.

В результаті матимемо, що матриця C_2 немає непозначених нулів і кількість 0^* менша від кількості рядків (випадок 5.3). У цьому випадку згідно пункту 6 переходимо до пункту 7.

7. Позначаємо позначкою # рядки матриці C_2, в яких немає 0^*. Такі рядки вважаємо позначеними, решту – непозначеними. Аналогічно називаються і стовпці матриці C_2. В результаті виконання дії цього пункту будуть позначеними позначкою # третій і четвертий рядки.

Перейдемо далі до пункту 8.

8. Позначимо позначкою # ще непозначені стовпці, які мають $0^\wedge$ у позначених рядках.

В результаті дій цього пункту буде позначеним позначкою # другий стовпець.

Перейдемо далі до пункту 9.

9. Позначимо позначкою # ще непозначені рядки, які мають 0^* у позначених стовпцях.

У результаті дій цього пункту позначку # отримає перший рядок.

10. Повторюємо дії п. п. 8 та 9 доти, поки більше не можна буде позначити жодного рядка та стовпця матриці витрат C_2.

У результаті виконання дій пунктів 8 та 9 вдається позначити позначкою # лише перший, четвертий, п’ятий рядки та другий стовпець.

Тому переходимо до п. 11.

11. Викреслюємо непозначені рядки і позначені стовпці матриці витрат C_2.

У результаті дій цього пункту будуть викреслені другий і третій рядки та другий стовпець.

Переходимо до п. 12.

12. Знаходимо мінімальний невикреслений елемент матриці витрат C_2, віднімаємо його від елементів кожного з невикреслених рядків, додаємо до елементів всіх викреслених стовпців. У результаті виконання дій цього пункту отримаємо матрицю витрат C_3. В нашому випадку мінімальний невикреслений елемент дорівнює 1, а матриця C_3 буде такою:

$$C_3 = \begin{array}{cc} \left\| \begin{array}{ccccc} 3 & 0^* & 3 & 10 & 2 \\ 6 & 14 & 0^* & 4 & 5 \\ 0^* & 1 & 2 & 0^\wedge & 0^\wedge \\ 7 & 0^\wedge & 2 & 5 & 2 \\ 3 & 0^\wedge & 7 & 10 & 0^* \end{array} \right\| & \begin{array}{c} \# \\ \\ \\ \# \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{ccccc} & \# & & & \end{array} & \end{array}$$

Стосовно матриці витрат C_3 виконуємо дії пунктів описаного вище алгоритму угорського методу, починаючи з п. 3.

У результаті виконання дій пунктів 3-6 отримаємо позначеними та викресленими послідовно такі елементи матриці C_3:

$$c_{12} = 0^*,\ c_{42} = 0^\wedge,\ c_{52} = 0^\wedge;$$

$$c_{23} = 0^*;$$

$$c_{55} = 0^*,\ c_{35} = 0^\wedge;$$

$$c_{31} = 0^*,\ c_{34} = 0^\wedge.$$

Оскільки в цій матриці немає непозначених нулів і кількість нулів з позначкою * менша від кількості рядків, то переходимо до пунктів 7-12.

Позначаємо позначкою # послідовно четвертий рядок матриці C_3, який не містить 0^*, другий стовпець цієї матриці, який містить $0^\wedge$ у четвертому позначеному #, рядку; перший рядок, який містить 0^* у другому стовпці (позначеному #).

Викреслюємо далі другий, третій, п’ятий рядки матриці C_3, які не позначені позначкою #, та другий стовпець цієї матриці, який позначений позначкою #.

Серед невикреслених елементів знаходимо найменший. Він дорівнює 2.

Віднімаємо 2 від елементів усіх незакреслених рядків (першого і четвертого) та додаємо до елементів усіх закреслених стовпців (другого).

В результаті виконання цих дій прийдемо до матриці C_4:

$$C_4 = \begin{array}{cc} \left\| \begin{matrix} 1 & 0^* & 1 & 8 & 0^\wedge \\ 6 & 16 & 0^* & 4 & 5 \\ 0^* & 3 & 2 & 0^\wedge & 0^\wedge \\ 5 & 0^\wedge & 0^\wedge & 3 & 0^\wedge \\ 3 & 2 & 7 & 10 & 0^* \end{matrix} \right\| & \begin{matrix} \# \\ \# \\ \\ \# \\ \# \end{matrix} \\ \begin{matrix} & \# & \# & & \# \end{matrix} & \end{array}$$

В результаті виконання дій пунктів 3-6 стосовно матриці C_4 отримаємо позначеними та викресленими послідовно такі елементи цієї матриці:

$$c_{23} = 0^*,\ c_{43} = 0^\wedge;$$

$$c_{55} = 0^*,\ c_{15} = 0^\wedge,\ c_{35} = 0^\wedge,\ c_{45} = 0^\wedge;$$

$$c_{12} = 0^*,\ c_{42} = 0^\wedge;$$

$$c_{31} = 0^*,\ c_{34} = 0^\wedge.$$

Оскільки після цих дій в матриці C_4 немає непозначених нулів і кількість нулів з позначкою * менша від кількості рядків, то переходимо до пунктів 7-12.

Позначаємо позначкою #: четвертий рядок, що не містить 0^*; другий, третій, п’ятий стовпці, що містять $0^\wedge$ у четвертому рядку; перший, другий, п’ятий рядки, що містять 0^* у позначених стовпцях.

Викреслюємо далі непозначений позначкою # третій рядок та позначені цією позначкою другий, третій, п’ятий стовпці.

Серед невикреслених елементів матриці C_4 знаходимо найменший. Він дорівнює 1. Віднімемо 1 від всіх елементів усіх невикреслених рядків та додамо її до елементів викреслених стовпців. Отримаємо матрицю витрат C_5:

$$C_5 = \begin{Vmatrix} 0^* & 0^\wedge & 1 & 7 & 0^\wedge \\ 5 & 16 & 0^* & 3 & 5 \\ 0^\wedge & 4 & 3 & 0^* & 1 \\ 4 & 0^* & 0^\wedge & 2 & 0^\wedge \\ 2 & 2 & 7 & 9 & 0^* \end{Vmatrix}.$$

В результаті виконання пунктів 3-6 стосовно матриці C_5 отримаємо позначеними та викресленими послідовно такі елементи цієї матриці:

$$c_{23} = 0^*,\ c_{43} = 0^\wedge;$$

$$c_{55} = 0^*,\ c_{15} = 0^\wedge,\ c_{45} = 0^\wedge;$$

$$c_{42} = 0^*,\ c_{12} = 0^\wedge$$

$$c_{11} = 0^*,\ c_{31} = 0^\wedge;$$

$$c_{34} = 0^*.$$

Оскільки кожний рядок матриці C_5 має 0^*, то згідно з п. 6 матриця

$$X^* = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

визначає оптимальні призначення.

Сумарні мінімальні витрати, пов’язані з призначенням виконавців для виконання робіт, будуть дорівнювати 10 + 6 + 4 + 9 + 10 = 39 одиниць.

<u>Приклад 12</u> ***(Метод Мака розв'язування задачі про оптимальні призначення)***. Методом Мака розв'язати задачу про призначення з матрицею витрат

$$C=\begin{Vmatrix}10 & 5 & 9 & 18 & 11\\ 13 & 19 & 6 & 12 & 14\\ 3 & 2 & 4 & 4 & 5\\ 18 & 9 & 12 & 17 & 15\\ 11 & 6 & 14 & 19 & 10\end{Vmatrix}.$$

Розв'язання. Використаємо алгоритм методу Мака:

1. Позначимо мінімальний елемент кожного рядка матриці витрат позначкою *. Якщо таких елементів декілька, позначаємо будь-який з них.

Домовимось тут і далі позначати через c_{ij} елемент розглядуваної на відповідному етапі матриці витрат, який знаходиться на перетині i-го рядка та j-го стовпця.

В результаті дій цього пункту отримують позначку * такі елементи матриці C: $c_{12}=5^*$, $c_{23}=6^*$, $c_{32}=2^*$, $c_{42}=9^*$, $c_{52}=6^*$.

2. Для кожного рядка, що має інший мінімальний елемент, проглядаємо стовпець, до якого цей елемент належить. Можливі випадки:

2.1) стовпець не має позначених елементів;

2.2) стовпець має принаймні один позначений елемент.

3. У випадку 2.1) позначаємо інший мінімальний елемент рядка позначкою *. Всі інші позначки в цьому рядку знімаються. У випадку 2.2) позначаємо інший мінімальний елемент рядка позначкою ^, якщо елемент цього рядка з позначкою * не є єдиним позначеним елементом у своєму стовпці.

4. Дії пунктів 2 та 3 повторюємо послідовно для всіх рядків, що мають більше одного мінімального елемента.

Оскільки кожен рядок матриці C має лише один мінімальний елемент, то виконання дій пунктів 2-4 не змінить позначених у пункті 1 елементів матриці C:

$$C = \begin{array}{c c} \left\| \begin{matrix} 10 & 5^* & 9 & 18 & 11 \\ 13 & 19 & 6^* & 12 & 14 \\ 3 & 2^* & 4 & 4 & 5 \\ 18 & 9^* & 12 & 17 & 15 \\ 11 & 6^* & 14 & 19 & 10 \end{matrix} \right\| & \begin{matrix} 4 \\ \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} A & B & A & A & A \end{matrix} & \end{array}$$

5. Якщо кожний стовпець матриці витрат має елемент з позначкою *, то ці елементи визначають оптимальні призначення. Інакше необхідно виконати дії пункту 6.

У нашому випадку перший, третій та четвертий стовпці матриці C не мають елементів з позначкою *, тому переходимо до п. 6.

6. Віднесемо до множини B стовпці, що мають більше одного позначеного елемента, інші стовпці матриці витрат утворюють множину A. В розглядуваному випадку множина B складається лише з одного другого стовпця. Переходимо до виконання пункту 7.

7. Для кожного рядка матриці витрат, в якому елемент з позначкою * належить множині B, знаходимо мінімальну різницю між елементами множини A і елементом з позначкою *.

В розглядуваному випадку для першого рядка така мінімальна різниця буде 4, для третього – 1, для четвертого – 3, для п’ятого – 5.

Перейдемо до виконання дій пункту 8.

8. Знаходимо найменшу із знайдених у п. 7. різниць, додаємо її до кожного елемента множини B і повертаємося до п. 2 і т.д.

В розглядуваному випадку 1 додаємо до елементів другого стовпця. В результаті отримуємо матрицю C_1:

$$C_1 = \begin{Vmatrix} 10 & 6^* & 9 & 18 & 11 \\ 13 & 20 & 6^* & 12 & 14 \\ 3 & 3^* & 4 & 4 & 5 \\ 18 & 10^* & 12 & 17 & 15 \\ 11 & 7^* & 14 & 19 & 10 \end{Vmatrix}$$

Стосовно матриці C_1 виконуємо дії пунктів 2-4. Оскільки в третьому рядку є інший мінімальний елемент $c_{31} = 3$ та перший стовпець, що його містить, немає позначених елементів, то позначаємо $c_{31} = 3^*$ та знімаємо всі інші позначки у третьому рядку. В результаті елементи матриці C_1 матимуть позначення:

$$C_1 = \begin{array}{cc} \begin{Vmatrix} 10 & 6^* & 9 & 18 & 11 \\ 13 & 20 & 6^* & 12 & 14 \\ 3^* & 3 & 4 & 4 & 5 \\ 18 & 10^* & 12 & 17 & 15 \\ 11 & 7^* & 14 & 19 & 10 \end{Vmatrix} & \begin{matrix} 3 \\ \\ \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} A & B & A & A & A \end{matrix} & \end{array}$$

Перейдемо до виконання п. 6 стосовно матриці C_1 з урахуванням нових позначок її елементів. Для цього віднесемо до множини *B* другий стовпець, що має більше одного позначеного елемента. Інші стовпці утворюють множину *A*. Знаходимо мінімальну різницю (див. п. 7). Вона дорівнює 2. Додаємо цю різницю до елементів другого стовпця.

Отримуємо матрицю C_2:

$$C_2 = \begin{array}{cc} \begin{Vmatrix} 10 & 8^* & 9 & 18 & 11 \\ 13 & 22 & 6^* & 12 & 14 \\ 3^* & 5 & 4 & 4 & 5 \\ 18 & 12^* & 12^{\wedge} & 17 & 15 \\ 11 & 9^* & 14 & 19 & 10 \end{Vmatrix} & \begin{matrix} 2 \\ 6 \\ \\ 3 \\ 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} A & B & B & A & A \end{matrix} & \end{array}$$

Оскільки четвертий рядок має інший мінімальний елемент $c_{43}=12$ та третій стовпець має позначений елемент 6^*, а другий стовпець має й інші позначені елементи ($c_{12}=8^*$, $c_{52}=8^*$), то згідно з п. 3 позначаємо $c_{43}=12^{\wedge}$.

Відносимо до множини B другий і третій стовпці матриці C_2, які мають більше одного позначеного елемента (див. п. 6). Для першого, другого, четвертого і п'ятого рядків, в яких елемент з позначкою * належить другому і третьому стовпцям, знаходимо мінімальні різниці між елементами множини A і елементом з позначкою * та вибираємо серед них найменшу, яка дорівнює 1.

Додаємо 1 до другого і третього стовпців матриці C_2. Отримаємо матрицю C_3:

$$C_3=\begin{Vmatrix} 10 & 9^* & 10 & 18 & 11 \\ 13 & 23 & 7^* & 12 & 14 \\ 3^* & 6 & 5 & 4 & 5 \\ 18 & 13^* & 13^{\wedge} & 17 & 15 \\ 11 & 10^* & 15 & 19 & 10 \end{Vmatrix}.$$

Оскільки в п'ятому рядку матриці C_3 інший мінімальний елемент $c_{55}=10$ стоїть у п'ятому стовпці, який не містить позначених елементів, то його позначаємо $c_{55}=10^*$, а позначку біля $c_{25}=10^*$ знімаємо: $c_{25}=10$.

Після цього елементи C_3 матимуть позначки

$$C_3=\begin{array}{c} \begin{Vmatrix} 10 & 9^* & 10 & 18 & 11 \\ 13 & 23 & 7^* & 12 & 14 \\ 3^* & 6 & 5 & 4 & 5 \\ 18 & 13^* & 13^{\wedge} & 17 & 15 \\ 11 & 10 & 15 & 19 & 10^* \end{Vmatrix} \begin{array}{c} 1 \\ 5 \\ \\ 2 \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{ccccc} A & B & B & A & A \end{array} \end{array}$$

Знову відносимо до множини B другий і третій стовпці матриці C_3. Мінімальна різниця дорівнює 1. Додаємо її до другого і третього стовпців та переходимо матриці C_4:

$$C_4 = \begin{array}{cl} \left\|\begin{matrix} 10^{\wedge} & 10^{*} & 11 & 18 & 11 \\ 13 & 24 & 8^{*} & 12 & 14 \\ 3^{*} & 7 & 6 & 4 & 5 \\ 18 & 14^{*} & 14^{\wedge} & 17 & 15 \\ 11 & 11 & 16 & 19 & 10^{*} \end{matrix}\right\| & \begin{matrix} 1 \\ 4 \\ 1 \\ 1 \\ \end{matrix} \\ \begin{matrix} B & \quad B & \quad B & \quad A & \quad A \end{matrix} & \end{array}$$

Оскільки $c_{11} = 10$ є іншим мінімальним елементом першого рядка, то згідно з пунктом 3 методу приписуємо йому позначку ^: $c_{11} = 10^{\wedge}$.

На наступному кроці до множини *B* будуть віднесені перший, другий і третій стовпці. Мінімальна різниця дорівнює 1.

Додавши її до стовпців множини *B*, отримаємо матрицю C_5:

$$C_5 = \left\|\begin{matrix} 11^{\wedge} & 11^{*} & 12 & 18 & 11 \\ 14 & 25 & 9^{*} & 12 & 14 \\ 4^{*} & 8 & 7 & 4 & 5 \\ 19 & 15^{*} & 15^{\wedge} & 17 & 15 \\ 12 & 12 & 17 & 19 & 10^{*} \end{matrix}\right\|$$

Оскільки у третьому рядку є інший мінімальний елемент $c_{34} = 4$ та четвертий стовпець не має позначених елементів, то згідно з п. 3 позначаємо $c_{34} = 4^{*}$ та знімаємо всі позначки у третьому рядку. Тоді елементи третього рядка матимуть позначки: 4 8 7 4^{*} 5.

Проглядаємо далі перший рядок. У ньому елемент $c_{11} = 11^{\wedge}$ є мінімальним і перший стовпець не має інших позначених елементів. Тоді позначимо його $c_{11} = 11^{*}$ та знімемо позначки з інших елементів цього рядка. В результаті цього та інших дій, зазначених у пунктах 2-4, елементи таблиці C_5 матимуть позначки

$$C_5 = \begin{Vmatrix} 11^* & 11 & 12 & 18 & 11 \\ 14 & 25 & 9^* & 12 & 14 \\ 4 & 8 & 7 & 4^* & 5 \\ 19 & 15^* & 15 & 17 & 15 \\ 12 & 12 & 17 & 19 & 10^* \end{Vmatrix}.$$

Оскільки кожний стовпець матриці витрат C_5 має елемент з позначкою *, то оптимальні призначення визначаються матрицею X^*:

$$X^* = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix},$$

а сумарні мінімальні витрати, пов’язані з призначенням виконавців для виконання робіт, будуть дорівнювати 10 + 6 + 4 + 9 + 10 = 39 одиниць.

<u>Приклад 13</u> ***(Перший метод Гоморі розв'язування повністю цілочислової задачі лінійного програмування).*** Використовуючи перший метод Гоморі, знайти оптимальний розв'язок наступної ПЦЗЛП (повністю цілочислової задачі лінійного програмування):

знайти

$$\max z = x_1 + 3x_2 \tag{42}$$

за умов

$$\begin{aligned} -3x_1 + 2x_2 &\le 2, \\ x_1 + 2x_2 &\le 8, \end{aligned} \tag{43}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \tag{44}$$

$$x_1, x_2 \text{ – цілі}. \tag{45}$$

Розв'язання. Зведемо задачу (42)-(45) до канонічної форми:

знайти

$$\max z = x_1 + 3x_2 \tag{46}$$

за умов

$$\begin{aligned} -3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 2, \\ x_1 + 2x_2 + x_4 &= 8, \end{aligned} \tag{47}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0, \tag{48}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \text{ – цілі}. \tag{49}$$

Розв'яжемо задачу лінійного програмування (46)-(48). Випишемо вектори-умов: $A_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $A_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Очевидно, що ця задача є задачею лінійного програмування зі стандартним базисом, а вектор $x^0 = (0, 0, 2, 8)$ – її допустимий базисний розв'язок. Заповнимо симплекс-таблицю, що відповідає x^0 (див. табл. 29).

Таблиця 29

$c_{баз.}$	*Баз. зм.*	*Зн. баз. зм.*	$c_{небаз.}$ *і небаз. зм.*	
			1	3
			x_1	x_2
0	x_3	2	–3	$\boxed{2}$ ←
0	x_4	8	1	2
	z	0	–1	–3
			Δ_1	Δ_2 ↑

Обраховуємо z, Δ_1, Δ_2:

$$z = 0 \cdot 2 + 0 \cdot 8 = 0,$$

$$\Delta_1 = 0 \cdot (-3) + 0 \cdot 1 - 1 = -1,$$

$$\Delta_2 = 0 \cdot 2 + 0 \cdot 2 - 3 = -3.$$

Оскільки серед симплекс-різниць Δ_1, Δ_2 є від'ємні, то x^0 не є оптимальним розв'язком задачі (46)-(48). Переходимо до нового допустимого розв'язку задачі (46)-(48). Знаходимо $\min\{-1; -3\} = -3$. Тоді, стовпець, що відповідає змінній x_2 візьмемо за розв'язуючий. Знаходимо $\min\{2:2; 8:2\} = \{1; 4\} = 1$. Тому рядок, що відповідає змінній x_3, буде розв'язуючим, а елемент 2, що стоїть на перетині розв'язуючого рядка та розв'язуючого стовпця – розв'язуючим елементом.

Переходимо до наступної симплекс-таблиці (див. табл.30).

Таблиця 30

Баз. зм.	*Зн. баз. зм.*	*небаз. зм.*	
		x_1	x_3
x_2	1	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$
x_4	6	$\boxed{4}$	-1
z	3	$-\frac{11}{2}$	$\frac{3}{2}$
		Δ_1	Δ_3

Оскільки симплекс-різниця $\Delta_1 = -\frac{11}{2}$ – від'ємна, то вектор $x^1 = (0,1,0,6)$ не є оптимальним розв'язком задачі (46)-(48). Переходимо до нового допустимого розв'язку цієї задачі. Стовпець, що відповідає Δ_1 буде розв'язуючим стовпцем. Оскільки в розв'язуючому стовпці один додатний елемент, то рядок, що його містить, тобто рядок, що відповідає змінній x_4, буде розв'язуючим рядком, а сам елемент 4, що стоїть на перетині розв'язуючого рядка та розв'язуючого стовпця – розв'язуючим елементом. Переходимо до наступної симплекс-таблиці (див. табл. 31).

Таблиця 31

Баз. зм.	*Зн. баз. зм.*	*небаз. зм.*	
		x_4	x_3
x_2	$\frac{13}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$
x_1	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$

z	$\frac{45}{4}$	$\frac{11}{8}$	$\frac{1}{8}$
		Δ_4	Δ_3

Симплекс-різниці Δ_3, Δ_4 – невід'ємні, а тому вектор $x^2 = \left(\frac{3}{2}, \frac{13}{4}, 0, 0\right)$ є оптимальним розв'язком задачі (46)-(48). Оскільки не всі компоненти вектора x^2 є цілими числами, то він не є оптимальним розв'язком задачі (46)-(49). Знайдемо найбільшу дробову частину тих координат вектора x^2, які не є цілими числами:

$$\max\left\{\left\{\frac{3}{2}\right\};\left\{\frac{13}{4}\right\}\right\} = \left\{\frac{1}{2};\frac{1}{4}\right\} = \frac{1}{2}.$$

Оскільки більшу дробову частину має координата x_1 вектора x^2, то за елементами рядка таблиці 31, що відповідає змінній x_1, будуємо додаткове лінійне обмеження – правильний відтин:

$$\left\{\frac{1}{4}\right\}x_4 + \left\{-\frac{1}{4}\right\}x_3 \geq \left\{\frac{3}{2}\right\}.$$

Знайшовши дробові частини від чисел, що фігурують у цій нерівності, запишемо її у такій формі:

$$\frac{1}{4}x_4 + \frac{3}{4}x_3 \geq \frac{1}{2}. \tag{50}$$

Зведемо обмеження (50) до канонічної форми:

$$\frac{1}{4}x_4 + \frac{3}{4}x_3 - x_5 = \frac{1}{2},\ x_5 \geq 0.$$

Звідси

$$\left(-\frac{1}{4}\right)x_4 + \left(-\frac{3}{4}\right)x_3 + x_5 = -\frac{1}{2},\ x_5 \geq 0. \tag{51}$$

До системи обмежень (47), (48) задачі (46)-(48) додамо обмеження (51). Отримаємо задачу:

знайти

$$\max z = x_1 + 3x_2 \tag{52}$$

за умов

$$\begin{aligned} -3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 2, \\ x_1 + 2x_2 + x_4 &= 8, \\ -\frac{1}{4}x_4 - \frac{3}{4}x_3 + x_5 &= -\frac{1}{2}, \end{aligned} \tag{53}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0\,. \tag{54}$$

Для цієї задачі вектор $\left(\frac{3}{2}, \frac{13}{4}, 0, 0, -\frac{1}{2}\right)$ є псевдопланом. Розв'яжемо задачу (52)-(54) двоїстим симплекс-методом. Для отримання симплекс-таблиці, що відповідає псевдоплану $\left(\frac{3}{2}, \frac{13}{4}, 0, 0, -\frac{1}{2}\right)$, розширимо симплекс-таблицю 31 рядком, який буде відповідати обмеженню (51) (див. табл. 32).

Таблиця 32

Баз. зм.	*Зн. баз. зм.*	*небаз. зм.*	
		x_4	x_3
x_2	$\frac{13}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$
x_1	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$
x_5	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$\boxed{-\frac{3}{4}}$ ←
z	$\frac{45}{4}$	$\frac{11}{8}$	$\frac{1}{8}$
		Δ_4	Δ_3 ↑

Оскільки значення змінної x_5 – від'ємне, то рядок, що відповідає цій змінній, буде розв'язуючим. Знаходимо

$$\max\left\{\frac{11}{8}:\left(-\frac{1}{4}\right);\frac{1}{8}:\left(-\frac{3}{4}\right)\right\}=\max\left\{-\frac{11}{2};-\frac{1}{6}\right\}=-\frac{1}{6}.$$

Отже, стовпець, що відповідає змінній x_3 буде розв'язуючим стовпцем, а елемент $\left(-\frac{3}{4}\right)$ – розв'язуючим елементом. Переходимо до наступної таблиці з допомогою кроку симплекс-методу (табл.33).

Таблиця 33

Баз. зм.	*Зн. баз. зм.*	*небаз. зм.*	
		x_4	x_5
x_2	$\frac{19}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$
x_1	$\frac{5}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$
x_3	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{4}{3}$
z	$\frac{67}{6}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{1}{6}$
		Δ_4	Δ_5

Вектор $x^3=\left(\frac{5}{3},\frac{19}{6},\frac{2}{3},0,0\right)$ є оптимальним розв'язком задачі (52)-(54). Серед його дробових координат шукаємо ту, яка має найбільшу дробову частину:

$$\max\left\{\left\{\frac{5}{3}\right\};\left\{\frac{19}{6}\right\};\left\{\frac{2}{3}\right\}\right\}=\left\{\frac{2}{3};\frac{1}{6};\frac{2}{3}\right\}=\frac{2}{3}.$$

Можна побудувати правильний відтин за рядками таблиці 33, що відповідають змінним x_1, x_3. Побудуємо додаткове обмеження за рядком, що відповідає змінній x_1:

$$\left\{\frac{1}{3}\right\}x_4 + \left\{-\frac{1}{3}\right\}x_5 \geq \left\{\frac{5}{3}\right\}.$$

Звідси

$$\frac{1}{3}x_4 + \frac{2}{3}x_5 \geq \frac{2}{3}. \qquad (55)$$

Зведемо обмеження (55) до канонічної форми:

$$\frac{1}{3}x_4 + \frac{2}{3}x_5 - x_6 = \frac{2}{3},\ x_6 \geq 0.$$

Звідси

$$-\frac{1}{3}x_4 - \frac{2}{3}x_5 + x_6 = -\frac{2}{3},\ x_6 \geq 0. \qquad (56)$$

Додамо обмеження (56) до системи обмежень (53), (54). Отримаємо задачу: знайти

$$\max z = x_1 + 3x_2 \qquad (57)$$

за умов

$$\begin{aligned} -3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 2, \\ x_1 + 2x_2 + x_4 &= 8, \\ -\frac{1}{4}x_4 - \frac{3}{4}x_3 + x_5 &= -\frac{1}{2}, \\ -\frac{1}{3}x_4 - \frac{2}{3}x_5 + x_6 &= -\frac{2}{3}, \end{aligned} \qquad (58)$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0, x_6 \geq 0. \qquad (59)$$

Для цієї задачі вектор $\left(\frac{5}{3}, \frac{19}{6}, \frac{2}{3}, 0, 0, -\frac{2}{3}\right)$ є псевдопланом. Розв'яжемо задачу (57)-(59) двоїстим симплекс-методом. Для отримання симплекс-таблиці, що відповідає псевдоплану $\left(\frac{5}{3},\frac{19}{6},\frac{2}{3},0,0,-\frac{2}{3}\right)$ розширимо симплекс-таблицю 33 рядком, який буде відповідати першому обмеженню системи (56) (табл. 34).

Таблиця 34

Баз. зм.	*Зн. баз. зм.*	*небаз. зм.*	
		x_4	x_5
x_2	$\frac{19}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$
x_1	$\frac{5}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$
x_3	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{4}{3}$
x_6	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\boxed{-\frac{2}{3}}$
z	$\frac{67}{6}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{1}{6}$
		Δ_4	Δ_5

Рядок, що відповідає змінній x_6 буде розв'язуючим. Знаходимо $\max\left\{\frac{4}{3}:\left(-\frac{1}{3}\right);\frac{1}{6}:\left(-\frac{2}{3}\right)\right\}=\max\left\{-4;-\frac{1}{4}\right\}=-\frac{1}{4}$. Отже, стовпець, що відповідає змінній x_5 буде розв'язуючим стовпцем, а елемент $\left(-\frac{2}{3}\right)$ – розв'язуючим елементом. Переходимо до наступної таблиці з допомогою кроку симплекс-методу з розв'язуючим елементом $\left(-\frac{2}{3}\right)$ (табл. 35).

Таблиця 35

Баз. зм.	*Зн. баз. зм.*	*небаз. зм.*	
		x_4	x_6
x_2	3	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
x_1	2	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
x_3	2	1	–2
x_5	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$
z	11	$\frac{5}{4}$	$\frac{1}{4}$
		Δ_4	Δ_6

Вектор $x^4=(2,3,2,0,1,0)$ є оптимальним розв’язком задачі (57)-(59). Оскільки цей вектор є цілочисловим, то вектор $x^*=(2,3,2,0)$ буде оптимальним розв’язком задачі (46)-(49), вектор $x^{**}=(2,3)$ – оптимальним розв’язком задачі (42)-(45) і $\max z=11$.

<u>Приклад 14</u> ***(Другий метод Гоморі розв'язування частково цілочислової задачі лінійного програмування).*** Другим методом Гоморі розв'язати ЧЦЗЛП (частково цілочислову задачу лінійного програмування):

знайти

$$\max z = 0,25x_1 + x_2 \tag{60}$$

за умов

$$\begin{aligned} 0,5x_1 + x_2 &\le 1,75 \\ x_1 + 0,3x_2 &\le 1,5 \end{aligned} \tag{61}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0\,, \tag{62}$$

$$x_1, x_2 - \text{цілі}\,. \tag{63}$$

Розв'язання. Зведемо задачу (60)-(63) до канонічной форми:

$$\max z = 0,25x_1 + x_2 \tag{64}$$

$$\begin{aligned} 0,5x_1 + x_2 + x_3 &= 1,75, \\ x_1 + 0,3x_2 + x_4 &= 1,5, \end{aligned} \tag{65}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0\,, \tag{66}$$

$$x_1, x_2 - \text{цілі}\,. \tag{67}$$

Розв'яжемо задачу лінійного програмування (64)-(66) симплекс-методом. Очевидно, що задача (64)-(66) є задачею лінійного програмування зі стандартним базисом, а вектор $x^0 = (0;0;1,75;1,5)$ – її допустимим базисним розв'язком. Заповнюємо таблицю, що відповідає вектору x^0 (табл. 36)

Таблиця 36

$c_{баз.}$	*Баз. зм.*	*Зн. баз. зм.*	$c_{небаз.}$ *і небаз. зм.*	
			0,25	1
			x_1	x_2
0	x_3	1,75	0,5	$\boxed{1}$
0	x_4	1,5	1	0,3
	z	0	– 0,25	– 1
			Δ_1	Δ_2

Оскільки серед симплекс-різниць Δ_1, Δ_2 є від'ємні, то вектор x^0 не є оптимальним розв'язком задачі (64)-(66). Перейдемо до нового допустимого розв'язку задачі (64)-(66). Знаходимо $\min\{-0,25;-1\}=-1$. Тоді, стовпець, що відповідає змінній x_2 – розв'язуючий стовпець. Знаходимо $\min\{1,75:1;1,5:0,3\}=1,75$. Тоді рядок, що відповідає змінній x_3, буде розв'язуючим, а елемент 1, що стоїть на перетині розв'язуючого рядка та стовпця – розв'язуючим елементом.

Переходимо до наступної таблиці (табл.37)

Таблиця 37

Баз. зм.	*Зн. баз. зм.*	*небаз. зм.*	
		x_1	x_3
x_2	1,75	0,5	1
x_4	0,975	0,85	– 0,3
z	1,75	0,25	1
		Δ_1	Δ_3

Симплекс різниці Δ_1, Δ_3 – невід’ємні, тому вектор $x^1 = (0;1,75;0;0,975)$ є оптимальним розв’язком задачі (64)-(66). Не всі компоненти вектора x^1 задовольняють умову (67), тому він не є оптимальним розв’язком задачі (64)-(67). Оскільки $x_2 = 1,75 \notin Z$, то за елементами рядка, що відповідають цій змінній у таблиці 37 побудуємо правильний відтин:

$$\gamma_{21}x_1 + \gamma_{23}x_3 \geq \{1,75\}. \tag{68}$$

За умовою задачі на змінну x_1 накладено умову цілочисельності і $\{1,75\} > \{0,5\}$, то $\gamma_{21} = \{0,5\} = 0,5$. На змінну x_3 за умовою задачі не накладено умови цілочисельності, $1 > 0$, тому $\gamma_{23} = 1$. З урахуванням знайдених значень γ_{21}, γ_{23}, обмеження (68) перепишемо у вигляді:

$$0,5x_1 + x_3 \geq 0,75. \tag{69}$$

Зведемо обмеження (69) до канонічної форми:

$$0,5x_1 + x_3 - x_5 = 0,75,\ x_5 \geq 0,$$

$$-0,5x_1 - x_3 + x_5 = -0,75,\ x_5 \geq 0. \tag{70}$$

До системи обмежень (65), (66) задачі (64)-(66) приєднуємо обмеження (70). Отримаємо задачу:

$$\max z = 0,25x_1 + x_2 \tag{71}$$

$$\begin{gathered} 0,5x_1 + x_2 + x_3 = 1,75, \\ x_1 + 0,3x_2 + x_4 = 1,5, \\ -0,5x_1 - x_3 + x_5 = -0,75, \end{gathered} \tag{72}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0. \tag{73}$$

Вектор $(0;1,75;0;0,975;-0,75)$ є псевдопланом задачі (71)-(73). Для отримання симплекс-таблиці, що відповідає псевдоплану $(0;1,75;0;0,975;-0,75)$ задачі (71)-(73), розширюємо симплекс-таблицю 37 рядком, який відповідає обмеженню (70) (табл. 38).

Таблиця 38

Баз. зм.	*Зн. баз. зм.*	*небаз. зм.*	
		x_1	x_3
x_2	1,75	0,5	1
x_4	0,975	0,85	– 0,3
x_5	– 0,75	$\boxed{-0,5}$	– 1
z	1,75	0,25	1
		Δ_1	Δ_3

Оскільки значення змінної x_5 – від'ємне, то рядок, що відповідає цій змінній, буде розв'язуючим. Знаходимо

$$\max\left\{0,25:(-0,5);1:(-1)\right\}=-0,5.$$

Отже, стовпець, що відповідає змінній x_1 буде розв'язуючим стовпцем, а елемент $(-0,5)$ – розв'язуючим елементом. Переходимо до наступної таблиці з допомогою кроку симплекс-методу (табл. 39).

Таблиця 39

Баз. зм.	*Зн. баз. зм.*	*небаз. зм.*	
		x_5	x_3
x_2	1	1	0
x_4	– 0,3	1,7	$\boxed{-2}$
x_1	1,5	– 2	2
z	1,375	0,5	0,5
		Δ_5	Δ_3

Оскільки значення змінної x_4 – від'ємне, то рядок, що відповідає цій змінній, буде розв'язуючим. Стовпець, що відповідає змінній x_3 буде розв'язуючим стовпцем, а елемент (-2) – розв'язуючим елементом. Переходимо до наступної таблиці з допомогою кроку симплекс-методу (табл.40).

Таблиця 40

Баз. зм.	*Зн. баз. зм.*	*небаз. зм.*	
		x_5	x_4
x_2	1	1	0
x_3	0,15	– 0,85	– 0,5
x_1	1,2	– 0,3	1
z	1,3	0,925	0,25
		Δ_5	Δ_4

Вектор $x^2 = (1,2;1;0,15;0;0)$ є оптимальним розв'язком задачі (71)-(73). Оскільки $x_1 = 1,2 \notin Z$, то за елементами рядка, що відповідають цій змінній у таблиці 40 побудуємо правильний відтин:

$$\gamma_{15}x_5 + \gamma_{14}x_4 \ge \{1,2\}. \tag{74}$$

Оскільки за умовою задачі на змінні x_5, x_4 не накладено умову цілочисельності, $-0,3 < 0$, тому $\gamma_{15} = \dfrac{0,2}{1-0,2} \cdot 0,3 = 0,075$; $1 > 0$, тому $\gamma_{14} = 1$. Отже, з урахуванням знайдених значень γ_5, γ_4, обмеження (74) перепишемо у вигляді:

$$0,075x_5 + x_4 \ge 0,2. \tag{75}$$

Зведемо обмеження (75) до канонічної форми:

$$0,075x_5 + x_4 - x_6 = 0,2, \; x_6 \ge 0,$$

$$-0,075x_5 - x_4 + x_6 = -0,2\,,\ x_6 \ge 0\,. \tag{76}$$

До системи обмежень (72), (73) задачі (71)-(73) приєднуємо обмеження (76). Отримаємо задачу:

$$\max z = 0,25x_1 + x_2 \tag{77}$$

$$\begin{aligned} 0,5x_1 + x_2 + x_3 &= 1,75, \\ x_1 + 0,3x_2 + x_4 &= 1,5, \\ x_5 - 0,5x_1 - x_3 &= -0,75, \\ x_6 - 0,075x_5 - x_4 &= -0,2, \end{aligned} \tag{78}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0, x_5 \ge 0, x_6 \ge 0\,. \tag{79}$$

Для отримання симплекс-таблиці, що відповідає псевдоплану $\left(1,2;1;0,15;0;0;-0,2\right)$ задачі (77)-(79), розширюємо симплекс-таблицю 40 рядком, який відповідає обмеженню (76) (табл. 41).

Таблиця 41

Баз. зм.	*Зн. баз. зм.*	*небаз. зм.*	
		x_5	x_4
x_2	1	1	0
x_3	0,15	– 0,85	– 0,5
x_1	1,2	– 0,3	1
x_6	– 0,2	–0,075	$\boxed{-1}$
z	1,3	0,925	0,25
		Δ_5	Δ_4

Оскільки значення змінної x_6 – від'ємне, то рядок, що відповідає цій змінній, буде розв'язуючим. Знаходимо

$$\max\left\{0,925:\left(-0,075\right);0,25:\left(-1\right)\right\}=-0,25.$$

Отже, стовпець, що відповідає змінній x_4 буде розв’язуючим стовпцем, а елемент $\left(-1\right)$ – розв’язуючим елементом. Переходимо до наступної таблиці з допомогою кроку симплекс-методу (табл. 42).

Таблиця 42

Баз. зм.	*Зн. баз. зм.*	*небаз. зм.*	
		x_5	x_6
x_2	1	1	0
x_3	0,25	– 0,8125	– 0,5
x_1	1	– 0,375	1
x_4	0,2	0,075	-1
z	1,25	0,906	0,25
		Δ_5	Δ_6

Вектор $x^3=\left(1;1;0,25;0,2;0;0\right)$ є оптимальним розв’язком задачі (77)-(79). Оскільки компоненти цього вектора задовольняють умову (67), то вектор $x^*=\left(1;1;0,25;0,2\right)$ буде оптимальним розв’язком задачі (64)-(67), а вектор $x^{**}=\left(1;1\right)$ – оптимальним розв’язком задачі (60)-(63), а $\max z=1,25$.

<u>Приклад 15</u> ***(Третій метод Гоморі розв'язування повністю цілочислової задачі лінійного програмування).*** Третім методом Гоморі розв'язати ПЦЗЛП (повністю цілочислову задачу лінійного програмування):

знайти

$$\min z = 5x_1 + 4x_2 \tag{80}$$

за умов

$$\begin{aligned} 6x_1 - 2x_2 &\ge 5, \\ 5x_1 + 2x_2 &\ge 3, \\ 3x_1 + 4x_2 &\ge 4, \end{aligned} \tag{81}$$

$$x_1, x_2 \ge 0, \tag{82}$$

$$x_1, x_2 - \text{цілі}. \tag{83}$$

Розв'язання. Зведемо задачу (80)-(83) до канонічної форми:

знайти

$$\max(-z) = -5x_1 - 4x_2 \tag{84}$$

за умов

$$\begin{aligned} 6x_1 - 2x_2 - x_3 &= 5, \\ 5x_1 + 2x_2 - x_4 &= 3, \\ 3x_1 + 4x_2 - x_5 &= 4, \end{aligned} \tag{85}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0, \tag{86}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 - \text{цілі}. \tag{87}$$

Розв'яжемо задачу лінійного програмування (84)-(86).

Помножимо кожне обмеження (85) на (–1):

$$\begin{aligned} -6x_1 + 2x_2 + x_3 &= -5, \\ -5x_1 - 2x_2 + x_4 &= -3, \\ -3x_1 - 4x_2 + x_5 &= -4, \end{aligned}$$

Вектори-умов $A_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $A_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $A_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ – одиничні лінійно незалежні вектори, тому вектор $x^0 = (0, 0, -5, -3, -4)$ – псевдоплан для задачі (84)-(86), причому його координати – цілі числа. Заповнюємо симплекс-таблицю, що відповідає вектору x^0 (табл. 43).

Таблиця 43

$c_{баз.}$	*Баз. зм.*	*Зн. баз. зм.*	$c_{небаз.}$ *і небаз. зм.*	
			–5	–4
			x_1	x_2
0	x_3	–5	–6	2
0	x_4	–3	–5	–2
0	x_5	–4	–3	–4
	z	0	5	4
			Δ_1	Δ_2

Симплекс-різниці $\Delta_1 \geq 0$, $\Delta_2 \geq 0$, а серед компонент вектора x^0 є від'ємні, тому вектор x^0 не задовольняє умову (86).

Основною ідеєю третього методу Гоморі є перехід за допомогою двоїстого симплекс-методу до «кращого» псевдоплану, не порушуючи при цьому умову (87). В якості розв'язуючого елемента у цьому методі обирається –1. Щоб забезпечити наявність –1, як розв'язуючого елемента, будується додаткове обмеження.

Серед від'ємних координат вектора x^0 обираємо найменшу: $\min\{-5, -3, -4\} = -5$. Рядок, що відповідає $x_3 = -5$ містить один від'ємний елемент, то $\alpha = |-6| = 6$. За елементами цього рядка при $\alpha = 6$, будуємо правильний відтин:

$$\left[-\frac{5}{6}\right] - \left[-\frac{6}{6}\right]x_1 - \left[\frac{2}{6}\right]x_2 \geq 0, \text{ або } -1 + x_1 - 0 \cdot x_2 \geq 0. \qquad (88)$$

Зведемо обмеження (88) до канонічної форми:

$$x_1 - 0 \cdot x_2 - x_6 = 1,\ x_6 \geq 0,$$

$$-x_1 + 0 \cdot x_2 + x_6 = -1,\ x_6 \geq 0. \qquad (90)$$

Розширимо симплекс-таблицю 43 рядком, який буде відповідати обмеженню (90) (див. табл. 44) та обираємо його за розв'язуючий рядок (табл. 44).

Таблиця 44

Баз. зм.	*Зн. баз. зм.*	x_1	x_2	
x_3	–5	–6	2	
x_4	–3	–5	–2	
x_5	–4	–3	–4	
x_6	–1	$\boxed{-1}$	0	←
$-z$	0	5	4	
		Δ_1	Δ_2	
		↑		

Використовуючи алгоритм двоїстого симплекс-методу, обираємо стовпець, що відповідає змінній x_1 за розв'язуючий та переходимо до наступної симплекс-таблиці (табл. 45).

Таблиця 45

Баз. зм.	*Зн. баз. зм.*	x_6	x_2
x_3	1	–6	2
x_4	2	–5	–2
x_5	–1	–3	–4
x_1	1	–1	0
$-z$	–5	5	4
		Δ_6	Δ_2

Псевдоплан $(1,0,1,2,-1,0)$ містить від'ємні компоненти. Оскільки $x_5 = -1$, то по рядку, що відповідає цій змінній побудуємо додаткове обмеження. Серед від'ємних елементів цього рядка обираємо найбільше за модулем та покладемо $\alpha = \max\{|-3|,|-4|\} = 4$. За елементами рядка таблиці 45, що відповідає змінній x_5, при $\alpha = \max\{|-3|,|-4|\} = 4$, будуємо правильний відтин:

$$\left[-\frac{1}{4}\right] - \left[-\frac{3}{4}\right]x_6 - \left[-\frac{4}{4}\right]x_2 \geq 0\text{, або } -1 + x_6 + x_2 \geq 0. \tag{91}$$

Зведемо обмеження (91) до канонічної форми:

$$x_6 + x_2 - x_7 = 1,\ x_7 \geq 0,$$

$$-x_6 - x_2 + x_7 = -1,\ x_7 \geq 0. \tag{92}$$

Розширимо симплекс-таблицю 45 рядком, який буде відповідати обмеженню (92) (див. табл. 46) та обираємо його за розв'язуючий рядок (табл. 46).

Таблиця 46

Баз. зм.	*Зн. баз. зм.*	x_6	x_2
x_3	1	–6	2
x_4	2	–5	–2
x_5	–1	–3	–4
x_1	1	–1	0
x_7	–1	–1	$\boxed{-1}$
$-z$	–5	5	4
		Δ_6	Δ_2

Використовуючи алгоритм двоїстого симплекс-методу переходимо до наступної симплекс-таблиці (табл. 47).

Таблиця 47

Баз. зм.	*Зн. баз. зм.*	x_6	x_7
x_3	–1	–8	2
x_4	4	–3	–2
x_5	3	1	–4
x_1	1	–1	0
x_2	1	1	–1
$-z$	–9	1	4
		Δ_6	Δ_7

Псевдоплан $(1,1,-1,4,3,0,0)$ містить від'ємні компоненти, тому виконаємо ще одну ітерацію третього методу Гоморі. За елементами рядка, що відповідає змінній x_3, при $\alpha = 8$, будуємо правильний відтин:

$$\left[-\frac{1}{8}\right] - \left[-\frac{8}{8}\right] x_6 - \left[\frac{2}{8}\right] x_7 \geq 0, \text{ або } -1 + x_6 - 0 \cdot x_7 \geq 0. \quad (93)$$

Зведемо обмеження (93) до канонічної форми:

$$x_6 - 0 \cdot x_7 - x_8 = 1, \; x_8 \geq 0.$$

$$x_8 - x_6 + 0 \cdot x_7 = -1, \; x_8 \geq 0. \quad (94)$$

Розширимо симплекс-таблицю 47 рядком, який буде відповідати обмеженню (94) (див. табл. 48) та обираємо його за розв'язуючий рядок (табл. 48).

Таблиця 48

Баз. зм.	*Зн. баз. зм.*	x_6	x_7
x_3	–1	–8	2
x_4	4	–3	–2
x_5	3	1	–4
x_1	1	–1	0
x_2	1	1	–1
x_8	–1	$\boxed{-1}$	0
$-z$	–9	1	4

Використовуючи алгоритм двоїстого симплекс-методу переходимо до наступної симплекс-таблиці (табл. 49).

Таблиця 49

Баз. зм.	*Зн. баз. зм.*	x_8	x_7
x_3	7	–8	2
x_4	7	–3	–2
x_5	2	1	–4
x_1	2	–1	0
x_2	0	1	–1
x_6	1	–1	0
$-z$	–10	1	4
		Δ_8	Δ_7

Псевдоплан $(2;0;7;7;2;1;0;0)$ не містить від'ємних координат, а, отже, вектор $\overline{x}=(2;0;7;7;2)$ – оптимальний розв'язок задачі (84)-(87), вектор $x^*=(2;0)$ – оптимальний розв'язок задачі (80)-(83), $\max(-z)=-10$, а $\min z=10$.

<u>Приклад 16</u> ***(Метод Дальтона-Ллевеліна розв'язування задачі дискретного програмування)*** Методом Дальтона-Ллевеліна розв'язати задачу дискретного програмування:

знайти

$$\max z = x_1 + x_2, \tag{95}$$

за умов

$$\begin{aligned} 4x_1 - x_2 &\le 17, \\ -x_1 + 4x_2 &\le 17, \end{aligned} \tag{96}$$

$$x_1 \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}, \tag{97}$$

$$x_2 \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}. \tag{98}$$

Розв'язання. Зведемо задачу (95)-(98) до канонічної форми:

знайти

$$\max z = x_1 + x_2, \tag{99}$$

за умов

$$\begin{aligned} 4x_1 - x_2 + x_3 &= 17, \\ -x_1 + 4x_2 + x_4 &= 17, \end{aligned} \tag{100}$$

$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4}, \tag{101}$$

$$x_1 \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}, \tag{102}$$

$$x_2 \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}. \tag{103}$$

Розв'яжемо послаблену задачу лінійного програмування (99)-(101).

Вектор $x^0 = (0,0,17,17)$ буде допустимим базисним розв'язком для задачі (99)-(101). Заповнюємо симплекс-таблицю, яка відповідає вектору x^0 (табл. 50).

Таблиця 50

$c_{баз.}$	*Баз. зм.*	*Зн. баз. зм.*	$c_{небаз.}$ *і небаз. зм.*	
			1	1
			x_1	x_2
0	x_3	17	$\boxed{4}$	-1
0	x_4	17	-1	4
	z	0	-1	-1
			Δ_1	Δ_2

Оскільки симплекс-різниці від'ємні, то переходимо до наступної симплекс-таблиці, використовуючи крок симплекс-методу. Оберемо стовпець, що відповідає змінній x_1 за розв'язуючий. Тоді рядок, що відповідає змінній x_3 – розв'язуючий рядок (табл. 51).

Таблиця 51

Баз. зм.	*Зн. баз. зм.*	*небаз. зм.*	
		x_3	x_2
x_1	$\frac{17}{4}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$
x_4	$\frac{85}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\boxed{\frac{15}{4}}$
z	$\frac{17}{4}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{5}{4}$
		Δ_3	Δ_2

Оскільки $\Delta_2 = -\frac{5}{4}$, тому допустимий базисний розв'язок $x^1 = \left(\frac{17}{4}, 0, 0, \frac{85}{4}\right)$ не є оптимальним для задачі (99)-(101), а, отже, використовуючи крок симплекс-методу переходимо до наступної симплекс-таблиці (табл. 52).

Таблиця 52

Баз. зм.	*Зн. баз. зм.*	*небаз. зм.*	
		x_3	x_4
x_1	$\frac{17}{3}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{1}{15}$
x_2	$\frac{17}{3}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{4}{15}$
z	$\frac{34}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
		Δ_3	Δ_4

Оскільки Δ_3, Δ_4 – невід'ємні, то вектор $x^2 = \left(\frac{17}{3}, \frac{17}{3}, 0, 0\right)$ – оптимальний розв'язок послабленої задачі (99)-(101).

Перевіримо, чи вектор x^2 задовольняє умови (102), (103).

$$x_1 = \frac{17}{3} \notin \{0,1,2,3,4,5,6,7,8\},$$
$$x_2 = \frac{17}{3} \notin \{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}.$$

Умови (102), (103) не виконуються. Побудуємо правильний відтин по рядку, що відповідає змінній x_1: $5 < x_1 = \frac{17}{3} = 5\frac{2}{3} < 6$, $x_1^{\nu} = 5$, $x_1^{\nu+1} = 6$. Правильний відтин запишеться у вигляді:

$$\gamma_{13}x_3 + \gamma_{14}x_4 \geq \gamma_1, \tag{104}$$

де $\gamma_{13} = \frac{4}{15}$, оскільки $\alpha_{13} = \frac{4}{15} > 0$; $\gamma_{14} = \frac{1}{15}$, оскільки $\alpha_{14} = \frac{1}{15} > 0$;

$\gamma_1 = \beta_1 - x_1^{\nu} = \frac{17}{3} - 5 = \frac{2}{3}$. Тому обмеження (104) запишеться у вигляді:

$$\frac{4}{15}x_3 + \frac{1}{15}x_4 \geq \frac{2}{3}. \tag{105}$$

Зведемо обмеження (105) до канонічної форми:

$$-\frac{4}{15}x_3 - \frac{1}{15}x_4 + x_5 = -\frac{2}{3},\ x_5 \geq 0. \tag{106}$$

Приєднавши обмеження (106) до системи обмежень (100), (101), одержимо нову задачу лінійного програмування:

знайти

$$\max z = x_1 + x_2, \tag{107}$$

за умов

$$\begin{aligned} 4x_1 - x_2 + x_3 &= 17, \\ -x_1 + 4x_2 + x_4 &= 17, \\ x_5 - \frac{4}{15}x_3 - \frac{1}{15}x_4 &= -\frac{2}{3}, \end{aligned} \tag{108}$$

$$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,5}. \tag{109}$$

Розв’яжемо задачу (107)-(109). Згідно алгоритму методу Дальтона-Ллевеліна розширюємо симплекс-таблицю 52 за рахунок рядка, що відповідає обмеженню (106) та продовжуємо розв’язувати двоїстим сиплекс-методом (табл. 53).

Таблиця 53

Баз. зм.	*Зн. баз. зм.*	*небаз. зм.*	
		x_3	x_4
x_1	$\frac{17}{3}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{1}{15}$
x_2	$\frac{17}{3}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{4}{15}$
x_5	$-\frac{2}{3}$	$\boxed{-\frac{4}{15}}$	$-\frac{1}{15}$ ←
z	$\frac{34}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
		Δ_3 ↑	Δ_4

Обираємо рядок, що відповідає змінній x_5 за розв’язуючий. Знаходимо $\max\left\{\frac{1}{3}:\left(-\frac{4}{15}\right);\frac{1}{3}:\left(-\frac{1}{15}\right)\right\}=-\frac{5}{4}$. Стовпець, що відповідає змінній x_3 буде розв’язуючим стовпцем. Переходимо до наступної симплекс-таблиці (табл. 54).

Таблиця 54

Баз. зм.	*Зн. баз. зм.*	*небаз. зм.*	
		x_5	x_4
x_1	5	1	0
x_2	$\frac{11}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
x_3	$\frac{5}{2}$	$-\frac{15}{4}$	$\frac{1}{4}$
z	$\frac{21}{2}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{1}{4}$
		Δ_5	Δ_4

Оскільки усі значення псевдоплану $x^3 = \left(5, \frac{11}{2}, \frac{5}{2}, 0, 0\right)$ – невід'ємні, то x^3 є оптимальним розв'язком задачі (107)-(109). Для вектора x^3 перевіримо виконання умов (102), (103):

$$x_1 = 5 \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8\},$$
$$x_2 = \frac{11}{2} \notin \{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}.$$

Оскільки для x^3 умова (103) не виконується, то побудуємо додаткове обмеження по рядку, що відповідає змінній x_2: $5 < x_2 = \frac{11}{2} = 5\frac{1}{2} < 6$, $x_2^\nu = 5$, $x_2^{\nu+1} = 6$. Правильний відтин запишеться у вигляді:

$$\gamma_{25}x_5 + \gamma_{24}x_4 \geq \gamma_2, \tag{110}$$

де $\gamma_{25} = \frac{1}{4}$, оскільки $\alpha_{25} = \frac{1}{4} > 0$; $\gamma_{24} = \frac{1}{4}$, так як $\alpha_{24} = \frac{1}{4} > 0$; $\gamma_2 = \beta_2 - x_2^\nu = \frac{11}{2} - 5 = \frac{1}{2}$. Тому обмеження (110) запишеться у вигляді:

$$\frac{1}{4}x_5 + \frac{1}{4}x_4 \geq \frac{1}{2}. \tag{104}$$

Зведемо обмеження (111) до канонічної форми:

$$-\frac{1}{4}x_5 - \frac{1}{4}x_4 + x_6 = -\frac{1}{2},\ x_6 \geq 0. \tag{112}$$

Приєднавши обмеження (112) до системи обмежень (108), (109), одержимо нову задачу лінійного програмування:

знайти

$$\max z = x_1 + x_2, \tag{113}$$

за умов

$$\begin{aligned} 4x_1 - x_2 + x_3 &= 17, \\ -x_1 + 4x_2 + x_4 &= 17, \\ x_5 - \frac{4}{15}x_3 - \frac{1}{15}x_4 &= -\frac{2}{3}, \\ x_6 - \frac{1}{4}x_5 - \frac{1}{4}x_4 &= -\frac{1}{2}, \end{aligned} \qquad (114)$$

$$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,6}. \qquad (115)$$

Розв'яжемо задачу (113)-(115). Для цієї задачі вектор $\left(5, \frac{11}{2}, \frac{5}{2}, 0, 0, -\frac{1}{2}\right)$ буде псевдопланом. Згідно алгоритму методу Дальтона-Ллевеліна розширюємо симплекс-таблицю за рахунок рядка, що відповідає додатковому обмеженню (109) та продовжуємо розв'язувати двоїстим сиплекс-методом (табл. 55).

Таблиця 55

Баз. Зм.	*Зн. Баз. Зм.*	*Небаз. зм.*	
		x_5	x_4
x_1	5	1	0
x_2	$\frac{11}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
x_3	$\frac{5}{2}$	$-\frac{15}{4}$	$\frac{1}{4}$
x_6	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$\boxed{-\frac{1}{4}}$ ←
z	$\frac{21}{2}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{1}{4}$
		Δ_5	Δ_4 ↑

Обираємо рядок, що відповідає змінній x_6 за розв'язуючий. Знаходимо $\max\left\{\frac{5}{4}:\left(-\frac{1}{4}\right);\frac{1}{4}:\left(-\frac{1}{4}\right)\right\}=-1$. Стовпець, що відповідає змінній x_4 буде розв'язуючим стовпцем. Переходимо до наступної симплекс-таблиці (табл. 56).

Таблиця 56

Баз. Зм.	*Зн. Баз. Зм.*	*Небаз. зм.*	
		x_5	x_6
x_1	5	1	0
x_2	5	0	1
x_3	2	– 4	1
x_4	2	1	– 4
z	10	1	1
		Δ_5	Δ_6

Вектор $x^4=(5,5,2,0,2,0)$ є оптимальним розв'язком задачі (113)-(115). Перевіримо, чи вектор x^4 задовольняє умови (102), (103):

$$x_1=5\in\{0,1,2,3,4,5,6,7,8\},$$
$$x_2=5\in\{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}.$$

Умови (102), (103) виконуються. Тому вектор $x^*=(5,5,2,0)$ – оптимальний розв'язок для задачі (99)-(103), а вектор $x^{**}=(5,5)$ – оптимальний розв'язок задачі (95)-(98) і $\max z=10$.

<u>Приклад 17</u> ***(Розв'язування матричної гри, що допускає розв'язок у чистих стратегіях).*** Знайти розв'язок матричної гри, заданої матрицею $C = \begin{Vmatrix} 10 & 6 & 5 \\ 8 & 7 & 9 \\ 7 & 5 & 6 \end{Vmatrix}$ виграшів другого гравця.

Розв'язання. Будемо позначати через c_{ij} елемент матриці C, що знаходиться в i-му рядку та j-му стовпці цієї матриці, $i = \{1, 2, 3\}$, $j = \{1, 2, 3\}$. Знайдемо верхню та нижню ціни гри:

$$\bar{v} = \min_{1 \le i \le 3} \max_{1 \le j \le 3} c_{ij} = \min\{10; 9; 7\} = 7 = c_{31},$$

$$\underline{v} = \max_{1 \le j \le 3} \min_{1 \le i \le 3} c_{ij} = \max\{7; 5; 5\} = 7 = c_{31}.$$

Оскільки $\bar{v} = \underline{v} = 7 = c_{31}$, то гра допускає розв'язок у чистих стратегіях. Оптимальною чистою стратегією першого гравця буде $i^* = 3$, оптимальною чистою стратегією другого гравця буде $j^* = 1$, пара $(i^*, j^*) = (3,1)$ є сідловою точкою матриці C, а ціна гри буде $v = \bar{v} = \underline{v} = 7$.

Це означає, що коли другий гравець буде вибирати перший стовпець, то він гарантовано отримає виграш принаймні 7 одиниць. Якщо перший гравець буде обирати третій рядок, то він перешкодить другому гравцеві виграти більше 7 одиниць. Очевидно, що коли один із гравців відступить від своєї оптимальної чистої стратегії, а другий буде дотримуватись своєї оптимальної чистої стратегії, то становище гравця, що відступає від оптимального вибору, лише може погіршитись.

<u>Приклад 18</u> ***(Розв'язування матричної гри методами лінійного програмування).*** Знайти розв'язок матричної гри заданої матрицею $C = \begin{Vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{Vmatrix}$ виграшів другого гравця.

Розв'язання. Знайдемо верхню та нижню ціни гри:

$$\bar{v} = \min_{1 \le i \le 2} \max_{1 \le j \le 3} c_{ij} = \min\{4;3\} = 3;$$

$$\underline{v} = \max_{1 \le j \le 3} \min_{1 \le i \le 2} c_{ij} = \max\{1;2;1\} = 2,$$

де c_{ij} – елемент матриці C, що знаходиться в i -му рядку та j -му стовпці цієї матриці, $i = \{1,2\}$, $j = \{1,2,3\}$.

Оскільки $\bar{v} \ne \underline{v}$, то ця гра не має розв'язку в чистих стратегіях (платіжна матриця C не має сідлової точки).

Знайдемо оптимальні змішанні стратегії гравців та ціну цієї гри в змішаних стратегіях.

Нехай вектор $x = (x_1, x_2)$ – змішана стратегія першого гравця, а $y = (y_1, y_2, y_3)$ – змішана стратегія другого гравця.

Позначимо через X та Y, відповідно, множини змішаних стратегій першого та другого гравців, тобто:

$$X = \{x = (x_1, x_2) \in R^2 : x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_1 + x_2 = 1\},$$

$$Y = \{y = (y_1, y_2, y_3) \in R^3 : y_1 \ge 0, y_2 \ge 0, y_3 \ge 0, y_1 + y_2 + y_3 = 1\}.$$

Побудуємо функцію, яка визначає середній виграш другого гравця:

$$F(x, y) = 4x_1y_1 + 3x_1y_2 + x_1y_3 + x_2y_1 + 2x_2y_2 + 3x_2y_3.$$

Для відшукання оптимальної змішаної стратегії другого гравця ставиться задача відшукання величини:

$$\min_{x\in X}\max_{y\in Y} F(x,y) = \min_{\substack{x_1+x_2=1,\\ x_1\ge 0, x_2\ge 0}} \max_{\substack{y_1+y_2+y_3=1,\\ y_1\ge 0, y_2\ge 0, y_3\ge 0}} \left(4x_1y_1+3x_1y_2+x_1y_3+x_2y_1+2x_2y_2+3x_2y_3\right), \quad (116)$$

Для відшукання оптимальної змішаної стратегії першого гравця ставиться задача відшукання величини:

$$\max_{y\in Y}\min_{x\in X} F(x,y) =$$
$$= \max_{\substack{y_1+y_2+y_3=1,\\ y_1\ge 0, y_2\ge 0, y_3\ge 0}} \min_{\substack{x_1+x_2=1,\\ x_1\ge 0, x_2\ge 0}} \left(4x_1y_1+3x_1y_2+x_1y_3+x_2y_1+2x_2y_2+3x_2y_3\right). \quad (115)$$

Задача (116) еквівалентна такій задачі лінійного програмування:

знайти

$$\min z = x_3 \quad (118)$$

за умов

$$\begin{aligned} 4x_1+x_2 &\le x_3,\\ 3x_1+2x_2 &\le x_3,\\ x_1+3x_2 &\le x_3,\\ x_1+x_2 &= 1, \end{aligned} \quad (119)$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \quad (120)$$

Задача (117) еквівалентна такій задачі лінійного програмування:

знайти

$$\max \omega = y_4 \quad (121)$$

за умов

$$\begin{aligned} 4y_1+3y_2+y_3 &\ge y_4,\\ y_1+2y_2+3y_3 &\ge y_4,\\ y_1+y_2+y_3 &= 1, \end{aligned} \quad (122)$$

$$y_1 \ge 0,\ y_2 \ge 0,\ y_3 \ge 0. \quad (123)$$

Знайдемо розв’язок задачі (118)-(120).

Оскільки на змінну x_3 не накладається жодних умов то подамо її як різницю двох змінних $x_3 = x_3' - x_3''$, $x_3' \geq 0$, $x_3'' \geq 0$. Отримаємо задачу:

знайти

$$\min z = x_3' - x_3'' \tag{124}$$

за умов

$$\begin{gathered} 4x_1 + x_2 \leq x_3' - x_3'', \\ 3x_1 + 2x_2 \leq x_3' - x_3'', \\ x_1 + 3x_2 \leq x_3' - x_3'', \\ x_1 + x_2 = 1, \end{gathered} \tag{125}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3' \geq 0,\ x_3'' \geq 0. \tag{126}$$

Провівши відповідні перетворення, зведемо задачу (124)-(126) до канонічної форми:

$$\max(-z) = -x_3' + x_3'' \tag{127}$$

$$\begin{gathered} 4x_1 + x_2 - x_3' + x_3'' + z_1 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3' + x_3'' + z_2 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - x_3' + x_3'' + z_3 = 0, \\ x_1 + x_2 = 1, \end{gathered} \tag{128}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3' \geq 0,\ x_3'' \geq 0,\ z_1 \geq 0,\ z_2 \geq 0,\ z_3 \geq 0. \tag{129}$$

Скористаємося методом штучного базису відшукання допустимого базисного розв’язку задачі (127)-(129). Для цього розв’яжемо допоміжну задачу:

знайти

$$\max \lambda = -z_4 \tag{130}$$

за умов

$$\begin{aligned} 4x_1 + x_2 - x_3' + x_3'' + z_1 = 0,\\ 3x_1 + 2x_2 - x_3' + x_3'' + z_2 = 0,\\ x_1 + 3x_2 - x_3' + x_3'' + z_3 = 0,\\ x_1 + x_2 + z_4 = 1, \end{aligned} \tag{131}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3' \geq 0,\ x_3'' \geq 0,\ z_1 \geq 0,\ z_2 \geq 0,\ z_3 \geq 0,\ z_4 \geq 0. \tag{132}$$

Вектор $x^0 = (0,0,0,0,0,0,0,1)$ буде допустимим базисним розв'язком для задачі (130)-(132). Заповнюємо симплекс-таблицю, що відповідає цьому розв'язку (табл. 57).

Таблиця 57

$c_{баз.}$	*Баз. зм.*	*Зн. баз зм.*	$c_{небаз.}$ *і небаз. зм.*			
			0	0	0	0
			x_1	x_2	x_3'	x_3''
0	z_1	0	4	1	–1	1
0	z_2	0	3	2	–1	1
0	z_3	0	$\boxed{1}$	3	–1	1
–1	z_4	1	1	1	0	0
	λ	–1	–1	–1	0	0
			Δ_{x_1}	Δ_{x_2}	$\Delta_{x_3'}$	$\Delta_{x_3''}$

Оскільки серед симплексних різниць є від'ємні, то з допомогою кроку симплекс-методу перейдемо до наступної симплекс-таблиці. Серед від'ємних симплексних різниць вибираємо найменшу $\min\{-1;-1\} = -1$. За розв'язуючий можна обрати один із стовпців, що відповідають змінним x_1 та x_2. Оберемо стовпець, що відповідає змінній x_1. Знаходимо $\min\{0:4;0:3;0:1;1:1\}=\{0;0;0;1\}=0$. Отже, за розв'язуючий рядок можна обрати рядок, що відповідає змінним z_1, z_2, z_3. Оберемо рядок, що відповідає змінній z_3. Тоді елемент 1, що є перетином розв'язуючого рядка та розв'язуючого стовпця, є розв'язуючим елементом. Переходимо до наступної симплекс-таблиці (табл. 58).

Таблиця 58

Баз. зм.	*Зн. баз зм.*	*небаз. зм.*			
		z_3	x_2	x_3'	x_3''
z_1	0	–4	–11	3	–3
z_2	0	–3	–7	$\boxed{2}$	–2
x_1	0	1	3	–1	1
z_4	1	–1	–2	1	–1
λ	–1	1	2	–1	1
		Δ_{z_3}	Δ_{x_2}	$\Delta_{x_3'}$	$\Delta_{x_3''}$

Оскільки серед симплекс-різниць є від'ємна, то з допомогою кроку симплекс-методу переходимо до наступної симплекс-таблиці. Стовпець, що відповідає від'ємній симплексній різниці $\Delta_{x_3'}$ буде розв'язуючим. Знаходимо $\min\{0:3;0:2;1:1\}=\{0;0;1\}=0$. Отже, за розв'язуючий рядок можна обрати рядок, що відповідає змінним z_1, z_2. Оберемо рядок, що відповідає змінній z_2. Тоді елемент 2, що є перетином розв'язуючого рядка та розв'язуючого стовпця є розв'язуючим елементом. Переходимо до наступної симплекс-таблиці (табл. 59).

Таблиця 59

Баз. зм.	*Зн. баз зм.*	*небаз. зм.*			
		z_3	x_2	z_2	x_3''
z_1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	0
x_3'	0	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{7}{2}$	$\frac{1}{2}$	–1
x_1	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
z_4	1	$\frac{1}{2}$	$\boxed{\frac{3}{2}}$	$-\frac{1}{2}$	0 ←
λ	–1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
		Δ_{z_3}	Δ_{x_2} ↑	Δ_{z_2}	$\Delta_{x_3''}$

Оскільки серед симплекс-різниць є від’ємні, то з допомогою кроку симплекс-методу переходимо до наступної симплекс-таблиці. Знаходимо $\min\left\{-\frac{1}{2};-\frac{3}{2}\right\}=-\frac{3}{2}$. Стовпець, що відповідає змінній x_2 буде розв’язуючим. Оскільки розв’язуючий стовпець містить один додатній елемент $\frac{3}{2}$, то рядок, що відповідає змінній z_4 буде розв’язуючим, а сам елемент $\frac{3}{2}$ буде розв’язуючим елементом. Переходимо до наступної симплексної таблиці (табл. 60).

Таблиця 60

Баз. зм.	*Зн. баз зм.*	*небаз. зм.*			
		z_3	z_4	z_2	x_3''
z_1	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{5}{3}$	0
x_3'	$\frac{7}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{7}{3}$	$-\frac{2}{3}$	–1
x_1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0
x_2	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0
λ	0	0	1	0	0
		Δ_{z_3}	Δ_{z_4}	Δ_{z_2}	$\Delta_{x_3''}$

Оскільки симплекс-різниці невід'ємні, то вектор $x^3 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{7}{3}, 0, \frac{1}{3}, 0, 0, 0\right)$ є оптимальним розв'язком задачі (130)- (132). Оскільки штучна змінна z_4 рівна нулю, то вектор $\tilde{x}^0 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{7}{3}, 0, \frac{1}{3}, 0, 0\right)$ є допустимим базисним розв'язком задачі (127)-(129). Перейдемо до розв'язування цієї задачі. Скористаємося таблицею 60. Викреслимо стовпець, що відповідає штучній змінній z_4 та перерахуємо симплекс-різниці, врахувавши коефіцієнти цільової функції (127) (табл. 61).

Таблиця 61

$c_б$	*Баз. зм.*	*Зн. баз зм.*	$c_{небаз.}$ *і небаз. зм.*		
			0	0	1
			z_3	z_2	x_3''
0	z_1	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{5}{3}$	0
–1	x_3'	$\frac{7}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	–1
0	x_1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0
0	x_2	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0
	$-z$	$-\frac{7}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0
			$\tilde{\Delta}_{z_3}$	$\tilde{\Delta}_{z_2}$	$\tilde{\Delta}_{x_3''}$

Обраховуємо $-z$, $\tilde{\Delta}_{z_3}$, $\tilde{\Delta}_{x_3'}$, $\tilde{\Delta}_{z_2}$:

$$-z = 0\cdot\frac{1}{3} + (-1)\cdot\frac{7}{3} + 0\cdot\frac{1}{3} + 0\cdot\frac{2}{3} = -\frac{7}{3},$$

$$\tilde{\Delta}_{z_3} = 0\cdot\frac{2}{3} + (-1)\cdot\left(-\frac{1}{3}\right) + 0\cdot\left(-\frac{1}{3}\right) + 0\cdot\frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3},$$

$$\tilde{\Delta}_{z_2} = 0\cdot\left(-\frac{5}{3}\right) + (-1)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right) + 0\cdot\frac{1}{3} + 0\cdot\left(-\frac{1}{3}\right) - 0 = \frac{2}{3},$$

$$\tilde{\Delta}_{x_3''} = 0\cdot 0 + (-1)\cdot(-1) + 0\cdot 0 + 0\cdot 0 - 1 = 0.$$

Оскільки симплексні різниці невід’ємні, то вектор $\tilde{x}^0 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{7}{3}, 0, \frac{1}{3}, 0, 0\right)$ є оптимальним розв’язком задачі (124)-(126), а, отже, $x^* = \left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$ – оптимальна змішана стратегія першого гравця і $v = \min z = \frac{7}{3}$ – ціна гри в змішаних стратегіях.

Розв'яжемо задачу (121)-(123). Оскільки на змінну y_4 не накладено жодних умов, то подамо її як різницю двох змінних $y_4 = y_4' - y_4''$, $y_4' \ge 0$, $y_4'' \ge 0$. Отримаємо задачу:

знайти

$$\max \omega = y_4' - y_4'' \tag{133}$$

за умов

$$\begin{gathered} 4y_1 + 3y_2 + y_3 \ge y_4' - y_4'', \\ y_1 + 2y_2 + 3y_3 \ge y_4' - y_4'', \\ y_1 + y_2 + y_3 = 1, \end{gathered} \tag{134}$$

$$y_1 \ge 0,\ y_2 \ge 0,\ y_3 \ge 0, y_4' \ge 0,\ y_4'' \ge 0. \tag{135}$$

Провівши відповідні перетворення, зведемо задачу (133)-(135) до канонічної форми:

знайти

$$\max \omega = y_4' - y_4'' \tag{136}$$

за умов

$$\begin{gathered} -4y_1 - 3y_2 - y_3 + y_4' - y_4'' + z_1 = 0, \\ -y_1 - 2y_2 - 3y_3 + y_4' - y_4'' + z_2 = 0, \\ y_1 + y_2 + y_3 = 1, \end{gathered} \tag{137}$$

$$y_1 \ge 0,\ y_2 \ge 0,\ y_3 \ge 0, y_4' \ge 0,\ y_4'' \ge 0,\ z_1 \ge 0,\ z_2 \ge 0. \tag{138}$$

Скористаємося методом штучного базису відшукання допустимого базисного розв'язку задачі лінійного програмування (136)-(138). Для цього розв'яжемо задачу:

знайти

$$\max \lambda = -z_3 \tag{139}$$

за умов

$$\begin{gathered} -4y_1 - 3y_2 - y_3 + y_4{}' - y_4{}'' + z_1 = 0, \\ -y_1 - 2y_2 - 3y_3 + y_4{}' - y_4{}'' + z_2 = 0, \\ y_1 + y_2 + y_3 + z_3 = 1, \end{gathered} \tag{140}$$

$$y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0,\ y_3 \geq 0, y_4{}' \geq 0,\ y_4{}'' \geq 0,\ z_1 \geq 0,\ z_2 \geq 0,\ z_3 \geq 0. \tag{141}$$

Вектор $y^0 = (0,0,0,0,0,0,0,1)$ буде допустимим базисним розв'язком для задачі (139)-(141). Побудуємо симплекс-таблицю, яка йому відповідає (табл. 62).

Таблиця 62

$c_б$	*Баз. зм.*	*Зн. баз зм.*	$c_{небаз.}$ *і небаз. зм.*				
			0	0	0	0	0
			y_1	y_2	y_3	y_4'	y_4''
0	z_1	0	–4	–3	–1	1	–1
0	z_2	0	–1	–2	–3	1	–1
–1	z_3	1	$\boxed{1}$	1	1	0	0
	λ	–1	–1	–1	–1	0	0
			Δ_{y_1}	Δ_{y_2}	Δ_{y_3}	$\Delta_{y_4'}$	$\Delta_{y_4''}$

Оскільки серед симплексних різниць є від'ємні, то переходимо до нової симплекс-таблиці (табл. 63).

Таблиця 63

Баз. зм.	*Зн. баз зм.*	*небаз. зм.*				
		z_3	y_2	y_3	y_4'	y_4''
z_1	4	4	1	3	1	–1
z_2	1	1	–1	–2	1	–1
y_1	1	1	1	1	0	0
λ	0	1	0	0	0	0
		Δ_{z_3}	Δ_{y_2}	Δ_{y_3}	$\Delta_{y_4'}$	$\Delta_{y_4''}$

Оскільки всі симплексні різниці невід’ємні, то вектор $y^1 = (1,0,0,0,0,4,1,0)$ є оптимальним розв’язком задачі (139)-(141). Оскільки штучна змінна z_3 рівна нулю, то вектор $\tilde{y}^0 = (1,0,0,0,0,4,1)$ буде допустимим базисним розв’язком для задачі (136)-(138). Перейдемо до розв’язування цієї задачі. Скористаємося таблицею 63. Викреслимо стовпець, що відповідає штучній змінній z_3 та перерахуємо симплексні різниці, врахувавши коефіцієнти цільової функції (136) (табл. 64).

Таблиця 64

$c_б$	*Баз. зм.*	*Зн. баз зм.*	$c_{небаз.}$ *і небаз. зм.*			
			0	0	1	–1
			y_2	y_3	y_4'	y_4''
0	z_1	4	1	3	1	–1
0	z_2	1	–1	–2	$\boxed{1}$	–1 ←
0	y_1	1	1	1	0	0
	ω	0	0	0	–1	1
			$\tilde{\Delta}_{y_2}$	$\tilde{\Delta}_{y_3}$	$\tilde{\Delta}_{y_4'}$ ↑	$\tilde{\Delta}_{y_4''}$

Оскільки серед симплекс різниць є від'ємні, то вектор $\tilde{y}^0 = (1,0,0,0,0,4,1)$ не є оптимальним розв'язком задачі (136)-(138). Перейдемо до наступної симплекс-таблиці (табл. 65).

Таблиця 65

Баз. зм.	*Зн. баз зм.*	*небаз. зм.*			
		y_2	y_3	z_2	y_4''
z_1	3	2	$\boxed{5}$	–1	0
y_4'	1	–1	–2	1	–1
y_1	1	1	1	0	0
$\tilde{\omega}$	1	–1	–2	1	0
		$\tilde{\Delta}_{y_2}$	$\tilde{\Delta}_{y_3}$	$\tilde{\Delta}_{z_2}$	$\tilde{\Delta}_{y_4''}$

Оскільки серед симплекс-різниць є від'ємні, то вектор $\tilde{y}^1 = (1,0,0,1,0,3,0)$ не є оптимальним розв'язком задачі (136)-(138). Перейдемо до наступної симплекс-таблиці (табл. 66).

Таблиця 66

Баз. зм.	*Зн. баз зм.*	*небаз. зм.*			
		y_2	z_1	z_2	y_4''
y_3	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0
y_4'	$\frac{11}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	–1
y_1	$\frac{2}{5}$	$\boxed{\frac{3}{5}}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	0
ω	$\frac{11}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	0
		$\tilde{\Delta}_{y_2}$	$\tilde{\Delta}_{z_1}$	$\tilde{\Delta}_{z_2}$	$\tilde{\Delta}_{y_4''}$

Оскільки всі серед симплекс-різниць є від'ємними, то вектор $\tilde{y}^2 = \left(\frac{2}{5}, 0, \frac{3}{5}, \frac{11}{5}, 0, 0, 0 \right)$ не є оптимальним розв'язком задачі (136)-(138). Перейдемо до наступної симплекс-таблиці (табл. 67).

Таблиця 67

Баз. зм.	*Зн. баз зм.*	*небаз. зм.*			
		y_1	z_1	z_2	y_4''
y_3	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0
y_4'	$\frac{7}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	–1
y_2	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0
ω	$\frac{7}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0
		$\tilde{\Delta}_{y_1}$	$\tilde{\Delta}_{z_1}$	$\tilde{\Delta}_{z_2}$	$\tilde{\Delta}_{y_4''}$

Оскільки всі симплексні різниці невід'ємні, то вектор $\tilde{y}^3 = \left(0, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{7}{3}, 0, 0, 0 \right)$ є оптимальним розв'язком задачі (136)-(138), а, отже, $y^* = \left(0, \frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right)$ – оптимальна змішана стратегія другого гравця і $\nu = \max \omega = \frac{7}{3}$ – ціна гри в змішаних стратегіях.

<u>Приклад 19</u> ***(Графічний метод розв'язування задачі дробово-лінійного програмування).*** Графічним методом розв'язати задачу дробово-лінійного програмування:

знайти

$$\max(\min) z = \frac{2x_1 - x_2}{x_1 + x_2} \tag{142}$$

за умов

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 &\geq -13, \\ x_1 + x_2 &\geq 6, \\ 4x_1 - x_2 &\leq 19, \end{aligned} \tag{143}$$

$$x_1 \geq 0, \; x_2 \geq 0. \tag{144}$$

Розв'язання. Проведемо на координатній площині x_1Ox_2 прямі: $2x_1 - 3x_2 = -13$, $x_1 + x_2 = 6$, $4x_1 - x_2 = 19$, що на рисунку позначені відповідно 1, 2, 3. Визначимо, яка саме з півплощин, на які поділяють прямі площину x_1Ox_2, визначається відповідною нерівністю. Оскільки точка $O(0,0)$ не належить жодній прямій, то підставимо її координати у ліві частини нерівностей (143). Маємо:

$$2 \cdot 0 - 3 \cdot 0 = 0 \geq -13,$$

$$0 + 0 = 0 \geq 6,$$

$$4 \cdot 0 - 0 = 0 \leq 19.$$

Оскільки точка $O(0,0)$ задовольняє першу та третю нерівності, то ці нерівності визначають півплощини, що містять цю точку. Друга нерівність визначає півплощину, що не містять точку $O(0,0)$. Перетин знайдених півплощин, що міститься у першій чверті є трикутник *ABC*.

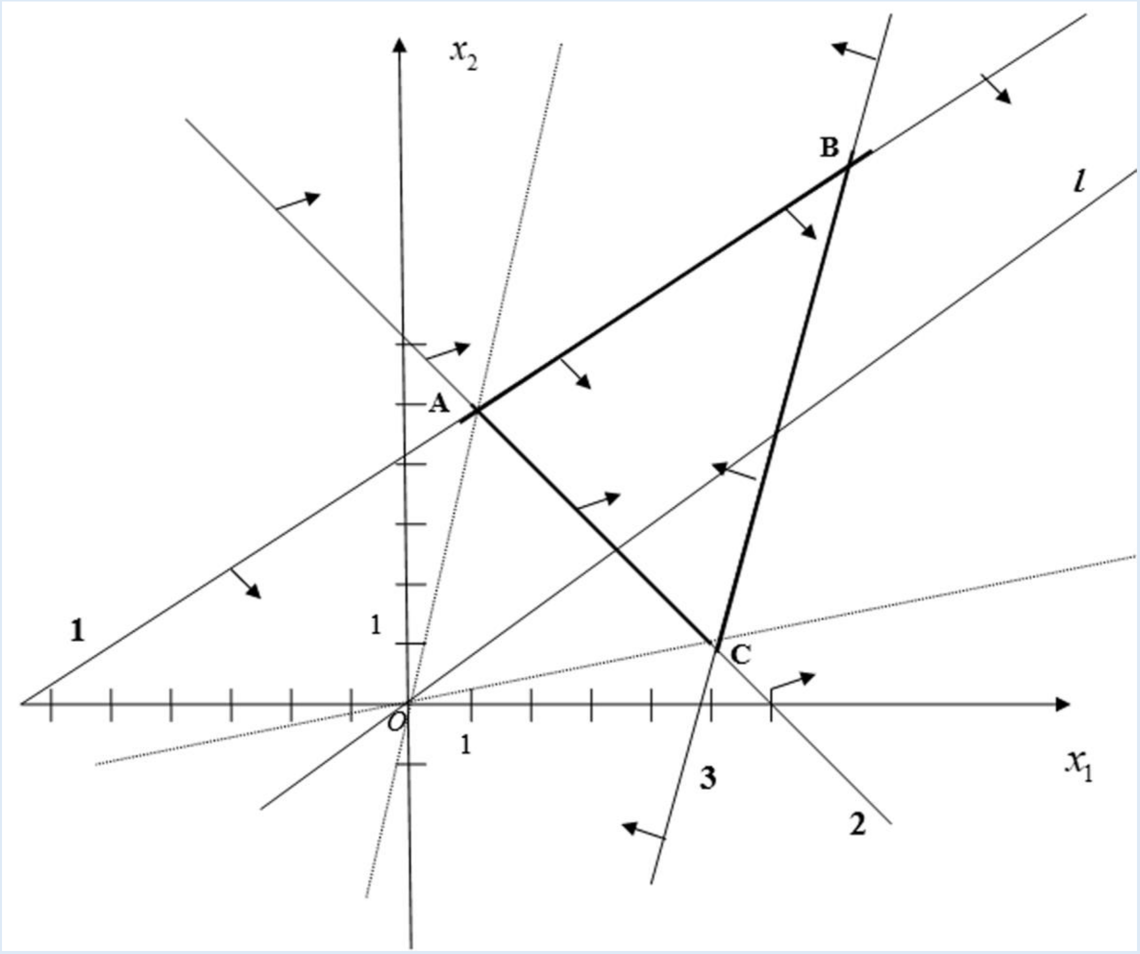


Рис. 2.

Проводимо пряму l, яка перетинає допустиму область (трикутник ABC) та проходить через початок координат.

Розглянемо функцію $z = \dfrac{2x_1 - x_2}{x_1 + x_2}$. Виразимо x_2: $x_2 = \dfrac{2 - z}{z + 1} x_1$;

$x_2 = k(z) x_1$, де $k(z) = \dfrac{2 - z}{z + 1}$. Пряма $x_2 = k(z) x_1$ проходить через початок координат. Обчислимо похідну функції $k(z)$ по z:

$$k'(z) = \frac{(2 - z)'(z + 1) - (z + 1)'(2 - z)}{(z + 1)^2} = \frac{-(z + 1) - (2 - z)}{(z + 1)^2} = \frac{-3}{(z + 1)^2} < 0 .$$

Оскільки $k'(z) < 0$, то функція $k(z) = \dfrac{2 - z}{z + 1}$ – спадна для довільних z. Тому пряму $x_2 = k(z) x_1$ будемо обертати за годинниковою стрілкою навколо початку координат для відшукання точок, в яких цільова функція набуває найбільшого значення, та проти годинникової стрілки для відшукання точок, в яких цільова функція набуває найменшого значення, до тих пір, поки пряма не стане опорною до допустимої області. Очевидно, що у точці A цільова функція (142) набуває найменшого значення на допустимій області задачі (142)-(144), а у точці C – найбільшого. Знаходимо координати цих точок:

$$A:\begin{cases}2x_1-3x_2=-13,\\ x_1+x_2=6,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=1,\\ x_2=5;\end{cases}$$

$$C:\begin{cases}x_1+x_2=6,\\ 4x_1-x_2=19,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=5,\\ x_2=1.\end{cases}$$

Отже, знаходимо оптимальні значення цільової функції:

$$\min z=z(A)=z(1;5)=\frac{2\cdot 1-5}{1+5}=-\frac{1}{2};$$

$$\max z=z(C)=z(5;1)=\frac{2\cdot 5-1}{5+1}=\frac{3}{2}.$$

<u>Приклад 20</u> ***(Розв'язування задачі дробово-лінійного програмування методами лінійного програмування).*** Використовуючи симплекс-метод, розв'язати задачу дробово-лінійного програмування:

знайти

$$\max z = \frac{3x_1 + 2x_2 - 2x_3}{x_1 + 2x_2 + x_3} \qquad (145)$$

за умов

$$\begin{gathered} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 4, \\ -x_1 + 3x_2 \le 6, \end{gathered} \qquad (146)$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0. \qquad (147)$$

Розв'язання. Переконаємося, що точка $(0;0;0)$ не належить множині допустимих розв'язків. Дійсно, $3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 - 0 = 0 \ne 4$. Отже, знаменник цільової функції не перетворюється в 0 на множині допустимих розв'язків, крім того, оскільки $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$, $x_3 \ge 0$, то $x_1 + 2x_2 + x_3 > 0$. Покладемо $\frac{1}{x_1 + 2x_2 + x_3} = y_0 \Rightarrow y_0 > 0$. Звідси $y_0 x_1 + 2y_0 x_2 + y_0 x_3 = 1$.

Помноживши обмеження (146), (147) на y_0, та із урахуванням того, що $\frac{1}{x_1 + x_2 + x_3} = y_0$, одержимо задачу:

$$\max z = \frac{3x_1 + 2x_2 - 2x_3}{x_1 + 2x_2 + x_3} = y_0\left(5x_1 + 3x_2 - 2x_3\right) = 3y_0 x_1 + 2y_0 x_2 - 2y_0 x_3,$$

$$\begin{gathered} 3y_0 x_1 + 2y_0 x_2 - y_0 x_3 - 4y_0 = 0, \\ -y_0 x_1 + 3y_0 x_2 - 6y_0 \le 0, \\ y_0 x_1 + 2y_0 x_2 + y_0 x_3 = 1, \end{gathered}$$

$$y_0 x_1 \ge 0,\ y_0 x_2 \ge 0,\ y_0 x_3 \ge 0,\ y_0 > 0.$$

Введемо позначення: $y_1 = y_0 x_1, y_2 = y_0 x_2, y_3 = y_0 x_3$. З урахуванням введених позначень задачу (145)-(147) перепишемо у вигляді:

знайти

$$\max z = 3y_1 + 2y_2 - 2y_3 \tag{148}$$

за умов

$$\begin{gathered} 3y_1 + 2y_2 - y_3 - 4y_0 = 0, \\ -y_1 + 3y_2 - 6y_0 \le 0, \\ y_1 + 2y_2 + y_3 = 1, \end{gathered} \tag{149}$$

$$y_1 \ge 0,\ y_2 \ge 0,\ y_3 \ge 0,\ y_0 > 0. \tag{150}$$

Задача (148)-(150) є задачею лінійного програмування. Запишемо її у канонічній формі запису:

знайти

$$\max z = 3y_1 + 2y_2 - 2y_3, \tag{151}$$

за умов

$$\begin{gathered} 3y_1 + 2y_2 - y_3 - 4y_0 = 0, \\ -y_1 + 3y_2 - 6y_0 + y_4 = 0, \\ y_1 + 2y_2 + y_3 = 1, \end{gathered} \tag{152}$$

$$y_1 \ge 0,\ y_2 \ge 0,\ y_3 \ge 0,\ y_4 \ge 0,\ y_0 > 0. \tag{153}$$

Розв’яжемо задачу (151)-(153), використовуючи метод штучного базису. Випишемо вектори-умов:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix},\ A_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ A_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ A_{y_0} = \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Побудуємо допоміжну задачу, ввівши штучні змінні $y_5 \ge 0$, $y_6 \ge 0$ у перше та третє обмеження системи обмежень (185) відповідно:

знайти

$$\max \omega = -y_5 - y_6, \tag{154}$$

за умов

$$\begin{aligned} 3y_1 + 2y_2 - y_3 - 4y_0 + y_5 = 0, \\ -y_1 + 3y_2 - 6y_0 + y_4 = 0, \\ y_1 + 2y_2 + y_3 + y_6 = 1, \end{aligned} \qquad (155)$$

$$y_1 \ge 0,\; y_2 \ge 0,\; y_3 \ge 0,\; y_4 \ge 0,\; y_5 \ge 0,\; y_6 \ge 0,\; y_0 > 0. \qquad (156)$$

Вектор $y^1 = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 & y_6 & y_0 \\ 0; & 0; & 0; & 0; & 0; & 1; & 0 \end{pmatrix}$ – допустимий базисний розв'язок для задачі (154)-(156), для якого змінні y_5, y_6, y_7 є базисними змінними. Заповнимо симплекс-таблицю, що відповідає вектору y^0 (табл. 68).

Таблиця 68

$c_{баз.}$	*Баз. зм.*	*Зн. баз. зм.*	$c_{небаз.}$ *і небаз. зм.*			
			0	0	0	0
			y_1	y_2	y_3	y_0
–1	y_5	0	$\boxed{3}$	2	–1	–4 ←
0	y_4	0	–1	3	0	–6
–1	y_6	1	1	2	1	0
	ω	–1	–4	–4	0	4
			Δ_1 ↑	Δ_2	Δ_3	Δ_0

Оскільки серед симплекс різниць є від'ємні, то вектор y^0 не є оптимальним розв'язком задачі (154)-(156). Використовуючи крок симплекс-методу, перейдемо до наступної симплекс-таблиці (табл. 69).

Таблиця 69

Баз. зм.	*Зн. баз. зм.*	y_5	y_2	y_3	y_0
y_1	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{4}{3}$
y_4	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{11}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{22}{3}$
y_6	1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\boxed{\frac{4}{3}}$
ω	–1	$\frac{4}{3}$	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{4}{3}$
		Δ_5	Δ_2	Δ_3	Δ_0

Оскільки в таблиці 69 серед симплекс-різниць є від’ємні, то використовуючи крок симплекс-методу, перейдемо до наступної симплекс-таблиці (табл. 70).

Таблиця 70

Баз. зм.	*Зн. баз. зм.*	y_5	y_2	y_3	y_6
y_1	1	0	2	1	1
y_4	$\frac{11}{2}$	$-\frac{3}{2}$	11	7	$\frac{11}{2}$
y_0	$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$	1	1	$\frac{3}{4}$
	0	1	0	0	1
	ω_0	Δ_5	Δ_2	Δ_3	Δ_6

Оскільки в симплекс-таблиці 70 усі симплекс-різниці невід’ємні, то вектор $\tilde{y} = \left(\overset{y_1}{1}; \overset{y_2}{0}; \overset{y_3}{0}; \overset{y_4}{\frac{11}{4}}; \overset{y_5}{0}; \overset{y_6}{0}; \overset{y_0}{\frac{3}{4}} \right)$ є оптимальним розв’язком допоміжної задачі (154)-(156). Штучні змінні y_5, y_6 рівні нулю, тому вектор $y^0 = \left(\overset{y_1}{1}; \overset{y_2}{0}; \overset{y_3}{0}; \overset{y_4}{\frac{11}{4}}; \overset{y_0}{\frac{3}{4}} \right)$ є допустимим базисним розв’язком задачі (151)-(153).

Перейдемо до розв’язання задачі (151)-(153). Заповнюємо симплекс-таблицю, що відповідає допустимому базисному розв’язку y^0 задачі (151)-(153). У симплекс-таблиці 70, що відповідає вектору $\tilde{y}$, викреслимо стовпці, що відповідають штучним змінним y_5, y_6, та обрахуємо симплексні різниці та значення цільової функції (151) (табл. 71).

Таблиця 71

$c_{баз.}$	*Баз. зм.*	*Зн.баз. зм.*	$c_{небаз.}$ *і небаз. зм.*	
			2	–2
			y_2	y_3
3	y_1	1	2	1
0	y_4	$\frac{11}{2}$	11	7
0	y_0	$\frac{3}{4}$	1	1
	z	3	4	5
			Δ_2	Δ_3

Оскільки симплекс-різниці невід'ємні, то вектор $y^0 = \begin{array}{c} \\ \left(\begin{array}{ccccc} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_0 \\ 1; & 0; & 0; & \frac{11}{4}; & \frac{3}{4} \end{array} \right) \end{array}$ буде оптимальним розв'язком задачі (151)-(153), $\max z = 3$. З урахуванням заміни $y_1 = y_0 x_1, y_2 = y_0 x_2, y_3 = y_0 x_3$ знайдемо $x_1 = \frac{y_1}{y_0}$, $x_2 = \frac{y_2}{y_0}$, $x_2 = \frac{y_3}{y_0}$. Отже, $x_1 = \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}$, $x_2 = \frac{0}{\frac{3}{4}} = 0$, $x_3 = \frac{0}{\frac{3}{4}} = 0$. А тому вектор $x^* = \left(\frac{4}{3}, 0, 0 \right)$ буде оптимальним розв'язком задачі (145)-(147) і $\max z = 3$.

<u>Приклад 21</u> ***(Квадратичний симплекс-метод розв'язування задачі опуклого квадратичного програмування).*** Квадратичним симплекс-методом розв'язати задачу опуклого квадратичного програмування:

знайти

$$\max z = -x_1^2 - x_2^2 + x_1 x_2 + 5x_1 + 2x_2 \qquad (157)$$

за умов

$$2x_1 + 3x_2 \le 15, \qquad (158)$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \qquad (159)$$

Розв'язання. Перейдемо до задачі на відшукання мінімум:

знайти

$$\min(-z) = x_1^2 + x_2^2 - x_1 x_2 - 5x_1 - 2x_2 \qquad (160)$$

за умов

$$2x_1 + 3x_2 - 15 \le 0, \qquad (161)$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \qquad (162)$$

Перевіримо, чи функція $z_1 = x_1^2 + x_2^2 - x_1 x_2 = x_1^2 + x_2^2 - \frac{1}{2}x_1 x_2 - \frac{1}{2}x_1 x_2$ є опуклою. Оскільки визначник $\begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} > 0$, то квадратична функція $z_1 = x_1^2 + x_2^2 - x_1 x_2$ – невід'ємновизначена, а, отже, опукла.

Функція $z_2 = -5x_1 - 2x_2$ – лінійна, а, отже, опукла.

Функція $z = x_1^2 + x_2^2 - x_1 x_2 - 5x_1 - 2x_2 = z_1 + z_2$ – опукла, як сума опуклих функцій.

Обмеження (161) – лінійне, тому задача (160)-(162) є задачею опуклого квадратичного програмування.

Запишемо необхідні і достатні умови теореми Куна-Таккера існування сідлової точки для функції Логранжа (163):

$$\frac{\partial L(x,u)}{\partial x_1} = 2x_1 - x_2 - 5 + 2u \geq 0,$$
$$x_1 \cdot \frac{\partial L(x,u)}{\partial x_1} = (2x_1 - x_2 - 5 + 2u) \cdot x_1 = 0 \tag{164}$$

$$\frac{\partial L(x,u)}{\partial x_2} = 2x_2 - x_1 - 2 + 3u \geq 0,$$
$$x_2 \cdot \frac{\partial L(x,u)}{\partial x_2} = (2x_2 - x_1 - 2 + 3u) \cdot x_2 = 0, \tag{165}$$

$$\frac{\partial L(x,u)}{\partial u} = 2x_1 + 3x_2 - 15 \leq 0,$$
$$, \quad u \cdot \frac{\partial L(x,u)}{\partial u} = (2x_1 + 3x_2 - 15) \cdot u = 0, \tag{166}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, u \geq 0 . \tag{167}$$

Перепишемо умови (164)-(167) в еквівалентному вигляді:

$$2x_1 - x_2 + 2u - \vartheta_1 = 5 , \tag{168}$$

$$-x_1 + 2x_2 + 3u - \vartheta_2 = 2 , \tag{169}$$

$$2x_1 + 3x_2 + \omega = 15 , \tag{170}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, u \geq 0, \vartheta_1 \geq 0, \vartheta_2 \geq 0, \omega \geq 0 , \tag{171}$$

$$x_1\vartheta_1 = 0 , \; x_2\vartheta_2 = 0 , \; u\omega = 0 . \tag{172}$$

Для знаходження розв’язку системи обмежень (168)-(171) скористаємося методом штучного базису. Побудуємо допоміжну задачу, додавши до першого та другого обмеження системи (168)-(171) штучні змінні:

$$\max \lambda = -z_1 - z_2 \tag{173}$$

$$2x_1 - x_2 + 2u - \vartheta_1 + z_1 = 5 ,$$

$$-x_1 + 2x_2 + 3u - \vartheta_2 + z_2 = 2, \tag{174}$$

$$2x_1 + 3x_2 + \omega = 15,$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, u \geq 0, \vartheta_1 \geq 0, \vartheta_2 \geq 0, \omega \geq 0, z_1 \geq 0, z_2 \geq 0. \tag{175}$$

Розв'яжемо задачу (173)-(175), використовуючи алгоритм симплексного методу. Заповнюємо симплекс-таблицю, що відповідає допустимому базисному розв'язку задачі $x^0 = \left(\begin{array}{cccccccc} \scriptstyle x_1 & \scriptstyle x_2 & \scriptstyle u & \scriptstyle \vartheta_1 & \scriptstyle \vartheta_2 & \scriptstyle \omega & \scriptstyle z_1 & \scriptstyle z_2 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 15, & 5, & 2 \end{array} \right)$ (табл. 72).

Таблиця 72

$c_{баз.}$	*Баз. зм.*	*Зн. баз. зм.*	$c_{небаз.}$ *і небаз. зм.*				
			0	0	0	0	0
			x_1	x_2	u	ϑ_1	ϑ_2
–1	z_1	5	2	–1	2	–1	0
–1	z_2	2	–1	2	$\boxed{3}$	0	–1 ←
0	ω	15	2	3	0	0	0
	z	–7	–1	–1	–5	1	1
			Δ_{x_1}	Δ_{x_2}	Δ_u ↑	Δ_{ϑ_1}	Δ_{ϑ_2}

Оскільки серед симплекс-різниць, що відповідають вектору x^0 є від'ємні, то, використовуючи крок симплекс-методу переходимо до наступної симплекс-таблиці. Стовпець, що відповідає змінній u обираємо за розв'язуючий, знаходимо $\min\{5:2; 2:3\} = \frac{2}{3}$, а тому рядок, що відповідає змінній z_2 – розв'язуючий рядок, а елемент 3 – розв'язуючий елемент. Переходимо до наступної симплекс-таблиці (табл. 73).

Таблиця 73

Баз. зм.	*Зн. баз. зм.*	x_1	x_2	z_2	ϑ_1	ϑ_2
z_1	$\frac{11}{3}$	$\boxed{\frac{8}{3}}$	$-\frac{7}{3}$	$-\frac{2}{3}$	-1	$\frac{2}{3}$
u	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$
ω	15	2	3	0	0	0
z	$-\frac{11}{3}$	$-\frac{8}{3}$	$\frac{7}{3}$	$\frac{5}{3}$	1	$-\frac{2}{3}$
		Δ_{x_1}	Δ_{x_2}	Δ_{z_2}	Δ_{ϑ_1}	Δ_{ϑ_2}

Серед симплекс-різниць є від'ємні, а тому стовпець, що відповідає змінній x_1 обираємо за розв'язуючий, знаходимо $\min\left\{\frac{11}{3}:\frac{8}{3};15:2\right\}=\frac{11}{8}$, рядок, що відповідає змінній z_1 – розв'язуючий рядок, а елемент $\frac{8}{3}$ – розв'язуючий елемент. Переходимо до наступної симплекс таблиці (табл. 73).

Таблиця 73

Баз. зм.	*Зн. баз. зм.*	z_1	x_2	z_2	ϑ_1	ϑ_2
x_1	$\frac{11}{8}$	$\frac{3}{8}$	$-\frac{7}{8}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$
u	$\frac{9}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{4}$
ω	$\frac{49}{4}$	$-\frac{3}{4}$	$\boxed{\frac{19}{4}}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{2}$
z	0	1	0	1	0	0
		Δ_{z_1}	Δ_{x_2}	Δ_{z_2}	Δ_{ϑ_1}	Δ_{ϑ_2}

Оскільки симплекс-різниці у таблиці 73 є невід'ємними, то вектор $\tilde{x} = \left(\begin{array}{cccccccc} x_1 & x_2 & u & \vartheta_1 & \vartheta_2 & \omega & z_1 & z_2 \\ \frac{11}{8}, & 0, & \frac{9}{8}, & 0, & 0, & 49, & 0, & 0 \end{array} \right)$ – оптимальний розв'язок задачі (173)-(175), а, отже, задовольняє умови (168)-(171). Перевіримо, чи вектор $\tilde{x}$ задовольняє умови (172):

$$x_1\vartheta_1 = \frac{11}{8} \cdot 0 = 0\,,\ x_2\vartheta_2 = 0 \cdot 0 = 0\,,\ u\omega = \frac{9}{8} \cdot \frac{49}{4} \neq 0\,.$$

Оскільки умови (172) не виконуються, то перейдемо до іншого розв'язку. Якщо можливо, обираємо розв'язуючий стовпець так, щоб при переході до наступної симплекс-таблиці умови (172) виконувалися. Оскільки в останній таблиці x_2 і ϑ_2 – небазисні змінні, то претендентами на розв'язуючий стовпець будуть стовпці, що відповідають цим змінним. Якщо розв'язуючим стовпцем буде стовпець, що відповідає змінній x_2, то розв'язуючим елементом буде $\frac{19}{4}$, а, отже, змінна ω стане небазисною, а x_2 – базисною. В цьому випадку одержаний вектор буде задовольняти умови (172) (табл. 74).

Таблиця 74

Баз. зм.	*Зн. баз. зм.*	ω	ϑ_1	ϑ_2
x_1	$\frac{69}{19}$	$\frac{7}{38}$		
u	$\frac{3}{19}$	$\frac{3}{38}$		
x_2	$\frac{49}{19}$	$\frac{4}{19}$	$\frac{3}{19}$	$-\frac{2}{19}$
	0	0	0	0
	z	Δ_ω	Δ_{ϑ_1}	Δ_{ϑ_2}

Вектор $\left(\overset{x_1}{\frac{69}{19}},\overset{x_2}{\frac{49}{19}},\overset{u}{\frac{3}{19}},\overset{\vartheta_1}{0},\overset{\vartheta_2}{0},\overset{\omega}{0}\right)$ задовольняє умови (168)-(172), а вектор $\left(\overset{x_1}{\frac{69}{19}},\overset{x_2}{\frac{49}{19}},\overset{u}{\frac{3}{19}}\right)$ – умови (164)-(167). Тому $(x^*,u)=\left(\overset{x_1}{\frac{69}{19}},\overset{x_2}{\frac{49}{19}},\overset{u}{\frac{3}{19}}\right)$ є сідловою точкою функції Лагранжа (163), а $x^*=\left(\frac{69}{19},\frac{49}{19}\right)$ – оптимальним розв’язком задачі (160)-(162), а, отже, і задачі (157)-(159) і

$$\max z=-\left(\frac{69}{19}\right)^2-\left(\frac{49}{19}\right)^2+\frac{69}{19}\cdot\frac{49}{19}+5\cdot\frac{69}{19}+2\cdot\frac{49}{19}=\frac{244}{19}.$$

ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

1. Скласти математичну модель задач.

1.1. Швейна фабрика виготовляє дві моделі жіночого костюму : модель «Zara» та модель «Miranda». Для виготовлення кожної з цих моделей використовуються тканина трьох видів – шовк, батист, капрон. Запаси цих тканин на складах фабрики становлять відповідно 841 м, 861 м, 945 м.

На виготовлення одного костюму моделі «Zara» витрати тканини становлять: шовку – 0,8 м, батисту – 0,7 м, капрону – 0,5 м.

На виготовлення одного костюму моделі «Miranda» витрати тканини становлять: шовку – 0,3 м, батисту – 0,6 м, капрону – 0,9 м.

Від реалізації одного костюму моделі «Zara» фабрика отримує прибуток 450 грн., а від реалізації костюму моделі «Miranda» – 490 грн.

Скласти математичну модель для визначення оптимального плану виробництва костюмів вказаних моделей з наявних запасів тканини, при якому прибуток фабрики буде максимальним.

1.2. Для годівлі корів щоденно використовують 3 види кормів K_1, K_2, K_3. Кожен вид кормів містить поживні речовини P_1, P_2, P_3. Кількість кожної поживної речовини, що міститься в 1 кг кожного корму, мінімальна добова потреба у кожній поживній речовині при годівлі корів, вартість 1 кг корму подано у таблиці:

Таблиця 1

Поживні речовини	**Кількість поживних речовин в 1 кг. корму**			**Мінімальна добова потреба у поживній речовині**
	K_1	K_2	K_3	
P_1	3	1	1	10
P_2	2	3	2	8
P_3	1	4	5	11
Вартість 1 кг корму	5	7	8	

Скласти математичну модель для визначення оптимального добового раціону для годівлі корів.

1.3. На ринок доставляється картопля з трьох фермерських господарств по ціні відповідно 1 грн. 20 коп., 1 грн. 10 коп., та 1 грн. за 1 кг. На завантаження 1 т картоплі у фермерських господарствах відповідно витрачається по 2, 6, 5 хвилин. Замовлено 12 т картоплі і для своєчасної доставки необхідно, щоб на її завантаження витрачалось не більше сорока хвилин. Скласти математичну модель для визначення з яких фермерських господарств і в якій кількості необхідно доставити картоплю, щоб загальна вартість закупівлі була мінімальною, якщо господарства можуть виділити для продажу відповідно 10, 8 та 6т картоплі.

1.4. Для виготовлення виробів двох видів придбано 100 кг металу. На виготовлення виробу першого виду витрачається 2 кг металу; другого – 4 кг, прибуток від реалізації виробу першого виду складає 13 грн., другого – 12 грн. Виробів першого виду потрібно виготовити не більше ніж 40 штук, а другого – не більше 20 штук. Скласти математичну модель отримання максимального прибутку від реалізації виробів обох видів.

2. Звести задачу лінійного програмування до канонічної форми запису:

2.1. Знайти

$$\min z = 6x_1 - 11x_2 + 2x_3 + 6x_4$$

за умов

$$\begin{gathered} 6x_1 - 9x_2 + 9x_3 - 3x_4 \le 1, \\ -4x_1 + x_2 + x_3 - 8x_4 \le 13, \\ 4x_1 + 5x_2 - x_3 + 3x_4 \ge 3, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0. \end{gathered}$$

2.2. Знайти

$$\min z = -x_1 + 5x_2 + 2x_3 - 9x_4$$

за умов

$$\begin{gathered} 5x_1 + 9x_2 - 3x_3 + 3x_4 = 17, \\ -x_1 + 6x_2 + 2x_3 - x_4 \le -11, \\ 5x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 5x_4 \ge 3, \\ x_1 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \le 0. \end{gathered}$$

2.3. Знайти

$$\max z = 4x_1 + 15x_2 - 3x_3 + 6x_4$$

за умов

$$\begin{gathered} -x_1 + 4x_2 + 9x_3 - 6x_4 = 11, \\ 3x_1 - 3x_2 + 7x_3 - 4x_4 \le 15, \\ x_1 + 6x_2 - 7x_3 + 2x_4 \ge 7, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \le 0. \end{gathered}$$

2.4. Знайти

$$\max z = 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 4x_4$$

за умов

$$\begin{gathered} -x_1 - x_2 + 3x_3 - 4x_4 = -10, \\ 3x_1 - 6x_2 - 5x_3 + x_4 \le 8, \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 \ge 13, \\ x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0. \end{gathered}$$

3. Графічним методом розв'язати задачу лінійного програмування:

3.1. Знайти

$$\max(\min)L(x_1, x_2) = 2x_1 - 2x_2$$

за умов

$$\begin{gathered} -x_1 + x_2 \le 2, \\ 5x_1 + 3x_2 \le 18, \\ x_1 - x_2 \le 1, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{gathered}$$

3.2. Знайти

$$\max(\min)L(x_1, x_2) = x_1 + x_2$$

за умов

$$\begin{gathered} -x_1 + 2x_2 \le 6, \\ 3x_1 + 5x_2 \ge 4, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{gathered}$$

3.3. Знайти

$$\max(\min)L(x_1, x_2) = x_1 + x_2$$

за умов

$$\begin{gathered} x_1 + x_2 \le 1, \\ x_1 + x_2 \ge -1. \end{gathered}$$

3.4. Знайти

$$\max(\min) z = 3x_1 + x_2$$

за умов

$$\begin{gathered} x_1 - 2x_2 \ge -2, \\ 6x_1 - 7x_2 \le 21, \\ 4x_1 + 9x_2 \ge 36, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{gathered}$$

3.5. Знайти

$$\max(\min) z = -x_1 - 2x_2$$

за умов

$$\begin{gathered} -x_1 + 5x_2 \ge -5, \\ 2x_1 - 4x_2 \ge -8, \\ 2x_1 + 2x_2 \ge 5, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{gathered}$$

3.6. Знайти

$$\max(\min) z = 3x_1 - x_2$$

за умов

$$\begin{gathered} 2x_2 \ge 3, \\ 5x_1 - 3x_2 \le 15, \\ 2x_1 + 3x_2 \ge 6, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{gathered}$$

4. Симплекс-методом розв'язати такі задачі лінійного програмування:

4.1. Знайти

$$\max L(x) = -x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4$$

за умов

$$\begin{gathered} 5x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 4, \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0, \end{gathered}$$

якщо допустимим базисним розв'язком цієї задачі є $x^0 = (1,1,0,0)$.

4.2. Знайти

$$\max L(x) = -2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4$$

за умов

$$\begin{gathered} 4x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 = 7, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 1, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0, \end{gathered}$$

якщо допустимим базисним розв'язком цієї задачі є $x^0 = (2,0,1,0)$.

4.3. Знайти

$$\max z = 4x_1 - 3x_2 - 3x_3 + x_4$$

за умов

$$\begin{gathered} 5x_1 + 4x_2 - 4x_3 - 2x_4 = 4, \\ 7x_1 - 3x_2 + 11x_3 + 7x_4 = 19, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0, \end{gathered}$$

якщо допустимим базисним розв'язком цієї задачі є $x^0 = (0;3;0;4)$.

4.4. Знайти

$$\max z = 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4$$

за умов

$$\begin{gathered} 7x_1 + 3x_2 - 11x_3 + 4x_4 = 17, \\ -x_1 + 4x_2 + 6x_3 - 5x_4 = 2, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0, \end{gathered}$$

якщо допустимим базисним розв'язком цієї задачі є $x^0 = (2;1;0;0)$.

4.5. Знайти

$$\min z = x_1 - x_3 + x_4$$

за умов

$$\begin{gathered} 3x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 5, \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 2, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0, \end{gathered}$$

якщо допустимим базисним розв'язком цієї задачі є $x^0 = (1;1;0;0)$.

4.6. Знайти

$$\max z = x_2 - x_3 - x_4$$

за умов

$$\begin{gathered} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0, \end{gathered}$$

якщо допустимим базисним розв'язком цієї задачі є $x^0 = (1;0;1;0)$.

4.7. Знайти

$$\min L(x) = -2x_1 - x_2 - 7x_3$$

за умов

$$\begin{gathered} x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 4, \\ -x_1 - 4x_2 + 10x_3 \le 7, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0. \end{gathered}$$

4.8. Знайти

$$\min z = x_1 + +4x_4$$

за умов

$$\begin{gathered} 5x_1 - 2x_2 + x_3 = 3, \\ 4x_1 + 3x_2 + x_4 = 1, \\ -2x_1 - x_2 + x_5 = 5, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0, x_5 \ge 0. \end{gathered}$$

4.9. Знайти

$$\min L(x) = -3x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5$$

за умов

$$\begin{gathered} 2x_1 \ + x_3 - \ x_4 = 3, \\ -x_1 + x_2 + 3x_4 = 1, \\ x_1 - 2x_4 + x_5 = 2, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0, x_5 \ge 0. \end{gathered}$$

4.10. Знайти

$$\min z = x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5$$

за умов

$$\begin{gathered} -x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ 2x_1 - 5x_2 + x_4 = 3, \\ -5x_1 - 2x_2 + x_5 = 1, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0, x_5 \ge 0. \end{gathered}$$

5. Розв’язати задачі лінійного програмування з використанням методу штучного базису відшукання початкового базисного розв’язку:

5.1. Знайти

$$\max L(x) = 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 - x_4$$

за умов

$$\begin{gathered} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 3, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 = 3, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0. \end{gathered}$$

5.2. Знайти

$$\max L(x) = x_1 + x_2 + x_3$$

за умов

$$\begin{gathered} x_1 - x_2 + 3x_3 = 3, \\ -2x_1 - x_2 + x_3 = 6, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{gathered}$$

5.3. Знайти

$$\max z = 2x_1 + x_2 - 2x_4$$

за умов

$$\begin{gathered} -x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 = 1, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0. \end{gathered}$$

5.4. Знайти

$$\max z = x_1 + 2x_2 + 2x_3$$

за умов

$$\begin{gathered} x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 12, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 19, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 14, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{gathered}$$

5.5. Знайти

$$\max L(x) = x_1 - 5x_2 - x_3 + x_4$$

за умов

$$\begin{gathered} x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 = 3, \\ 2x_1 + 3x_3 - x_4 = 4, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0. \end{gathered}$$

5.6. Знайти

$$\min L(x) = -x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4$$

за умов

$$\begin{gathered} x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 1, \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 + 5x_2 + x_3 - x_4 = 5, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0. \end{gathered}$$

6. До наведених задач лінійного програмування записати двоїсту, знайти оптимальний розв'язок однієї з пар задач та за цим розв'язком визначити оптимальний розв'язок іншої задачі:

6.1. Знайти

$$\min z = 3x_1 + 3x_2$$

за умов

$$\begin{gathered} x_1 + 4x_2 \geq 4, \\ 4x_1 + x_2 \geq 4, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{gathered}$$

6.2. Знайти

$$\max z = 8x_1 + 2x_2$$

за умов

$$\begin{gathered} x_1 - 4x_2 \leq 4, \\ -4x_1 + x_2 \leq 4, \\ x_1 + x_2 \leq 6, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{gathered}$$

6.3. Знайти

$$\max z = x_1 + 2x_2$$

за умов

$$\begin{gathered} 5x_1 - 2x_2 \leq 3, \\ x_1 + x_2 \geq 1, \\ -3x_1 + x_2 \leq 3, \\ 3x_1 + 3x_2 \leq 9 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{gathered}$$

6.4. Знайти

$$\max z = 5x_1 + 4x_2 + 6x_3$$

за умов

$$\begin{gathered} x_1 + x_2 + x_3 \leq 6, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \geq 9, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 11, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{gathered}$$

6.5. Знайти

$$\max z = 6x_1 - 5x_2$$

за умов

$$\begin{gathered} 2x_1 + 5x_2 \leq 10, \\ 5x_1 + 2x_2 \leq 10, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{gathered}$$

7. Розв'язати задачі лінійного програмування двоїстим симплексним методом:

7.1. Знайти

$$\min z = 4x_1 + 3x_2 + 10x_3 + 5x_4$$

за умов

$$\begin{gathered} 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 5x_4 \ge 8, \\ -2x_2 - 3x_3 + 6x_4 \ge 4, \\ 2x_1 + x_3 - x_4 \ge 0, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0. \end{gathered}$$

7.2. Знайти

$$\min L(x) = 4x_1 + 3x_2 + 10x_3 + 5x_4$$

за умов

$$\begin{gathered} 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 5x_4 \ge 8, \\ -2x_2 - 3x_3 + 6x_4 \ge 4, \\ 2x_1 + x_3 - x_4 \ge 0, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0. \end{gathered}$$

7.3. Знайти

$$\min z = 6x_1 + 4x_2$$

за умов

$$\begin{gathered} 2x_1 + x_2 \ge 3, \\ 3x_1 + 2x_2 \ge 1, \\ -x_1 - x_2 \ge 6, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0. \end{gathered}$$

7.4. Знайти

$$\max L(x) = -3x_3 - x_4 - 2x_5$$

за умов

$$\begin{gathered} x_1 - x_3 + x_4 - x_5 = -2, \\ x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 1, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0, x_5 \ge 0. \end{gathered}$$

7.5. Знайти

$$\min z = x_1 + 2x_2$$

за умов

$$\begin{gathered} 2x_1 + x_2 \le 18, \\ x_1 + 2x_2 \ge 14, \\ x_1 - 2x_2 \le 10, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0. \end{gathered}$$

7.6. Знайти

$$\min z = 3x_1 + 3x_2$$

за умов

$$\begin{gathered} x_1 + 4x_2 \ge 4, \\ 4x_1 + x_2 \ge 4, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{gathered}$$

7.7. Знайти

$$\min z = 5x_1 + 4x_2$$

за умов

$$\begin{gathered} x_1 + x_2 \le 6, \\ 2x_1 + x_2 \ge 9, \\ 3x_1 + x_2 \ge 11, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0. \end{gathered}$$

7.8. Знайти

$$\min z = 3x_1 + x_2$$

за умов

$$\begin{gathered} x_1 + x_2 \ge 3, \\ 5x_1 + x_2 \ge 5, \\ x_1 + x_2 \ge 5, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0. \end{gathered}$$

8. Знайти базисний допустимий розв’язок методами північно-західного кута та мінімальної вартості та оптимізувати їх методом потенціалів:

8.1.

a_i \ b_j	400	200	300	400	**500**
600	2	4	5	1	**6**
500	2	3	9	4	**3**
700	**8**	**4**	**2**	**5**	**7**

8.2.

a_i \ b_j	185	215	240	160	**200**
320	7	4	5	10	**9**
400	3	15	12	13	**2**
280	**16**	**8**	**3**	**17**	**16**

8.3.

a_i \ b_j	90	180	130	180	**120**
240	11	4	5	3	**7**
190	6	5	12	10	**6**
270	**6**	**8**	**11**	**5**	**12**

8.4.

a_i \ b_j	285	180	340	160	**235**
220	5	4	15	11	**3**
500	3	12	12	10	**2**
480	**13**	**8**	**4**	**15**	**10**

8.5.

a_i \ b_j	95	100	130	170	**105**
130	7	4	5	10	**4**
200	3	12	12	13	**2**
270	**13**	**8**	**3**	**14**	**11**

8.6.

a_i \ b_j	95	55	30	170	**95**
110	5	4	3	2	**5**
180	4	3	2	1	**4**
70	**1**	**2**	**3**	**4**	**1**

8.7.

a_i \ b_j	95	65	130	70	**95**
100	7	3	2	2	**5**
180	5	3	2	5	**4**
60	**1**	**2**	**4**	**1**	**1**

8.8.

a_i \ b_j	95	55	30	170	**95**
110	4	2	2	1	**5**
180	5	7	2	1	**3**
70	**1**	**3**	**3**	**4**	**1**

9. Угорським методом та методом Мака розв'язати задачі про оптимальні призначення, задані матрицями витрат:

$$9.1.\ C=\begin{vmatrix} 5 & 6 & 4 & 10 & 3 & 9 & 5 \\ 4 & 5 & 15 & 11 & 3 & 8 & 4 \\ 15 & 7 & 15 & 8 & 6 & 4 & 7 \\ 6 & 7 & 2 & 8 & 12 & 9 & 7 \\ 10 & 3 & 9 & 9 & 4 & 12 & 6 \\ 11 & 8 & 13 & 14 & 9 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 7 & 4 & 8 & 2 & 9 \end{vmatrix}$$

$$9.2.\ C=\begin{vmatrix} 5 & 1 & 13 & 1 & 3 & 7 & 4 \\ 11 & 10 & 1 & 12 & 8 & 10 & 12 \\ 3 & 2 & 10 & 9 & 10 & 13 & 1 \\ 9 & 3 & 5 & 6 & 7 & 8 & 10 \\ 10 & 11 & 16 & 5 & 13 & 20 & 14 \\ 1 & 7 & 5 & 6 & 15 & 16 & 2 \\ 11 & 8 & 2 & 5 & 8 & 14 & 15 \end{vmatrix}$$

$$9.3.\ C=\begin{vmatrix} 3 & 15 & 2 & 10 & 9 & 4 & 2 \\ 8 & 7 & 4 & 8 & 10 & 14 & 2 \\ 9 & 3 & 2 & 8 & 13 & 14 & 18 \\ 14 & 2 & 8 & 12 & 9 & 20 & 21 \\ 1 & 7 & 12 & 8 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 11 & 13 & 9 & 14 & 20 & 21 \\ 9 & 1 & 5 & 5 & 14 & 14 & 21 \end{vmatrix}$$

$$9.4.\ C=\begin{vmatrix} 6 & 12 & 3 & 21 & 2 & 16 & 15 \\ 14 & 20 & 6 & 23 & 22 & 12 & 9 \\ 23 & 17 & 23 & 17 & 4 & 3 & 13 \\ 6 & 1 & 15 & 19 & 8 & 14 & 2 \\ 5 & 14 & 4 & 15 & 6 & 20 & 14 \\ 5 & 19 & 12 & 23 & 5 & 16 & 17 \\ 17 & 22 & 2 & 16 & 20 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$9.5.\ C=\begin{vmatrix} 4 & 10 & 6 & 2 & 6 & 4 & 8 \\ 6 & 13 & 7 & 3 & 5 & 6 & 9 \\ 7 & 5 & 4 & 4 & 11 & 10 & 6 \\ 5 & 4 & 5 & 6 & 13 & 7 & 5 \\ 4 & 6 & 7 & 7 & 14 & 6 & 6 \\ 8 & 2 & 9 & 10 & 6 & 8 & 11 \\ 9 & 8 & 5 & 11 & 5 & 4 & 5 \end{vmatrix}$$

$$9.6.\ C=\begin{vmatrix} 4 & 5 & 5 & 8 & 10 & 7 & 13 \\ 6 & 9 & 5 & 3 & 5 & 8 & 9 \\ 4 & 13 & 7 & 5 & 6 & 6 & 8 \\ 8 & 7 & 9 & 4 & 7 & 5 & 7 \\ 5 & 9 & 10 & 6 & 11 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 6 & 7 & 10 & 11 & 7 \\ 5 & 3 & 4 & 8 & 5 & 7 & 6 \end{vmatrix}$$

10. Використовуючи перший метод Гоморі знайти цілі розв'язки повністю цілочислової задачі лінійного програмування:

10.1. Знайти

$$\max z = 2x_1 - 2x_2$$

за умов

$$\begin{gathered} -x_1 + 2x_2 \geq 4, \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 14, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \\ x_1, x_2 - \text{цілі}. \end{gathered}$$

10.2. Знайти

$$\max z = 2x_1 + 3x_2$$

за умов

$$\begin{gathered} 2x_1 + x_2 - x_3 = 9, \\ 3x_1 - 4x_2 - x_4 = 3, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, \\ x_1, x_2, x_3, x_4 - \text{цілі}. \end{gathered}$$

10.3. Знайти

$$\max z = x_1 + x_2$$

за умов

$$\begin{gathered} -4x_1 + 3x_2 \leq 6, \\ 2x_1 + x_2 \leq 6, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \\ x_1, x_2 - \text{цілі}. \end{gathered}$$

10.4. Знайти

$$\min z = 5x_1 + 6x_2 + 6x_3$$

за умов

$$\begin{gathered} 2x_1 + 4x_2 \geq 10, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \geq 10, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, \\ x_1, x_2, x_3 - \text{цілі}. \end{gathered}$$

10.5. Знайти

$$\max z = x_1 + x_2$$

за умов

$$\begin{gathered} 6x_1 + 5x_2 \leq 20, \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 10, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \\ x_1, x_2 - \text{цілі}. \end{gathered}$$

10.6. Знайти

$$\max z = 2x_1 + 3x_2$$

за умов

$$\begin{gathered} 2x_1 + x_2 - x_3 = 9, \\ 3x_1 - 4x_2 - x_4 = 3, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, \\ x_1, x_2, x_3, x_4 - \text{цілі}. \end{gathered}$$

10.7. Знайти

$$\max z = 4x_1 + x_2$$

за умов

$$\begin{gathered} 4x_1 + 2x_2 \leq 7, \\ 3x_1 + 10x_2 \leq 15, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \\ x_1, x_2 - \text{цілі}. \end{gathered}$$

10.8. Знайти

$$\max z = 2x_1 + x_2$$

за умов

$$\begin{gathered} 4x_1 - 3x_2 \leq 5, \\ -2x_1 + 3x_2 \leq 7, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \\ x_1, x_2 - \text{цілі}. \end{gathered}$$

11. Використовуючи другий метод Гоморі знайти цілі розв'язки частково цілочислової задачі лінійного програмування:

11.1. Знайти

$$\min z = -6x_1 - x_2$$

за умов

$$\begin{gathered} -2,9x_1 + 6x_2 \le 17,4, \\ 3x_1 - x_2 \le 1, \\ 4x_1 - 5x_2 \le 5, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \\ x_1, x_2 - \text{ціле}. \end{gathered}$$

11.2. Знайти

$$\max z = x_2 + x_2$$

за умов

$$\begin{gathered} 2x_1 + 11x_2 \le 38, \\ x_1 + x_2 \le 7, \\ 4x_1 - 5x_2 \le 5, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \\ x_1 - \text{ціле}. \end{gathered}$$

11.3. Знайти

$$\max z = 2x_1 + x_2$$

за умов

$$\begin{gathered} 4x_1 - 3x_2 \le 5, \\ -2x_1 + 3x_2 \le 7, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \\ x_2 - \text{ціле}. \end{gathered}$$

11.4. Знайти

$$\min z = -8x_1 - 6x_2$$

за умов

$$\begin{gathered} 3x_1 + 5x_2 + x_3 = 11, \\ 4x_1 + x_2 + x_4 = 8, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \\ x_1 - \text{ціле}. \end{gathered}$$

12. З допомогою третього методу Гоморі знайти цілі розв'язки повністю цілочислової задачі лінійного програмування:

12.1. Знайти

$$\min z = 6x_1 + 4x_2$$

за умов

$$\begin{gathered} 2x_1 + x_2 \ge 3, \\ x_1 - 2x_2 \le 2, \\ 3x_1 + 2x_2 \ge 1, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \\ x_1, x_2 - \text{цілі}. \end{gathered}$$

12.2. Знайти

$$\max z = -3x_4 - 2x_5$$

за умов

$$\begin{gathered} x_1 - 5x_4 + x_5 = -15, \\ x_3 + x_4 - 8x_5 = -9, \\ x_2 - x_4 - 10x_5 = -19, \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}, \\ x_j,\ j = \overline{1,5} - \text{цілі}. \end{gathered}$$

12.3. Знайти

$$\max z = -x_1 - 5x_2$$

за умов

$$\begin{gathered} 12x_1 - 3x_2 \ge 8, \\ -3x_1 + 9x_2 \ge 8, \\ -x_1 + 3x_2 \ge 3, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \\ x_1, x_2 - \text{цілі}. \end{gathered}$$

12.4. Знайти

$$\min z = 5x_1 + 6x_2$$

за умов

$$\begin{gathered} 5x_1 + 7x_2 \ge 11, \\ 9x_1 + 8x_2 \ge 6, \\ 3x_1 + 4x_2 \le 2, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \\ x_1, x_2 - \text{цілі}. \end{gathered}$$

12.5. Знайти

$$\min z = 6x_1 + 4x_2$$

за умов

$$\begin{gathered} -7x_1 - 3x_2 \le -9, \\ 4x_1 + 3x_2 \ge 10, \\ -3x_1 - 2x_2 \le -2, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \\ x_1, x_2 - \text{цілі}. \end{gathered}$$

12.6. Знайти

$$\min z = 3x_1 + x_2$$

за умов

$$\begin{gathered} 7x_1 + 5x_2 \ge 8, \\ 4x_1 + 5x_2 \ge 12, \\ 2x_1 + 2x_2 \ge 9, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \\ x_1, x_2 - \text{цілі}. \end{gathered}$$

13. Розв'язати методом Дальтона-Ллевеліна дискретні задачі лінійного програмування:

13.1. Знайти

$$\max z = x_1 + x_2$$

за умов

$$\begin{gathered} -x_1 + 4x_2 \le 12, \\ 4x_1 - x_2 \le 12, \\ x_1 \in \{0,1,4\}, \\ x_2 \in \{0,1,3,5\}. \end{gathered}$$

13.2. Знайти

$$\max z = -x_1 - 3x_2$$

за умов

$$\begin{gathered} x_1 + x_2 \le 5, \\ -x_1 + 2x_2 \ge -4, \\ x_1 \in \{0,2,4\}, \\ x_2 \in \{0,1,3,6\}. \end{gathered}$$

13.3. Знайти

$$\min z = 2x_1 + 3x_2$$

за умов

$$\begin{gathered} -3x_1 - 2x_2 \le -6, \\ x_1 + 4x_2 \ge 4, \\ x_1 \in \{0,1,3,4\}, \\ x_2 \in \{0,2,3,5\}. \end{gathered}$$

13.4. Знайти

$$\max z = x_1 + x_2$$

за умов

$$\begin{gathered} 2x_1 + x_2 \le 10, \\ x_1 + 2x_2 \le 10, \\ x_1 \in \{0,3,4\}, \\ x_2 \in \{0,1,2,4\}. \end{gathered}$$

13.5. Знайти

$$\max z = x_1 + x_2$$

за умов

$$\begin{gathered} 4x_1 - x_2 \le 17, \\ -x_1 + 4x_2 \le 17, \\ x_1 \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}, \\ x_2 \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}. \end{gathered}$$

14. Знайти розв'язок матричної гри заданої матрицею виграшів другого гравця:

14.1.

$$\begin{Vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{Vmatrix}.$$

14.2.

$$\begin{Vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{Vmatrix}.$$

14.3.

$$\begin{Vmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{Vmatrix}.$$

14.4.

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \\ -2 & -3 & 3 \end{Vmatrix}.$$

15. Графічно розв’язати задачі дробово-лінійного програмування:

15.1. Знайти

$$\max(\min) z = \frac{2x_1 - x_2}{x_1 + x_2}$$

за умов

$$\begin{gathered} 2x_1 - 3x_2 \geq -13, \\ x_1 + x_2 \geq 6, \\ 4x_1 - x_2 \leq 19, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{gathered}$$

15.2. Знайти

$$\max(\min) z = \frac{3x_1 - x_2}{x_1 + x_2}$$

за умов

$$\begin{gathered} x_1 + x_2 \geq 5, \\ -x_1 + 3x_2 \leq 7, \\ 3x_1 - x_2 \leq 11, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{gathered}$$

15.3. Знайти

$$\max(\min) z = \frac{3x_1 + 7x_2}{x_1 + x_2}$$

за умов

$$\begin{gathered} x_1 - 2x_2 \leq 1, \\ x_1 + x_2 \geq 4, \\ 2x_1 + x_2 \leq 12, \\ 5x_1 - x_2 \geq 2, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{gathered}$$

15.4. Знайти

$$\max(\min) z = \frac{2x_1 + 3x_2}{x_1 + x_2}$$

за умов

$$\begin{gathered} 2x_1 + 8x_2 \leq 26, \\ x_1 + x_2 \geq 4, \\ 12x_1 + 3x_2 \leq 39, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{gathered}$$

15.5. Знайти

$$\max z = \frac{2x_1 + x_2}{x_1 + x_2}$$

за умов

$$\begin{gathered} 2x_1 + x_2 \geq 4, \\ 2x_1 - x_2 \leq 2, \\ -x_1 + 2x_2 \leq 4, \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0. \end{gathered}$$

15.6. Знайти

$$\max z = \frac{-x_1 - x_2}{2x_1 + x_2}$$

за умов

$$\begin{gathered} 3x_1 + 2x_2 \geq 6, \\ x_1 - x_2 \leq 1, \\ -2x_1 + 3x_2 \leq 6, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{gathered}$$

16. Розв'язати задачі дробово-лінійного програмування за допомогою зведення її до задачі лінійного програмування:

16.1. Знайти

$$\max z = \frac{2x_1 - x_2}{3x_1 + x_2}$$

за умов

$$\begin{gathered} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 \le 6, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0. \end{gathered}$$

16.2. Знайти

$$\max z = \frac{3x_1 - x_2}{x_1 + x_2}$$

за умов

$$\begin{gathered} x_1 + x_2 - x_3 = 5, \\ -x_1 + 3x_2 + x_4 = 7, \\ 3x_1 - x_2 + x_5 = 11, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0, x_5 \ge 0. \end{gathered}$$

16.3. Знайти

$$\max z = \frac{x_1 - x_2 + x_3}{2x_1 + x_3 + 1}$$

за умов

$$\begin{gathered} x_1 - x_2 + 3x_3 = 8, \\ -x_1 - 2x_2 - x_3 = 4, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0. \end{gathered}$$

16.4. Знайти

$$\max z = \frac{5x_1 + x_2}{x_1 + x_2}$$

за умов

$$\begin{gathered} x_1 + x_2 \ge 3, \\ x_1 - 3x_2 \le 5, \\ 3x_1 - x_2 \le 5, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{gathered}$$

16.5. Знайти

$$\max z = \frac{-5x_1 + 2x_2}{3x_1 + 4x_2}$$

за умов

$$\begin{gathered} x_1 + 4x_2 + x_3 = 16, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_4 = 12, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_5 = 18, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0, x_5 \ge 0. \end{gathered}$$

17. Квадратичним симплекс-методом розв'язати такі задачі опуклого квадратичного програмування:

17.1. Знайти

$$\min z = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 - 4x_2$$

за умов

$$2x_1 + 3x_2 \le 6,$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

17.2. Знайти

$$\max z = -x_1^2 - x_2^2 + x_1 + 2x_2$$

за умов

$$x_1 + 2x_2 \le 16,$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

17.3. Знайти

$$\min z = 2x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 - x_1$$

за умов

$$x_1 + 2x_2 \le 1,$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

17.4. Знайти

$$\max z = -x_1^2 - x_2^2 + x_1x_2 + 5x_1 + 2x_2$$

за умов

$$2x_1 + 3x_2 \le 15,$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

17.5. Знайти

$$\min z = 2x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 - x_1$$

за умов

$$2x_1 + x_2 \le 4,$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

17.6. Знайти

$$\min z = x_1^2 + 2x_2^2 - x_1x_2 - 3x_1$$

за умов

$$7x_1 + 3x_2 \le 9,$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Акулич И. Л. Математическое программирование в примерах и задачах: учебн. пособие для студентов эконом. спец. вузов. Москва: Высш. шк., 1986. 319 с.
2. Барвінський А. Ф., Олексів І. Я., Крупка З. І., Бобик І. О., Демків І. І., Квіт Р. І., Кісілевич В. В. Математичне програмування: навч. посіб. Львів: Національний університет «Львівська політехніка» (Інформаційно-видавничий центр «Інтелект+» Інституту післядипломної освіти), «Інтелект – Захід», 2004. 448 с.
3. Бурий В. В., Шевченко І. В. Математичне програмування. Київ: НАУ, 2007. 168 с.
4. Вітлінський В. В., Наконечний С. І., Терещенко Т. О. Математичне програмування: навч.-метод. посіб. для самост. вивчення дисципліни. Київ: КНЕУ, 2001. 248 с.
5. Глушик М. М., Копич І. М., Пенцак О. С., Сороківський В. М. Математичне програмування. Львів: Видавництво Львівської комерційної академії, 2004. 238 с.
6. Єгоршин О. О., Малярець Л. М. Математичне програмування. Харків: ВД ІНЖЕК, 2006. 383 с.
7. Жильцов О. Б., Кулян В. Р, Юнькова О. О. Математичне програмування (з елементами інформаційних технологій). Київ: МАУП, 2006. 184 с.
8. Кучма М. І. Лінійне програмування: приклади і задачі: навч. посібник. Львів: Новий світ-2000, 2006. 344 с.
9. Наконечний С. І., Савіна С. С. Математичне програмування. Київ: КНЕУ, 2003. 450 с.

10. Наконечний С. І., Гвоздецька Л. В. Збірник задач з курсу «Математичне програмування»: навч. посібник. Частина 1. Київ: ІСОД, 1996. 128 с.

11. Попов Ю. Д., Тюптя В. І., Шевченко В. І. Методи оптимізації: навчальний електронний посібник для студентів спеціальностей «Прикладна математика», «Інформатика», «Соціальна інформатика». Київ: Київського національного університету імені Тараса Шевченка, 2003. 215 с.

12. Ржевський С. В., Александрова В. М. Дослідження операцій: підручник. Київ: Аквадемвидав, 2006. 560 с.

13. Романюк Т. П., Терещенко Т. О., Присенко Г. В., Городкова І. М. Математичне програмування: навч. посіб. Київ : ІЗМН, 1996. 312 с.

14. Степанюк В. В. Методи математичного програмування. Київ: Вища школа, 1997. 272 с.

15. Цегелик Г. Г. Лінійне програмування. Львів: Світ, 1995. 215 с.