Міністерство освіти і науки України
Кам’янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка
Фізико-математичний факультет
Кафедра математики

Дипломна робота
магістра

з теми **“Умови збіжності проекційно-ітеративного методу стосовно нелінійних операторних рівнянь”**

Виконав: студент 2 курсу
ступеня вищої освіти
магістр, групи М1-М20
спеціальності
014 Середня освіта
(Математика)
Крета Володимир Іванович

Керівник: **Зеленський О. В.,**
кандидат фізико-математичних
наук, доцент

Рецензент: **Сорич В. А.,**
кандидат фізико-математичних
наук, доцент

Кам’янець-Подільський – 2021 р.

ЗМІСТ

ВСТУП

Диференціальні, інтегральні, інтегро-диференціальні, інтегро-функціональні рівняння та їх системи є ефективними математичними моделями багатьох задач різного характеру. Існує багато методів їх розв'язання, – як точного так і наближеного. Точний розв'язок можна знайти лише в окремих, як правило, достатньо простих випадках. Тому актуальним є питання побудови та дослідження наближених методів розв'язування заданих рівнянь. Серед великої кількості наближених методів виділяють чисельні та аналітичні методи. Останні поділяються на ітераційні, асимптотичні та прямі методи. Метод послідовних наближень є найпростішим представником ітераційних методів. Узагальнення цього методу привели до появи нових, більш ефективніших методів, серед яких слід відмітити метод осереднення функціональних поправок Ю. Д. Соколова та проекційно-ітеративний метод.

Схема методу послідовних наближень стосовно операторного рівняння другого роду виду $U= g +Au\ g$ полягає в тому, що наближені розв'язки u_k знаходяться таким чином:

$$u_k = g + Au_{k+1}, \quad k \in N. \tag{1}$$

Метод буде збіжним, коли оператор A є оператором стиску, або коли $\rho(A)=\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{\|A^k\|} < 1$. Це суттєво звужує область застосування методу.

Найпростішим узагальненням методу (1) є метод осереднення функціональних поправок, який запропонував вітчизняний математик Ю. Д Соколов. Ідея методу стосовно інтегрального рівняння Фредгольма другого роду полягає в тому, що наближені розв’язки будуються на основі формул:

$$u_k(x) = g(x) + \int_a^b T(x;t)(\, u_{k-1}(t) + \beta_k)dt, \tag{2}$$

$$\beta_k = \frac{1}{b-a}\int_a^b (u_k(x) - u_{k-1}(x))dx,\ k = 1,2,3, \ldots \tag{3}$$

Якщо ж замість числових поправок β_k розглядати функціональні поправки виду $\omega_k = \sum_{j=1}^{n} a_j^k \varphi_j(x)$, то прийдемо до наступного, більш ширшого узагальнення – проекційно-ітеративного методу (тут $\{\varphi_j(x)\}$ – деяка система лінійно-незалежних функцій). Перше таке узагальнення здійснив в своїх роботах Е. А. Чернишенко. Обґрунтуванню методу для нелінійних рівнянь присвячено цикл праць М. С. Курпеля, А. Ю. Лучки та інших. Розширення класу досліджуваних операторних рівнянь (зокрема нелінійних) привело до створення різних модифікацій проекційно-ітеративного методу.

Основною метою магістерської роботи є дослідження ітераційних методів розв'язування певних класів нелінійних операторних рівнянь. Так, розглянуто рівняння з гладкими, монотонними та цілком неперервними інтегральними операторами. Наукова новизна роботи полягає в тому, що згадані методи, а саме – метод послідовних наближень, метод Ю. Д. Соколова та проекційно-ітераційний метод (і деякі його модифікації) застосовують до згаданих рівнянь. Дано обґрунтування можливості застосування цих методів, вказано умови їх збіжності та приведено обчислювальні схеми методів.

Перший розділ роботи присвячений обґрунтуванню можливості застосування згаданих ітераційних методів до інтегральних рівнянь з монотонними операторами, до рівнянь першого роду, рівнянь з гладкими операторами в гільбертовому просторі, до рівнянь з цілком непевними операторами, а також до інтегральних рівнянь зі слабкою не лінійністю.

Також розглянуто одне ефективне узагальнення проеційно-ітеративного методу. Так, ідея цього узагальнення стосовно операторного рівняння першого роду виду

$$u = A\,u \tag{4}$$

полягає в тому, що наближені розв'язки будуються по такій схемі:

$$y_k = u_{k-1} + \omega_k, \quad \omega_k \in U, \quad u_k = Ay_k \tag{5}$$

$$\Pi(u_k - y_k) = \Theta, \quad k \in N, \quad u_0 \in X. \tag{6}$$

Елемент ω_k знаходиться із рівняння

$$\omega_k = \Pi A(u_{k-1} - \omega_k) - \Pi u_{k-1} \tag{7}$$

В подібний спосіб можна отримати інші варіанти цього методу. Але всі ці схеми носять, в основному, абстрактний характер. В роботі показано якого вигляду набере схема (5)-(7) та подібні їй схеми стосовно конкретних типів інтегральних рівнянь.

Другий, основний розділ роботи присвячений дослідженню умов збіжності згаданих ітераційних методів стосовно деяких типів нелінійних інтегральних, інтегро-різницевих та інтегро-функціональних рівнянь з нелінійними операторами, зокрема з операторами Урисона, Гаммерштейна та з малою не лінійністю. Так, наприклад, досліджено умови збіжності методу послідовних наближень стосовно нелінійного рівняння

$$u(x) - b(x)u(x-\tau) = g(x) + \int_a^b T(x,t)u(t)dt + \mu\int_a^b Q\big(x,t)u(t)\big)dt, \tag{8}$$

(тут τ – стале запізнення, μ – малий параметр, $g(x)$ – відома, $u(x)$ – шукана функція, а рівняння (8) розглядається в просторі $L_2(a;b)$). В роботі також розглядається випадок коли відхилення $\tau = \tau(x)$ – деяка неперервно диференційована функція. Слід також відмітити той факт, що метод послідовних наближень може бути застосовний до рівняння (8). Коли сумарний оператор $T + \mu Q$ не є оператором стиску. У двох останніх пунктах роботи розглянуто проблему розв'язування деяких типів нелінійних інтегро-функціональних рівнянь методом Ю. Д. Соколова та модифікованим проекційно-ітеративним методом. Так, ідея модифікованого проекційно-ітеративного методу стосовно рівняння

$$u(x) - b(x)u(x-\tau) = g(x) + \int_a^b T(x,t)u(t)dt + \mu\int_a^b F\big((t);u(t)\big)dt,$$

$$u(x) = 0, x \notin [\![a;b]\!],$$

де $\tau = \tau(x)$ - змінне відхилення, полягає в тому, що наближені розв'язки цього рівняння знаходимо згідно наступних формул:

$$u_k(x) - \mathrm{b}(x)\, u_k(x\text{-}\tau(\mathrm{x})) = g(x) + \int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}} \mathrm{T(x;t)}(u_{k-1}(\mathrm{t}) +$$

$$+\omega_k(t))\mathrm{dt} + \mu \int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}} \mathrm{Q(x;t)F}\big(\mathrm{t}; u_{k-1}(\mathrm{t})\big)\mathrm{dt}, \tag{10}$$

$$\omega_k(t) = \sum_{j=1}^{n} a_j^k \beta_j(x),\ \mathrm{x} \in [\![\mathrm{a;b}]\!]. \tag{11}$$

Коефіцієнти a_j^k знаходимо із умови

$$\langle \varepsilon_k(x); \psi_i(x) \rangle = 0,\ i = \overline{1, n} \tag{12}$$

$$\varepsilon_k(x) g(x) + \int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}} \mathrm{T(x;t)}\, \alpha_k(t) dt - \alpha_k(x) + \mathrm{b(x)} \alpha_k(x - \tau(\mathrm{x})) +$$

$$+ \mu \int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}} \mathrm{Q(x;t)F}\big(\mathrm{t}; u_{k-1}(\mathrm{t})\big)\mathrm{dt}, \tag{13}$$

(тут $\varepsilon_k(x) = u_{k-1}(\mathrm{x}) + \omega_k(x)$, $\langle \varepsilon_k(x); \psi_i(x) \rangle$ - скалярний добуток функції в $L_2(a;b)$, тобто $\langle \varepsilon_k(x); \psi_i(x) \rangle = \int_a^b \varepsilon_k(x) \psi_i(x) dx$).

Система функцій $\beta_j(x)$ знаходиться із системи рівнянь

$$\beta_j(x) - \mathrm{b}(x) \beta_j(x\text{-}\tau(\mathrm{x})) = \psi_j(x),\ \mathrm{x} \in (a; b),$$

$$\beta_j(x) = 0, \mathrm{x} \notin (a; b). \tag{14}$$

В роботі також розглянуто обчислювальні схеми досліджуваних методів. Ці схеми є більш ефективними при безпосередній побудові наближених розв’язків, тоді як самі методи краще використовувати для теоретичного обґрунтування можливості застосування методів до тих чи інших типів операторних рівнянь та для встановлення умов збіжності цих методів.

ВИСНОВКИ

Різні класи диференціальних, інтегральних, інтегро-диференціальних, інтегро-функціональних рівнянь (як лінійних так і нелінійних) та їх системи часто слугують математичними моделями у біології, економіці, медицині та інших галузях природознавства. Розробці якісної та кількісної теорії таких задач присвячено роботи багатьох вітчизняних та зарубіжних математиків. Особливе значення мають наближені методи розв’язування згаданих рівнянь та систем, оскільки точні розв’язання можна знайти лише в окремих, як правило достатньо простих випадках. Найбільш широким класом щодо застосування є інтераційні методи, зокрема метод послідовних наближень, метод осереднення функціональних поправок Ю. Д. Соколова, проекційно-інтеративний метод та різні його модифікації.

Об’єктом дослідження магістерської роботи є деякі типи нелінійних операторних рівнянь щодо застосування до них останніх трьох інтераційних методів. Отримано такі результати:

1. Дано обгрунтування можливості застосування згаданих інтераційних методів та деяких модифікацій проекційно-інтеративного методу до нелінійних інтегральних та інтегро-різницевих рівнянь, зокрема, розглянуто інтегро-різницеве рівняння з нелінійним оператором Урисона.

2. Досліджено загальні умови збіжності цих методів та отримано оцінки похибок наближень.

3. Поряд зі схемами методів приведено обчислювальні схеми методів, які є більш ефективними при безпосередніх обчисленнях ніж самі методи.

4. Стосовно відхилень аргументу окрім випадку сталого відхилення також розглянуто випадок, коли це відхилення – деяка неперервна диференційна функція.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Бойчук А. А., Журавлев В. Ф., Самойленко А. М. Обобщенно-обратные операторы и нетеровы краевые задачи. – К.: Ин-т математики НАН Украины, 1995. – 319 с.

2. Верлань А .Ф., Сизиков В. С. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. Справочное пособие. - К.: Наукова думка, 1986. С. 189-203.

3. Головач Г. П., Калайда О. Ф. Наближені методи розв`язування операторних рівнянь. - К.: вища шк.,1974.-248 с.

4. Дирык Б. В. Применение проектно - итеративного метода к решению одного класса интегральных уравнений // Докл. АН УССР. Сер. А.-1988.- №10- С.12-16

5. Ковтун О. І. Наближені методи побудови розв`язання нелінійних інтегральних рівнянь зі слабкою нелінійністю з обмеженнями // Вісник Київського університету, Серія: фіз.–мат. науки.–2004. – № 3- С. 216-225

6. Красносельский М. А., Вайнико Г. М., Забрейко П. П. и др. Интегральные уравнения. - М.: Наука, 1968. С. 368-414.

7. Красносельский М. А., Вайнико Г. М., Забрейко П. П. и др. Приближенное решение операторных уравнений. - М.: Наука, 1969. -456 с.

8. Криль С. О. Решение интегро-функциональных уравнений с малой нелинейностью проекционно-итеративным методом. - К., 1987, Препринт/АН УССР. Ин-т математики, 1987. - 17, 35 с.

9. Кріль С. О. Розв'язування інтегро-функціональних рівнянь нестаціонарним проекційно-ітеративним методом / Збірник наукових праць Кам'янець-Подільського державного педагогічного університету. - Кам'янець-Подільський: Інформаційно-видавничий відділ, 1997.-С50-54.

10. Курпель Н. С Проекційно-ітеративні методи розв'язання операторних

рівнянь. - К.: Наук, думка, 1968. - 244 с.

11. Лучка А. Ю. Критерії збіжності проекційно-ітеративного методу для нелінійних рівнянь. - К.,1982. Препринт/АН УРСР. Ін-т математики, 1982.-24, 54 с.

12. Лучка А. Ю. Кріль С. О. Побудова наближених розв'язків лінійних інтегро-різницевих рівнянь. - К., 1987. Препринт/АН УРСР. Ін-т математики, 1987. - 14, 36 с.

13. Лучка А. Ю. Проекционно-итеративные методы. – К.: Наукова думка, 1993. С. 170-223.

14. Лучка А. Ю., Ферук В. А. Модифікований проекційно-ітеративний метод для систем квазілінійних диференціальних рівнянь із запізненням та обмеженнями// Нелінійні коливання.-2004.-Т.7,№2-С.188-207

15. Поліщук О. Б. Розв’язання нелінійного сингулярного інтегрального рівняння з параметрами методом послідовних наближень // Нелинейны проблемы дииференциальных уравнений и математической физики. Сб. науч. тр. / АН Украины. Ин-т математики. – К., 1997.- С.229-232.