МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Кам’янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка

Фізико-математичний факультет

Кафедра математики

Дипломна робота
магістра

з теми «Наближення нескінченно-диференційовних функцій узагальненими сумами Зігмунда в метриці L_p»

Виконала студентка 2 курсу,
М1М19р групи
спеціальності
014 Середня освіта (Математика)
Голинська Анна Вікторівна

Науковий керівник:
кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри математики
Ковальська Ірина Борисівна
Рецензент:
кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри математики
Сорич Віктор Андрійович

м. Кам’янець-Подільський, 2021 р

ЗМІСТ

ВСТУП..3

РОЗДІЛ 1 5

1. Класи диференційовних функцій..5

2. Спряжені функції та їх класи...10

3. Класи Вейля – Надя 13

4. Класи $\boldsymbol{L}_{\beta}^{\psi}\mathfrak{N}$...15

5. Лінійні методи підсумовування рядів Фур'є...22

6. Модулі піврозпаду опуклих функцій 31

РОЗДІЛ 2 39

1. Інтегральні представлення величин $\delta_n(f;x;\Lambda)$ 39

2. Наближення нескінченно-диференційовних функцій узагальненими сумами Зігмунда в метриці L_p 49

Висновки 55

Список використаних джерел...57

ВСТУП

Задача наближення заданого класу $\mathfrak{M}$ функцій $f(\cdot)$ за допомогою фіксованого лінійного методу $U_n(\Lambda; f; x)$, що визначається матрицею $\Lambda = \left\{\lambda_k^{(n)}\right\}$, k, n=0,1,2…, полягає у дослідженні величини

$$\xi(\mathfrak{M}; U_n(\Lambda))_X \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{f \in \mathfrak{M}} \|f(x) - U_n(\Lambda; f; x)\|_X$$

де X – нормований простір, $X \supset \mathfrak{M}$.

Перший результат у цьому напрямку був отриманий А.Н. Колмогоровим [7] у 1935 р. Ним було встановлено, що при n→∞ справедливою є асимптотична рівність

$$\xi(W_\infty^r; S_n)_C \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{f \in \mathfrak{M}} \|f(x) - U_n(\Lambda; f; x)\|_C = \frac{4}{\pi^2} \frac{\ln n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \qquad (1)$$

Де $S_n = S_n(f; x)$ – часткові суми Фур'є порядку n функцій $f(\cdot), r \in N$. Дослідження А.Н. Колмогорова продовжив В.Т. Пінкевич [14]. Він довів, що рівність (1) є також справедливою класів W_∞^r, де $r < 0$. Наступний суттєвий крок у розвитку цієї теорії належить С.М. Нікольському [13], який поширив знайдені раніше результати на класи $W_\infty^r H_\omega$ і $W_{\beta,1}^r$, $r > 0$.

Дослідження, проведені А.Н. Колмогоровим та С.М. Нікольським, започаткували новий напрямок у теорії наближення функцій. З часом їх результати поширювалися на більш загальні класи функцій, а для наближення використовувалися тригонометричні поліноми, отримані за допомогою різних лінійних методів підсумовування рядів Фур'є.

Суттєві результати у цьому напрямку були отримані Б, Надем [10], [11], В.К. Дзядиком [4], Н.П. Корнійчуком [9], С.Б. Стєчкіним [21], С.А. Теляковським [22], А.В. Єфімовим [5], А.І. Степанцем [17] – [20] та ін.

У 1983 році А.І. Степанцем була запропонована нова класифікація періодичних функцій, яка базувалась на перетворенні їх рядів Фур'є за допомогою мультиплікаторів та зсувів по аргументу. Введені таким чином класи $L_\beta^\Psi \mathfrak{N}$ при фіксованих значеннях параметрів, що їх визначають, співпадають із відомими класами функцій $W^r, W^r H_\omega, W_\beta^r, W_\beta^r H_\omega, W_{\beta,1}^r$ та ін. Крім того, запропонований підхід дозволив класифікувати широкий спектр функцій, включно із нескінченно диференційовними та аналітичними функціями.

У зв'язку із цим корисно буде розглянути задачі наближення таких класів за допомогою деяких лінійних методів підсумовування рядів Фур'є.

Висновки

В даній дипломній роботі розглядається задача наближення класу $L^{\Psi}_{\beta}\mathfrak{N}$ періодичних функцій $f(\cdot)$ за допомогою сум Фур'є в метриці L_p.

Дипломна робота складається із двох розділів . Перший розділ містить шість пунктів. У них вводяться основні поняття та твердження, спираючись на які, розв'язується дана задача.

Так у першому пункті «Класи диференційованих функцій» вводяться основні означення і теорія. У другому пункті «Спряжені функції та їх класи» означається поняття спряженої функції та вводяться класи спряжених функцій. У третьому пункті «Класи Вейля-Надя» означається похідна у розумінні Вейля-Надя та вводяться класи функцій, диференційованих в розумінні Вейля-Надя.

У іншому пункті «Класи $L^{\Psi}_{\beta}\mathfrak{N}$» вводиться поняття (Ψ, β) – похідної функції та класи періодичних функцій, поняття згортки та класи згорток.

Пункт 5 «Лінійні методи підсумовування рядів Фур'є» містить означення лінійних методів наближення, що носять назву методів підсумовування рядів Фур'є, приклади цих методів, а також у ньому розглядаються властивості цих методів та питання насичення лінійних методів підсумовування рядів Фур'є. У пункті 6 "Модулі піврозпаду опуклих функцій" вводиться поняття модуля піврозпаду та наводяться різні оцінки значень функції натурального аргументу та її похідної в залежності від властивостей їх модуля піврозпаду.

Другий розділ містить два пункти. У першому пункті «Інтегральні представлення величин $\delta_n(f;x;\Lambda)$» знаходяться інтегральні представлення для відхилень сум Фур’є. У другому пункті «Наближення нескінченно-диференційованих функцій узагальненими сумами Зігмунда у метриці L_p», здійснюються основні дослідження і знаходяться точні порядкові оцінки наближення нескінченно-диференційованих функцій узагальненими сумами Зігмунда у метриці L_p, у випадку $\varphi(k) = \Psi(k)$ для класів $L^{\Psi}_{\beta,s}$.

Результатом дипломної роботи є:

Теорема: *Нехай* $\Psi \in \mathfrak{M}'_{\infty}$ *і функція*

$$\Phi_n(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \tau_k^{(n)} \cos\left(x + \frac{\beta\pi}{2}\right)$$

$$\tau_k^{(n)} = \begin{cases} \dfrac{\varphi(n)}{\varphi(k)} \Psi(k), 1 \leq k \leq n-1 \\ \Psi(k), k \geq n, \end{cases}$$

$\beta \in R$, *така, що частка* $f_n(t) = \Phi_n(t)/\varphi(n)$ *є рівномірно-обмежена при всіх* $n \in N$ *і* $t \in R$

Тоді, якщо $1 \leq p, s \leq \infty$ *і* $f \in L^{\Psi}_{\beta,p}$ *то* $\forall n \in N$

$$C^{(2)}_{p,s}\varphi(n) \leq \xi_n(L^{\Psi}_{\beta,p})_s \leq C^{(1)}_{p,s}\varphi(n)$$

де $C^{(1)}_{p,s}$ *і* $C^{(2)}_{p,s}$ *– сталі, залежні тільки від* p *та* s.

Список використаних джерел

1. Бари Н.К. Тригонометрические ряды. – М.: Физматгиз, 1961. – 936 с.
2. Валле-Пуассен Ш. (Vallée-Poussin Ch.-J. de la) Sur les polynomes d'approximation et la representation approchee d'un angle // Bull. Acad. Sci. Belg. – 1910.№12. – P.804-844.
3. Гаврилюк В.Т. О характеристике класса насыщения $C_0^{\Psi} L_{\infty}$ //Укр. мат. журнал. – 1986. – 38,№4. – С. 421-427.
4. Дзядык В. К. Введение в теорию равномерного приближения функций. – М.: Наука, 1977. – 510с.
5. Ефимов А. В. Линейные методы приближения непрерывных периодических функций // Мат. сб. – 1961. – 54,№1. – С.51-90.
6. Зигмунд А. (Zygmund A.) Тригонометрические ряды: в 2 т. М.: Мир, 1965. – Т.2. – 538 с.
7. Колмогоров А. Н. Zur Grössenordnung des Restliedes Fouriershen Reihen differenzierbaren Funktionen // Ann. Math. – 1935. – 36.- S.521-526.
8. Колмогоров А. Н., Фомін С. В. Елементи теорії функцій і функціонального аналізу. – К.: Вища школа, 1974. – 456с.
9. Корнейчук Н.П. Экстремальные задачи теории приближения. – М.: Наука, 1976. – 320 с.
10. Надь Б. (Nagy B.) Sur une classe generale de procedes de sommation pour les Series de Fourier // Hung . Acta Math. – 1948. – 1, N 3. – P. 14 – 62.
11. Надь Б. (Nagy B.) Uber geuisse Extremalfragen bei transformierten trigonometrischen Entwicklungen // Ber. Acad. dtsch. wiss. – 1938. – 90. –P. 103 – 134.
12. Натансон И. П. Теория функций вещественной переменной. – М.: Наука, 1974. – 480 с.

13. Никольський С. М. Об асимптотическом поведении остатка при приближении функций, удовлетворяющих условию Липшица, сумами фейера // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1940.- 4, №6. – С. 501 – 508.
14. Пинкевич В. Т. О порядке остаточного члена ряда Фурье функций, дифференцируемых в смысле Вейля // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1940. – 4, №5. – С. 521-528.
15. Рисс М. (Riesz M.) Sur les fonctions conjuguees//Math. Z. – 1927. – 27. –P. 218 – 244.
16. Рогозинский В. (Rogosinski W.) Über die Abschenitte trigonometrischer Reihen // Math. Ann. – 1925. – 95. – S. 110 – 135.
17. Степанец А. И. Классификация и приближение периодических функций. – Киев: Наук. думка, 1987. – 268 с.
18. Степанец А. И. Классы периодических функций и приближение их элементов суммами Фурье. – Киев, 1983. – 57 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; №10).
19. Степанец А. И. Уклонения сумм Фурье на классах бесконечно дифференцируемых функций // Укр. мат. журн. – 1984. – 36, № 6. – С. 750-758.
20. Степанец А. И. Асимптотические представления уклонений средних Зигмунда от дифференцируемых периодических функций // Методы теории приближения и их приложения. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1982. – С. 96-116.
21. Стечкин С. Б. Оценка остатка ряда Фурье для дифференцируемых функций // Тр. Мат. ин-та АН УССР. 1980. – 145. – С. 126 – 151.
22. Теляковский С. А. О нормах тригонометрических полиномов и приближении дифференцируемых функций линейными средствами их рядов Фурье. 1. // Тр. Мат. ин-та АН СССР. 1961. – 62. – С. 61 – 97.

23. Тиман А. Ф. Теория приближения функций действительного переменного. – М.: Физматгиз, 1960. – 624 с.
24. Тихомиров В. М. Некоторые вопросы теории приближения. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1976. – 307 с.
25. Чебышев П. Л. Вопросы о наименьших величинах, связанные с приближенным представлением функций // Соч. – М.; Л.: Изд-во АН СССР . 1947. – Т.2. – С. 151 – 235.