Міністерство освіти і науки України
Кам’янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка
Фізико-математичний факультет
Кафедра математики

Магістерська робота

на тему:

«Сумісне наближення лінійних комбінацій нескінченно диференційовних функцій»

виконав
здобувач вищої освіти
2 курсу, групи М1-М20
спеціальності 014 Середня освіта (Математика)
Івасюк Богдан Васильович

Науковий керівник:
Кандидат фізико-математичних наук,
доцент кафедри математики
Сорич В.А.
Рецензент:
Кандидат фізико-математичних наук,
доцент кафедри математики
Ковальська І. Б.

Кам’янець-Подільський, 2021

Зміст

Перелік основних позначень

$\forall$ - квантор загальності: «для кожного» «для будь-якого»;

$\exists$ - квантор існування: «існує»;

$x \in A$ – елемент x належить множині A;

$x \notin A$ - елемент x не належить множині A;

$A \cup B$ – об'єднання множин А і В;

$A \cap B$ – перетин множин А і В;

$A \subset B$ – множина A міститься в множині B;

N – множина всіх натуральних чисел;

Z – множина всіх цілих чисел;

R – множина всіх дійсних чисел;

C – множина всіх комплексних чисел;

$\sup\limits_{x \in A} F(x)$ – точна верхня межа значень функціонала F на множині А;

$ess\ sup$ – суттєва точна верхня межа;

$signa$ – величина, що дорівнює 1, якщо $a > 0$, дорівнює -1 якщо $\text{a} < 0$ і дорівнює 0, якщо $\text{a} = 0$;

$[x_1; x_2]$ – сегмент числової прямої;

$(x_1; x_2)$ – інтервал числової прямої;

$\|\cdot\|_x$ – норма в лінійному нормованому просторі;

U_p – одинична куля в просторі L_p, $1 \leq\ p \leq \infty$;

U_x – одинична куля в просторі X;

U_p^0– множина вигляду: $U_p^0 = \left\{\varphi \in U_p : \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t)dt = 0\right\}$;

$Re\ Z$ – дійсна частина комплексного числа;

$Im\ Z$ – уявна частина комплексного числа;

C – простір неперервних 2π – періодичних функцій f з нормою

$\|f\|_C = \max\limits_{0 \leq x \leq 2\pi} |f(t)|$;

L_p – простір 2π – періодичних вимірних і суттєво обмежених (при $p = \infty$) або сумовних у p-ому степені функцій $(1 \le p < \infty)$ з нормою

$$\|f\|_{L_p} = \begin{cases} \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^p dt \right)^{1/p}, 1 \le p \le \infty \\ \underset{-\pi \le t \le \pi}{\operatorname{ess\,sup}} |f(t)|, \qquad p = \infty; \end{cases}$$

$S_n(f)$ – сума Фур'є функції f;

t_n – тригонометричний поліном порядку n;

$\rho_n(f; x)$ – відхилення від функції її часткових сум Фур'є S_{n-1};

$E_n(f)_X$ – найкраще наближення функції тригонометричними поліномами порядку $n - 1$ у метриці простору X;

$E_n(\mathfrak{N})_X$ – найкраще наближення множини $\mathfrak{N} \subset X$ тригонометричними поліномами порядку $n - 1$ у метриці простору X;

$\varepsilon_n(\mathfrak{N})_X$ - наближення множини $\mathfrak{N} \subset X$ частинними сумами Фур'є порядку $n - 1$ у метриці простору X;

$B_r(t)$ – ядра Бернуллі$(r \in N)$;

$B_{r,\beta}(t)$ – ядра Вейля-Надя: $B_{r,\beta}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-r} cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right)$, $r > 0$, $\beta \in R$;

$\mathcal{P}_q(t)$ – ядра Пуассона;

$\mathcal{P}_{q,\beta}(t)$ – узагальнені ядра Пуассона;$\mathcal{P}_{q,\beta}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} q^k \left(cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right)\right)$, $0 < q < 1$, $\beta \in R$;

$B_{q,\beta}(t)$ – бігармонічні ядра Пуассона:

$$B_{q,\beta}(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1-q^2}{2} k\right) q^k \cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right), \ \ 0 < q < 1, \beta \in R;$$

$N_{q,\beta}(t)$ – ядра Неймана:

$$N_{q,\beta}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q^k}{k} \cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right), \ \ 0 < q < 1, \ \ \beta \in R;$$

$\Psi_\beta(t)$ – ядра вигляду

$P_\beta^{(q)}$ – (q, β) – похідна функції $f(\cdot)$ в сенсі О.І.Степанця:

$$f_\psi^{(\psi)}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\psi(k)}\left(a_k(f)cos\left(kx + \frac{\psi(k)\pi}{2}\right) + b_k(f)sin\left(kx + \frac{\psi(k)\pi}{2}\right)\right);$$

$f_\beta^{(\psi)}(\cdot)$ – (ψ, β) – похідна функції $f(\cdot)$ в сенсі О.І.Степанця:

$$f_\beta^{(\psi)}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\psi(k)}\left(a_k(f)cos\left(kx + \frac{\beta\pi}{2}\right) + b_k(f)sin\left(kx + \frac{\beta\pi}{2}\right)\right);$$

$\mathcal{J}_\beta^\psi(\varphi)$ – (ψ, β) інтеграл функції φ;

W_β^r – класи Вейля-Надя;

$$W_\beta^r = \left\{f \in L_p : \left\|f_\beta^{(r)}\right\|_p \leq 1\right\}, r > 0, \beta \in R, p = 1, p = \infty;$$

$P_{\beta,\infty}^q$ – класи 2π – періодичних функцій вигляду, які записуються у вигляді згортки:

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(x + t)\, P_\rho^q(t)dt;$$

$L_\beta^\psi\mathfrak{N}$ – класи 2π – періодичних функцій вигляду:

$$L_\beta^\psi\mathfrak{N} = \left\{f \in L: f_\beta^\psi(\cdot) \in \mathfrak{N}, \mathfrak{N} \in L\right\},$$

$C_\beta^\psi \mathfrak{N}$ – класи 2π – періодичних функцій вигляду:

$$C_\beta^\psi \mathfrak{N} = L_\beta^\psi \mathfrak{N} \cap C.$$

Вступ

Теорія наближення функцій є фундаментальним напрямком математичного аналізу, який виник в результаті внутрішнього розвитку математичної науки і потреб практики. Дана теорія і досі продовжує інтенсивно розвиватися протягом багатьох десятиріч. У ній поняття апроксимації відображає одну з провідних ідей математики - наближення (заміна) складних об'єктів більш простими та зручними. Ця ідея є визначальною у питаннях зв'язку математики з практикою, що стимулювало розвиток теорії наближення функцій в минулому і, напевне, що забезпечить цікавість до неї в майбутньому. У пропонованій дипломній роботі порушуються питання, що відносяться до одного з напрямків зазначеної теорії, а саме вивчається питання асимптотичної поведінки при n→ ∞ величин

$$\mathcal{E}_{n,m}\left(C^{\psi}_{\beta,\infty}; U^{*}_{n-1}\right) = \sup_{f\in C^{\psi}_{\beta,\infty}} \left\|\sum_{n=1}^{m} \psi_i(n)\left(f^{\psi_i}_{\beta_i}(x) - U^{*}_{n-1}\left(f^{\psi_i}_{\beta_i}; x\right)\right)\right\|_C,$$

$$\mathcal{E}_{n,m}\left(L^{\psi}_{\beta,1}; U^{*}_{n-1}\right) = \sup_{f\in L^{\psi}_{\beta,1}} \left\|\sum_{n=1}^{m} \psi_i(n)\left(f^{\psi_i}_{\beta_i}(x) - U^{*}_{n-1}\left(f^{\psi_i}_{\beta_i}; x\right)\right)\right\|_L,$$

що характеризують поведінку сумісного наближення функцій f(·) та їх $(\psi_{i,}\beta_i)$ −похідних в сенсі О.І. Степанця при наближенні запровадженим новим лінійним методом $U^{*}_{n-1}(f)$.

Отже,

<u>*Мета даної роботи*</u>*:*

Побудувати деякий новий лінійний метод сумісного наближення 2π- періодичних функцій тригонометричними многочленами, який на класах запроваджених О.І. Степанцем наближав би не гірше за суми Фур'є , та вивчити його апроксимативні властивості.

Відповідно до мети роботи , виділимо її <u>*завдання:*</u>

Знайти асимптотичні рівності для верхніх меж величин сумісного наближення в рівномірній та інтегральній метриках класів нескінченно диференційовних функцій.

Для виконання поставленого завдання використовуються наступні методи наукового дослідження:

1. Аналіз наукових праць із розглядуваної тематики.
2. Узагальнення попередньо отриманих результатів.
3. Отримання та обгрунтування справедливості нових тверджень, використовуючи вже відомі рузультати.
4. Систематизація наукових відомостей з даної теми.

Об'єктом дослідження даної роботи є апроксимаційні властивості класів 2π – періодичних функцій при сумісному наближенні їх елементів одним новим лінійним методом підсумовування рядів Фур'є в рівномірній та інтегральній метриках.

Наукова новизна отриманих результатів. Дослідження дипломної роботи містять нові результати і полягають у наступному:

Побудований деякий новий лінійний метод сумісного наближення 2π-періодичних функцій тригонометричними многочленами, який на класах запроваджених О.І. Степанцем наближає нескінченно диференційовні функції та їх похідні не гірше за суми Фур'є , та вивчено його апроксимативні властивості.

Практичне значення отриманих результатів. Дипломна робота носить теоретичний характер. Практичне значення роботи полягає в тому, що результати дипломної роботи, а також запропоновані в ній методи та прийоми можуть бути використані при вивченні різноманітних питань сумісного наближення функцій та їх похідних, що виникають, як в теорії наближення функцій так і в теорії підсумовування рядів Фур'є ,математичному аналізі.

Апробація результатів дослідження. Результати отримані в дипломній роботі доповідалися на студентських наукових конференціях за підсумками НДР у 2019р, 2021р.

Структура роботи. Дипломна робота обсягом 63 друкованих аркушів, складається з переліку умовних позначень, вступу, трьох параграфів ядра роботи, висновків та списку використаних джерел.

Перший параграф: "Короткий огляд результатів та історичні відомості. Постановка задачі" містить матеріал уже відомих на даний час результатів досліджень з тематики теорії наближення, до яких відноситься і тема даної дипломної роботи..

У другому параграфі "Класи диференційовних функцій" описано сучасні підходи до класифікації функцій, що спираються на поняття (ψ, β)- похідної та $\bar{\psi}$ – інтеграла. Такий підхід дозволив здійснити досить тонку класифікацію надзвичайно широких множин періодичних функцій.

Суть отриманих результатів дипломної роботи поміщено у параграфі третьому "Сумісне наближення лінійних комбінацій нескінченно диференційовних функцій ". Тут спочатку вводиться відношення порядку для $(\psi, \overline{\beta})$ – похідних, що дозволяє вказати аналоги "молодших" похідних для функція множин $L^{\psi}_{\overline{\beta}}$. Апроксимативні властивості досліджуваних у дипломній роботі класів $L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{R}$ тісно пов'язані з поведінкою функції натурального аргументу $\psi(k)$, k $\epsilon\, N$. Детальне вивчення апроксимативних властивостей класів $C^{\psi}_{\beta,\infty}$ та $L^{\psi}_{\beta,1}$, що досліджуються у дипломній роботі , виявляється доцільно проводити на кожній із підмножин $\mathfrak{M}_C$, $\mathfrak{M}_{0,}$ $\mathfrak{M}_\infty$ на які розбивається множина $\mathfrak{M}$ всіх опуклих вниз функцій $\psi(\cdot)$, що задовільняють умову $\lim_{v\to\infty} \psi(v)$ =0. І таке розбиття функцій натурального аргументу ψ $(\cdot)$ здійснено в підпункті 3.2 згідно такій характеристиці, як модуль напіврозпаду опуклих функцій.

Далі запропонований до розгляду тригонометричний многочлен $U_{n-1}^*(f;x)$ = $U_{n-1}^*(f;x;\psi;\bar{\beta})$ вигляду

$$U_{n-1}^*(f;x) = \frac{a_0}{2}\lambda_0^{(n)} + \sum_{k=1}^{n-1}\left\{\lambda_k^{(n)}(a_k\cos kx + b_k\sin kx) + \nu_k^{(n)}(a_k\sin kx - b_k\cos kx)\right\},$$

де $a_k = a_k\left(f_{\bar{\beta}}^{\psi}\right)$, $b_k = b_k\left(f_{\bar{\beta}}^{\psi}\right)$, k = 0,1,2,…-коефіцієнти Фур'є функції $f_{\beta}^{\psi}(x)$, а числа $\lambda_k^{(n)} = \lambda_k^{(n)}(\psi;\bar{\beta})$ та $\nu_k^{(n)} = \nu_k^{(n)}(\psi;\bar{\beta})$, k = 0,1,…,n – 1, n ϵ N означаються рівностями

$$\lambda_0^{(n)} = -2\psi(2n)\cos\frac{\bar{\beta}\pi}{2};$$

$$\lambda_k^{(n)} = \big(\psi(k) - \psi(2n-k) - \psi(2n+k)\big)\cos\frac{\bar{\beta}\pi}{2},\ k = \overline{1, n-1};$$

$$\nu_k^{(n)} = (\psi(k) - \psi(2n-k) + \psi(2n+k))\sin\frac{\bar{\beta}\pi}{2},\ k = \overline{1, n-1}.$$

У даному, центральному параграфі дипломної роботи встановлюються асимптотичні рівності для величин

$$\mathcal{E}_{n,m}\left(C_{\beta,\infty}^{\psi}; U_{n-1}^*\right) = \sup_{f\epsilon C_{\beta,\infty}^{\psi}}\left\|\sum_{i=1}^{m}\psi_i(n)\left(f_{\beta_i}^{\psi_i}(x) - U_{n-1}^*\left(f_{\beta_i}^{\psi_i};x\right)\right)\right\|_C,$$

$$\mathcal{E}_{n,m}\left(L_{\beta,1}^{\psi}; U_{n-1}^*\right) = \sup_{f\epsilon L_{\beta,1}^{\psi}}\left\|\sum_{i=1}^{m}\psi_i(n)\left(f_{\beta_i}^{\psi_i}(x) - U_{n-1}^*\left(f_{\beta_i}^{\psi_i};x\right)\right)\right\|_L,$$

на класах функцій, які задаються швидко спадними послідовностями $\tau_i(k)$ ($\tau_i(k)\ \epsilon\ \mathfrak{M}_\infty$). В цьому випадку суми рядів Фур'є функцій є нескінченно диференційовними функціями .

Висновки

В роботі запроваджено деякий новий лінійний метод наближення 2π – періодичних $(\psi, \bar{\beta})$- диференційовних функцій

$$U_{n-1}^{*}(f;x) = \frac{a_0}{2}\lambda_0^{(n)} + \sum_{k=1}^{n-1}\Big\{\lambda_k^{(n)}(a_k\cos kx + b_k\sin kx) + \overline{\lambda_k^{(n)}}(a_k\sin kx - b_k\cos kx)\Big\}$$

та вивчено відхилення від лінійних комбінацій таких функцій на класах, що визначаються швидкістю прямування до нуля коефіцієнтів Фур'є їх елементів в рівномірній та інтегральній метриках.

Зокрема вивчаються питання асимптотичної поведінки при n→ ∞ величин

$$\mathcal{E}_{n,m}\left(C_{\beta,\infty}^{\psi}; U_{n-1}^{*}\right) = \sup_{f\epsilon C_{\beta,\infty}^{\psi}} \left\|\sum_{n=1}^{m}\psi_i(n)\left(f_{\beta_i}^{\psi_i}(x) - U_{n-1}^{*}\left(f_{\beta_i}^{\psi_i};x\right)\right)\right\|_C,$$

$$\mathcal{E}_{n,m}\left(L_{\beta,1}^{\psi}; U_{n-1}^{*}\right) = \sup_{f\epsilon L_{\beta,1}^{\psi}} \left\|\sum_{n=1}^{m}\psi_i(n)\left(f_{\beta_i}^{\psi_i}(x) - U_{n-1}^{*}\left(f_{\beta_i}^{\psi_i};x\right)\right)\right\|_L,$$

в залежності від швидкості спадання до нуля послідовностей $\frac{\psi(k)}{\psi_i(k)} = \tau_i(k)$, за допомогою яких визначаються функціональні компакти $C_{\beta-\beta_i,\infty}^{\psi/\psi_i}$ та $L_{\beta-\beta_i,1}^{\psi/\psi_i}$.

Очевидно також, що досліджувані величини характеризують поведінку сумісного наближення функцій f(·) та їх $(\psi_{i,}\beta_i)$ –похідних в сенсі О.І. Степанця при наближенні запровадженим новим лінійним методом $U_{n-1}^{*}(f)$. Показано, що на досліджуваних в роботі класах функцій апроксимативні властивості поліномів $U_{n-1}^{*}(f)$ не гірші (а в цілому ряді випадків кращі) за відповідні властивості сум Фур'є.

Провівши наукові пошуки по темі дослідження одержані асимптотичні рівності для величин $\mathcal{E}_{n,m}\left(C^{\psi}_{\beta,\infty}; U^*_{n-1}\right)$ та $\mathcal{E}_{n,m}\left(L^{\psi}_{\beta,1}; U^*_{n-1}\right)$ у випадку , коли $\tau_i(n) = \frac{\psi(n)}{\psi_i(n)} \epsilon$ $\mathfrak{M}_\infty$, β, $\beta_i \epsilon$ R, i = $\overline{1,m}$, та відповідно $\tau_i(n) = \frac{\psi(n)}{\psi_i(n)} \epsilon\, \mathfrak{M}_1$, β, $\beta_i \epsilon$ R, i = $\overline{1,m}$.

Справедливі теореми:

Теорема 1. Нехай $\tau_i(n) = \frac{\psi(n)}{\psi_i(n)} \epsilon\, \mathfrak{M}_\infty$, β, $\beta_i \epsilon$ R, i = $\overline{1,m}$. Тоді при n → ∞

$$\mathcal{E}_{n,m}\left(C^{\psi}_{\beta,\infty}; U^*_{n-1}\right) = \frac{4}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sqrt{cos^2\left(\frac{\beta\pi}{2}\right)\left(A_n(t)\right)^2 + sin^2\left(\frac{\beta\pi}{2}\right)\left(B_n(t)\right)^2} +$$

$$+O(1)\sum_{i=1}^{m}\psi_i\,(n)\,\psi/\psi_i\,(n+1)(\frac{1}{n} + \frac{1}{\mu_i\,(n)} + +\psi/\psi_i\,(3n)\left(1 + ln^+(\eta_i(n) - n)\right),$$

$$\mathcal{E}_{n,m}\left(L^{\psi}_{\beta,1}; U^*_{n-1}\right) = \frac{4}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sqrt{cos^2\left(\frac{\beta\pi}{2}\right)\left(A_n(t)\right)^2 + sin^2\left(\frac{\beta\pi}{2}\right)\left(B_n(t)\right)^2} +$$

$$+O(1)\sum_{i=1}^{m}\psi_i\,(n)\,\psi/\psi_i\,(n+1)(\frac{1}{n} + \frac{1}{\mu_i\,(n)} + \psi/\psi_i\,(3n)\left(1 + ln^+(\eta_i(n) - n)\right),$$

де $\eta_i(n) = \eta_i(\tau_i; n)$, $\mu_i(n) = \mu_i(\tau_i; n)$ –характеристики, означені в пункті 3.2, функція $ln^+ t = \begin{cases} \ln t, t > 1 \\ 0, t \le 1 \end{cases}$, а O(1) –величина рівномірно обмежена відносно параметрів n, β , β_i, τ_i.

Теорема2. Нехай $\psi(k) = e^{-\alpha t^r}$, $\psi_i(k) = e^{-\alpha_i t^r}$, $\alpha > \alpha_i > 0$, r > 0. Тоді при n → ∞ виконується

$$\mathcal{E}_{n,m}\left(C^{\alpha,r}_{\beta,\infty}; U^*_{n-1}\right) = \frac{4}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sqrt{cos^2\left(\frac{\beta\pi}{2}\right)\left(A_n(t)\right)^2 + sin^2\left(\frac{\beta\pi}{2}\right)\left(B_n(t)\right)^2} +$$

$$+ \int_{-\pi}^{\pi}\sqrt{cos^2\left(\frac{\beta\pi}{2}\right)\left(A_n(t)\right)^2 + sin^2\left(\frac{\beta\pi}{2}\right)\left(B_n(t)\right)^2}\, O(1)\gamma_n\left(\alpha_{i,r}\right),$$

$$\mathcal{E}_{n,m}\left(L^{\alpha,r}_{\beta,\infty}; U^*_{n-1}\right) = \frac{4}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sqrt{cos^2\left(\frac{\beta\pi}{2}\right)\left(A_n(t)\right)^2 + sin^2\left(\frac{\beta\pi}{2}\right)\left(B_n(t)\right)^2} +$$

$$+\int_{-\pi}^{\pi}\sqrt{cos^2\left(\frac{\beta\pi}{2}\right)\left(A_n(t)\right)^2+\ sin^2\left(\frac{\beta\pi}{2}\right)\left(B_n(t)\right)^2}\ \mathrm{O}(1)\gamma_n\left(\alpha_{i,r}\right),$$

у яких

$$\gamma_n\left(\alpha_{i,r}\right) \stackrel{\text{def}}{\equiv} \begin{cases} \frac{1}{r\alpha_i n^r}, & r \epsilon\ (0,1) \\ \left(1+\ \frac{1}{\alpha_i}\right)\frac{e^{-\alpha_i}}{n}, & r=1 \\ \frac{e^{-\ \alpha_i(n+1)^r-\ n^r}}{n}, & r\ >\ 1, \end{cases}$$

а O(1)-величина, рівномірно обмежена по n,β, β_i,α, $\alpha_{i.}$

Список використаних джерел

1. Степанец А.И. Классификация периодических функций и приближение их суммами Фурье / А.И. Степанец.-1983. –С.1-57-(Препринт / АН УРСР: Ін-т математики;83.69).

2. Бари Н.К. Тригонометрические ряды / Н.К. Бари.-М.: Физматгиз.1961.-936с.

3. Зигмунд А. Тригонометрические ряды:в 2-х ч./ А. Зигмунд.-М.Мир,1965.-Ч1.-615с.

4. Степанец А.И. Методы теории приближений:в 2-х ч./ А.И. Степанец.-К.:Ін-т математики НАН України, 2002.-Ч1.-427с.

5. Степанец А.И. Приближение суммами Фурье функций с медленно убывающими коэффициентами Фурье /А.И. Степанец.-1984.-С.3-25.-(Препринт / АН УРСР: Ін-т математики;84.43).

6. Степанец А.И. Равномерные приближения тригонометрическими полиномами / А.И. Степанец.-К.:Наук.думка, 1981.-340с.

7. Степанец А.И. Классификация и приближение периодических функций/ А.И. Степанец.-К.: Наук.думка, 1987.-286с.

8. Стечкин С.Б. Оценки остатка ряда Фурье для дифференцируемых функций / С.Б. Стечкин // Труды МИ АН СССР.-1980.-145.-С.126-151.

9. Теляковский С.А. Оценка нормы функции через ее коэффициенты Фурье, удобные в задачах теории аппроксимации /С.А. Теляковский// Тру- ды МИ АН СССР.-1971.-109.-С.65-97.

10. Fejer L. Lebesquesquesche Konstanten und diverqente Fourierreihen / L. Fejer // J. reine und anqew.math., 1910.- 138.-S.22-53.

11. Kolmogoroff A.Sur l'ordre de grandent des coefficients de la series de Fouri er- Lebesque // Bull. Acad. pol. ser. A, Sci Math.- 1923.- P.83-86.

12. Степанец А.И. Скорость сходимости рядов Фурье на классах $\bar{\psi}$ – интегралов / А.И. Степанец // Укр.мат. журн. -1997.-49,№8.- С.1069-1113.

13. Корнейчук Н.П. Точные константы в террии приближения / Н.П. Корнейчук.-М.: Наука, 1987.-423с.

14. Никольский С.М. Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем / С.М. Никольский // Изв. АН СССР, сер.матем.-1946.- 10.-С.207-256.

15. Сердюк А.С. Про один лінійний метод наближення періодичних функ – цій / А.С. Сердюк // В кн. “Проблеми теорії наближення функцій та суміжні питання “ : зб.праць Ін-ту математики НАН України.-Т.1.-№1.-Київ: Ін-т математики НАН України, 2004.-С.295-336.

16. Сорич Н.Н. Одновременное приближение периодических функций и их производных суммами Фурье / Н.Н. Слрич.-1985.-С.22-63.(Препринт / АН УРСР: Ін-т математики ;85.7).

17. Пинкевич В.Т.О порядке остаточного члена ряда Фурье функций, дифференцируемых в смысле Вейля / В.Т. Пинкевич // Изв. АН СССР, сер.матем.,-1940.-4,№5, с.521-528.

18. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления/ Г.М. Фихтенгольц – Т.3-М.: Наука, 1966.-186 с.

19. Івасюк Б. Сумісне наближення лінійних комбінацій нескінченно диференційовних функцій / Б. Івасюк // Зб.наукових праць студентів та магістрантів Кам’янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка.- Кам’янець-Подільський:Кам’янець-Подільський національний університет ім. Івана Огієнка,2021.-С.

20. Рой М.М., Івасюк Б.В. Наближення аналітичних функцій сумами Фур’є. / М. Рой, Б. Івасюк // Збірник наукових праць студентів та магістрантів Кам’янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка. Кам’янець-Подільський : Кам’янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2020. Випуск 14. С. 84-85.