Міністерство освіти, науки, молоді та спорту України
Кам’янець-Подільський національний університет імені І.Огієнка

Фізико-математичний факультет
Кафедра алгебри і математичного аналізу

Дипломна робота

«Наближення сумами Зігмунда на класах цілих функцій»

здобувача вищої освіти
освітньо-кваліфікаційного рівня Магістр
спеціальності 014 Середня освіта (Математика)
фізико-математичного факультету
Іщенко Олени Ігорівни

Науковий керівник:
кандидат фізико-математичних наук,
доцент, доцент кафедри математики
Ковальська І.Б.
Рецензент:
кандидат фізико-математичних наук,
доцент, доцент кафедри математики
Сорич В.А.

Кам’янець-Подільський — 2021

ЗМІСТ

ВСТУП **3**

РОЗДІЛ І **7**

1. ЛІНІЙНІ МЕТОДИ ПІДСУМОВУВАННЯ РЯДІВ ФУР’Є 7
2. КЛАСИ ДИФЕРЕНЦІЙОВНИХ ФУНКЦІЙ 15
3. СПРЯЖЕНІ ФУНКЦІЇ 21

РОЗДІЛ ІІ **24**

1. МОДУЛІ НАПІВРОЗПАДУ ОПУКЛИХ ФУНКЦІЙ 24
2. ЦІЛІ ФУНКЦІЇ 27
3. НАБЛИЖЕННЯ СУМАМИ ЗІГМУНДА НА КЛАСАХ ЦІЛИХ ФУНКЦІЙ 36

ВИСНОВКИ **40**

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ **42**

ВСТУП

Теорія апроксимації — розділ математики, який вивчає можливість апроксимації певних математичних об'єктів іншими математичними об'єктами. Вони зазвичай мають простіші властивості і потрібно дослідити в цьому випадку проблему оцінки похибки.

Більшість теорій апроксимації передбачають наближення одних функцій іншими функціями, але деякі результати пов’язані з абстрактними векторами або топологічними просторами. Теорія апроксимації активно використовується для побудови великої кількості алгоритмів і стиснення даних.

Теорія апроксимації функцій є одним з основних напрямків математичного аналізу. Ця теорія зумовлена практичними потребами математичної науки і безперервно глибоко розвивалася протягом десятиліть.

У концепції функції вона втілює одну з основних ідей математики — наближення складних об'єктів (змінних) більш простими і зручними.

Дуже важлива ідея зв'язку математики з практикою, вона стимулювала розвиток теорії наближення функцій у минулому і викличе інтерес до неї в майбутньому.

Приклади

1. Замість обчислення точного значення функції $\sin x$ при малих x можна скористатися самим x, тобто $\sin x \approx x$. Що більшим буде x, то більшою буде похибка такого наближення.
2. Запам'ятовуючи функцію, можна запам'ятати її значення в певних точках (наприклад, на точковій матриці), а в інших точках обчислити за допомогою деяких формул інтерполяції. Питання про найкращий вибір решіток і формул (для певної функції чи класу функцій) відноситься до теорії наближень.

У наш час вивчення лінійних методів, що включають підсумовування рядів Фур'є, має велике значення.

Нехай, f(x) — 2π періодична неперервна функція,

$$S[f]=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$$

— її ряд Фур'є.

$$a_k = a_k(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos ktdt\,, k = 0,1\,\ldots,,$$

$$b_k = b_k(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin ktdt,$$

— коефіцієнти Фур'є,

$$S_n[f]=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$$

— часткова сума порядку n її ряду Фур'є.

Згідно оцінок відхилення суми Фур'є від заданих неперервних функцій, перші результати були одержані ще в період становлення теорії наближення функцій. У 1909 р. А. Лебег довів, що

$$\delta_n(f,x) = |f(x)-S_n(f,x)| \le |\ln n + 3|E_n(f) \qquad (\mathbf{1})$$

де $E_n(f)$ — найкраще наближення функції $f(x)$ тригонометричними поліномами $T_n(x)$ порядку не вище n в рівномірній метриці:

$$E_n(f) = inf\|f(x)-T_n(x)\|c_{2n} = inf max_{\forall x}|f(x)-T_n(x)|.$$

У поєднанні з теоремами Джексона про оцінки величин $E_n(f)$ нерівність Лебега містить більшу частину ранніх результатів по оцінках величин $\delta_n(f,x)$ і не втрачає свого значення і сьогодні: вона є точною та зрозумілою у використанні. Наприклад, якщо функція $f(x)$ має похідну порядку r, обмежену, припустимо, одиницею, то

$$E_n(f) < \frac{\pi}{2n^r}$$

і тоді з (1) одержуємо

$$\delta_n(f,x) < \frac{\pi(\ln n + 3)}{2n^r}$$

У 1935 році А.Н. Колмогоров розглянув величину

$$\mathcal{E}(W^r, S_n) = sup_{f\epsilon w^r}\|f(x) - S_n(f; x)\|c_{2\pi}$$

де W^r — клас 2π — періодичних функцій $f(x)$, r-ті похідні яких (r-ціле, $r \geq 1$) майже скрізь задовольняють умову. Він показав, що

$$\mathcal{E}(W^r, S_n) = \frac{4\pi}{\pi^2}\frac{\ln n}{n^r} + O\left(\frac{1}{n^r}\right), n \to \infty,$$

та знайшов асимптотично точну рівність для величин $\mathcal{E}(W^r, S_n)$.

Важливий внесок у розгляд цього питання, вніс С.М. Нікольський, який узагальнив ці результати на класи $W^r H^\alpha 2\pi$ — періодичних функцій $f(x)$, в яких існують і є неперервними похідні до r-го порядку ($r \geq 0$) включно, причому

$$\left|f^{(r)}(x) - f^{(r)}(\acute{x})\right| \leq |x - \acute{x}|^\alpha, 0< \alpha \leq 1,$$

і на більш загальні класи $W^r H_\omega$, які виражаються випуклими модулями неперервності $\omega(t)$. С.М. Нікольський вирішив аналогічну задачу і для випадку, коли замість сум $S_n(f; x)$ беруться суми Фейєра $\sigma_n(f; x)$.

Можливість характеризувати класи функцій за допомогою наближень їх поліномами знайшла застосування у ряді питань математичного аналізу. Розвиваючи дослідження по найкращих наближеннях функцій багатьох змінних поліномами, С.М. Никольський побудував теорію вкладень важливих для аналізу класів функцій багатьох змінних, в якій мають місце не лише прямі, але і обернені теореми.

Наближені подання функцій, а також самі функції на основі їх наближених подань вивчає теорія наближень функцій (уживаються також назви теорія апроксимації функцій і конструктивна теорія функцій). До теорії наближень функцій зазвичай відносять також завдання про наближення елементів у банахових і загальних метричних просторах.

Дослідження А.Н. Колмогорова і С.М Нікольського поклали початок розвитку нового напрямку в теорії наближення функцій і в теорії підсумування рядів Фур’є. Результати цих досліджень поширювали на більш загальні класи функцій, а в ролі агрегатів для наближення розглядали тригонометричні поліноми $U_n(f;x)$, породжені різними методами U_n підсумування рядів Фур'є.

А.Н. Колмогоров почав вивчення нового питання теорії наближень — завдання про знаходження при фіксованому n такої системи функцій $j_1 ..., j_n$, для якої найкращі наближення функцій заданого класу поліномами були б найменшими.

У цьому напрямі надалі було з'ясовано, наприклад, що для ряду важливих класів періодичних функцій найкращими у вказаному сенсі системами є тригонометричні поліноми.

Задача про відшукання асимптотичних рівностей для величин

$$\mathcal{E}(m;U_n) = sup_{f\in m}\|f(x) - U_n\|c_{2\pi}$$

де m — фіксований клас неперервних функцій, стала однією з найбільш важливих в теорії наближення функцій і в теорії підсумовування рядів Фур'є. Її називають задачею Колмогорова-Нікольського і, якщо одержано рівність для величин $\mathcal{E}(m;U_n)$, які є асимтотично точними, тобто якщо в явному вигляді знайдена така функція $\varphi(n) = \varphi(m;U_n;n)$, для якої

$$\mathcal{E}(m;U_n) = \varphi(n) + o\big(\varphi(n)\big), n \to \infty$$

то говорять, що розв'язана задача Колмогорова-Нікольського для класу функцій m і методу U_n .

Над цією задачею для різних класів функцій і різних методів підсумовування рядів Фур'є працювали Б.Надь, С.Б. Стєчкін, С.А. Теляковський, А.В. Єфімов, Н.П. Корнійчук, О.І. Степанець та інші відомі математики.

ВИСНОВКИ

На сьогоднішній день теорія наближень є однією із областей математики, що швидко розвивається. Багато суттєвих результатів отримано такими вченими, як А.Н Колмогоров, С.М Нікольський, Б. Надь, В.К. Дзядик, Н.П. Корнійчук, С.Б. Стєчкін, С.А. Теляковський, А.В. Єфімов, А.І. Степанець та іншими…

У даній дипломній роботі розв’язується задача наближення сумами Зігмунда на класах цілих функцій.

Дипломна робота складається з двох розділів. Перший розділ містить три пункти. У них вводяться основні поняття та твердження, спираючись на які, розв’язується дана задача. Перший пункт — «Лінійні методи підсумовування рядів Фур’є» містить означення лінійних методів наближення, що носять назву методів підсумовування рядів Фур’є, приклади цих методів, а також у ньому розглядаються апроксимуючі властивості цих методів. Окрім цього, в даному пункті також розглядаються апроксимуючі властивості цих методів та питання насичення лінійних методів підсумовування рядів Фур’є. У другому пункті — «Класи диференційованих функцій» вводяться класи функцій, що допускають звичайне диференціювання та класи функцій диференційованих у розумінні Вейля. У третьому пункті — «Спряжені функції» означається поняття спряженої функції.

Другий розділ містить три пункти. У першому пункті — «Модулі піврозпаду опуклих функцій» вводяться поняття модуля піврозпаду та вводяться різні оцінки значень функції натурального аргументу та її похідної в залежності від властивостей і модуля піврозпаду. У другому пункті розглядаються цілі функції. У третьому пункті — здійснюються основні дослідження і знаходяться наближення сумами Зігмунда на класах цілих функцій.

Для досягнення поставлених завдань використані такі методи дослідження:

1. аналіз наукових праць теорії наближення з даної теми;
2. узагальнення результатів по досліджуваній темі, отриманих раніше;
3. встановлення та обґрунтування справедливості нових асимптотичних співвідношень та їх взаємозв’язку з відомими результатами;
4. систематизація наукових результатів з теми дослідження.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Ахиезер Н.И. Лекции по теории аппроксимации/ Н.И. Ахиезер. — М. Наука, 1965.— 407 с.
2. Бари Н.К. Тригонометрические ряды/ Н.К. Бари. — М. Физмат гиз, 1961. — 936 с.
3. Гаврилюк В.Т. О характеристике класса насыщения/ В.Т. Гаврилюк. — Укр.мат.журн., 1986. — 38, №4, 421-427 с.
4. Давидов М.О. Курс математичного аналізу в трьох частинах/ М.О. Давидов. — 3Ч К. Вища школа, 1992. —147-153 с.
5. [Електронне джерело] —https://probability.knu.ua/userfiles/mmp/Convex-Analysis-Moklyachuk.pdf
6. Зигмунд А. Тригонометрические ряды/ А.Зигмунд — М.Л. Ганти, 1939. — 323 с.
7. Зигмунд А. Тригонометрические ряды/ А.Зигмунд — Т1 Мир, 1965 Т1. — 615 с.
8. Зигмунд А. Тригонометрические ряды/ А.Зигмунд — Т2 Мир, 1965 Т2. — 538 с.
9. Ковальська І.Б. Наближення нескінченно-диференційовних функцій аналогами сум Зігмунда/ І.Б. Ковальська. — Київ, 1987. —7с.
10. Колмогоров А.М., Фомін Елементи теорії функцій і функціонального аналізу/ Фомін, А.М. Колмогоров. — К. Вища школа, 1974. —11-49 с.
11. Корнейчук Н.П. Экстремальные задачи теории приближения/ Н.П. Корнейчук. — М. Наука, 1976. — 320 с.
12. Натансон И.П. Теория функцій вещественной переменной/ И.П. Натансон — М. Наука, 1974. — 480 с.
13. Никольский С.М. Об асимптотическом поведении остатка при приближении функций, удовлетворяющих условию Липшица, суммами Фейера/ С.М. Никольский. — Изв.Ан СССР Сер. Мат., 1940. — 4, №6, 501-508 с.

14. Новиков О.А. Приближение классов непрерывних периодических функций линейными методами/ О.А. Новиков. — Киев, 1991. —38 с.
15. Пинкевич В.Т. О порядке остаточного члена ряда Фурье функций, дифференцируемых в смысле Вейля/ В.Т. Пинкевич. — Изв,Ан СССР Сер. Мат., 1940. — 4, №5, 512-528 с.
16. Степанец А.И. Методы теории приближения/ А.И. Степанец. – Киев: ин-т математики НАН Украины, 2002. — Ч.1. — 427 с.
17. Степанець А.И. Классификация и приближение периодических функций/ А.И. Степанець. — Киев: Наукова думка, 1987. — 268 с.
18. Степанець А.И. Равномерные приближения тригонометрическими полиномами/ А.И. Степанець. — Киев: Наукова думка, 1981. — 112-207 с.
19. Степанець А.И. Скорость сходимости рядов на классах сверток: Препринт 96.11/ А.И. Степанець. – Киев: Институт математики НАН Украины, 1996. — 1-70 с.
20. Степанець А.И., Кушпель А.К. Наилучшие приближения и поперечники класов переодических функций/ А.К. Кушпель, А.И. Степанець. — Киев: Институт математики АН УССР, 1984. — 44 с.
21. Стечкин С.Б. Оценка остатка ряда Фурье для дифференцируемых функцій/ С.Б. Стечкин. — Тр.Мат ин-та АН УССР, 1980. — 145, 126-151 с.
22. Теляковский С.А. О нормах тригонометрических полиномов и приближении дифференцируемых функций линейными средствами их рядов Фурье/ С.А. Теляковский. — 1 тр мат ин-та АН СССР, 1961. — 62, 61-67 с.
23. Тиман А.Ф. Теорія приближения функций действительного переменного/ А.Ф. Тиман. — М.Физматгиз, 1960. — 624 с.
24. Тихомиров В.М. Некоторые вопросы теории приближения/ В.М. Тихомиров.— Изд-во моск ун-та, 1976. —307 с.

25. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и інтегрального исчисления/ Г.М. Фихтенгольц. — в Т3 М. Наука, 1966. —656 с.
26. Харди Г. Литтлвуд Дж. Some properties of fractional integrals/ Дж. Литтлвуд, Г. Харди. — IMZ, 1928. — 27, 565-606 с.