Міністерство освіти і науки України
Кам’янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка
фізико-математичний факультет
кафедра математики

Дипломна робота магістра

з теми « Задача мінімізації кусково-лінійної функції при обмеженнях, заданих системою лінійних рівнянь, та додатковому обмеженню на норми допустимих розв'язків »

Виконала: студентка ІІ курсу, групи М1-М20
спеціальності 014. Середня освіта (Математика)
Чикуркова Яна Володимирівна
Керівник: кандидат фізико-математичних наук,
доцент Гнатюк В.О.
Рецензент: кандидат фізико-математичних наук,
доцент Щирба В.С.

Кам’янець-Подільський – 2021р.

ЗМІСТ

ВСТУП

Робота присвячена задачі мінімізації кусково-лінійної функції при обмеженнях, заданих системою лінійних рівнянь, та додатковому обмеженню на норми її допустимих розв’язків.

Актуальність теми. Задачі оптимізації природним чином виникають у практичній діяльності, адже доводиться організовувати її найкращим чином, вибираючи оптимальний з кількох або нескінченної кількості можливих способів здійснення цієї діяльності.

Відшукання такого способу математичними методами приводить до необхідності досліджувати та розв’язувати оптимізаційні задачі.

Часто цільова функція в задачах мінімізації є функцією типу максимуму кількох функцій. Серед таких задач є задачі мінімізації максимуму кількох лінійних функцій (задачі мінімізації кусково-лінійної функції) при обмеженнях, від яких залежить ця функція.

Розглянемо відповідний приклад. Нехай в просторі R^n розглядаються гіперплощини $P^1, \dots., P^m$, які проходять через початок координат, і задані рівняннями:

$$\begin{gathered}
a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = \langle x, a^1 \rangle = 0, \\
a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n = \langle x, a^2 \rangle = 0, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots.. \\
a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = \langle x, a^m \rangle = 0,
\end{gathered}$$

де $x = (x_1, \dots, x_n), a^\nu = (a_{\nu 1}, \dots, a_{\nu n}), \nu = \overline{1,m}, \langle x, a^\nu \rangle -$скалярний добуток векторів x та a^ν, , $\nu = \overline{1,m}$.

Будемо припускати, що $\|a^\nu\| = \sqrt{(a_{\nu 1})^2 + \cdots (a_{\nu n})^2} = 1$

Нехай, крім того, $x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0) \in R^n$.

Як відомо, відстань $d(x^0;P^\nu)$ від точки x^0 до гіперплощини P^ν, $\nu \in \{1,\dots,v\}$, дорівнює :

$$d(x^0;P^\nu)=\frac{|a_{v1}x_1^0+\cdots+a_{vn}x_n^0|}{\sqrt{(a_{v1})^2+\cdots+(a_{vn})^2}}=|a_{v1}x_1^0+\cdots+a_{vn}x_n^0|.$$

А найбільша з цих відстаней буде :

$$\max_{1\le v\le m} d(x^0;P^\nu)=\max_{1\le v\le m}|a_{v1}x_1^0+\cdots+a_{vn}x_n^0|.$$

Переконаємося, що

$$\max_{1\le v\le m}|a_{v1}x_1^0+\cdots+a_{vn}x_n^0|=\max_{1\le v\le m}\{a_{11}x_1^0+\cdots+a_{1n}x_n^0;-a_{11}x_1^0-\cdots-$$
$$-a_{1n}x_n^0;\dots;\ a_{m1}x_1^0+\cdots+a_{mn}x_n^0;\ -a_{m1}x_1^0-\cdots-a_{mn}x_n^0\ \}.$$

Дійсно, нехай, наприклад ,

$$\max_{1\le v\le m}|a_{v1}x_1^0+\cdots+a_{vn}x_n^0|=|a_{m1}x_1^0+\cdots+a_{mn}x_n^0|=a_{m1}x_1^0+\cdots+a_{mn}x_n^0.$$

Тоді $a_{11}x_1^0+\cdots+a_{1n}x_n^0\le|a_{11}x_1^0+\cdots+a_{1n}x_n^0|\le|a_{m1}x_1^0+\cdots+a_{mn}x_n^0|=$

$$=a_{m1}x_1^0+\cdots+a_{mn}x_n^0;-a_{11}x_1^0-\cdots-a_{1n}x_n^0\le|a_{11}x_1^0+\cdots+a_{1n}x_n^0|\le$$
$$\le a_{m1}x_1^0+\cdots+a_{mn}x_n^0;\dots;\ a_{m1}x_1^0+\cdots+a_{mn}x_n^0\le a_{m1}x_1^0+\cdots+a_{mn}x_n^0;$$
$$-a_{m1}x_1^0-\cdots-a_{mn}x_n^0\le|a_{m1}x_1^0+\cdots+a_{mn}x_n^0|=a_{m1}x_1^0+\cdots+a_{mn}x_n^0.$$

Отже, в цьому випадку

$$\max_{1\le v\le m}|a_{v1}x_1^0+\cdots+a_{vn}x_n^0|=$$
$$=\max_{1\le v\le m}\{a_{11}x_1^0+\cdots+a_{1n}x_n^0;-a_{11}x_1^0-\cdots-a_{1n}x_n^0;\dots;\ a_{m1}x_1^0+\cdots$$
$$+a_{mn}x_n^0;\ -a_{m1}x_1^0-\cdots-a_{mn}x_n^0\ \}.$$

Аналогічно доводиться, що ця рівність має місце і в тому випадку, коли

$$|a_{m1}x_1^0+\cdots+a_{mn}x_n^0|=-a_{m1}x_1^0-\cdots-a_{mn}x_n^0.$$

Поставимо задачу про відшукання точки $x = (x_1, \dots, x_n)$, яка належить кулі $B_\rho(0) = \left\{x = (x_1, \dots, x_n) \in R^n \colon \|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} \leq \rho\right\}$, де $\rho > 0$, та лежить на перетині гіперплоскостей $b_{l1}x_1 + \dots + b_{ln}x_n = c_l$, $l = \overline{1,p}$, найбільша відстань від якої до гіперплоскостей $P^1, \dots, P^m$ була б найменшою.

Тобто, необхідно розв'язати таку математичну задачу :

знайти $min \max\limits_{1 \leq v \leq m} |a_{v1}x_1 + \dots + a_{vn}x_n|$

за умов $b_{l1}x_1 + \dots + b_{ln}x_n = c_l$, $l = \overline{1,p}$, $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} \leq \rho$.

Згідно з проведеними вище міркуваннями ця задача еквівалентна такій задачі:

Знайти

$min \max\limits_{1 \leq v \leq m} \{a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n; -a_{11}x_1 - \dots - a_{1n}x_n; \dots;\ a_{m1}x_1 + \dots +$
$+a_{mn}x_n;\ -a_{m1}x_1 - \dots - a_{mn}x_n\}$.

За умов $b_{l1}x_1 + \dots + b_{ln}x_n = c_l$, $l = \overline{1,p}$, $\|x\| \leq \rho$.

Якщо позначити через :

$u_1 = (a_{11}, \dots, a_{1n}), u_2 = (-a_{11}, \dots, -a_{1n}), \dots, u_{2m-1} = (a_{m1}, \dots, a_{mn}),$

$u_{2m} = (-a_{m1}, \dots, -a_{mn}); b^l = (b_{l1}, \dots, b_{ln}), l = \overline{1,p}$, а для

$x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in R^n$ позначим через $\langle x, y \rangle = x_1y_1 + \dots + x_ny_n$, то останню задачу можна подати у такому вигляді:

Знайти $min \max\limits_{1 \leq v \leq 2m} \langle x, u_v \rangle$ за умов $\langle x, b^l \rangle = c_l$, $l = \overline{1,p}, \|x\| \leq \rho$.

Перепозначивши $x = (x_1, \dots, x_n) = (f_1, \dots, f_n) = f$, а $\langle x, y \rangle = \langle f, y \rangle = f(y)$, отримаємо таку форму запису останньої задачі:

Знайти

$$\min_{\substack{f(b^l)=c_l,\\ l=\overline{1,p},\\ \|x\|\le\rho}} \max_{1\le v\le 2m} f(u_v) \quad . \tag{0.1}$$

Природно розглянути таку задачу, яка б охоплювала задачу (0.1) та інші подібні їй задачі, й дослідження якої дозволило б єдиним чином отримувати відповідні результати для цих часткових випадків.

Серед таких узагальнених задач є задача, яка розглядається в дипломній роботі і полягає в наступному.

Нехай X-лінійний нормований простір, $u_p \in X, p = \overline{1,r}; x_i \in X, i = \overline{1,n}$, $\rho \in R$ та $\rho > 0$, X^* - простір, спряжений з X.

Поставимо задачу відшукання

$$\inf_{\substack{f\in X^*\\ f(x_i)=c_i, i=\overline{1,n};\\ \|f\|\le\rho}} \max_{1\le p\le r} f(u_p). \tag{0.2}$$

Задачу (0.2) будемо називати задачею мінімізації кусково-лінійної функції (функції, яка є максимумом кількох лінійних функцій) при обмеженнях, заданих системою лінійних рівнянь та додатковому обмеженню на норми її допустимих розв’язків.

Припускається,

що множина $Q = \{f \in X^*: f(x_i) = c_i, i = \overline{1,n}; \|f\| \le \rho\} \ne \emptyset$

та елементи $x_i, i = \overline{1,n}$, утворюють лінійно незалежну систему.

За цих умов в дипломній роботі доведено, що існує функціонал $f^* \in Q$ такий, що $\max_{1\le p\le r} f^*(u_p) = \inf_{f\in Q} \max_{1\le p\le r} f(u_p)$.

Його будемо називати оптимальним розв'язком задачі (0.2), або екстремальним елементом для величини (0.2).

Одним із важливих питань, які виникають при дослідженні задачі (0.2), є питання встановлення умов, за яких $Q \neq \emptyset$. Виявляється, що розв'язання цього питання тісно пов'язане з дослідженням таких екстремальних задач апроксимаційного характеру в просторі X :

$$inf\left\{\left\|\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\right\| : \sum_{i=1}^{n}\lambda_i c_i = 1\,, \lambda_i \in R, i\ =\ \overline{1,n}\ \right\}\ , \tag{0.3}$$

$$sup\left\{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i c_i - \rho\left\|\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\right\| : \lambda_i \in R, i\ =\ \overline{1,n}\ \right\}. \tag{0.4}$$

Фундаментальну роль в теорії екстремальних задач відіграють співвідношення двоїстості, які зводять задачу мінімізації (максимізації) в просторі X^* до двоїстої задачі максимізації(мінімізації) в просторі X.

В дипломній роботі встановлено, що такою двоїстою задачею для задачі відшукання величини (0.2) є задача апроксимаційного характеру, відшукання величини

$$sup\left\{\begin{matrix}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i c_i - \rho\left\|\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i - \sum_{\rho=1}^{r}\alpha_p u_p\right\| : \lambda_i \in R, i\ =\ \overline{1,n}\,, \\ \sum_{i=1}^{n}\alpha_p = 1\,, \alpha_p \geq 0, p\ =\ \overline{1,r}\end{matrix}\right\} \tag{0.5}$$

Співвідношення двоїстості між задачами (0.2) та (0.5), встановлене в дипломній роботі, послужило відправним пунктом для доведення критеріїв оптимальності допустимих розв'язків цих задач.

Слід зазначити, що співвідношення двоїстості, які зв'язують різні за постановкою екстремальні задачі в просторах X^* та X є одним із ефективних методів дослідження цих задач.

Питання двоїстості екстремальних задач розглядається, зокрема у працях [1-11].

Мета, об'єкт, предмет і задачі дослідження.

Метою роботи є встановлення властивостей множини Q, властивостей цільової функції задачі (0.2); доведення теореми існування її оптимального розв'язку (екстремального елемента) ; встановлення умов існування допустимого розв'язку задачі (0.2), в тому числі критеріїв сумісності системи обмежень для цієї задачі, найменшого значення для ρ, при якому система обмежень задачі (0.2) є сумісною; розгляд деякої задачі лінійного програмування з додатковим нелінійним обмеженням $\|f\| \leq \rho$, приєднаної до задачі (0.2) та встановлення еквівалентності цих задач ; встановлення співвідношення двоїстості між задачею відшукання величини (0.2), розглядуваною у просторі X^*, та двоїстою до неї задачею (0.5) апроксимаційного змісту, розглядуваною у просторі X; встановлення властивостей цільової функції задачі (0.5), двоїстої до задачі (0.2), умов існування оптимального розв'язку цієї двоїстої задачі, умов оптимальності допустимих розв'язків для задачі (0.2) та двоїстої до неї задачі (0.5), в тому числі доведення першої теореми двоїстості та теореми про доповнюючу нежорсткість; встановлення критерію екстремальності послідовності допустимих розв'язків задачі (0.5), двоїстої до задачі (0.2), доведення низки допоміжних тверджень, які становлять і самостійний інтерес.

Об'єктом дослідження є задача мінімізації кусково-лінійної функції, заданої на просторі X*, спряженому з лінійним нормованим простором X, яка є максимумом кількох лінійних функцій, заданих на X*, при обмеженнях, заданих системою лінійних рівнянь та додатковому обмеженню на норми її допустимих розв’язків, тобто задача відшукання величини (0.3), а також тісно пов’язані з нею задачі апроксимаційного змісту (0.3)-(0.5).

Предметом дослідження є проблеми теорії оптимізації та апроксимації, що стосується задачі відшукання величини (0.2) та задач апроксимаційного змісту (0.3)-(0.5), теореми існування допустимого розв’язку задачі (0.2), а також її оптимального розв’язку ; встановлення співвідношення двоїстості, між задачею відшукання величини (0.2) та задачею (0.5), двоїстою до задачі (0.2); теореми існування оптимального розв’язку двоїстої задачі; критерії оптимальності допустимих розв’язків двоїстих задач (0.2), (0.5), в тому числі доведення першої теореми двоїстості та теореми доповнюючої нежорсткості, критерій екстремальності послідовності для двоїстої до задачі (0.2) задачі (0.5) тощо.

Задачами дослідження є :

1. Встановлення властивості множини Q (опуклість, обмеженість та слабка* компактність).
2. Встановлення властивостей цільової функції задачі відшукання величини (0.2) (опуклість, неперервність на X^* у розумінні слабкої* топології на X^*).
3. З’ясування питання щодо існування оптимального розв’язку задачі (0.2).
4. Дослідження низки питань, що стосуються існування допустимого розв’язку задачі (0.2), шляхом використання їх зв’язку з властивостями задач (0.3), (0.4).
5. Встановлення еквівалентності задачі (0.2) деякій приєднані задачі лінійного програмування з додатковим обмеженням на норми допустимих розв’язків задачі (0.2).

6. Встановлення співвідношення двоїстості між задачею (0.2) та двоїстою задачею (0.5) апроксимаційного характеру.
7. Дослідження задачі (0.5), двоїстої до задачі (0.2)(властивості цільової функції , умови існування оптимального розв’язку, умови оптимальності допустимого розв’язку).
8. Доведення першої теореми двоїстості та теореми про доповнюючу нежорсткість для задачі (0.2) та двоїстої для неї задачі (0.5).
9. Доведення критерія екстремальності послідовності допустимих розв’язків задачі (0.5), двоїстої до задачі (0.2).
10. Доведення низки допоміжних тверджень.

При розв’язуванні поставлених задач в дипломній роботі використовувались методи математичного аналізу, функціонального аналізу, опуклого аналізу, теорії оптимізації, теорії апроксимації, теорії ігор, теорії екстремальних задач.

Наукова новизна отриманих результатів. Результати роботи є новими і полягають у наступному:

1. Доведено опуклість, обмеженість та слабку* компактність множини Q допустимих розв’язків задачі відшукання величини (0.2).
2. Доведено теореми про опуклість та неперервність на X^* у розумінні слабкої* топології цільової функції $\Psi(f) = \max\limits_{1 \le p \le r} f(u_p)$, $f \in X^*$, задачі відшукання величини (0.2).
3. Доведено, що за умови $Q \notin \emptyset$ оптимальний розв’язок задачі відшукання величини (0.2) існує.
4. Розглянуто питання існування допустимого розв’язку задачі відшукання величини (0.2). З’ясовано, що питання існування допустимого розв’язку тісно пов’язано з апроксимаційними задачами (0.3), (0.4) в просторі X.

Досліджено властивості цих задач. Встановлено найменше значення для величини ρ, при якому система обмежень задачі (0.2) є сумісною.

5. Встановлено еквівалентність задачі (0.2) та деякої задачі лінійного програмування з додатковим нелінійним обмеженням $\|f\| \leq \rho$ на допустимі розв'язки f задачі (0.2).
6. Побудовано задачу (0.5) апроксимаційного змісту в просторі X, двоїсту до задачі відшукання величини (0.2). Встановлено властивості цієї задачі та співвідношення двоїстості про рівність оптимального значення цільової функції задачі (0.2) оптимальному значенню цільової функції задачі (0.5), двоїстої до задачі (0.2).
7. Встановлені критерії оптимальності допустимих розв'язків задачі (0.2) та двоїстої їй задачі (0.5)(перша теорема двоїстості, теорема про доповнюючу нежорсткість).
8. Доведено критерій екстремальності послідовності допустимих розв'язків задачі(0.5), двоїстої до задачі відшукання величини (0.2).
9. Встановлено низку допоміжних тверджень, які становлять також самостійний інтерес.

Практичне значення отриманих результатів. Дипломна робота є роботою теоретичного характеру. Її результати можна використати для побудови чисельних методів розв'язування задачі (0.2) та двоїстої їй задачі (0.5) з наперед заданою точністю, а також для подальшого розвитку теорії оптимального керування, теорії апроксимації та оптимізації в лінійних нормованих просторах.

Апробація результатів роботи. Результати роботи доповідались на засіданнях студентської проблемної групи «Найкраще рівномірне наближення компактнозначних відображень», яка функціонує при кафедрі математики, а також оформлені у вигляді статті за результатами роботи звітної конференції студентів і магістрантів за підсумками науково-дослідної роботи у 2020-2021 навчальному році, що проводилась у жовтні 2021 року.

Структура роботи. Робота містить вступ, три розділи, висновки та список використаних джерел.

У першому розділі сформульовано задачу (0.2), яка досліджується в дипломній роботі. Для цієї задачі встановлено :

— опуклість, обмеженість та слабку* компактність множини її допустимих розв’язків;
— опуклість та неперервність у розумінні слабкої* топології цільової функції;
— існування оптимального розв’язку;
— властивості допоміжної апроксимаційної задачі (0.3);
— умови існування допустимого розв’язку;
— величину найменшого значення ρ, при якому задача (0.2) має допустимий розв’язок.

У другому розділі доведено :

— еквівалентність задачі (0.2) деякій задачі лінійного програмування в просторі X^* з додатковим нелінійним обмеженням $\|f\| \leq \rho$, де $f \in X^*, \rho > 0$;
— розглянуто двоїсту їй екстремальну задачу (0.5) в просторі X;
— встановлено, що оптимальні значення цільових функцій задач (0.2) та (0.5) співпадають (має місце, так зване співвідношення двоїстості).

У третьому розділі встановлено :

— критерій сумісності системи обмежень задачі відшукання величини (0.2) з використанням зв’язку цього питання з властивостями величини (0.4);
— неперервність цільової функції задачі (0.5), двоїстої до задачі (0.2);

— умови існування оптимального розв’язку двоїстої задачі (0.5);

— критерій оптимальності допустимих розв’язків двоїстих задач (0.2), (0.5) (перша теорема двоїстості, теорема про доповнюючу нежорсткість);

— критерій екстремальності послідовності допустимих розв’язків двоїстої задачі (0.5).

ВИСНОВКИ

В дипломній роботі:

1. Доведено опуклість, обмеженість та слабку* компактність множини Q допустимих розв’язків задачі відшукання величини (1.1).
2. Встановлено опуклість та неперервність у розумінні слабкої* топології цільової функції задачі відшукання величини (1.1).
3. Доведено теорему існування екстремального елемента для величини (1.1).
4. Досліджено задачі апроксимаційного змісту (1.12) та (0.4). З допомогою результатів цих досліджень з’ясовано питання існування допустимого розв’язку задачі відшукання величини (1.1), встановлено найменше значення для величини ρ, при якому система обмежень задачі (1.1) є сумісною.
5. Встановлено еквівалентність задачі (1.1) задачі лінійного програмування (2.1)-(2.4) в просторі X^* з додатковим нелінійним обмеженням $\|f\| \leq \rho$, $f \in X^*$.
6. Побудовано задачу (2.7) апроксимаційного змісту в просторі X, двоїсту до задачі (1.1). Встановлено властивості цієї двоїстої задачі, умову існування її оптимального розв’язку та співвідношення двоїстості про рівність оптимальних значень цільових функцій задач (1.1) та (2.7).
7. Встановлено критерій оптимальності допустимих розв’язків двоїстих задач (1.1) та (2.7) (першу теорему двоїстості та теорему про доповнюючу нежорсткість).
8. Доведено критерій екстремальності послідовності допустимих розв’язків задачі (2.7), двоїстої до задачі (1.1).
9. Встановлено низку допоміжних тверджень, які становлять також самостійний інтерес.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Крейн М. L-проблема моментов в абстрактном линейном нормированном пространстве / М. Крейн // В кн.: Ахизер И., Крейн М. О некоторых вопросах теории моментов/ И. Ахизер, М. Крейн. — Харьков: ГОНТИ, 1938. – С.171-199.
2. Никольский С. М. Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем/ С.М. Никольский // Изв. АН СССР. Сер. мат., 1946. — Т. 10, № 3. — С. 207–256.
3. Гольштейн Е.Г. Теория двойственности в математическом программировании и ее приложения / Е.Г. Гольштейн. – М.: Наука, 1971. – С.351.
4. Иоффе А.Д. Теория экстремальных задач / А.Д. Иоффе, В.М. Тихомиров. – М.: Наука, 1974. – С.408.
5. Лоран П.-Ж. Аппроксимация и оптимизация / П.-Ж. Лоран.—М. : Мир, 1975. — С.496.
6. Корнейчук Н.П. Экстремальные задачи теории приближения / Н.П. Корнейчук. —М.: Наука, 1976.—С.320.
7. Тихомиров В. М. Некоторые вопросы теории приближений / В. М. Тихомиров. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1976. — С.307.
8. Гнатюк Ю. В. Двоїсті співвідношення для задачі найкращої за дробово-опуклою функцією наближення кількох елементів та критерії елемента найкращого наближення / Ю. В. Гнатюк // Доп. НАН України, 1995. — № 6. — С. 23–26.
9. Гнатюк Ю. В. Основні властивості задачі найкращого одночасного наближення кількох елементів / Ю. В. Гнатюк // Укр. мат. журн., 1996. — Т. 48, № 9. — С. 1183–1193.

10. Гудима У.В. Найкраща рівномірна апроксимація неперервного компактнозначного відображення множинами неперервних однозначних відображень / У. В. Гудима // Укр. мат. журн., 2005. — Т. 57, № 12. — С. 1601–1619.
11. Пшеничный Б.Н. Необходимые условия экстремума / Б.Н. Пшеничный. – М.: Наука, 1982. – С.144.
12. Гудима У. В. Опуклий аналіз: навчальний посібник / У. В. Гудима, В. О. Гнатюк. — Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2019. — С.112.
13. Канторович Л. В. Функциональный анализ / Л. В. Канторович, Г. П. Акимов. — М.: Наука, 1984. — С.752.
14. Люстерник Л.А. Краткий курс функционального анализа / Л.А. Люстерник, В.И. Соболев. – М.: Высшая школа, 1982. – С.271.
15. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа / Л.Д. Кудрявцев. – М.: Дрофа, 2003. – Т.1. – С.704.
16. Юдин Д.Б. Задачи и методы линейного программирования / Д.Б. Юдин, Е.Г. Гольштейн. — М. : Советское радио, 1961. —С.494.
17. Фань Цзи. Теоремы о минимаксе / Цзи Фань // Бесконечные антагонистические игры. – М.: Физматгиз, 1963. – С. 31-39.