

Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова  
Національної академії наук України  
Кам'янець-Подільський національний університет  
імені Івана Огієнка

# **МАТЕМАТИЧНЕ ТА КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ**

**Серія: Технічні науки**

Збірник наукових праць

**Випуск 17**

Кам'янець-Подільський національний університет  
імені Івана Огієнка  
2018

УДК 004.94:53.072

ББК 30

М34

Свідectво про державну реєстрацію друкованого засобу масової інформації:  
Серія КВ № 14522-3493Р від 25.06.2008 р.

Збірник наукових праць включено до Переліку наукових фахових видань ДАК Міністерства освіти і науки України з технічних наук (наказ №1021 від 07 жовтня 2015 р.)

Друкуються згідно з рішенням вченої ради Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка, протокол №6 від 26 червня 2018 року.

#### Рецензенти:

**І. В. Бейко**, доктор технічних наук, професор,  
Національний технічний університет України  
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»;

**Р. Н. Квстний**, доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри  
Вінницького національного технічного університету.

#### Редакційна колегія:

**О. М. Хіміч**, член-кореспондент НАНУ,  
доктор фізико-математичних наук, професор (*відповідальний редактор*);

**А. Ф. Верлань**, член-кореспондент НАПНУ,

доктор технічних наук, професор (*заст. відповідального редактора*);

**В. А. Федорчук**, доктор технічних наук, професор (*відповідальний секретар*);

**Т. Бокалруд**, доктор філософії, професор, Норвегія;

**В. П. Боюн**, член-кореспондент НАНУ, доктор технічних наук, професор;

**В. В. Васильєв**, член-кореспондент НАНУ, доктор технічних наук, професор;

**А. А. Верлань**, доктор філософії, професор, Норвегія;

**В. К. Задірака**, академік НАНУ, доктор фізико-математичних наук, професор

**І. М. Конет**, доктор фізико-математичних наук, професор;

**Б. Б. Нестеренко**, доктор технічних наук, професор;

**С. А. Положанко**, доктор технічних наук, професор.

**Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки** : зб.  
**М34** наук. праць / Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова Національної академії наук України, Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка ; [редкол.: О. М. Хіміч (відп. ред.) та ін.]. — Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2018. — Вип. 17. — 168 с.

У збірнику друкуються результати досліджень, що стосуються проблем застосування математичних моделей у різних галузях людської діяльності.

Збірник включений до бази даних наукових журналів Норвегії.

Для наукових та інженерно-технічних працівників, докторантів, аспірантів, студентів вищих навчальних закладів.

УДК 004.94:53.072

ББК 30

© Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова НАН України, 2018

© Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2018

ISSN 2308-5916

V. M. Glushkov Institute of Cybernetics  
of National Academy of Sciences of Ukraine  
Kamianets-Podilskyi National Ivan Ohiienko University

# **MATHEMATICAL AND COMPUTER MODELLING**

**Series: Technical sciences**

Scientific journal

**ISSUE 17**

Kamianets-Podilskyi National Ivan Ohiienko University  
2018

### Critics:

**I. Beyko**, Doctor of Technical Science, Professor,  
National Technical University of Ukraine  
«Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute»;

**R. Kvyetnyy**, Doctor of Technical Science, Professor,  
Head of department Vinnytsia national technical university.

### Editorial board:

**O. Himich**, Corresponding Member of the NAS of Ukraine, Doctor  
of Physical and Mathematical Sciences, Professor (*Executive Editor*);

**A. F. Verlan**, Corresponding Member of the NAPS of Ukraine,  
Doctor of Technical Science, Professor (*Vice Executive Editor*);

**V. Fedorchuk**, Doctor of Technical Science,  
Professor (*Responsible Secretary*);

**T. Bokalrud**, Associate Professor, Norway;

**V. Boyun**, Corresponding Member of the NAS of Ukraine,  
Doctor of Technical Science, Professor;

**I. Konet**, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor;

**B. Nesterenko**, Doctor of Technical Science, Professor;

**S. Polozhaenko**, Doctor of Technical Science, Professor;

**V. Vasiliev**, Corresponding Member of the NAS of Ukraine,  
Doctor of Technical Science, Professor;

**A. A. Verlan**, Ph. D., Professor, Norway;

**V. Zadiraka**, Academician of the NAS of Ukraine,  
Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor.

**Mathematical and computer modelling. Series: Technical sciences:** scientific journal / V. M. Glushkov Institute of Cybernetics of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kamianets-Podilskyi National Ivan Ohiienko University ; [Editorial Board: O. Himich (Executive Editor) and others]. — Kamianets-Podilskyi : Kamianets-Podilskyi National Ivan Ohiienko University, 2018. — ISSUE 17. — 168 p.

The journal publishes results of studies on the mathematical models' application problems in various areas of human activity.

Joint with NTNU the journal has been included to the database of Norwegian Register for Scientific Journals, Series and Publishers.

Intended for scientific and engineering staff, researchers, undergraduate, graduate and Ph. D. students, post-graduates.

© V. M. Glushkov Institute of Cybernetics  
of NAS of Ukraine, 2018

© Kamianets-Podilskyi National  
Ivan Ohiienko University, 2018

ISSN 2308-5916

УДК 004.942:519.876.5

**А. Ф. Верлань\***, д-р техн. наук, професор,

**В. А. Федорчук\*\***, д-р техн. наук, професор

\*Інститут проблем моделювання в енергетиці

імені Г. Є. Пухова НАН України, м. Київ,

\*\*Кам'янець-Подільський національний університет

імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

## **ВІДНОВЛЕННЯ СИГНАЛІВ В СИСТЕМАХ СПОСТЕРЕЖЕННЯ ТА КЕРУВАННЯ НА ОСНОВІ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ОБЕРНЕНОЇ ЗАДАЧІ З УРІЗАННЯМ СПЕКТРУ ЯДРА ІНТЕГРАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА**

При розв'язуванні задач керування, контролю та діагностики важливе значення має достовірність результатів спостережень, які отримуються за допомогою різноманітних вимірювальних перетворювачів. Покращення технічних характеристик таких приладів є актуальною задачею, оскільки темпи зростання вимог до точності систем спостереження випереджають темпи зростання технічних можливостей, обмежених часто не лише існуючими техніко-економічними умовами, а й фізичними можливостями відповідних приладів для прямих вимірювань. Одним із способів підвищення роздільної здатності вимірювальних перетворювачів є отримання залежностей, що характеризують досліджувані процеси і об'єкти, за результатами непрямих вимірювань шляхом розв'язування задачі обернення операторів, що описують об'єкти і системи спостереження.

В роботі запропоновано підхід до побудови математичних моделей динамічних об'єктів і систем на основі використання математичних моделей, що описуються в інтегральній формі. Розглянуто питання застосування інтегральних моделей при розв'язуванні задач відновлення сигналів, які реєструються на виході вимірювальних перетворювачів системи спостереження. Запропоновано новий метод, що дає змогу підвищити точність при розв'язуванні обернених задач, які описуються інтегральними рівняннями Фредгольма першого роду, шляхом усічення спектра ядра інтегрального оператора. Виконано числові експерименти щодо дослідження впливу похибки обернення ядра інтегрального оператора на точність і стійкість розв'язування інтегральних рівнянь згортки першого роду в спектральній області.

Запропоновані в роботі способи опису математичних моделей і алгоритмічні та програмні засоби їх комп'ютерної реалізації дають змогу підвищити ефективність розробки і проектування керування динамічних об'єктів і систем завдяки розширенню спектра математичних описів динамічних об'єктів, що дозволяє більш повно і адекватно відобразити властивості реальних систем, а та-

кож застосовувати більшу кількість способів числової реалізації моделей, адаптуючи алгоритми до певних класів задач.

**Ключові слова:** *підвищення роздільної здатності вимірювань, математична модель, задача відновлення сигналу, метод регуляризації.*

**Вступ.** Важливою проблемою дослідження і контролю динамічних об'єктів є розв'язування задач інтерпретації результатів спостережень (в тому числі відновлення вхідних сигналів датчиків) і задач ідентифікації. В основному подібні задачі виникають внаслідок недоступності безпосередньому спостереженню багатьох процесів, що протікають, наприклад, в умовах високих температур, тисків і швидкостей, а також складності створення відповідних приладів для прямих вимірювань. При цьому залежності, що характеризують досліджувані процеси і об'єкти, можна отримати за результатами непрямих вимірювань шляхом розв'язування задач обернення операторів, що описують об'єкти і системи спостереження [1, 2, 4–6].

Застосування математичних методів для підвищення точності спостережень обумовлено тим, що темпи зростання вимог до точності систем спостереження випереджають темпи зростання їх технічних можливостей, обмежених часто не тільки існуючими техніко-економічними умовами, а й фізичними межами. При цьому наслідком обмеженості роздільної здатності систем спостереження є труднощі в інтерпретації багатьох експериментальних залежностей, що отримуються в дослідженнях і на виробництві.

У зв'язку з цим актуальною задачею є розробка нових і вдосконалення існуючих алгоритмів, що дають змогу будувати ефективні обчислювальні засоби оперативної інтерпретації залежностей, що спостерігаються в ході проведення натурних експериментів, де результати спотворюються внаслідок недосконалоості засобів спостереження.

**Постановка задачі.** Розглянемо один з можливих способів підвищення точності розв'язування задачі відновлення сигналів.

Задача відновлення істинного сигналу  $y(x)$ , що спостерігається на вході приладу, за функцією  $f(x)$ , що виміряна на його виході зводиться до розв'язування інтегрального рівняння Фредгольма I роду [4]:

$$Ky \equiv \int_a^b K(x, s)y(s)ds = f(x), c \leq x \leq d, \quad (1)$$

де  $K(x, s)$  — апаратна функція приладу.

Найбільший практичний інтерес має випадок, коли апаратна функція не залежить від  $x$ , тобто ядро інтегрального рівняння (1) є ядром згортки:  $K(x, s) = K(x - s)$ . Це припущення широко використовується в різних фізичних і технічних прикладних задачах, так як майже при всіх вимірюваннях можна вибрати таку змінну  $x$ , при якій функ-

ція роздільної здатності не буде залежати від  $x$  або буде залежати від неї слабо. Тоді її зміною на відрізку довжиною  $2\Delta(x)$  можна знехтувати. Системи, що задовольняють цій умові, носять загальну назву однорідних або інваріантних до зсуву (в теорії автоматичного управління вони називаються стаціонарними системами).

В цьому випадку рівняння (1) приймає наступний вигляд:

$$\int_a^b K(x-s)y(s)ds = f(x), \quad c \leq x \leq d. \quad (2)$$

Будемо вважати, що  $\text{supp } y(s) \subseteq [a, b]$ ,  $\text{supp } f(x) \subseteq [c, d]$ , де  $\text{supp}$  — локальний носій (область, взагалі кажучи, ненульових значень функції), тобто  $y(s) = 0$  при  $s \notin [a, b]$  і  $f(x) = 0$  при  $x \notin [c, d]$ , тобто рівняння (2) можна записати як рівняння типу згортки

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(x-s)y(s)ds = f(x), \quad -\infty \leq x \leq \infty \quad (3)$$

і вважати записи (2) та (3) рівноправними.

Зворотна задача (1) є некоректно поставленою, за визначенням Адамара, внаслідок нестійкості розв'язку  $y(s)$ . Тому для розв'язування рівняння (1) застосовуються методи регуляризації. Рівняння (2) (або (3)) можна розв'язувати в принципі тими ж методами і за допомогою тих же обчислювальних алгоритмів, що і рівняння більш загального вигляду (1). Однак доцільніше отримувати розв'язки за допомогою модифікованих методів і алгоритмів, які враховують специфіку рівняння (2) (або (3)).

**Основна частина.** У класичному методі розв'язок рівняння типу згортки (2) подають у вигляді зворотного перетворення Фур'є [4]:

$$y(s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Y(\omega) e^{-i\omega s} d\omega, \quad -\infty < s < \infty, \quad (4)$$

де спектр (Фур'є-образ) розв'язку:

$$Y(\omega) = \frac{F(\omega)}{\lambda(\omega)}, \quad (5)$$

причому

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\omega x} dx \quad (6)$$

— спектр правої частини, а

$$\lambda(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x) e^{i\omega x} dx \quad (7)$$

— спектр ядра. В результаті, якщо при  $\omega \rightarrow \infty$  спектри  $F(\omega)$  і  $\lambda(\omega)$  прямують до нуля узгоджено так, що

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{F(\omega)}{\lambda(\omega)} = 0 \quad (8)$$

і інтеграл (4) сходиться, то розв'язок  $y(s)$  існує (і є єдиним) і подається формулою (4).

Для розв'язування практичних задач відновлення сигналів формулу (4) зручно записати у вигляді:

$$y(s) = \int_{-\infty}^{\infty} R(s-x) f(x) dx, \quad (9)$$

де

$$R(s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega s}}{\lambda(\omega)} d\omega. \quad (10)$$

Така форма запису зручна тим, що функція  $R(s)$  може обчислюватись завчасно (до того, як відомо функцію  $f(x)$ ) і лише один раз. А далі, для функцій  $f(x)$  можуть досить швидко знаходитись відповідні розв'язки  $y(s)$ .

Однак, розв'язки (4) і (9) отримуються нестійкими внаслідок того, що високі гармоніки у розв'язку  $y(s)$  надзвичайно сильно залежать навіть від дуже малих похибок в  $f(x)$ .

Для усунення високої чутливості  $Y(\omega)$  (при великих  $\omega$ ) до похибок  $f(x)$  можна використати прийом урізання спектральної функції  $F(\omega)$ , який полягає в наступному [4, 6].

Нехай права частина  $f(x)$  виміряна лише в точках  $x_n = nh$ , що розміщені на осі  $x$  з постійним кроком  $h$ , і значення її в цих точках є  $f_n$ . В такому випадку, як стверджує теорема Котельникова [5], існує одна і тільки одна функція  $f(x)$ , яка приймає в точках  $x_n$  значення  $f_n$  і яка володіє такою властивістю, що її спектральна функція  $F(\omega)$  перетворюється в нуль при  $|\omega| > \omega_{\max} = \pi/h$ , тобто вона належить простору  $S_{\pi/h}$ .

Отже, якщо  $\lambda(\omega)$  в інтервалі  $-\pi/h < \omega < \pi/h$  ніде не перетворюється в нуль, то рівняння (2) має в  $S_{\pi/h}$  єдиний розв'язок, який (по аналогії з (9)–(10)) можна записати у вигляді

$$y(s) = \int_c^d K^{(-1)}(s-x) f(x) dx, \quad (11)$$

де

$$K^{(-1)}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/h}^{\pi/h} \frac{e^{-i\omega s}}{\lambda(\omega)} d\omega \quad (12)$$

є ядром зворотного оператора  $K^{(-1)}$ , яке, так же як і ядро оператора  $K$  є ядром згортки.



Однак, як показує аналіз [6], в типових практичних випадках величина похибки розв'язку в просторі  $S_{\pi/h}$  може бути досить значною.

Стійкий ефективний алгоритм розв'язування рівнянь згортки типу (2) дає метод регуляризації Тихонова.

Під регуляризацією розв'язку за Тихоновим [4, 6] розуміється побудова сімейства зворотних операторів, які залежать від деякого числового параметра  $\alpha$ , який називають параметром регуляризації. Кожний оператор сімейства дає розв'язок коректної задачі, причому при узгодженому прямуванні до нуля параметра  $\alpha$  і похибки у вихідних даних, розв'язок коректної задачі прямує до істинного розв'язку відповідної некоректної задачі.

Спосіб побудови регуляризуючих операторів в методі А. Н. Тихонова базується на варіаційному принципі і полягає у розв'язуванні задачі мінімізації так званого згладжувального функціоналу

$$\begin{aligned} \Phi_{\alpha}[y, f] &= \int_{-\infty}^{\infty} [Ay - f(x)]^2 dx + \alpha \Omega[y] = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[ -\int_c^d K(x-s)y(s) ds - f(x) \right]^2 dx + \alpha \Omega[y]. \end{aligned} \quad (13)$$

Стабілізуючий функціонал (стабілізатор)  $\Omega[y]$ , зазвичай, записується у вигляді

$$\Omega[y] = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \sum_{k=0}^n q_k \left[ \frac{d^k y(s)}{ds^k} \right]^2 \right\} ds = \int_{-\infty}^{\infty} M(\omega) |Y(\omega)|^2 d\omega, \quad (14)$$

де

$$M(\omega) = \sum_{k=0}^n q_k \omega^{2k}, \quad q_k \geq 0 \quad (15)$$

— регуляризація цілого  $n$ -го порядку, або

$$\Omega[y] = \int_{-\infty}^{\infty} M(\omega) |Y(\omega)|^2 d\omega, \quad (16)$$

де

$$M(\omega) = |\omega|^{2q}, \quad q \geq 0 \quad (17)$$

— регуляризація, взагалі кажучи, нецілого  $q$ -го порядку.

В обох випадках регуляризований розв'язок є екстремаллю функціоналу (13), що записується у вигляді:

$$y_{\alpha}(s) = \int_c^d R_{\alpha}(s-x) f(x) dx, \quad (18)$$

де

$$R_{\alpha}(s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} z(\omega, \alpha) \frac{e^{-i\omega s}}{\lambda(\omega)} d\omega, \quad (19)$$

$$z(\omega, \alpha) = \frac{L(\omega)}{L(\omega) + \alpha M(\omega)} \quad (20)$$

— так званий стабілізаційний множник,

$$L(\omega) = \operatorname{Re}^2 \lambda(\omega) + \operatorname{Im}^2 \lambda(\omega) = \lambda(\omega) \lambda(-\omega) = |\lambda(\omega)|^2. \quad (21)$$

При  $\alpha = 0$ , тобто при відсутності регуляризації маємо:  $z(\omega, \alpha) = 1$  і резольвента (19) рівна

$$R(s) = K^{(-1)}(s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega s}}{\lambda(\omega)} d\omega, \quad (22)$$

тобто рівна зворотному перетворенню Фур'є від  $\lambda^{-1}(\omega)$ , де  $\lambda(\omega)$  — перетворення Фур'є від ядра  $K$ .

Отже, оператор  $R_{\alpha}$  отримується шляхом обернення ядра інтегрального рівняння з використанням стабілізуючого множника  $z(\omega, \alpha)$ .

При практичній реалізації викладеного вище стійкого методу розв'язування рівнянь згортки типу (2) (або (3)) використовується суміщення методів регуляризації Тихонова з розв'язуванням в просторі  $S_{\pi/h}$ . При цьому формула (19) набуває вигляду:

$$R_{\alpha}(s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/h}^{\pi/h} z(\omega, \alpha) \frac{e^{-i\omega s}}{\lambda(\omega)} d\omega. \quad (23)$$

У випадку, коли  $K(x)$  і  $f(x)$  (а значить, і  $y(s)$ ) дійсні, використовуючи формулу Ейлера  $e^{i\omega s} = \cos(\omega s) + i \sin(\omega s)$  та враховуючи, що інтеграли по  $\omega$  від непарних функцій рівні нулю, формулу (23) можна привести до вигляду [4]:

$$R_{\alpha}(s) = \frac{1}{\pi} \left[ \int_0^{\omega_{\max}} \frac{\operatorname{Re} \lambda(\omega)}{L(\omega) + \alpha M(\omega)} \cos(s\omega) d\omega - \int_0^{\omega_{\max}} \frac{\operatorname{Im} \lambda(\omega)}{L(\omega) + \alpha M(\omega)} \sin(s\omega) d\omega \right], \quad (24)$$

де

$$\operatorname{Re} \lambda(\omega) = \int_{c_k}^{d_k} K(x) \cos(\omega x) dx, \quad (25)$$

$$\operatorname{Im} \lambda(\omega) = \int_{c_k}^{d_k} K(x) \sin(\omega x) dx, \quad (26)$$

$\omega_{\max} = \pi/h$ ,  $\operatorname{supp} K(x) \subseteq [c_k, d_k]$  — локальний носій функції  $K(x)$ .

На точність і стійкість розв'язку інтегрального рівняння (2) істотний вплив можуть чинити обчислювальні похибки обернення ядра, зокрема, точність отримання спектрального подання ядра.

Існують певні резерви підвищення точності розв'язку за рахунок вдосконалення обчислювального процесу обернення ядра. Зокрема, за рахунок підвищення точності наближеного обчислення інтегралів косинус- і синус-перетворень Фур'є в скінченних межах.

Іншим джерелом похибки розв'язку є заміна нескінченних меж скінченними у формулах для обчислення спектру ядра. Однак, апаратна функція приладу  $K(x, s)$ , зазвичай, істотно відмінна від нуля лише в деякій області роздільної здатності. Іншими словами, найбільш істотний внесок при обчисленні спектра ядра дають значення апаратної функції, що лежать в межах скінченного інтервалу, тобто складовими  $K(x)$ , що лежать поза інтервалом-носія ядра можна знехтувати.

Звичайно виникає питання про критерії вибору границь інтегрування  $c_k, d_k$  у формулах (25)–(26). Для перевірки чутливості розв'язку до похибок обернення ядра інтегрального рівняння і формування рекомендацій по вибору границь  $c_k, d_k$  найбільш ефективним є проведення обчислювального експерименту для конкретної апаратної функції приладу.

**Обчислювальний експеримент щодо дослідження впливу похибок обернення ядра на точність і стійкість розв'язку інтегрального рівняння Фредгольма I роду в спектральній області.** Задача відновлення істинного сигналу  $y(x)$ , що спостерігається на вході приладу, по вимірній функції  $f(x)$  на його виході зводиться до розв'язування інтегрального рівняння Фредгольма I роду (1). Однак, найбільший практичний інтерес має випадок, коли ядро інтегрального рівняння (1) є ядром згортки. При цьому рівняння (1) переходить у рівняння (2).

На точність і стійкість розв'язку інтегрального рівняння (2) за допомогою формул (18), (21), (24)–(26) можуть істотно впливати похибки обчислень при оберненні ядра, зокрема, точність отримання спектрального представлення ядра.

Нагадаємо, що для перевірки чутливості розв'язку рівняння (2) до похибок обернення ядра інтегрального рівняння і формування рекомендацій щодо вибору меж інтегрування  $c_k, d_k$  в формулах (25)–(26) найбільш ефективним є проведення обчислювального експерименту для конкретної апаратної функції приладу.

При проведенні обчислювального експерименту було отримано розв'язок інтегрального рівняння типу згортки з ядром гаусового типу

методом модельних прикладів [4] для різних значень відносної похибки задання ядра і правої частини при нескінченних і варійованих скінченних межах інтегрування  $c_k, d_k$  в формулах для обчислення спектру ядра.

Вихідні дані, для прикладу, такі. Задано рівняння типу згортки:

$$\int_a^b K(x-s)y(s)ds = f(x), \quad c \leq x \leq d. \quad (27)$$

Точний розв'язок

$$y(s) = \begin{cases} (1-s^2)^2, & |s| \leq 1, \\ 0, & |s| > 1; \end{cases} \quad (28)$$

точне ядро

$$K(x) = \sqrt{\frac{3,92}{\pi}} e^{-3,92x^2} \quad (29)$$

замінено наближеним ядром такої ж гладкості

$$\tilde{K}(x) = \sqrt{\frac{4}{\pi}} e^{-4x^2}, \quad (30)$$

що відповідає похибці оператора  $\xi = 0,01$  ( $\xi_{\text{отн.}} = 0,1\%$ ).

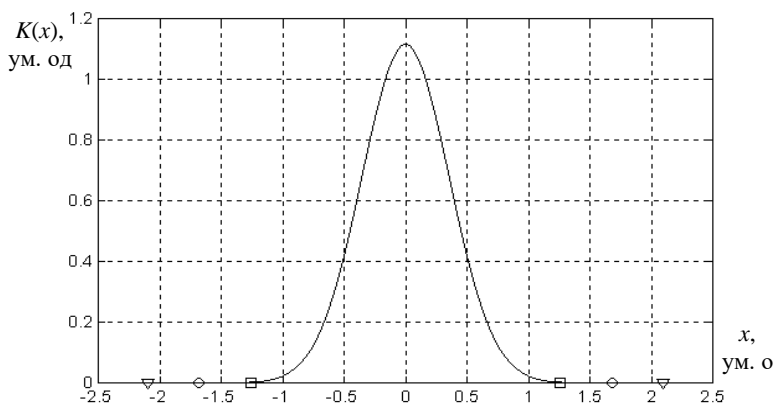
Сітки вузлів по  $x$  та  $s$  приймаємо рівномірними, причому  $c = -1,4$ ;  $d = 1,4$ ;  $h_x = 0,1$  (число вузлів  $x$ -сітки рівне  $l = 29$ ),  $a = -1$ ;  $b = 1$ ;  $h_s = 0,2$  (число вузлів  $s$ -сітки рівне  $n = 11$ ).

Права частина  $f(x)$  задана таблично, при цьому за допомогою генератора випадкових чисел з нормальним законом розподілу в  $f(x)$  внесені похибки з нульовими середніми та середньоквадратичними значеннями  $\delta \approx 0,05 \cdot 10^{-3}$ ,  $0,5 \cdot 10^{-2}$  та  $0,05$ , що відповідає відносній похибці  $\delta_{\text{отн.}} \approx 0,1, 1$  та  $10\%$ .

Порядок регуляризації  $q$  приймаємо рівним 1. Для кожної групи модельних прикладів спочатку визначаємо оптимальне значення параметра  $\alpha_{\text{opt}}$  способом узагальненої нев'язки.

Для дослідження впливу похибки усічення спектра ядра розв'язано ряд прикладів, в яких інтервал-носії ядра був трьох-, чотирьох- і п'ятикратним відносно ефективної ширини апаратної функції (рис. 1).

Значення відносної похибки визначалося відносно розв'язання опорного прикладу, в якому інтервал-носії ядра був рівним 1000 кратної ефективної ширини апаратної функції, що відповідає приблизно нескінченним межах інтегрування у формулах (25)–(26). Це дає змогу звести до мінімуму вплив інших джерел похибки при оцінці залежності похибки розв'язку від обмеження довжини інтервалу-носія ядра в формулах для обчислення спектру ядра.



**Рис. 1.** Точне ядро  $K(x)$  з визначеними границями інтервалу-носія, що відповідають випадкам:  $\square$  — трьох,  $\circ$  — чотирьох і  $\nabla$  — п'ятикратного інтервалу-носія ядра відносно ефективної ширини апаратної функції

Нагадаємо, що ефективною шириною функції називається (для випадку, коли функція має один максимум) різниця двох аргументів при яких деяка функція приймає значення, що рівні половині її максимального значення.

Результати обчислювальних експериментів подано в Таблиці 1, з якої видно, що шляхом вибору меж області роздільної здатності апаратної функції можна досягти зменшення відносної похибки розв'язку при зростанні похибки правої частини. Це пояснюється тим, що випадкова складова похибки правої частини зменшує в отриманому розв'язку компоненти похибки, що викликані урізанням спектру ядра.

Таблиця 1

*Результати обчислювальних експериментів*

Похибка оператора, %	Відносна похибка задання правої частини, %	Кратність інтервалу-носія ядра відносно ефективної ширини апаратної функції	Відносна похибка розв'язку, %
0	0	3	$3,508 \cdot 10^{-2}$
		4	$2,434 \cdot 10^{-4}$
		5	$7,465 \cdot 10^{-7}$
0,1	0	3	$5,440 \cdot 10^{-2}$
		4	$2,580 \cdot 10^{-4}$
		5	$8,327 \cdot 10^{-7}$
0,1	0,1	3	$5,463 \cdot 10^{-2}$
		4	$2,575 \cdot 10^{-4}$
		5	$8,334 \cdot 10^{-7}$

Продовження таблиці 1

0,1	1	3	$5,739 \cdot 10^{-2}$
		4	$1,547 \cdot 10^{-4}$
		5	$4,713 \cdot 10^{-7}$
0,1	10	3	$7,478 \cdot 10^{-2}$
		4	$0,501 \cdot 10^{-4}$
		5	$0,844 \cdot 10^{-7}$

Навпаки, якщо інтервал  $[c_k, d_k]$  обчислення спектра обраний більш вузьким, ніж область роздільної здатності, то спостерігається зростання відносної похибки розв'язку, яке викликане додатковими складовими похибки визначення спектра ядра. Нарешті, при виборі меж інтегрування  $c_k, d_k$ , що занадто близько розташовані один від одного, розв'язок стає нестійким. Це викликано тим, що при обчисленні спектра ядра не враховуються його ненульові компоненти, які лежать поза межами інтервалу  $[c_k, d_k]$ .

**Висновок.** Отже, усічення спектральної функції ядра з урахуванням області роздільної здатності дає змогу значно скоротити інтервал, який використовується для пошуку розв'язку і, отже, зменшити час обчислень без помітного впливу на похибку визначення спектру сигналу.

#### Список використаних джерел:

1. Sampling Theory, a Renaissance: Compressive Sensing and Other Developments / ed. Götz E. Pfander. — Switzerland : Springer International Publisher, 2015. — 531 p.
2. Mathematical Methods for Signal and Image Analysis and Representation / eds. L. Florack, R. Duits, G. Jongbloed, M. C. van Lieshout, L. Davies. — New York : Springer London Dordrecht Heidelberg, 2012. — 316 p.
3. Методы и устройства интерпретации экспериментальных зависимостей при исследовании и контроле энергетических процессов / А. Ф. Верлань, Б. Б. Абдусатаров, А. А. Игнатченко, Н. А. Максимович. — Киев : Наукова думка, 1993. — 208 с.
4. Верлань А.Ф. Интегральные уравнения: Методы, алгоритмы, программы / А. Ф. Верлань, В. С. Сизиков. — Киев : Наукова думка, 1986. — 542 с.
5. Котельников В. А. Теория потенциальной помехоустойчивости / В. А. Котельников. — М. : Госэнергоиздат, 1956. — 151 с.
6. Турчин В. Ф. Решение уравнения Фредгольма I рода в статистическом ансамбле гладких функций / В. Ф. Турчин // Журн. вычисл. математики и мат. физики. — 1967. — Т. 7, №6. — С. 1270–1284.

### RECONSTRUCTION OF SIGNALS IN MONITORING AND CONTROL SYSTEMS BASED ON THE SOLUTION OF THE INVERSE PROBLEM BY A TRUNCATING OF THE SPECTRUM OF THE KERNEL OF THE INTEGRAL OPERATOR

In solving problems, control, monitoring and diagnostics, the reliability of the results of observations obtained with use the various measuring transducers is important. Improving the technical characteristics of such devices is an ur-

gent task, as the growth rate of the requirements for the accuracy of surveillance systems outstrips the growth of technical capabilities, often limited not only by the existing technical and economic conditions, but also by the physical capabilities of the equipment for direct measurements. One of the ways to increase the resolution of measuring converters is to obtain the dependencies characterizing the processes and objects under study, based on the results of indirect measurements by solving the problem of inversion of operators describing objects and observation systems.

An approach to constructing mathematical models of dynamic objects and systems based on the use of mathematical models, described in integral form is proposed. The questions of application of integral models for solving the problems of signal reconstruction registered at the output of measuring converters of the monitoring system are considered. A new method is proposed that makes it possible to improve the accuracy in solving inverse problems, which are described by integral Fredholm equations of the first kind, by truncating the spectrum of the kernel of the integral operator. Numerical experiments on the effect of the inversion error of the integral kernel on the accuracy and stability of the solution of integral equation of convolution of the first kind in the spectral domain are was performed.

The proposed methods of describing mathematical models, algorithmic and software tools for their realization on computer, allow to increase the efficiency of development and designing of controlled dynamic objects and systems by expanding the spectrum of mathematical descriptions of dynamic objects, which allows more fully and adequately to display the properties of real systems, and also apply a greater number of methods of numerical realization of models, by adapting algorithms to certain classes of tasks.

**Key words:** *increase of resolution of measurements, mathematical model, problem of signal reconstruction, method of regularization.*

Отримано: 17.05.2018

УДК 004.942

**К. П. Газдюк\***, аспірант,  
**В. В. Жихаревич\***, канд. фіз.-мат. наук,  
**О. М. Нікітіна\*\***, канд. фіз.-мат. наук,  
**С. Е. Остапов\***, д-р фіз.-мат. наук, професор

\*Чернівецький національний університет  
імені Юрія Федьковича, м. Чернівці,

\*\*Чернівецький факультет Національного технічного університету  
«Харківський політехнічний інститут», м. Чернівці

## **ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ РУХОМИХ КЛІТИННИХ АВТОМАТІВ ДО МОДЕЛЮВАННЯ ЛОКОМОЦІЇ ЧЕРВ'ЯКОПОДІБНИХ ОРГАНІЗМІВ**

Об'єктом дослідження даної роботи є моделювання підсистеми дощового черв'яка, яка керує його локомоцією. В якості методу для моделювання обрано метод рухомих клітинних автоматів (РКА), який з успіхом використовується для моделювання різних систем, де мають місце зміни об'єму – від пружних деформацій до розривів. При цьому система розбивається на фрагменти, що представляються у вигляді окремих дискретних елементів – автоматів. Механічна підсистема відображає відповідні фрагменти тіла організму та моделює скорочення м'язів. При скороченні поперечних м'язів відповідні фрагменти тіла збільшуються у довжину та стискаються, а при скороченні поздовжніх навпаки – зменшуються у довжину та розширюються. Сигналом для скорочення м'язів є стан відповідного «нервового закінчення» нейронної підсистеми, що асоціюється із відповідним РКА. Робота клітинно-автоматного алгоритму є асинхронною. Це передбачає довільний випадковий вибір одного РКА зі всієї множини та відповідну модифікацію його стану та стану його найближчих сусідів згідно із правилами взаємодії. При моделюванні нейронної підсистеми реалізовано елементарні аналоги штучних нейронів (перцептронів). Для кожного окремого РКА вказано координати віддалених фрагментів модельованого організму, стани яких є вхідними сигналами для відповідного нейрону. Для забезпечення вибору оптимального руху запропоновано еволюційний алгоритм на основі нейронної підсистеми з використанням аналогів елементарних штучних нейронів. Отримана комп'ютерна модель, що імітує черв'якоподібну локомоцію. Проведені дослідження у програмному середовищі показали, що з довільного початкового хаотичного стану організм прямує до стану максимально ефективного руху (мінімум енергії при максимальній швидкості), що обумовлене самоорганізацією сигналів у хаотичній нейронній мережі.

**Ключові слова:** *рухомі клітинні автомати, комп'ютерне моделювання, локомоція, схема сусідства.*



**Вступ.** Із стрімким розвитком комп'ютерних технологій все більше можливостей з'являється для дослідження принципів організації та функціонування елементарних живих організмів та їхніх підсистем [1, 2]. Актуальність і важливість цих досліджень є поштовхом для розуміння інформаційних процесів, що протікають у більш високоорганізованих істот, зокрема й людини, та призвели до виникнення нової науки — біоінформатики. На сьогоднішній день побудувати повну модель найменшого живого організму практично неможливо, проте одним із шляхів проведення досліджень у цьому напрямку є моделювання живо-подібних систем (life-like systems), що передбачає спрощення моделі та виділення лише найбільш суттєвих властивостей її складових. Це спонукає до розгляду проблеми не тільки з інженерної точки зору, а і з програмної, тобто створення середовища моделювання поведінки одно- та багатоклітинних організмів для дослідження можливості їх локомоції, побудови оптимальної моделі руху на основі взаємодії між їхніми нейронами, проведення експериментів і збору даних для подальших досліджень нервової системи [3, 4].

**Об'єктом дослідження** роботи є моделювання підсистеми дощового черв'яка, яка керує його локомоцією. В якості методу для моделювання обрано метод рухомих клітинних автоматів (РКА), який з успіхом використовується для моделювання різних систем [5], де мають місце зміни об'єму — від пружних деформацій до розривів. При цьому довільна система розбивається на окремі фрагменти, що представляються у вигляді окремих дискретних елементів — автоматів. Основна відмінність між класичними клітинними автоматами та рухомими полягає у відсутності у останніх прив'язки до деякої фіксованої однорідної просторової клітинної структури, натомість автомати можуть набувати довільних неперервних значень координат у просторі. Спільними рисами є те, що, як і для класичних клітинних автоматів, стан деякого рухомого автомата у наступний момент часу визначається станом його найближчого оточення згідно заданої схеми сусідства.

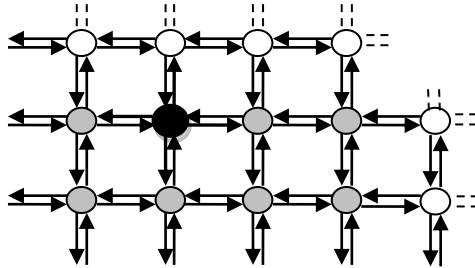
У дослідженні змодельований об'єкт поділено на дві частини — механічну підсистему та нейронну [6, 7], з використанням методу РКА та штучних нейронних мереж відповідно.

**Основна частина.** Механічна підсистема відображає відповідні фрагменти тіла організму та моделює скорочення м'язів: поперечних та поздовжніх. При скороченні поперечних м'язів відповідні фрагменти тіла повинні збільшуватись у довжині та стискатись, а при скороченні поздовжніх навпаки — зменшуватись у довжині та розширюватись. Сигналом для скорочення м'язів є стан відповідного «нервового закінчення» нейронної підсистеми, що асоціюється із відповідним РКА.

На рис. 1 зображено структуру фрагменту множини клітинних автоматів механічної підсистеми змодельованого об'єкта. Схема сусідства

передбачає наявність у кожного РКА не більше чотирьох сусідів. Якщо для деякого РКА відсутній хоча б один сусід, він вважається пограничним (білі круги на рис. 1 із відсутніми сусідніми зв'язками, показаними пунктирними лініями). Горизонтальні зв'язки із сусідами відповідають поздовжнім м'язам, а вертикальні — поперечним.

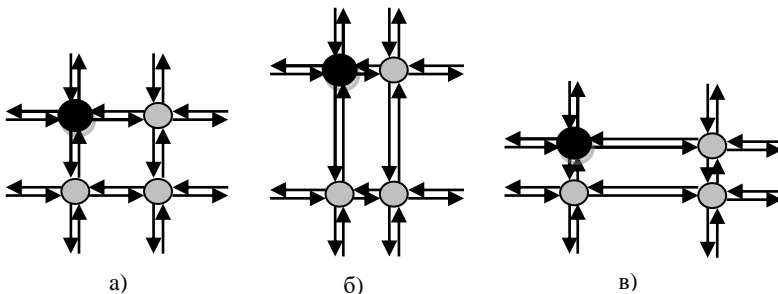
Робота клітинно-автоматного алгоритму є асинхронною. Це передбачає довільний випадковий вибір одного РКА зі всієї множини (позначений чорним на рис. 1) та відповідну модифікацію його стану та стану його найближчих сусідів згідно із правилами взаємодії. Після завершення взаємодії вибирається інший РКА випадковим чином та процес повторюється.



*Рис. 1. Фрагмент множини клітинних автоматів модельованої системи та вибраний для взаємодії РКА (чорного кольору)*

При організації руху черв'якоподібного організму використовувалася аналог одностороннього руху дощових черв'яків, що забезпечується наявністю на поверхні тіла специфічних ворсинок. Ці ворсинки легко ковзають при переміщенні в один бік, натомість ковзання у протилежний бік ускладнюється (збільшується тертя). Найпростіший варіант реалізації такої односторонньої динаміки — це заборона руху пограничних РКА (білі кола на рис. 1) у напрямку розташуванням лівого сусіда (при переміщенні організму вправо) або навпаки.

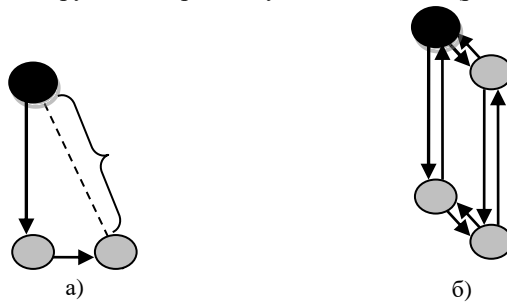
Суть клітинно-автоматних взаємодій полягає у встановленні відстаней між відповідними РКА під впливом відповідних сигналів (рис. 2).



*Рис. 2. Приклади взаємного розташування клітинних автоматів при взаємодії*

На рис. 2 показано приклади взаємного розташування РКА при взаємодії. Рис. 2 а) відображає стан РКА у випадках або відсутності сигналів скорочення м'язів для вибраної клітини, або намаганні скоротити обидва м'язи (поздовжній та поперечний). Рис. 2 б) відображає стан РКА у випадку сигналу скорочення поздовжнього м'язу, а рис. 2 с), відповідно, у випадку поперечного.

При цьому необхідно дотримуватись принципу нестисненості фрагментів тіла модельованих організмів, згідно якого об'єм фрагментів при довільних деформаціях є незмінним. Якщо розглядати не тримірну, а двомірну модель, то мова йде про постійність площі фрагментів. У нашому випадку елементарного прямокутного підходу відображення фрагментів, необхідно не тільки встановлювати відповідні відстані між двома взаємодіючими РКА, а ще й встановлювати відповідні відстані між діагональними РКА, тобто із сусідом сусіда вибраного РКА (рис. 3 а)). Причому, якщо сусід поздовжній, то сусід сусіда — поперечний і навпаки. Якщо це не передбачити, то неминуче відбудеться порушення принципу нестисненості (рис. 3 б)).



**Рис. 3.** Схематичне зображення результату РКА-взаємодії:  
 а) при збереженні принципу нестисненості;  
 б) при порушенні принципу нестисненості

При моделюванні нейронної підсистеми реалізовано елементарні аналоги штучних нейронів (перцептронів). Для кожного окремого РКА вказано координати віддалених фрагментів модельованого організму, стани яких є входними сигналами для відповідного нейрону. При цьому входні зв'язки утворюються хаотичним чином. Кількість зв'язків є фіксованою для всіх РКА. На рис. 4 показано спрощене схематичне зображення організації нейронної підсистеми. Тут, для простоти, наведено лише два штучні нейрони із п'ятьма зв'язками. У нижній частині рисунку показано хаотичну геометрію зв'язків, а у верхній — відповідну модель нейронів (знизу — входні рецептори, зверху — вихідні керуючі сигнали). Основна задача штучних нейронів, по аналогії із біологічними нейронами, — формувати сигнали на виході, виходячи із набору входних

сигналів залежно від функції перетворення та стану входів. У нашому випадку стан входів — це один із трьох варіантів взаємного розташування клітинних автоматів, показаних на рис. 2.

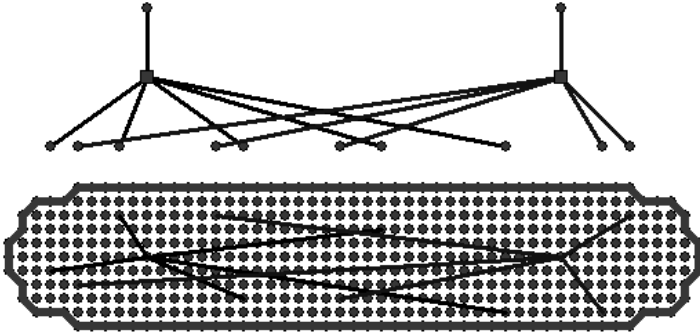


Рис. 4. Спрощене схематичне зображення організації нейронної підсистеми

Для опису математичної моделі нейронної мережі визначимо функцію перетворення  $f : X \rightarrow Y$ , що формує одне з трьох вихідних значень (0 — відсутність сигналу, 1 — скоротити поздовжній м'яз, 2 — скоротити поперечний м'яз), залежно від значення суми вхідних сигналів, помножених на вагові коефіцієнти. Кожен вхід має свою власну синаптичну вагу, яка надає входу вплив, необхідний для функції суматора елемента обробки:

$$y_j = \begin{cases} 0, & \text{if } 0 \leq \sum_{i=1}^K x_i w_i < 2K/3, \\ 1, & \text{if } 2K/3 \leq \sum_{i=1}^K x_i w_i \leq 4K/3, \\ 2, & \text{if } 4K/3 < \sum_{i=1}^K x_i w_i \leq 2K, \end{cases} \quad (1)$$

де  $0 \leq j \leq N$ ,  $n$  — кількість РКА у модельованому об'єкті,  $K$  — максимальна кількість зв'язків для нейронів;  $x_i$  ( $i = 0, 1, 2$ ) — вхідні сигнали;  $w_i \in [0, \dots, 1]$  — вагові коефіцієнти, що є мірою сили вхідних зв'язків і моделюють різноманітні синаптичні сили біологічних нейронів.

Ваги суттєвого входу підсилюються і, навпаки, вага несуттєвого входу примусово зменшується, що визначає інтенсивність вхідного сигналу. Слід зауважити, що значення вагових коефіцієнтів та порядок розташування умовних операторів у формулі (1) може змінюватись та є характеристикою окремого РКА. Загальну модель нейрона зображено на рис. 5.

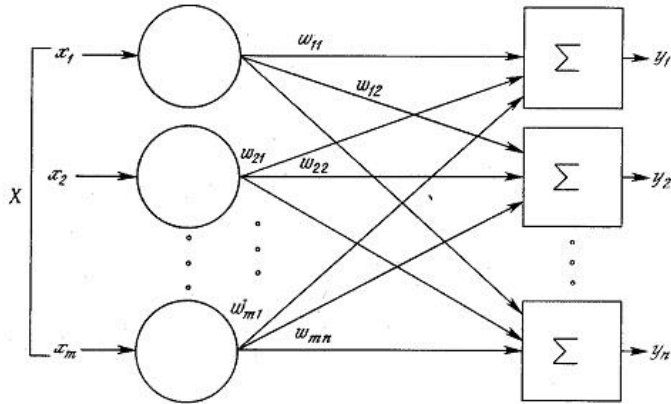


Рис. 5. Загальна модель нейронної мережі

Алгоритм змін вагових коефіцієнтів та порядку розташування умовних операторів у формулі (1) — еволюційний. Як відомо, довільний еволюційний алгоритм передбачає випадкові зміни (мутації) параметрів та оцінку впливу цих змін на динаміку системи згідно встановленого критерію. Якщо критерій задовольняється, зміни закріплюються, в іншому випадку — відхиляються, що є повним аналогом природного відбору. Критерієм еволюційного відбору, у нашому випадку, є мінімізація змін вихідних значень нейронів при максимальній швидкості руху черв'якоподібного організму. Зміни вихідних значень нейронів  $\Delta y = |y_{t+1} - y_t|$  відображають енергію  $E(y, t)$ , яку витрачає організм:

$$E = \frac{m_0 S^2(y)}{t^2}, \quad (2)$$

де  $m_0$  — коефіцієнт, що відображає числове значення маси модельованого об'єкта;  $S(y)$  — переміщення клітини у просторі, що залежить від вихідного сигналу  $y$ , що вимірюється у відносних одиницях — пройдений шлях, поділений на відстань між РКА у стані спокою;  $t = l/n$ , де  $l$  — кількість РКА взаємодій,  $n$  — кількість РКА у модельованому об'єкті.

Очевидно, що чим частіше будуть скорочуватись м'язи, тим більше енергії буде витрачатися організмом. Таким чином, природнім є прямування до зменшення енергетичних витрат при досягненні цілі — максимально можливої швидкості руху.

$$E(y, t) \rightarrow \min \text{ при } V(y, t) \rightarrow \max. \quad (3)$$

При цьому, окремим аспектом реалізації динаміки організму під керуванням потоків нейронних сигналів, є введення поняття інерційності, тобто деякого часового параметру, який визначає швидкість стиснення м'язів при переключенні відповідних керуючих сигналів.

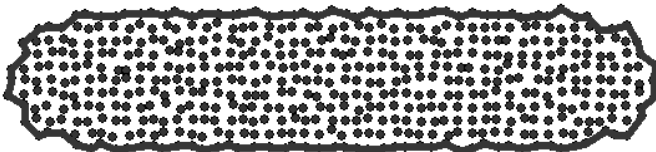
Цей параметр по суті визначає та обмежує максимально можливу швидкість руху.

При цьому слід відмітити, що описана вище елементарна еволюційна стратегія ефективно працює при невеликій кількості клітинних автоматів, з яких складається черв'якоподібний організм. При збільшенні кількості автоматів починає виникати проблема слабкої чутливості еволюційного алгоритму відносно визначення впливу однієї зміни (мутації) нейронної функції клітинного автомата на поведінку системи в цілому. Виходом з цієї ситуації може бути організація взаємних впливів нейронних функцій сусідніх клітин, результатом яких є деяка кластеризація, тобто самовільне утворення деяких областей (доменів), у межах яких сусідні автомати функціонують схоже (синхронно). Взаємний вплив передбачає деякий рівень дублювання вихідних реакцій нейронних частин двох сусідніх взаємодіючих автоматів. Тут можна навести деяку аналогію із «зараженням» одного автомата іншим. З іншого боку, ці домени не є стаціонарними та піддаються руйнівному хаотичному впливу у випадку, якщо функціонування домену не відповідає еволюційному критерію. При цьому, чим більше відхилення макродинаміки черв'якоподібного організму від найбільш оптимальної, тим більший ступінь хаотизації та руйнування. Тобто відбувається протидія процесу самоорганізації однотипних кластерів клітинних автоматів.

Для реалізації описаного алгоритму введено відповідний індексний масив, який містить наступні параметри клітинних автоматів:

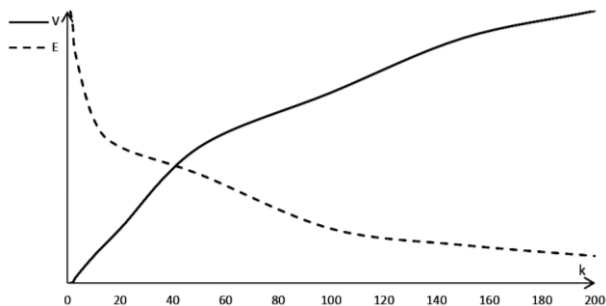
- 1) тип клітинного автомата (пограничний, внутрішній, тощо);
- 2) координати РКА у просторі;
- 3) стан сигнального нейрона;
- 4) індекси сусідніх РКА (механічна підсистема);
- 5) індекси віддалених РКА (нейронна підсистема);
- 6) параметри формули (1).

Проведені дослідження у програмному середовищі показали, що з довільного початкового хаотичного стану (рис. 6), організм прямує до стану максимально ефективного руху (мінімум енергії при максимальній швидкості), що обумовлене самоорганізацією сигналів у хаотичній нейронній мережі.



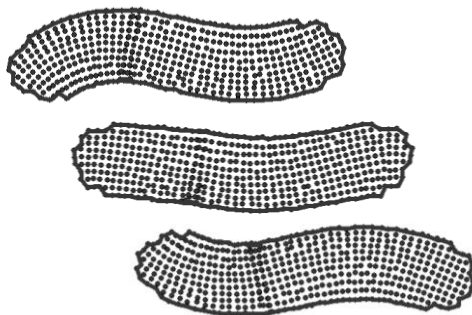
*Рис. 6. Початковий стан черв'якоподібного організму у середовищі моделювання*

Динаміку еволюційного процесу для  $k$  ітерацій зображено на графіку (рис. 7).

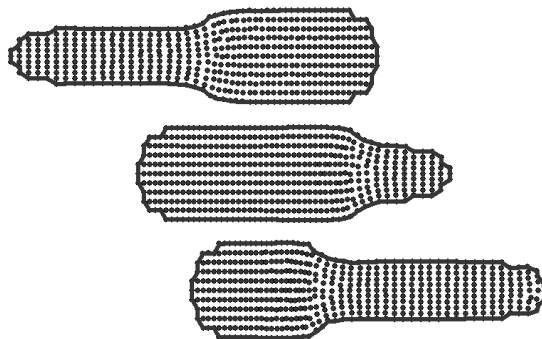


**Рис. 7.** Динаміка еволюційного процесу пошуку оптимальних параметрів нейронної мережі

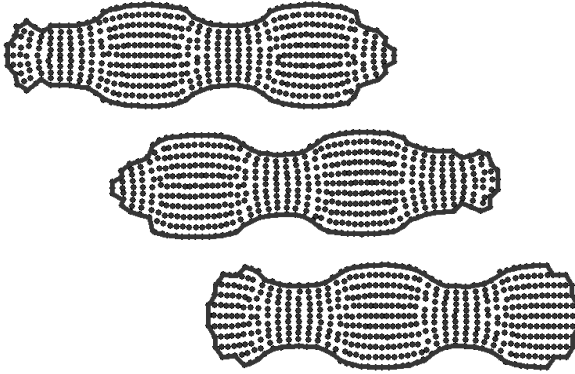
При цьому слід зауважити, що існує певний набір стійких шаблонів кінцевої оптимальної поведінки, наприклад, рух «нематода» (рис. 8), половинне стиснення (рис. 9), сегментне стиснення (рис. 10) тощо.



**Рис. 8.** Візуалізація руху типу «нематода»

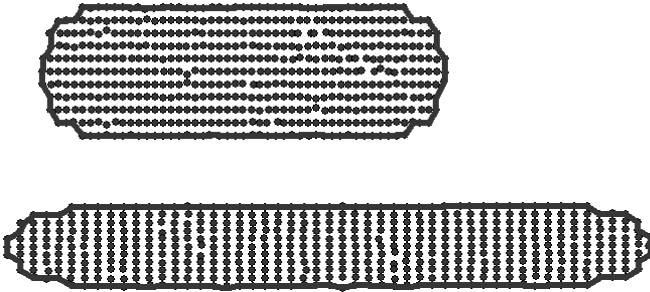


**Рис. 9.** Результат моделювання руху типу «половинне стиснення»



*Рис. 10. Візуалізація руху типу «сегментне стиснення»*

Зауважимо, що найбільш оптимальним є переміщення «пружиною» — повне скорочення всього тіла з наступним повним розтяганням (рис. 11).



*Рис. 11. Візуалізація руху типу «сегментне стиснення»*

**Висновки.** У статті застосовано метод рухомих клітинних автоматів до моделювання локомоції черв'якоподібного організму, істотними перевагами якого є можливість переходу від статичної сітки до концепції сусідства. Розглянуті основні принципи локомоції, на підставі яких побудована модель. Знайдено правила клітинно-автоматних взаємодій згідно з концепцією сусідства. В результаті отримана комп'ютерна модель, що імітує черв'якоподібну локомоцію.

Новизна досліджень полягає в використанні істотно нового підходу до моделювання локомоції багатоклітинного організму, який досить точно відтворює процес локомоції в живих організмах.

Надалі планується моделювати як прості, так і більш складні багатоклітинні організми, збирати дані і вивчати їх поведінку, ембріогенез, самоорганізацію, самореплікацію, їх нервову систему, м'язову



систему і т.д. Звичайно, це можливо тільки при більш докладному біологічному аналізі предметної області і з розвитком програмної інженерії. Подальший розвиток апаратного забезпечення дозволить моделювати набагато складніші приклади і отримувати швидкість передачі сигналу на рівні нейронної мережі людини.

### Список використаних джерел:

1. Brenner S. The genetics of *Caenorhabditis elegans* / S. Brenner // *Genetics*. — 1974. — № 77. — P. 71–94.
2. Brenner S. Excerpts from proposal to the Medical Research Council / S. Brenner. — 1963.
3. Internet service Open source project dedicated to creating the world's first virtual organism in a computer, a *C. elegans* nematode [Електронний ресурс]. — Режим доступу: <http://www.openworm.org/index.html>.
4. Rose J. K. Analyses of Habituation in *Caenorhabditis elegans* / J. K. Rose, C. H. Rankin // *Learning & Memory*. — 2001. — P. 63–69.
5. Bandman O. L. Parallel implementation of cellular automata algorithms for simulation of spatial dynamics / O. L. Bandman // *Sib. Zh. Vychisl. Mat.* — 2007. — Vol. 10, № 4. — P. 335–348.
6. Bäck T. *Evolutionary Algorithms in Theory and Practice* / T. Bäck. — New York : Oxford University Press, 1996.
7. Goldberg D. E. *Genetic Algorithms in Search / D. E. Goldberg // Optimization, and Machine Learning*. — Massachusetts : Addison-Wesley 1989.

### APPLICATION OF THE MOVABLE CELLULAR AUTOMATA METHOD TO SIMULATION THE WORM-LIKE ORGANISM'S LOCOMOTION

The object of the study of this work is the simulation of a rainwater worm subsystem, which controls its locomotion. As a method for modeling, the method of movable cellular automata (MCA) is chosen, which is successfully used for modeling of different systems, where there is a change of volume — from elastic deformations to ruptures. In this case, the system is divided into fragments, presented in the form of separate discrete elements — automata. The mechanical subsystem reflects the corresponding body fragments and simulates muscle contractions: transverse and longitudinal. By reducing transverse muscles, the corresponding body fragments should be increased in length and compressed, and with the reduction of longitudinal vice versa — decrease in length and expand. The signal for muscle contraction is the state of the corresponding «nerve ending» of the neural subsystem, which is associated with the corresponding MCA. The work of the cellular automaton algorithm is asynchronous. This involves random selection of one MCA from the set and an appropriate modification of its state and the state of its nearest neighbors in accordance with the rules of interaction. In the simulation of the neural subsystem, elemental analogs of artificial neurons (perceptron) are implemented. For each individual MCA, the coordinates of the re-

mote fragments of the simulated organism, the states of which are the input signals for the corresponding neuron, are indicated. To provide the optimal motion, an evolutionary algorithm based on a neural subsystem with the use of analogues of elementary artificial neurons is proposed. The computer model, simulating worm-like locomotion, is obtained. The conducted studies in the software environment showed that from an arbitrary initial chaotic state the organism goes to the state of maximum effective motion (minimum energy at maximum speed) due to the self-organization of signals in a chaotic neural network.

**Key words:** *movable cellular automata, computer simulation locomotion, neighborhood scheme.*

Отримано: 23.05.2018

УДК 517.946

**А. П. Громик**, канд. техн. наук

Подільський державний аграрно-технічний університет,  
м. Кам'янець-Подільський

## **МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ КОЛИВНИХ ПРОЦЕСІВ У КУСКОВО-ОДНОРІДНОМУ КЛИНОВИДНОМУ ЦИЛІНДРИЧНО-КРУГОВОМУ ПРОСТОРІ З ПОРОЖНИНОЮ**

Актуальність теорії крайових задач для диференціальних рівнянь з частинними похідними, яка інтенсивно розвивається, обумовлена як значимістю її результатів для розвитку багатьох розділів математики, так і численними застосуваннями її досягнень при математичному моделюванні різних процесів і явищ фізики, механіки, біології, медицини, економіки, техніки.

Добре відомо, що складність досліджуваних крайових задач суттєво залежить від коефіцієнтів рівнянь та геометрії області в якій розглядається задача. На цей час досить детально вивчено властивості розв'язків крайових задач для лінійних, квазілінійних та певних класів нелінійних рівнянь в однозв'язних областях.

Водночас багато важливих прикладних задач теплофізики, термомеханіки, теорії пружності, теорії електричних кіл, теорії коливань приводять до крайових задач для диференціальних рівнянь з частинними похідними не тільки в однорідних областях, коли коефіцієнти рівнянь є неперервними, але й в кусково-однорідних та неоднорідних областях, коли коефіцієнти рівняння є кусково-неперервними.

У пропонованій роботі методом інтегральних і гібридних інтегральних перетворень у поєднанні з методом головних розв'язків (матриць впливу та матриць Гріна) за найбільш загальних припущень побудовано точні аналітичні розв'язки ма-

тематичних моделей коливних процесів (гіперболічних початково-крайових задач спряження) в кусково-однорідному клиновидному циліндрично-круговому просторі з порожниною.

Одержані розв'язки мають алгоритмічний характер, неперервно залежать від параметрів і даних задачі та можуть бути використані як в подальших теоретичних дослідженнях, так і в практиці інженерних розрахунків реальних еволюційних процесів, які моделюються гіперболічними крайовими задачами (задачі акустики, гідродинаміки, теорії коливань механічних систем), які описуються циліндричною системою координат.

**Ключові слова:** *моделювання, коливний процес, гіперболічне рівняння, початкові та крайові умови, умови спряження, інтегральне перетворення, матриця впливу, матриця Гріна.*

**Вступ.** Коливні процеси відіграють важливу роль у сучасній вібраційній техніці, суттєво впливають на міцність і довговічність деталей машин і механізмів при врахуванні механічних і технологічних умов їх експлуатації. Найпростішою математичною моделлю такого процесу є добре і давно відоме лінійне диференціальне рівняння коливань (хвильове рівняння, рівняння Д'аламбера) гіперболічного типу 2-го порядку

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \Delta_3 u = f(t, P),$$

де  $\Delta_3$  — тривимірний оператор Лапласа у відповідній системі координат (декартовій, циліндричній, сферичній тощо) тривимірного евклідового простору,  $P$  — точка в цьому просторі.

Зрозуміло, що для адекватного моделювання коливного процесу до складу математичної моделі крім хвильового рівняння потрібно долучити ще певні початкові та крайові умови. Таким чином, математичною моделлю коливного процесу є гіперболічна крайова задача математичної фізики [1]. На цей час досить детально вивчено одновимірні, двовимірні та тривимірні гіперболічні крайові задачі математичної фізики однорідних середовищ. Але у зв'язку з широким застосуванням композитних матеріалів (найпростіший композит має дві точки спряження) у будівництві, техніці, сучасних технологіях як математичні моделі певних процесів виникають крайові задачі для диференціальних рівнянь з частинними похідними різних типів (еліптичних, параболічних, гіперболічних) не тільки в однорідних областях, коли коефіцієнти модельних рівнянь є неперервними, але й в неоднорідних та кусково-однорідних середовищах, коли коефіцієнти рівнянь є кусково-неперервними, чи, зокрема, кусково-сталими [2–4].

Окрім методу відокремлення змінних [1, 6] та його узагальнень [5], одним з важливих і ефективних методів дослідження лінійних математичних моделей (лінійних крайових задач математичної фізики) є метод

інтегральних перетворень [6], який дає можливість будувати в аналітичному вигляді розв'язки тих чи інших математичних моделей (крайових задач) через їх інтегральне зображення у випадку однорідних середовищ. У той же час, для досить широкого класу задач у кусково-однорідних середовищах ефективним методом їх дослідження виявився метод гібридних інтегральних перетворень, які породжені відповідними гібридними диференціальними операторами, коли на кожній компоненті зв'язності кусково-однорідного середовища розглядаються або ж різні диференціальні оператори, або ж диференціальні оператори того ж самого вигляду, але з різними наборами коефіцієнтів [7–11].

У цій статті, яка є логічним продовженням [12], ми пропонуємо точний аналітичний розв'язок узагальненої математичної моделі коливного процесу в кусково-однорідному клиновидному циліндрично-круговому просторі з порожниною, побудований методом інтегральних і гібридних інтегральних перетворень.

**Постановка задачі.** Розглянемо задачу побудови обмеженого на множині

$$D = \left\{ (t, r, \varphi, z) \mid t > 0; r \in I_n^+ = \bigcup_{j=1}^{n+1} (R_{j-1}; R_j), R_0 > 0, \right. \\ \left. R_{n+1} = +\infty; \varphi \in (0; \varphi_0), 0 < \varphi_0 < 2\pi; z \in (-\infty; +\infty) \right\}$$

розв'язку лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними гіперболічного типу 2-го порядку [1, 6]

$$\frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} - \left[ a_{rj}^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{a_{\varphi j}^2}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + a_{zj}^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] u_j + \\ + \chi_j^2 u_j = f_j(t, r, \varphi, z), r \in I_j; j = \overline{1, n+1} \quad (1)$$

з початковими умовами

$$u_j \Big|_{t=0} = g_j^1(r, \varphi, z); \frac{\partial u_j}{\partial t} \Big|_{t=0} = g_j^2(r, \varphi, z); r \in I_j; j = \overline{1, n+1}, \quad (2)$$

крайовими умовами

$$\frac{\partial^s u_j}{\partial z^s} \Big|_{z=-\infty} = 0; \frac{\partial^s u_j}{\partial z^s} \Big|_{z=+\infty} = 0; s = 0, 1; j = \overline{1, n+1}; \quad (3)$$

$$\left( \alpha_{11}^0 \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{11}^0 \right) u_1 \Big|_{r=R_0} = g_0(t, \varphi, z); \frac{\partial^s u_{n+1}}{\partial r^s} \Big|_{r=+\infty} = 0; \quad (4)$$

$$\alpha_{11}^0 \leq 0, \beta_{11}^0 \geq 0; |\alpha_{11}^0| + \beta_{11}^0 \neq 0; s = 0, 1,$$

одними з крайових умов на гранях клина [7]

$$u_j \Big|_{\varphi=0} = g_{1j}(t, r, z); u_j \Big|_{\varphi=\varphi_0} = \omega_{1j}(t, r, z); j = \overline{1, n+1}, \quad (5)$$

$$u_j \Big|_{\varphi=0} = g_{2j}(t, r, z); \frac{\partial u_j}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=\varphi_0} = -\omega_{2j}(t, r, z); j = \overline{1, n+1}, \quad (6)$$

$$\frac{\partial u_j}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=0} = g_{3j}(t, r, z); u_j \Big|_{\varphi=\varphi_0} = \omega_{3j}(t, r, z); j = \overline{1, n+1}, \quad (7)$$

$$\frac{\partial u_j}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=0} = g_{4j}(t, r, z); \frac{\partial u_j}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=\varphi_0} = -\omega_{4j}(t, r, z); j = \overline{1, n+1} \quad (8)$$

та умовами спряження [12]

$$\left[ \left( \alpha_{j1}^k \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j1}^k \right) u_k - \left( \alpha_{j2}^k \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j2}^k \right) u_{k+1} \right] \Big|_{r=R_k} = 0; j = 1, 2; k = \overline{1, n}, \quad (9)$$

де

$a_{rj}, a_{\varphi j}, a_{zj}, \chi_j, \alpha_{js}^k, \beta_{js}^k$  — деякі сталі;

$$c_{jk} \equiv \alpha_{2j}^k \beta_{1j}^k - \alpha_{1j}^k \beta_{2j}^k \neq 0; c_{1k} \cdot c_{2k} > 0;$$

$$f(t, r, \varphi, z) = \{ f_1(t, r, \varphi, z), f_2(t, r, \varphi, z), \dots, f_{n+1}(t, r, \varphi, z) \};$$

$$g^1(r, \varphi, z) = \{ g_1^1(r, \varphi, z); g_2^1(r, \varphi, z), \dots, g_{n+1}^1(r, \varphi, z) \};$$

$$g^2(r, \varphi, z) = \{ g_1^2(r, \varphi, z); g_2^2(r, \varphi, z), \dots, g_{n+1}^2(r, \varphi, z) \};$$

$$g_0(t, \varphi, z), g_{pj}(t, r, z), \omega_{pj}(t, r, z); \left( p = \overline{1, 4}; j = \overline{1, n+1} \right)$$

— задані обмежені неперервні функції;

$$u(t, r, \varphi, z) = \{ u_1(t, r, \varphi, z); u_2(t, r, \varphi, z), \dots, u_{n+1}(t, r, \varphi, z) \}$$

— шукана двічі неперервно диференційовна функція.

Зауважимо, що:

- 1) у випадку  $\chi_j = 0$  рівняння (1) є класичним тривимірним неоднорідним рівнянням коливань (хвильовим рівнянням, рівнянням Д'аламбера) для ортотропного середовища у циліндричній системі координат;
- 2) якщо

$$\alpha_{11}^k = 0, \beta_{11}^k = 1; \alpha_{12}^k = 0, \beta_{12}^k = 1; \alpha_{21}^k = E_1^k, \beta_{21}^k = 0; \alpha_{22}^k = E_2^k, \beta_{22}^k = 0,$$

де  $E_1^k, E_2^k$  — модулі Юнга ( $k = \overline{1, n}$ ), то умови спряження (9) збігаються з класичними умовами ідеального механічного контакту.

Таким чином, гіперболічні початково-крайові задачі спряження (1)–(4), (5), (9); (1)–(4), (6), (9); (1)–(4), (7), (9); (1)–(4), (8), (9) можна розглядати як узагальнені математичні моделі коливних процесів у кусково-однорідному клиновидному циліндрично-круговому просторі з порожниною.

**Основна частина.** Припустимо, що розв'язки задач (1)–(4), (5), (9); (1)–(4), (6), (9); (1)–(4), (7), (9); (1)–(4), (8), (9) існують і задані й шукані функції задовольняють умови застосовності залучених нижче прямих та обернених інтегральних і гібридних інтегральних перетворень [11, 13, 14].

Визначимо скінченні пряме  $F_{m,ik}$  та обернене  $F_{m,ik}^{-1}$  інтегральні перетворення Фур'є щодо кутової змінної  $\varphi \in (0; \varphi_0)$  за формулами [13]:

$$F_{m,ik} [f(\varphi)] = \int_0^{\varphi_0} f(\varphi) U_{m,ik}(\varphi) d\varphi \equiv f_{m,ik}, \quad (10)$$

$$F_{m,ik}^{-1} [f_{m,ik}] = \frac{2}{\varphi_0} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m^{ik} f_{m,ik} U_{m,ik}(\varphi) \equiv f(\varphi), \quad (11)$$

де

$$\begin{aligned} \beta_{m,11} &= \frac{\pi m}{\varphi_0}, \quad U_{m,11}(\varphi) = \sin(\beta_{m,11}\varphi); \\ \beta_{m,12} &= \frac{\pi(2m+1)}{2\varphi_0}, \quad U_{m,12}(\varphi) = \sin(\beta_{m,12}\varphi); \\ \beta_{m,21} &= \beta_{m,12}, \quad U_{m,21}(\varphi) = \cos(\beta_{m,21}\varphi); \\ \beta_{m,22} &= \beta_{m,11}, \quad U_{m,22}(\varphi) = \cos(\beta_{m,22}\varphi); \\ \varepsilon_0^{ik} &= 0, \quad \varepsilon_m^{ik} = 1 \quad \text{при } ik = 11, 12, 21; \quad m = 1, 2, 3, \dots; \\ \varepsilon_0^{22} &= \frac{1}{2}, \quad \varepsilon_m^{22} = 1 \quad \text{при } m = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Безпосередньо (інтегруванням частинами) перевіряється, що для оператора  $F_{m,ik}$  виконується основна тотожність інтегрального перетворення диференціального оператора Фур'є:

$$F_{m,ik} \left[ \frac{d^2 f}{d\varphi^2} \right] = -\beta_{m,ik}^2 f_{m,ik} + \Phi_{m,ik}; \quad i, k = 1, 2, \quad (12)$$

де

$$\Phi_{m,11} = \frac{\pi m}{\varphi_0} \left[ f(0) + (-1)^{m+1} f(\varphi_0) \right]; \quad \Phi_{m,12} = \frac{\pi(2m+1)}{2\varphi_0} f(0) + (-1)^m \left. \frac{df}{d\varphi} \right|_{\varphi=\varphi_0};$$

$$\Phi_{m,21} = -\left. \frac{df}{d\varphi} \right|_{\varphi=0} + (-1)^m \frac{\pi(2m+1)}{2\varphi_0} f(\varphi_0); \Phi_{m,22}(f) = -\left. \frac{df}{d\varphi} \right|_{\varphi=0} + (-1)^m \left. \frac{df}{d\varphi} \right|_{\varphi=\varphi_0}.$$

Інтегральний оператор  $F_{m,ik}$ , який діє за формулою (10), внаслідок тотожності (12) тривимірним початково-крайовим задачам спряження (1)–(4), (5), (9); (1)–(4), (6), (9); (1)–(4), (7), (9); (1)–(4), (8), (9) ставить у відповідність задачу побудови обмеженого на множині

$$D' = \{(t, r, z) | t > 0; r \in I_n^+, z \in (-\infty; +\infty)\}$$

розв'язку двовимірних диференціальних рівнянь

$$\frac{\partial^2 u_{jm,ik}}{\partial t^2} - \left[ a_{rj}^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{v_{jm,ik}^2}{r^2} \right) + a_{zj}^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] u_{jm,ik} + \chi_j^2 u_{jm,ik} = G_{jm,ik}(t, r, z), r \in I_j; j = \overline{1, n+1} \quad (13)$$

з початковими умовами

$$u_{jm,ik} \Big|_{t=0} = g_{jm,ik}^1(r, z); \frac{\partial u_{jm,ik}}{\partial t} \Big|_{t=0} = g_{jm,ik}^2(r, z), \quad (14)$$

крайовими умовами

$$\frac{\partial^s u_{jm,ik}}{\partial z^s} \Big|_{z=-\infty} = 0; \frac{\partial^s u_{jm,ik}}{\partial z^s} \Big|_{z=+\infty} = 0; s = 0, 1; j = \overline{1, n+1}, \quad (15)$$

$$\left( \alpha_{j1}^0 \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j1}^0 \right) u_{1m,ik} \Big|_{r=R_0} = g_{0m,ik}(t, z); \frac{\partial^s u_{n+1,m,ik}}{\partial r^s} \Big|_{r=+\infty} = 0; s = 0, 1 \quad (16)$$

та умовами спряження

$$\left[ \left( \alpha_{j1}^p \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j1}^p \right) u_{pm,ik} - \left( \alpha_{j2}^p \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j2}^p \right) u_{p+1,m,ik} \right] \Big|_{r=R_p} = 0; j = 1, 2; p = \overline{1, n}. \quad (17)$$

де

$$G_{jm,ik}(t, r, z) = f_{jm,ik}(t, r, z) + a_{\varphi j}^2 r^{-2} \Phi_{m,ik}(t, r, z); v_{jm,ik} = a_{rj}^{-1} a_{\varphi j} \beta_{m,ik}.$$

До двовимірної початково-крайової задачі спряження (13)–(17) застосуємо інтегральне перетворення Фур'є на декартовій осі  $(-\infty; +\infty)$  щодо змінної  $z$  [14]:

$$F[g(z)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(z) e^{-i\sigma z} dz \equiv \tilde{g}(\sigma), i = \sqrt{-1}, \quad (18)$$

$$F^{-1}[\tilde{g}(\sigma)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{g}(\sigma) e^{i\sigma z} d\sigma \equiv g(z), \quad (19)$$

$$F \left[ \frac{d^2 g}{dz^2} \right] = -\sigma^2 F [g(z)] \equiv -\sigma^2 \tilde{g}(\sigma). \quad (20)$$

Інтегральний оператор  $F$ , який діє за формулою (18), внаслідок тотожності (20) задачі (13)–(17) ставить у відповідність задачу побудови обмеженого на множині

$$D'' = \{(t, r) \mid t > 0; r \in I_n^+\}$$

розв'язку одновимірних диференціальних рівнянь  $B$ -гіперболічного типу

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}_{jm,ik}}{\partial t^2} - a_{rj}^2 B_{V_{jm,ik}} [\tilde{u}_{jm,ik}] + (a_{zj}^2 \sigma^2 + \chi_j^2) \tilde{u}_{jm,ik} = \tilde{G}_{jm,ik}(t, r, \sigma); \quad r \in I_j; \quad j = \overline{1, n+1} \quad (21)$$

з початковими умовами

$$\tilde{u}_{jm,ik} \Big|_{t=0} = \tilde{g}_{jm,ik}^1(r, \sigma); \quad \frac{\partial \tilde{u}_{jm,ik}}{\partial t} \Big|_{t=0} = \tilde{g}_{jm,ik}^2(r, \sigma), \quad r \in I_j; \quad j = \overline{1, n+1}, \quad (22)$$

крайовими умовами

$$\left( \alpha_{11}^0 \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{11}^0 \right) \tilde{u}_{1m,ik} \Big|_{r=R_0} = \tilde{g}_{0m,ik}(\tau, \sigma); \quad \frac{\partial^s \tilde{u}_{n+1,m,ik}}{\partial r^s} \Big|_{r=+\infty} = 0; \quad s = 0, 1 \quad (23)$$

та умовами спряження

$$\left[ \left( \alpha_{j1}^p \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j1}^p \right) \tilde{u}_{pm,ik} - \left( \alpha_{j2}^p \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j2}^p \right) \tilde{u}_{p+1,m,ik} \right] \Big|_{r=R_p} = 0; \quad (24)$$

$$j = 1, 2; \quad p = \overline{1, n},$$

де

$$B_{V_{jm,ik}} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{V_{jm,ik}^2}{r^2}$$

— класичний диференціальний оператор Бесселя.

До одновимірної початково-крайової задачі спряження (21)–(24) застосуємо гібридне інтегральне перетворення типу Вебера на полярній осі  $I_n^+$  з  $n$  точками спряження щодо змінної  $r$  [11]:

$$M_{(n)} [f(r)] = \int_{R_0}^{+\infty} f(r) V(r, \lambda) \sigma(r) r dr \equiv \tilde{f}(\lambda), \quad (25)$$

$$M_{(n)}^{-1} [\tilde{f}(\lambda)] = \int_0^{+\infty} \tilde{f}(\lambda) V(r, \lambda) \Omega(\lambda) d\lambda \equiv f(r), \quad (26)$$



$$M_{(n)} [B_{(m,ik)}[f(r)]] = -\lambda^2 \tilde{f}(\lambda) - \sum_{k=1}^{n+1} \gamma_k^2 \int_{R_{k-1}}^{R_k} f(r) V_k(r, \lambda) \sigma_k r dr - \frac{a_1^2 R_0 \sigma_1}{\alpha_{11}^0} V_1(R_0, \lambda) \left( \alpha_{11}^0 \frac{\partial f}{\partial r} + \beta_{11}^0 f \right) \Big|_{r=R_0}. \quad (27)$$

У формулах (25)–(27) беруть участь величини і функції, виписані в [11],

$$B_{(m,ik)} = \sum_{j=1}^{n+1} a_j^2 \Theta(r - R_{j-1}) \Theta(R_j - r) B_{V_{j,m,ik}} + a_{n+1}^2 \Theta(r - R_n) B_{V_{n+1,m,ik}}$$

— гібридний диференціальний оператор Бесселя,  $\Theta(x)$  — одинична функція Гевісайда [15].

Запишемо диференціальні рівняння (21) та початкові умови (22) у матричній формі

$$\begin{bmatrix} \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - a_1^2 B_{V_{1m,ik}} + q_1^2(\sigma) \right) \tilde{u}_{1m,ik}(t, r, \sigma) \\ \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - a_2^2 B_{V_{2m,ik}} + q_2^2(\sigma) \right) \tilde{u}_{2m,ik}(t, r, \sigma) \\ \dots \\ \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - a_{n+1}^2 B_{V_{n+1,m,ik}} + q_{n+1}^2(\sigma) \right) \tilde{u}_{n+1,m,ik}(t, r, \sigma) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{G}_{1m,ik}(t, r, \sigma) \\ \tilde{G}_{2m,ik}(t, r, \sigma) \\ \dots \\ \tilde{G}_{n+1,m,ik}(t, r, \sigma) \end{bmatrix}, \quad (28)$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{u}_{1m,ik}(t, r, \sigma) \\ \tilde{u}_{2m,ik}(t, r, \sigma) \\ \dots \\ \tilde{u}_{n+1,m,ik}(t, r, \sigma) \end{bmatrix} \Big|_{t=0} = \begin{bmatrix} \tilde{g}_{1m,ik}^1(r, \sigma) \\ \tilde{g}_{2m,ik}^1(r, \sigma) \\ \dots \\ \tilde{g}_{n+1,m,ik}^1(r, \sigma) \end{bmatrix}, \quad (29)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \tilde{u}_{1m,ik}(t, r, \sigma) \\ \tilde{u}_{2m,ik}(t, r, \sigma) \\ \dots \\ \tilde{u}_{n+1,m,ik}(t, r, \sigma) \end{bmatrix} \Big|_{t=0} = \begin{bmatrix} \tilde{g}_{1m,ik}^2(r, \sigma) \\ \tilde{g}_{2m,ik}^2(r, \sigma) \\ \dots \\ \tilde{g}_{n+1,m,ik}^2(r, \sigma) \end{bmatrix},$$

де

$$q_j^2(\sigma) = a_{z_j}^2 \sigma^2 + \chi_j^2; \quad j = \overline{1, n+1}.$$

Інтегральний оператор  $M_{(n)}$ , який діє за формулою (25), зобразимо у вигляді операторної матриці-рядка

$$M_{(n)}[\dots] = \left[ \int_{R_0}^{R_1} \dots V_1(r, \lambda) \sigma_1 r dr \quad \int_{R_1}^{R_2} \dots V_2(r, \lambda) \sigma_2 r dr \right. \\ \left. \dots \int_{R_{n-1}}^{R_n} \dots V_n(r, \lambda) \sigma_n r dr \quad \int_{R_n}^{+\infty} \dots V_{n+1}(r, \lambda) \sigma_{n+1} r dr \right] \quad (30)$$

і застосуємо за правилом множення матриць до задачі (28), (29). Внаслідок тотожності (27) одержуємо задачу Коші для звичайних диференціальних рівнянь 2-го порядку

$$\sum_{j=1}^{n+1} \left( \frac{d^2}{dt^2} + \lambda^2 + \gamma_j^2 + q_j^2(\sigma) \right) \tilde{u}_{jm,ik}(t, \lambda, \sigma) = \\ = \sum_{j=1}^{n+1} \tilde{G}_{jm,ik}(t, \lambda, \sigma) - \frac{a_1^2 \sigma_1 R_0}{\alpha_{11}^0} V_1(R_0, \lambda) \tilde{g}_{0m,ik}(t, \sigma), \quad (31)$$

$$\sum_{j=1}^{n+1} \tilde{u}_{jm,ik}(t, \lambda, \sigma) \Big|_{t=0} = \sum_{j=1}^{n+1} \tilde{g}_{jm,ik}^1(\lambda, \sigma); \\ \frac{d}{dt} \sum_{j=1}^{n+1} \tilde{u}_{jm,ik}(t, \lambda, \sigma) \Big|_{t=0} = \sum_{j=1}^{n+1} \tilde{g}_{jm,ik}^2(\lambda, \sigma), \quad (32)$$

де

$$\tilde{u}_{jm,ik}(t, \lambda, \sigma) = \int_{R_{j-1}}^{R_j} \tilde{u}_{jm,ik}(t, r, \sigma) V_j(r, \lambda) \sigma_j r dr; \quad j = \overline{1, n+1}, \\ \tilde{G}_{jm,ik}(t, \lambda, \sigma) = \int_{R_{j-1}}^{R_j} \tilde{G}_{jm,ik}(t, r, \sigma) V_j(r, \lambda) \sigma_j r dr, \quad j = \overline{1, n+1}, \\ \tilde{g}_{jm,ik}^s(\lambda, \sigma) = \int_{R_{j-1}}^{R_j} \tilde{g}_{jm,ik}^s(r, \sigma) V_j(r, \lambda) \sigma_j r dr; \quad j = \overline{1, n+1}, \quad s = 1, 2.$$

Припустимо, не зменшуючи загальності розв'язку задачі, що  $\max \{q_1^2(\sigma), q_2^2(\sigma), \dots, q_{n+1}^2(\sigma)\} = q_1^2(\sigma)$  і покладемо всюди  $\gamma_j^2 = q_1^2(\sigma) - q_j^2(\sigma); \quad j = \overline{1, n+1}$ . Задача Коші (31), (32) набуває вигляду

$$\frac{d^2 \tilde{u}_{m,ik}}{dt^2} + \Delta^2(\lambda, \sigma) \tilde{u}_{m,ik} = \tilde{G}_{m,ik}(t, \lambda, \sigma) - \frac{a_1^2 \sigma_1 R_0}{\alpha_{11}^0} V_1(R_0, \lambda) \tilde{g}_{0m,ik}(t, \sigma), \quad (33)$$

$$\tilde{u}_{m,ik}(t, \lambda, \sigma) \Big|_{t=0} = \tilde{g}_{m,ik}^1(\lambda, \sigma); \quad \frac{d}{dt} \tilde{u}_{m,ik}(t, \lambda, \sigma) \Big|_{t=0} = \tilde{g}_{m,ik}^2(\lambda, \sigma), \quad (34)$$

де

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{m,ik}(t, \lambda, \sigma) &= \sum_{j=1}^{n+1} \tilde{u}_{jm,ik}(t, \lambda, \sigma); \quad \tilde{G}_{m,ik}(t, \lambda, \sigma) = \sum_{j=1}^{n+1} \tilde{G}_{jm,ik}(t, \lambda, \sigma), \\ \tilde{g}_{m,ik}^s(\lambda, \sigma) &= \sum_{j=1}^{n+1} \tilde{g}_{jm,ik}^s(\lambda, \sigma); \quad \Delta^2(\lambda, \sigma) = \lambda^2 + a_{z1}^2 \sigma^2 + \chi_1^2; \quad s = 1, 2. \end{aligned}$$

Відомо [11], що єдиним розв'язком задачі (33), (34) є функція

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{m,ik}(t, \lambda, \sigma) &= N(t, \lambda, \sigma) \tilde{g}_{m,ik}^2(\lambda, \sigma) + \frac{d}{dt} N(t, \lambda, \sigma) \tilde{g}_{m,ik}^1(\lambda, \sigma) + \\ &+ \int_0^t N(t - \tau, \lambda, \sigma) \left[ \tilde{G}_{m,ik}(\tau, \lambda, \sigma) - \frac{a_1^2 R_0 \sigma_1}{\alpha_{11}^0} V_1(R_0, \lambda) \tilde{g}_{om,ik}(\tau, \sigma) \right] d\tau, \end{aligned} \quad (35)$$

де функція Коші (розв'язуюча функція)

$$N(t, \lambda, \sigma) = \frac{\sin(\Delta(\lambda, \sigma)t)}{\Delta(\lambda, \sigma)}.$$

Оскільки суперпозиція операторів  $M_{(n)}$  та  $M_{(n)}^{-1}$  є одиничним оператором ( $M_{(n)} \circ M_{(n)}^{-1} = M_{(n)}^{-1} \circ M_{(n)} = I$ ), то оператор  $M_{(n)}^{-1}$ , як обернений до оператора (30), зобразимо у вигляді операторної матриці-стовпця

$$M_{(n)}^{-1}[\dots] = \begin{bmatrix} \int_0^{+\infty} \dots V_1(r, \lambda) \Omega(\lambda) d\lambda \\ \dots \\ \int_0^{+\infty} \dots V_2(r, \lambda) \Omega(\lambda) d\lambda \\ \dots \\ \int_0^{+\infty} \dots V_{n+1}(r, \lambda) \Omega(\lambda) d\lambda \end{bmatrix} \quad (36)$$

і застосуємо за правилом множення матриць до матриці-елемента  $[\tilde{u}_{m,ik}(t, \lambda, \sigma)]$ , де функція  $\tilde{u}_{m,ik}(t, \lambda, \sigma)$  визначена формулою (35). Одержуємо єдиний розв'язок одновимірної гіперболічної початково-крайової задачі спряження (21)–(24):

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{jm,ik}(t, r, \sigma) &= \int_0^{+\infty} N(t, \lambda, \sigma) \tilde{g}_{m,ik}^2(\lambda, \sigma) V_j(r, \lambda) \Omega(\lambda) d\lambda + \\ &+ \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{+\infty} N(t, \lambda, \sigma) \tilde{g}_{m,ik}^1(\lambda, \sigma) V_j(r, \lambda) \Omega(\lambda) d\lambda + \end{aligned} \quad (37)$$

$$\begin{aligned} & + \int_0^t \int_0^{+\infty} N(t-\tau, \lambda, \sigma) \tilde{G}_{m,ik}(t, \lambda, \sigma) V_j(r, \lambda) \Omega(\lambda) d\lambda d\tau - \\ & - \frac{a_1^2 \sigma_1 R_0}{\alpha_{11}^0} \int_0^t \int_0^{+\infty} N(t-\tau, \lambda, \sigma) V_1(R_0, \lambda) \tilde{g}_{0m,ik}(\tau, \sigma) V_j(r, \lambda) \Omega(\lambda) d\lambda d\tau. \end{aligned}$$

Застосувавши послідовно до функцій  $\tilde{u}_{jm,ik}(t, r, \sigma)$ , визначених формулами (37), обернені оператори  $F^{-1}$  та  $F_{m,ik}^{-1}$ , і виконавши нескладні перетворення, одержуємо функції

$$\begin{aligned} u_{j,ik}(t, r, \varphi, z) = & \sum_{p=1}^{n+1} \int_0^t \int_{R_{p-1}}^{R_p} \int_0^{\varphi_0} \int_{-\infty}^{+\infty} E_{jp}^{ik}(t-\tau, r, \rho, \varphi, \alpha, z-\xi) f_p(\tau, \rho, \alpha, \xi) \sigma_p \rho d\xi d\alpha d\rho d\tau + \\ & + \frac{\partial}{\partial t} \sum_{p=1}^{n+1} \int_{R_{p-1}}^{R_p} \int_0^{\varphi_0} \int_{-\infty}^{+\infty} E_{jp}^{ik}(t, r, \rho, \varphi, \alpha, z-\xi) g_p^1(\rho, \alpha, \xi) \sigma_p \rho d\xi d\alpha d\rho + \\ & + \sum_{p=1}^{n+1} \int_{R_{p-1}}^{R_p} \int_0^{\varphi_0} \int_{-\infty}^{+\infty} E_{jp}^{ik}(t, r, \rho, \varphi, \alpha, z-\xi) g_p^2(\rho, \alpha, \xi) \sigma_p \rho d\xi d\alpha d\rho + \\ & + \sum_{p=1}^{n+1} a_{\varphi p}^2 \int_0^t \int_{R_{p-1}}^{R_p} \int_{-\infty}^{+\infty} Q_{jp}^{ik}(t, \tau, r, \rho, \varphi, z, \xi) \sigma_p \rho^{-1} d\xi d\rho d\tau + \\ & + \int_0^t \int_0^{\varphi_0} \int_{-\infty}^{+\infty} W_{jr,ik}(t-\tau, r, \varphi, \alpha, z-\xi) g_0(\tau, \alpha, \xi) d\xi d\alpha d\tau; \quad j = \overline{1, n+1}, \end{aligned} \quad (38)$$

які визначають єдині розв'язки гіперболічних початково-крайових задач (1)–(4), (5), (9); (1)–(4), (6), (9); (1)–(4), (7), (9); (1)–(4), (8), (9) при відповідних значеннях  $ik$  (11, 12, 21, 22).

У формулах (38) застосовано компоненти

$$E_{jp}^{ik}(t, r, \rho, \varphi, \alpha, z) = \frac{2}{\pi \varphi_0} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m^{ik} K_{jp}^{m,ik}(t, r, \rho, z) U_{m,ik}(\varphi) U_{m,ik}(\alpha)$$

матриці впливу (функції впливу), функції

$$Q_{jp}^{ik}(t, \tau, r, \rho, \varphi, z, \xi) = \frac{2}{\pi \varphi_0} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m^{ik} K_{jp}^{m,ik}(t-\tau, r, \rho, z-\xi) \Phi_{m,ik}(\tau, \rho, \xi) U_{m,ik}(\varphi)$$

та компоненти

$$W_{jr,ik}(t, r, \varphi, \alpha, z) = -\frac{a_1^2 \sigma_1 R_0}{\alpha_{11}^0} E_{j1}^{ik}(t, r, R_0, \varphi, \alpha, z)$$

радіальної матриці Гріна (радіальні функції Гріна) відповідних початково-крайових задач спряження, де

$$K_{jp}^{m,ik}(t, r, \rho, z) = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} N(t, \lambda, \sigma) \mathcal{V}_j(r, \lambda) V_p(\rho, \lambda) \Omega(\lambda) \cos(\sigma z) d\lambda d\sigma.$$

**Зауваження 1.** Аналіз розв'язків (38) в залежності від типу крайових умов на гранях клина  $\varphi = 0$  та  $\varphi = \varphi_0$  повторює відповідний аналіз, проведений в [12].

**Зауваження 2.** У випадку  $a_{ij} = a_{\varphi j} = a_{zj} \equiv a_j > 0$  формули (38) визначають структури розв'язків розглянутих задач в ізотропному кусково-однорідному клиновидному циліндрично-круговому просторі з порожниною.

**Зауваження 3.** Випадок зміни  $\varphi$  в межах  $\varphi_1 < \varphi < \varphi_2$  зводиться до розглянутого нами заміною  $\varphi' = \varphi - \varphi_1$  ( $\varphi_0 = \varphi_2 - \varphi_1$ ).

**Зауваження 4.** Параметри  $\alpha_{11}^0, \beta_{11}^0$  дають можливість виділяти із формул (38) розв'язки крайових задач у випадках задання на радіальній поверхні  $r = R_0$ , крайової умови 1-го роду ( $\alpha_{11}^0 = 0, \beta_{11}^0 = 1$ ), 2-го роду ( $\alpha_{11}^0 = -1, \beta_{11}^0 = 0$ ) та 3-го роду ( $\alpha_{11}^0 = -1, \beta_{11}^0 = h > 0$ ).

**Зауваження 5.** Аналіз розв'язків (38) в залежності від аналітичного виразу функцій  $f_j(t, r, \varphi, z), g_j^s(r, \varphi, z), g_{kj}(t, r, z), g_0(t, \varphi, z), \omega_{kj}(t, r, z), j = 1, n+1, s = 1, 2$  проводиться безпосередньо із загальних структур.

**Висновки.** Методом інтегральних і гібридних інтегральних перетворень у поєднанні з методом головних розв'язків (функцій впливу та функцій Гріна) вперше побудовано єдині точні аналітичні розв'язки узагальнених математичних моделей коливних процесів у кусково-однорідному клиновидному циліндрично-круговому просторі з порожниною. Одержані розв'язки носять алгоритмічний характер, неперервно залежить від параметрів і даних задачі й можуть бути використані як в теоретичних дослідженнях, так і в практиці інженерних розрахунків з використанням чисельних методів.

#### Список використаних джерел:

1. Перестюк М. О. Теорія рівнянь математичної фізики / М. О. Перестюк, В. В. Маринець. — К. : Либідь, 2006. — 424 с.

2. Дейнека В. С. Модели и методы решения задач в неоднородных средах / В. С. Дейнека, И. В. Сергиенко. — К. : Наук. думка, 2001. — 606 с.
3. Дейнека В. С. Модели и методы решения задач с условиями сопряжения / В. С. Дейнека, И. В. Сергиенко, В. В. Скопецкий. — К. : Наук. думка, 1998. — 614 с.
4. Сергиенко И. В. Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах / И. В. Сергиенко, В. В. Скопецкий, В. С. Дейнека. — К. : Наук. думка, 1991. — 432 с.
5. Каленюк П. И. Обобщенный метод разделения переменных / П. И. Каленюк, Я. Е. Баранецкий, З. Н. Нитребич. — К. : Наук. думка, 1993. — 232 с.
6. Самойленко В. Г. Рівняння математичної фізики / В. Г. Самойленко, І. М. Конет. — Київ : ВПЦ «Київський університет», 2014. — 283 с.
7. Конет І. М. Стационарні та нестационарні температурні поля в циліндрично-кругових областях / І. М. Конет, М. П. Ленюк. — Чернівці : Прут, 2001. — 312 с.
8. Громик А. П. Температурні поля в кусково-однорідних просторових середовищах / А. П. Громик, І. М. Конет, М. П. Ленюк. — Кам'янець-Подільський : Абетка-Світ, 2011. — 200 с.
9. Конет І. М. Гіперболічні крайові задачі математичної фізики в кусково-однорідних просторових середовищах / І. М. Конет. — Кам'янець-Подільський : Абетка-Світ, 2013. — 120 с.
10. Конет І. М. Параболічні крайові задачі в кусково-однорідних середовищах / І. М. Конет, Т. М. Пилипюк. — Кам'янець-Подільський : Абетка-Світ, 2016. — 244 с.
11. Конет І. М. Гіперболічні крайові задачі в кусково-однорідних циліндрично-кругових середовищах / І. М. Конет, Т. М. Пилипюк. — Кам'янець-Подільський : Абетка-Світ, 2017. — 84 с.
12. Громик А. П. Математичне моделювання коливних процесів у кусково-однорідному клиновидному циліндрично-круговому просторі / А. П. Громик // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки : зб. наук. пр. — Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський нац. ун-т імені Івана Огієнка, 2017. — Вип. 16. — С. 36–52.
13. Грантер К. Дж. Интегральные преобразования в математической физике / К. Дж. Грантер. — М. : Гостехтеориздат, 1956. — 204 с.
14. Снеддон И. Преобразования Фурье / И. Снеддон. — М. : ИЛ, 1955. — 668 с.
15. Шварц Л. Математические методы для физических наук / Л. Шварц. — М. : Мир, 1965. — 408 с.
16. Гельфанд И. М. Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений / И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов. — М. : Физматгиз, 1958. — 247 с.
17. Шилов Г. Е. Математический анализ. Второй специальный курс / Г. Е. Шилов. — М. : Наука, 1965. — 328 с.

## **MATHEMATICAL MODELING OF OSCILLATING PROCESSES IN PIECEWISE-HOMOGENEOUS WEDGE-SHAPED CYLINDRICAL-CIRCULAR SPACE WITH A CAVITY**

The theory of boundary value problems for differential equations with partial derivatives develops intensively and its results are important for the

development of many sections of mathematics. Its achievements are applied in the mathematical modeling of various processes and phenomenon of physics, mechanics, biology, medicine, economics, engineering.

It is well known that the complexity of a boundary-value problem significantly depends on the coefficients of equations and the geometry of domain in which the problem is considered. Properties of solutions of boundary value problems for linear, quasilinear, and some classes of non-linear equations in single-connected domains have been studied in sufficient detail.

However, many important applied problems of thermal physics, thermomechanics, theory of elasticity, theory of electrical circuits, theory of vibrations lead to boundary value problems for differential equations with partial derivatives not only in homogeneous domains when the coefficients of the equations are continuous, but also in piecewise homogeneous and inhomogeneous domains when the coefficients of the equations are piecewise continuous.

In this article the exact analytical solutions of mathematical models of oscillating processes (hyperbolic initial-boundary problem of conjugation) for piecewise-homogeneous wedge-shaped cylindrical-circular space with a cavity are obtained by means of the method of integral and hybrid integral transforms, in combination with the method of main solutions (influence matrices and Green's matrices).

The obtained solutions are of algorithmic character, continuously depend on the parameters and data of problem and can be used in further theoretical research and in practical engineering calculations of real processes which are modeled by hyperbolic boundary-value problems that are described by a cylindrical coordinate system (problems of acoustics, hydrodynamics, the theory of vibrations of mechanical systems).

**Key words:** *modelling, oscillating, hyperbolic equation, initial and boundary conditions, conditions of conjugation, integral transformation, the influence matrix, Green's matrix.*

Отримано: 29.05.2018

УДК 531.7.08

А. С. Дуднік, канд. техн. наук

Київський національний університет імені Т. Шевченка, м. Київ

## МЕТОДИ ВИЗНАЧЕННЯ ВІДСТАНИ МІЖ ОБ'ЄКТАМИ ЗАСОБАМИ СЕНСОРНИХ МЕРЕЖ

На сьогоднішній день у всьому світі усе більш пильну увагу привертають до себе «безпроводні сенсорні мережі» («Sensor Networks», далі просто сенсорні мережі). Поняття «Сенсорна мережа» з'явилося порівняно недавно (кілька років тому) але на сьогоднішній день є вже повністю сталим терміном (Sensor Network), що означає розподілену, таку, що самоорганізовується, стійку до відмови окремих елементів мережу, що складається з великого числа малогабаритних і дешевих напівпроводникових приладів, що обмінюються інформацією по безпроводному каналу зв'язку, не обслуговуються і не вимагають спеціальної установки. Кожен пристрій може містити різні датчики фізичних параметрів середовища (рух, світло, температура, вологість, тиск і так далі), а також засоби для первинної обробки і зберігання отриманих даних. Кількість об'єктів в такій мережі теоретично визначається лише сферою застосування і бюджетом, і завдяки низькій ціні окремих пристроїв (порядку декілька доларів і нижче) може бути дуже велике (порядку декілька тисяч і вище). Різні методи намагаються оцінити відстань між двома вузлами, використовуючи час, виміри часу поширення сигналу від передавача до приймача так, щоб на його основі було розрахувати відстань між передавачем і приймачем. У статті проведено порівняльний аналіз методів та алгоритмів локалізації з використанням наступних компонентів систем локалізації: оцінка відстані/кута, обчислення позиції та алгоритм локалізації. Вибір методу оцінки відстані між вузлами в системі локалізації є важливим коефіцієнтом, який впливає на продуктивність системи. Зазвичай, щоб оцінити точне розташування вузла потрібно використовувати принаймні три оцінки відстані. Визначено, що для для сенсорних мереж, найважливіше – те, що сам вузол обчислює свою власну позицію, тому для цього необхідно мати принаймні три вузли з відомими координатами. Невідомий вузол оцінює свій кут до кожного з трьох опорних вузлів, заснований на цих кутах і на позиціях опорних вузлів (які формують трикутник), обчислює свою власну позицію, використовуючи прості тригонометричні співвідношення.

**Ключові слова:** *безпроводна сенсорна мережа, вузол, якір, похибка, локалізація, zigbee.*

**Вступ.** Однією з актуальних задач є визначення місця розташування окремих об'єктів мережі. Неодмінною умовою при експлуатації будь-яких систем моніторингу та контролю є прив'язка даних, зібра-



них всією системою до географічних координат для відображення зібраної інформації на карті і подальшого аналізу. Крім того, така мережа (на відміну від традиційних радіомереж) за наявності вбудованої підсистеми позиціонування окремих об'єктів може бути розгорнута практично де завгодно з мінімальними витратами. Це може бути зроблено, наприклад, шляхом розкидання об'єктів мережі з літака.

Крім прив'язки отриманих мережею даних в процесі роботи до карти місцевості, інформація про координати об'єктів буде необхідна в процесі функціонування самої мережі (побудова ефективних з точки зору енергоспоживання алгоритмів маршрутизації, збір отриманих даних).

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** Питанням дослідження інформаційно-вимірювальних систем, в тому числі і дослідженням технологій моделювання, управління і взаємодії комп'ютеризованих систем вимірювання механічних величин, присвячено роботи сучасних вчених Кваснікова В. П., Орнадського Д. П., Осмоловського А. І., а також роботи Геєра Д., Ірвіна Дж., Лієрі Дж., Рошана П., Столлінгса В., Харля Д. та ін.

**Виділення не вирішених раніше частин загальної проблеми.** Даний підхід до формування мережі дозволяє адаптувати сенсорні мережі до вирішення надзвичайно широкого спектру завдань. Зокрема одним з основних застосувань сенсорних мереж є створення різних систем моніторингу і контролю. Слід чекати, що в недалекому майбутньому сенсорні мережі займуть значно ширшу нішу серед наявних телекомунікаційних технологій, які використовують безпроводний радіозв'язок.

У зв'язку з цим аналіз пошук методів визначення координат об'єктів в сенсорній мережі стає актуальним завданням.

**Мета статті.** Пошук алгоритмів локалізації об'єктів та можливих джерел інформації про географічне місце розташування об'єктів.

**Виклад основного матеріалу.** Різні методи намагаються оцінити відстань між двома вузлами, використовуючи час, виміри часу поширення сигналу від передавача до приймача так, щоб на його основі можна було розрахувати відстань між передавачем і приймачем. Найпростішим є ToA — Time of Arrival (рис. 1, а) [1, с. 117]. В цьому випадку, відстань між двома вузлами безпосередньо пропорційна часу, коли сигнал використовується, щоб поширитися від одного пункту до іншого. Відстань між відправником і приймачем визначається за формулою:

$$d = S_r (t_2 - t_1),$$

де  $S_r$  — швидкість поширення радіосигналу (швидкість світла),  $t_1$  і  $t_2$  — час, коли сигнал відіслано і отримано. Цей тип оцінки вимагає точно синхронізованих вузлів, і час, коли сигнал залишає вузол, має бути в пакеті, який посилають [2, с. 51].

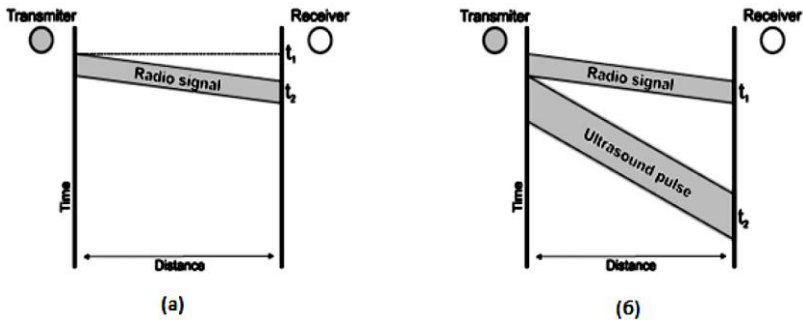
TDoA (Time Difference of Arrival) (рис. 1, б) заснований на відмінності часів коли єдиний сигнал від одного вузла прибуває в три або більше вузли або різниці часу, коли кілька сигналів від одного вузла надходять в інший вузол. Перший випадок, більш поширений в стільникових зв'язках, вимагає точно синхронізованих вузлів приймача (в цьому випадку, базові станції).

У другому випадку, більш поширеному і відповідному до бездротових сенсорних мереж, вузли повинні бути обладнані додатковими апаратними засобами, здатними до відправлення двох типів сигналів одночасно. У цих сигналів повинні бути різні швидкості поширення, як радіо / ультразвук або радіо/акустичний. Зазвичай, перший сигнал — пакет безпосередньо, який із швидкістю світла ( $\sim 300,000 \text{ km/c}$ ), і другий сигнал — деякий звук, через його повільніше поширення ( $\approx 340 \text{ м/c}$ ) [2, с. 65].

Метод TDoA використовується для обчислення координат бездротових сенсорних мереж, де ультразвуковий імпульс передається одночасно з радіосигналом. В цьому випадку, вузли вираховують різницю часу прибуття двох сигналів. Відстань може тепер бути обчислена наступною формулою:

$$d = (S_r - S_s)(t_2 - t_1),$$

де  $S_r$  і  $S_s$  — швидкість поширення радіо та ультразвукового сигналу,  $t_1$  і  $t_2$  — час прибуття радіо та ультразвукових сигналів, відповідно.



**Рис. 1.** Визначення відстаней за допомогою методів:  
 а) TOA — (Time of Arrival); б) TDOA (Time Difference of Arrival)

Оцінка помилки на відстані, отримані TDOA, вимірюються в сантиметрах. Експерименти з ультразвуком, показують помилки приблизно два або три сантиметри (менші ніж вузол).

Незважаючи на більш низькі помилки, у цих методах є певні недоліки. Перший — потреба додаткових апаратних засобів щоб надсилати другий сигнал, який збільшує вартість вузла. Другий — діапазон другого сигналу, який зазвичай менший між 3 м і 10 м з більш потужними передавачами [3, с. 12].

Метод визначення координат на основі кута отриманого сигналу (від англ. Angle of Arrival, AOA), координати мобільних вузлів розраховуються за законами гоніометрії [4, с. 325]. За допомогою спрямованих антен або набору антен, мобільним вузлом вимірюються кути приходу сигналів від стаціонарних вузлів, з відомими координатами (рис. 2). По вимірних напрямках обчислюється координати рухливого об'єкту. Точність цього підходу обмежена можливими затуханнями сигналу на вимірювальній апаратурі, так само через багатопроменеві відображення сигналу, які приходять з різних напрямів.

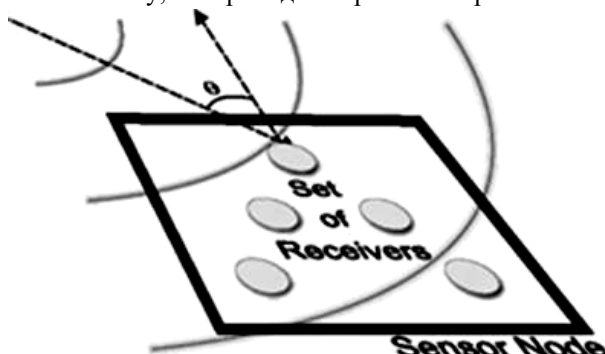


Рис. 2. Angle of Arrival

Експерименти показують, що цей метод має похибку в кілька градусів (близько 5 на практиці до 36) [4, с. 325]. Недоліками цього методу є необхідність додаткового обладнання та необхідність мінімальної відстані між приймачами.

В деяких випадках, інформацію для оцінки відстані є тільки дальність зв'язку вузлів. Якщо вузол отримує пакет даних з іншого вузла, то відстань між цими вузлами між нулем і максимальною дальністю зв'язку.

Як правило, методики, які використовують цей метод оцінки відстані не потребують точної відстані, а тільки інтервал. Щоб отримати тільки відстань (а не інтервал), ми можемо вибрати одну точку з інтервалу, як в середній точці, наприклад. В цьому випадку максимальна похибка цієї оцінки буде наполовину менша від дальності зв'язку.

Цей метод визначення відстані має ту перевагу, що найпростіший і з найменшими витратами. Додаткового обладнання не потрібно, так само як і додаткових обчислень, необхідних для оцінки відстані. З іншого боку, похибка розміром 50% від дальності зв'язку для кожної відстані, є не придатною для більшості систем локалізації. Візьмемо, наприклад дальність зв'язку до 100 метрів. У цьому випадку похибка цього методу може бути близько 50 м [4, с. 325].

Коли у вузла є досить інформації про відстані або кути позицій, тоді можна визначити свою власну позицію, використовуючи один з методів, які будуть розглянуті далі.

Декілька методів можуть використовуватися, щоб вирахувати позицію вузла. Такі методи включають: трилатерацію, мультилатерацію, триангуляцію. Вибір, який метод використовувати, залежить від кінцевої продуктивності системи локалізації. Такий вибір залежить від доступної інформації і від обмежень процесора.

Трилатерація — основний та найпростіший метод. Цей метод обчислює позицію вузла перетином трьох кругів, як зображено на рисунку 3. Щоб оцінити його позицію, використовуючи трилатерацію, вузол повинен знати положення трьох довідкових вузлів і відстані до кожного з цих вузлів. Відстані можуть бути обчислені, використовуючи один з вищезгаданих методів.

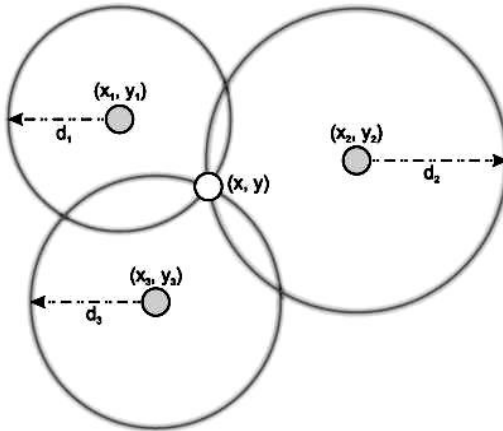


Рис. 3. Теоретична модель трилатерації

Кола, які сформовані положенням і відстанню до кожної точки виражаються за формулою:

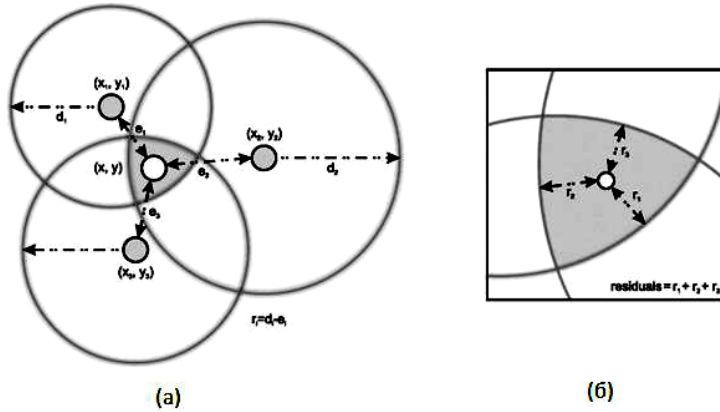
$$(\hat{x} - x_1)^2 + (\hat{y} - y_1)^2 = d_1^2,$$

$$(\hat{x} - x_2)^2 + (\hat{y} - y_2)^2 = d_2^2,$$

$$(\hat{x} - x_3)^2 + (\hat{y} - y_3)^2 = d_3^2,$$

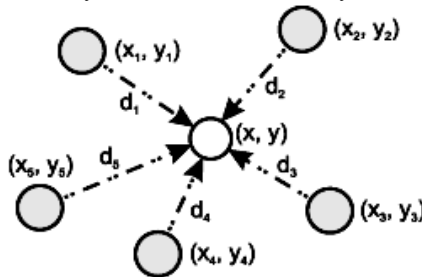
де  $(\hat{x}, \hat{y})$  — позиція яку потрібно знайти,  $(x_i, y_i)$  — позиція якірних вузлів,  $d_i$  та — відстань якірного вузла до невідомого вузла. В цьому випадку, у нас є три квадратичні рівняння з двома невідомими, які можуть бути вирішені, теоретично.

У практичному застосуванні важко оцінити відстані і точну інформацію про розташування довідкових вузлів, щоб обчислити координати. Як зображено на рисунку 4 а, кола не перетинаються лише в одній точці, що призводить до нескінченного набору можливих рішень.



**Рис. 4.** Практична модель трилатерації: а) невідповідність позицій і відстаней генерують систему з нескінченними рішеннями; б) залишкове значення, як сума квадратів різниць між передбачуваними і обчисленими відстанями

Крім того, коли доступно більше трьох вузлів з відомими координатами, ми можемо використати метод мультилатерації, щоб обчислити положення вузла. Тоді невизначена система рівнянь, де число рівнянь більше (за рахунок збільшення числа якірних вузлів), кількість невідомих повинна бути вирішена. На рисунку 5 зображений цей випадок. Зазвичай, у таких систем не має унікального вирішення.



**Рис. 5.** Модель мултилатерації, застосовується тільки тоді коли використовується більше ніж три якірні вузли

Розглянувши  $n$  якірних вузлів і похибку оцінки відстані, яка складає  $d_i = \hat{d}_i - \epsilon$ , система рівнянь виглядатиме наступним чином:

$$\begin{aligned}
 (\hat{x} - x_1)^2 + (\hat{y} - y_1)^2 &= \hat{d}_1^2 - \epsilon \\
 &\vdots \\
 (\hat{x} - x_n)^2 + (\hat{y} - y_n)^2 &= \hat{d}_n^2 - \epsilon
 \end{aligned}$$

де,  $\epsilon$  — зазвичай вважається незалежна нормальна випадкова величина.

Враховуючи останню рівність, систему рівнянь можна спростити до лінійної,  $Ax \approx b$ , або:

$$\begin{bmatrix} 2(x_1 - x_n) & 2(y_1 - y_n) \\ \vdots & \vdots \\ 2(x_{n-1} - x_n) & 2(y_{n-1} - y_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} x_1^2 - x_n^2 + y_1^2 - y_n^2 + d_1^2 - d_n^2 \\ \vdots \\ x_{n-1}^2 - x_n^2 + y_{n-1}^2 - y_n^2 + d_{n-1}^2 - d_n^2 \end{bmatrix}.$$

Ця лінійна система може бути розв'язана, використовуючи стандартні методи як підхід найменших квадратів. Це може бути зроблено наступним чином:

$$x = (A^T A)^{-1} (A^T b).$$

Основна ідея цього методу полягає в мінімізації суми квадратів різниці між розрахунками (наприклад, за допомогою RSSI) і обчислені відстані (за оцінками, положення). Сума відмінностей відома як залишки, як показано на рисунку 4 б.

Математично записується так:

$$(\hat{x}, \hat{y}) = \min \left( \sum_{i=1}^n (\sqrt{(\hat{x} - x_i)^2 + (\hat{y} - y_i)^2} - d_i)^2 \right),$$

де  $(x_i, y_i)$  позиція опорного вузла,  $d_i$  — оцінка відстані,  $\sqrt{(\hat{x} - x_i)^2 + (\hat{y} - y_i)^2} - d_i$  — відстань між обчисленою позицією і позицією опорного вузла, який є обчисленим відстанню.

Необхідно обчислити декілька операцій з плаваючою комою в залежності від методу який вираховує положення, що використовується для вирішення системи рівнянь. У випадку методу найменших квадратів  $\left(m + \frac{n}{3}\right)n^2$ , операцій з плаваючою комою (де  $m$  — кількість невідомих і  $n$  — кількість рівнянь) необхідних для визначення позиції [5, с. 61].

В методі триангуляція, використовується інформація кутів замість відстаней. Обчислення позиції може бути зроблене віддалено або вузлом безпосередньо. У обох випадках позиція обчислюється з використанням тригонометрії законам синусів і косинусів.

У першому випадку, віддаленого позиціонування, зображено на рисунку 6.а принаймні два опорні вузли оцінюють кут прибуття і віддалено обчислюють положення невідомого вузла як місце, де лінії кутів від кожного опорного вузла перетинаються. Цей тип триангуляції в основному використовується у стільникових зв'язках [4, с. 325].

Але для сенсорних мереж, найважливіше — те, що сам вузол обчислює свою власну позицію, тому для цього необхідно мати принаймні три вузли з відомими координатами (рис. 6 б). Невідомий вузол оцінює

свій кут до кожного з трьох опорних вузлів, заснований на цих кутах і на позиціях опорних вузлів (які формують трикутник), обчислює свою власну позицію, використовуючи прості тригонометричні співвідношення [6, с. 238]. Цей метод подібний до методу трилатерації.

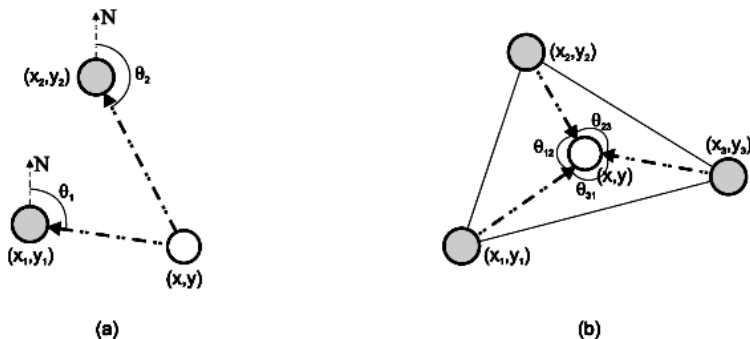


Рис. 6. Триангуляція: а) двома якірними вузлами; б) трьома якірними вузлами

**Висновки.** Проведено порівняльний аналіз методів та алгоритмів локалізації з використанням наступних компонентів систем локалізації: оцінка відстані/кута, обчислення позиції та алгоритм локалізації.

Вибір методу оцінки відстані між вузлами в системі локалізації є важливим коефіцієнтом, який впливає на продуктивність системи. Зазвичай, щоб оцінити точне розташування вузла потрібно використовувати принаймні три оцінки відстані.

### Список використаних джерел:

1. Hofmann-Wellenho B. Global Positioning System: Theory and Practice / B. Hofmann-Wellenho, H. Lichtenegger, J. Collins. — 4th ed. — Berlin, 2003.
2. Elson J. Time synchronization in wireless sensor networks / J. Elson // Department Computer Sciences, University of California, Ph.D. dissertation. — Los Angeles, 2003.
3. Whitehouse K. The design of calamari: An ad hoc localization system for sensor networks / K. Whitehouse. — Berkeley, 2009.
4. Priyantha N. The cricket compass for context aware mobile applications / N. Priyantha, H. Balakrishnan, S. Teller // In 7th ACM International Conference on Mobile Computing and Networking. — Rome, 2006. — P. 325.
5. Golub G., Van Loan C. Matrix Computations / G. Golub, C. Van Loan. — 3rd ed. — Baltimore, 2010. — P. 213.
6. Niculescu D. Ad hoc positioning system (aps) using aoa / D. Niculescu, B. Nath // I Proceedings of INFOCOM 2003. — San Francisco, 2009. — P. 238.
7. Niculescu D. Ad hoc positioning system (aps) using aoa / D. Niculescu, B. Nath // I Proceedings of INFOCOM 2009. — San Francisco, 2009. — P. 238.
8. Priyantha N. The cricket compass for context aware mobile applications / N. Priyantha, H. Balakrishnan, S. Teller // In 17th ACM International Conference on Mobile Computing and Networking. — Rome, 2016. — P. 325.

9. Savvides A. Dynamic fine-grained localization in ad-hoc networks of sensors / A. Savvides, C. Han, M. Strivastava // In 7th ACM/IEEE International Conference on Mobile Computing and Networking. — Rome, 2010. — P. 166–179.
10. Yu Y. Geographical and energy aware routing: A recursive data dissemination protocol for wireless sensor networks / Y. Yu, R. Govindan, D. Estrin // Technical Report CSD-TR-01-0023, UCLA Computer Science Department. — 2011.
11. Квасніков В. П. Концепція повірки координатно-вимірювальних машин через Інтернет / В. П. Квасніков, Т. М. Хаєїн // Метрологія та прилади. — 2013. — № 6. — С. 48–53.
12. Квасніков В. П. Способи побудови аналогових інтерфейсів інформаційно-вимірювальних систем механічних величин / В. П. Квасніков, Д. П. Орнатський, Т. П. Нічкова, І. В. Гаврилов // Міжнародний науково-технічний журнал «Вимірювальна та обчислювальна техніка в технологічних процесах». — 2013. — № 1. — С. 164–169.
13. Орнатський Д. П. Аналоговий інтерфейс для дистанційних вимірювань переміщень диференціально-трансформаторними індуктивними датчиками / Д. П. Орнатський, М. В. Михалко, О. І. Осмоловський // Східно-Європейський журнал передових технологій. — 2014. — № 1/2 (67). — С. 52–57.

## METHODS OF DETERMINATION BETWEEN OBJECTS BY SENSOR NETWORKS

To date, «wireless sensory networks» («Sensor Networks»), hereinafter referred to as sensory networks) attract more and more attention all over the world. The concept of «Sensor Network» appeared relatively recently (several years ago), but to date there is already a completely constant term (Sensor Network), which means distributed, self-organizing, resistant to the failure of individual elements of the network consisting of a large number small and cheap semiconductor devices that exchange information over a wireless communication channel, are not serviced and do not require a special installation. Each device can contain various sensors of physical parameters of the medium (motion, light, temperature, humidity, pressure, etc.), as well as means for the primary processing and storage of the received data. The number of objects in such a network is theoretically determined only by the scope and budget, and due to the low price of individual devices (about a few dollars and below) can be very large (about a few thousand and above). Different methods try to estimate the distance between two nodes using time, measurements of the time of signal propagation from the transmitter to the receiver so that on its basis it was possible to calculate the distance between the transmitter and the receiver. In the article a comparative analysis of methods and algorithms of localization using the following components of localization systems: distance / angle estimation, position calculations and localization algorithm are carried out. Choosing a method for estimating the distance between nodes in a localization system is an important factor that affects the system's performance. Usually, to estimate the exact location of the site, you must use at least three distance estimates. It is determined that for sensory networks, the most important thing is that the node itself calculates its own position, so it is necessary for it to have at least three knots with known coordinates. An unknown node evaluates its angle to each of



the three reference nodes, based on these corners and at the positions of the reference nodes (which form the triangle), calculates its own position using simple trigonometric relationships.

**Key words:** *wireless sensor network, node, anchor, error, localization, zigbee.*

Отримано: 16.07.2018

УДК 519.64

**А. А. Дячук\***, канд. техн. наук,

**Н. Л. Костьян\*\***, канд. техн. наук

\* НУ «Институт экономики и прогнозирования НАН Украины», г. Киев,

\*\*Черкасский государственный технологический университет,  
г. Черкассы

## **КОЛЛОКАЦИОННЫЕ АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРЫ**

Несмотря на широкое использование метода коллокации для решения интегральных уравнений с постоянными пределами интегрирования, до сих пор мало внимания уделялось реализации данного метода применительно к интегральным уравнениям с переменными пределами. В данной статье рассматриваются задачи решения интегральных уравнений Вольтерры 1 и 2 рода. Приближенное решение определяется в виде кусочно-гладкого полинома, составленного из полиномов по участкам области определения переменной интегрирования. Алгоритм метода представляет собой итерационный процесс. Задача сводится к решению систем в общем случае нелинейных уравнений относительно коэффициентов соответствующих полиномов. На каждом шаге итерации определяется аналитическое выражение для очередного полинома, что позволяет найти решение в любой точке заданного интервала. Особенностью коллокационного алгоритма для уравнений Вольтерры 2 рода является замена квадратурными формулами интегралов, которые входят в систему уравнений относительно приближенных значений коэффициентов. Выбор коэффициентов квадратурных формул зависит от принятого количества узлов на участке. В работе рассмотрен частный случай системы для трех узлов. При этом была произведена замена подынтегрального выражения решаемого уравнения интерполяционным многочленом в форме Ньютона. Результаты решения тестовых примеров подтверждают работоспособность предложенных алгоритмов и свидетельствуют о высокой точности расчетов. Метод коллокации позволяет получать решения уравнений Вольтерры по участкам промежутка интегрирования, выбирая их длину и применяя на каждом из них аппроксимирующее выражение с небольшим числом коор-

динатных функций. Данный метод может быть использован при идентификации динамических объектов и систем, а также при решении задач восстановления входных сигналов.

**Ключевые слова:** интегральные уравнения Вольтерры, метод коллокации, квадратурные формулы.

**Введение.** При решении многих проблем физики и техники возникает необходимость в решении обратных задач динамики на основе применения моделей в форме интегральных уравнений Вольтерры. Для решения данного класса уравнений применяются аналитические, операционные, квадратурные, итерационные и другие методы [1, 2]. Прямое применение аналитических и итерационных методов решения интегральных уравнений может быть связано с определенными трудностями при создании высокопроизводительных алгоритмов и структур специализированных средств вычислительной техники, предназначенных для реализации интегральных моделей динамических систем. Особенности задачи решения уравнений Вольтерры 1 рода приводят к существенным ограничениям возможностей непосредственного применения метода квадратур. На практике трудно воспользоваться квадратурными формулами, более точными, чем формула трапеций. В связи с этим в случае необходимости возможен выбор какого-либо другого метода. Перспективными в этом отношении являются алгоритмы, основанные на идее метода коллокации [3]. Хорошо известно применение метода коллокации для решения интегральных уравнений с постоянными пределами интегрирования [4–8]. В этом случае эффективность метода может оказаться невысокой из-за того, что промежуток интегрирования фиксирован. Если он оказывается большим, то повышение точности результатов достигается только за счет увеличения количества координатных (базисных) функций, совокупность которых аппроксимирует искомое решение.

В случае уравнений типа Вольтерры имеется возможность получать решение по участкам, выбирая их длину и применяя на каждом из них аппроксимирующее выражение с небольшим числом координатных функций. Целью работы является рассмотрение метода коллокации применительно к уравнениям типа Вольтерры.

**Изложение основного материала.** *Решение уравнения Вольтерры 1-го рода.* Рассмотрим уравнение Вольтерры 1 рода в общем виде

$$\int_a^x K[x, s, y(s)] ds = f(x), x \in [a, b]. \quad (1)$$

Метод коллокации, применительно к решению уравнения (1), состоит в следующем. Промежуток  $[a, b]$  разбивается на  $N$  участков, на каждом из которых искомое решение представляется в виде функции определенного вида

$$\tilde{y}(x) = \Phi(x, c_1, c_2, \dots, c_m) \quad (2)$$

зависящей от свободных параметров  $c_i, i = \overline{1, m}$ .

Решаемое уравнение на каждом  $(k + 1)$ -м участке  $x_k \leq x \leq x_{k+1}$ ,  $k = \overline{1, N - 1}$  представляется в виде

$$\int_{x_k}^x K[x, s, \tilde{y}(s)] ds = f(x) - \psi_k(x), \quad x \in [x_k, x_{k+1}], \quad (3)$$

где функция  $\psi_k(x)$  представляет собой интеграл

$$\psi_k(x) = \int_a^{x_k} K[x, s, \tilde{y}(s)] ds, \quad s \in [a, x_k], \quad x \in [x_k, x_{k+1}], \quad (4)$$

который всегда может быть вычислен по известному на промежутке  $a \leq x \leq x_k$  приближенному решению  $\tilde{y}(x)$ , полученному предварительно для  $k - 1$  предшествующих участков. Начальное значение  $y(a)$  искомого решения находится каким-либо вспомогательным способом или считается заданным.

Для решения уравнения (3) используется представление (2) а свободные параметры  $c_i, i = \overline{1, m}$  определяются из условия обращения в нуль невязок

$$\varepsilon(c_i, x_{k,j}) = \int_{x_k}^{x_{k,j}} K[x_{k,j}, s, \Phi(s, c_1, c_2, \dots, c_m)] - f(x_{k,j}) + \psi_k, \quad (5)$$

где  $x_{k,j} (j = 1, 2, \dots, m)$  — узлы, соответствующие разбиению отрезка  $[x_k, x_{k+1}]$  на  $m$  частей (подотрезков). Выражение (5) представляет собой систему  $m$  уравнений относительно  $c_1, c_2, c_3, \dots, c_m$ .

Исходя из удобств вычислений, искомое решение на участке целесообразно представлять в виде многочлена вида

$$\tilde{y}(x) = \sum_{i=1}^m c_i \varphi_i(x), \quad (6)$$

где  $\varphi_i(x)$  — линейно независимые координатные функции.

Рассмотрим вариант метода коллокации, основанный на применении кусочно-гладких полиномов, применительно к решению уравнения (1).

В промежутке интегрирования  $[a, b]$  выделим узлы

$$x_{k,j} = a + (km + j)h, \quad j = \overline{0, m}, \quad k = \overline{0, N - 1},$$

где индекс  $k$  соответствует  $k + 1$ -му участку (отрезку  $x_k \leq x \leq x_{k+1}$ ) а индекс  $j$  — подотрезку  $x_{k,j} \leq x \leq x_{k,j+1}$  внутри участка;  $m \geq 1$  — количество подотрезков; при этом  $x_{k,m} = x_{k+1,0}$ ;  $x_{0,0} = a$ .

Решение будем искать в виде кусочно-гладкого полинома  $\tilde{y}(x) = P(x)$  составленного по участкам из полиномов вида

$$P_k(x) = P_k(x_{k,0}) + \sum_{j=1}^m \frac{c_{k,j}}{j!} (x - x_{k,0})^j, \quad k = \overline{0, N-1}. \quad (7)$$

Полагая  $P(x) \in c[a, b]$ , имеем  $P_k(x_{k,0}) = P_{k-1}(x_{k-1}, m)$ .

Будем считать известным значение  $P_0(x_{0,0}) = y_0$  ( $y_0 = y(a)$ ). Тогда на первом участке приближенное решение уравнения (1) имеет вид

$$P_0(x) = P_0(x_{0,0}) + \sum_{j=1}^m \frac{c_{0,j}}{j!} (x - x_{0,0})^j. \quad (8)$$

Подставив (8) в решаемое уравнение (1) для фиксированных значений  $x_{0,j}$  ( $j = \overline{1, m}$ ), получим систему

$$\int_a^{x_{0,j}} K(x_{0,j}, s, P_0(s)) ds = f(x_{0,j}), \quad j = \overline{1, m}, \quad (9)$$

которая после вычисления интегралов представляет собой систему в общем случае нелинейных уравнений относительно коэффициентов  $c_{0,1}, \dots, c_{0,m}$ , нахождение которых позволяет получить  $P_0(x)$ .

Приближенное решение на втором участке ищется в виде

$$P_1(x) = P_1(x_{1,0}) + \sum_{j=1}^m \frac{c_{1,j}}{j!} (x - x_{1,0})^j, \quad (10)$$

где значение  $P_1(x_{1,0})$  известно из вычислений на предыдущем шаге и равно

$$P_1(x_{1,0}) = P_0(x_{0,m}) = P_0(x_{0,0}) + \sum_{j=1}^m \frac{c_{0,j}}{j!} (x_{0,m} - x_{0,0})^j.$$

После подстановки (10) в решаемое уравнение, представленное в виде (3), получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} \int_{x_{1,0}}^{x_{1,1}} K[x_{1,1}, s, P_1(s)] ds &= f(x_{1,1}) - \int_a^{x_{1,0}} K[x_{1,1}, s, P_0(s)] ds, \\ \int_{x_{1,0}}^{x_{1,2}} K[x_{1,2}, s, P_1(s)] ds &= f(x_{1,2}) - \int_a^{x_{1,0}} K[x_{1,2}, s, P_0(s)] ds, \\ &\dots\dots\dots \\ \int_{x_{1,0}}^{x_{1,m}} K[x_{1,m}, s, P_1(s)] ds &= f(x_{1,m}) - \int_a^{x_{1,0}} K[x_{1,m}, s, P_0(s)] ds, \end{aligned} \quad (11)$$

которая позволяет найти значения  $c_{1,1}, c_{1,2}, \dots, c_{1,m}$ .

Далее подобным образом определяются полиномы  $P_2(s), P_3(s), \dots, P_{N-1}(s)$ . Для нахождения коэффициентов  $c_{k,1}, c_{k,2}, \dots, c_{k,m}$  ( $k = 1, N-1$ ) в общем случае используются выражения

$$\int_{x_{k,0}}^{x_{k,j}} K[x_{k,j}, s, P_k(s)] ds = f(x_{k,j}) - \psi_k(x_{k,j}),$$

где

$$\begin{aligned} \psi_k(x_{k,j}) = & \int_a^{x_{1,0}} K[x_{k,j}, s, P_0(s)] ds + \int_{x_{1,0}}^{x_{2,0}} K[x_{k,j}, s, P_1(s)] ds + \\ & + \dots + \int_{x_{k-1,0}}^{x_{k,0}} K[x_{k,j}, s, P_{k-1}(s)] ds, \quad k = \overline{1, N-1}, \quad j = \overline{1, m}. \end{aligned} \quad (12)$$

*Решение уравнения Вольтерры 2-го рода.* Рассмотрен метод коллокации применительно к уравнению Вольтерры 2-го рода

$$y(x) = f(x) + \int_a^x K[x, s, y(s)] ds, \quad s, x \in [a, b]. \quad (13)$$

Уравнение (13) можно представить в виде

$$y(x) = f(x) + \int_{x_{k-1}}^x K[x, s, y(s)] ds + \psi_k(x), \quad s, x \in [x_{k-1}, x], \quad (14)$$

где

$$\psi_k(x) = \int_a^{x_{k-1}} K[x, s, y(s)] ds, \quad s \in [a, x_{k-1}], \quad x \in (x_{k-1}, x_k). \quad (15)$$

Для построения приближенного решения уравнения (13) разобьем каждый из  $N$  участков промежутка  $[a, b]$  на  $m$  частей длиной  $h$  и, таким образом, весь промежуток интегрирования будет представлять собой сетку с шагом  $h$ , а длина каждого участка равна  $mh$ . Решение ищем в виде кусочно-гладкой функции  $P(x)$ , представляющую собой следующие друг за другом с шагом  $mh$  полиномы степени  $m$ , т.е. на каждом  $k$ -м участке  $P(x)$  является полиномом вида

$$\begin{aligned} P_k(x) = & \sum_{i=0}^m c_{k,i} [x - (k-1)mh]^i, \quad (k-1)mh < x < kmh, \\ & P_k(kmh) = P_{k+1}(kmh), \quad k = \overline{1, N}. \end{aligned} \quad (16)$$

Согласно методу коллокации [7] потребуем, чтобы приближенное решение удовлетворяло уравнению (13) в точках

$$x = x_j = jh, \quad j = \overline{0, (N-1)m}$$

(точках коллокации). Для этого подставим выражение (16) в уравнение (13) и запишем его для значения  $x = x_j$ , что позволяет для каждого участка  $(k - 1)mh < x < kmh$  получать систему уравнений

$$P_k[(k - 1)mh + ih] = \int_a^{(k-1)mh+ih} K[(k - 1)mh + ih, s, P(s)]ds + f[(k - 1)mh + ih], \quad (17)$$

$$i = \overline{1, m}.$$

Если систему (17) представить в виде (14) и заменить интегралы квадратурами, то можно перейти к явному виду системы конечных уравнений относительно неизвестных коэффициентов  $c_{k,j}$  нахождение которых позволяет получить конкретное приближенное решение в форме кусочно-гладкого полинома.

Разделяя в (17) интеграл на две части согласно (14), имеем

$$P_k[(k - 1)mh + ih] = \int_{(k-1)mh}^{(k-1)mh+ih} K[(k - 1)mh + ih, s, P_k(s)]ds +$$

$$+ \int_a^{(k-1)mh} K[(k - 1)mh + ih, s, P(s)]ds + f[(k - 1)mh + ih], \quad (18)$$

где  $i = \overline{1, m}$  и функция  $P(x)$  представляет собой решение, полученное предварительно для предыдущих  $k - 1$  участков на промежутке  $[0, (k - 1)mh]$ .

Квадратурные формулы, применяемые для замены в (18) интегралов, целесообразно выбирать, исходя из наличия  $m - 1$ -го задействованного узла на каждом  $k$ -м участке, что соответствует точности порядка  $O(h^{m+2})$ . Следует также учитывать, что из решения системы (18) на предыдущем  $k - 1$ -м участке известно значение

$$c_{k,0} = P_k[(k - 1)mh] = P_{k-1}[(k - 1)mh].$$

Таким образом, замена в (18) интегралов квадратурными формулами приводит к следующей системе относительно приближения значений  $c_{k,i}$  ( $i = \overline{1, m}$ ) коэффициентов полиномов (16):

$$\sum_{n=0}^m (ih)^n c_{k,n} = \sum_{j=0}^m A_{ij} K[(k - 1)mh + ih, (k - 1)mh + jh, \sum_{n=0}^m (jh)^n c_{k,n}]h +$$

$$+ \sum_{l=1}^{k-1} \sum_{j=0}^m A_{mj} K[(k - 1)mh + ih, (l - 1)mh + jh, \sum_{n=0}^m (jh)^n c_{l,n}]h + \quad (19)$$

$$+ f[(k - 1)mh + ih]; i = \overline{1, m},$$

где  $A_{ij}$  — коэффициенты квадратурных формул, набор которых зависит от принятого количества узлов  $m$  на участке.

Рассмотрим подробнее систему (19) для  $m = 3$ . Полином (16) при этом принимает вид

$$P_k(x) = c_{k,0} + xc_{k+1} + x^2c_{k,2} + x^3c_{k,3},$$

а значения узлов равны  $x_i = 3(k-1)h + ih$ ,  $k = 1, N$ ,  $i = 1, 3$ .

Применительно к подынтегральному выражению решаемого уравнения введем обозначения

$$\tilde{K}_i(s) = K(x_i, s, P_k(s)), \quad \tilde{K}_{ij} = K(x_i, x_j, P_k(x_j)).$$

Заменяя  $\tilde{K}_i(s)$  интерполяционным многочленом в форме Ньютона, имеем

$$\begin{aligned} K(x_i, s, P_k(s)) &= \tilde{K}_{i,0} + (s - x_0) \frac{\tilde{K}_{i,1} - \tilde{K}_{i,0}}{h} + \\ &+ (s - x_0)(s - x_1) \frac{\tilde{K}_{i,2} - 2\tilde{K}_{i,j} + \tilde{K}_{i,0}}{2h^2} + \\ &+ (s - x_0)(s - x_1)(s - x_2) \frac{\tilde{K}_{i,3} - 3\tilde{K}_{i,2} + 3\tilde{K}_{i,1} - \tilde{K}_{i,0}}{6h^3} + O(h^4). \end{aligned} \quad (20)$$

Интегрируя (20) в соответствующих пределах, получим для первого участка

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_1} K(x_i, s, p_k(s)) ds &= \tilde{K}_{i,0}h + (\tilde{K}_{i,1} - \tilde{K}_{i,0}) \frac{h}{2} - (\tilde{K}_{i,2} - 2\tilde{K}_{i,1} + \tilde{K}_{i,0}) \frac{h}{12} + \\ &+ (\tilde{K}_{i,3} - 3\tilde{K}_{i,2} + 3\tilde{K}_{i,1} - \tilde{K}_{i,0}) \frac{h}{24} + O(h^5) = \\ &= (9\tilde{K}_{i,0} + 19\tilde{K}_{i,1} - 5\tilde{K}_{i,2} + \tilde{K}_{i,3}) \frac{h}{24} + O(h^3), \\ \int_{x_0}^{x_2} K(x_i, s, P_k(s)) ds &= \tilde{K}_{i,0} \cdot 2h + (\tilde{K}_{i,1} - \tilde{K}_{i,0}) \cdot 2h + (\tilde{K}_{i,2} - 2\tilde{K}_{i,1} + \tilde{K}_{i,0}) \cdot \frac{h}{3} + \\ &+ (\tilde{K}_{i,3} - 3\tilde{K}_{i,2} + 3\tilde{K}_{i,1} - \tilde{K}_{i,0}) \cdot O = (\tilde{K}_{i,0} + 4\tilde{K}_{i,1} + \tilde{K}_{i,2}) \cdot \frac{h}{3} + O(h^5), \\ \int_{x_0}^{x_3} K(x_i, s, P_k(s)) ds &= \tilde{K}_{i,0} \cdot 3h + (\tilde{K}_{i,1} - \tilde{K}_{i,0}) \cdot \frac{9h}{2} + \\ &+ (\tilde{K}_{i,2} - 2\tilde{K}_{i,1} + \tilde{K}_{i,0}) \cdot \frac{9h}{4} + (\tilde{K}_{i,3} - 3\tilde{K}_{i,2} + 3\tilde{K}_{i,1} - \tilde{K}_{i,0}) \cdot \frac{3h}{8} = \\ &= (\tilde{K}_{i,0} + 3\tilde{K}_{i,1} + 3\tilde{K}_{i,2} + \tilde{K}_{i,3}) \cdot \frac{3h}{8} + O(h^5). \end{aligned}$$

Полученные весовые коэффициенты не изменяются от участка к участку. В частности, весовые коэффициенты последней формулы сохраняются для интегралов от функции  $K[x_i, s, P_l(s)]$  с пределами  $3(l-1)h, 3lh$ , где  $l = \overline{1, k-1}$ .

Пренебрегая остаточными членами квадратурных формул, имеющими порядок  $O(h^5)$ , и подставляя полученные выражения в (19) имеем

$$\begin{cases} c_{k,1}h + c_{k,2}h^2 + c_{k,3}h^3 = [9\tilde{K}_{1,0} + 19\tilde{K}_{1,1} - 5\tilde{K}_{1,2} + \tilde{K}_{1,3}] \frac{h}{24} + F_1, \\ c_{k,1}h + 4c_{k,2}h^2 + 8c_{k,3}h^3 = [\tilde{K}_{2,0} + 4\tilde{K}_{2,1} + K_{2,2}] \frac{h}{3} + F_2, \\ 3c_{k,1}h + 9c_{k,2}h^2 + 27c_{k,3}h^3 = [\tilde{K}_{3,0} + 3\tilde{K}_{3,1} + 3K_{3,2} + \tilde{K}_{3,3}] \frac{3h}{8} + F_3, \end{cases} \quad (21)$$

$$F_i =$$

$$= \sum_{l=1}^{k-1} \sum_{j=0}^3 A_{j,3} \cdot K \left[ 3(k-1)h + ih, 3(l-1)h + jh, \sum_{n=0}^3 c_{l,n} (jh)^n \right] \cdot h + \\ + f [3(k-1)h + ih] - c_{k,0},$$

где  $A_{0,3} = A_{3,3} = \frac{3}{8}$ ,  $A_{1,3} = A_{2,3} = \frac{9}{8}$ , а выражения для  $\tilde{K}_{ij}(i, j = \overline{1,3})$  зависят от  $c_{k,j}$ .

Легко видеть, что при  $m = 1$  имеем  $A_{0,1} = \frac{1}{2}$ ,  $A_{1,1} = \frac{1}{2}$  т.е. приходим к формуле трапеций, а при  $m = 2$  получаем

$$\begin{aligned} A_{0,1} &= \frac{5}{12}, \quad A_{1,1} = \frac{2}{3}, \quad A_{2,1} = -\frac{1}{2}, \\ A_{0,2} &= \frac{1}{3}, \quad A_{1,2} = \frac{4}{3}, \quad A_{2,2} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Для численного решения системы (21) наиболее подходят итерационные методы, а в качестве начальных приближений для  $k$ -го участка можно принять значения

$$c_{k,0} = P_{k-1}[(k-1)mh], \quad c_{k,i} = c_{k-1,i}, \quad i = \overline{1, m}, \quad k \geq 2$$

(для первого участка можно положить  $P_1(x) \equiv f(a)$ ).

Система (21) всегда может быть приведена к виду, необходимо для применения итерационных методов. В частности, путем составления линейных комбинаций получаем систему (22) в форме, удобной для применения метода простой итерации.



$$\left\{ \begin{array}{l} c_{k,1} = \frac{1}{h} ((9\tilde{K}_{1,0} + 19\tilde{K}_{1,1} - 5\tilde{K}_{1,2} + \tilde{K}_{1,3} - 4\tilde{K}_{2,0} - 16\tilde{K}_{2,1} - \\ - 4\tilde{K}_{2,2} + \tilde{K}_{3,0} + 3\tilde{K}_{3,1} + 3\tilde{K}_{3,2} + \tilde{K}_{3,3}) \cdot \frac{h}{8} + 3F_1 - \frac{3}{2}F_2 + \frac{1}{3}F_3), \\ c_{k,2} = \frac{1}{h^2} ((-45\tilde{K}_{1,0} - 95\tilde{K}_{1,1} + 25\tilde{K}_{1,2} - 5\tilde{K}_{1,3} + 32\tilde{K}_{2,0} + 128\tilde{K}_{2,1} + \\ + 32\tilde{K}_{2,2} - 9\tilde{K}_{3,0} - 27\tilde{K}_{3,1} - 27\tilde{K}_{3,2} - 9\tilde{K}_{3,3}) \cdot \frac{h}{48} - \frac{5}{2}F_1 + 2F_2 - \frac{1}{2}F_3), \\ c_{k,3} = \frac{1}{h^3} ((9\tilde{K}_{1,0} + 19\tilde{K}_{1,1} - 5\tilde{K}_{1,2} + \tilde{K}_{1,3} - 16\tilde{K}_{2,0} - 64\tilde{K}_{2,1} - \\ - 16\tilde{K}_{2,2} + 3\tilde{K}_{3,0} + 9\tilde{K}_{3,1} + 9\tilde{K}_{3,2} + 3\tilde{K}_{3,3}) \cdot \frac{h}{48} + \frac{1}{2}F_1 - \frac{1}{2}F_2 + \frac{1}{6}F_3). \end{array} \right. \quad (22)$$

Чтобы убедиться в эффективности метода коллокации при решении уравнений Вольтерры 1 и 2 рода, рассмотрим следующие тестовые примеры.

**Пример 1.** Задано уравнение Вольтерры 1 рода

$$\int_0^x (x+s)y(s)ds = 2x \sin x + \cos x - 1, \quad y(0) = 1.$$

Следуя рассмотренному методу, найдем приближенное решение на 1-м участке, принимая  $h = \frac{\pi}{60}$ ,  $m = 2$ . Значения узлов, разделяющих участки:

$$x_{0,0} = 0; \quad x_{1,0} = \frac{\pi}{30}; \quad x_{2,0} = \frac{\pi}{15}; \quad \dots$$

Первый участок (как и остальные), разбивается на две части, которые ограничены точками коллокации:

$$x_{0,0} = 0; \quad x_{0,1} = \frac{\pi}{60}; \quad x_{0,2} = x_{1,0} = \frac{\pi}{30}.$$

На 1-м участке искомое решение представляем выражением

$$\begin{aligned} \tilde{y}(x) &\cong P_0(x) = \\ &= P_0(x_{0,0}) + c_{0,1}(x - x_{0,0}) + \frac{1}{2}c_{0,2}(x - x_{0,0})^2, \end{aligned}$$

где  $P_0(x_{0,0}) = y(0)$  и подстановка которого в исходное уравнение при  $x = x_{0,1}$  и  $x = x_{0,2}$  приводит к системе

$$\begin{cases} \int_0^{\frac{\pi}{60}} (\frac{\pi}{60} + s)(1 + c_{0,1}s + \frac{1}{2}c_{0,2}s^2)ds = 2\frac{\pi}{60}\sin\frac{\pi}{60} + \cos\frac{\pi}{60} - 1, \\ \int_0^{\frac{\pi}{30}} (\frac{\pi}{30} + s)(1 + c_{0,1}s + \frac{1}{2}c_{0,2}s^2)ds = 2\frac{\pi}{30}\sin\frac{\pi}{30} + \cos\frac{\pi}{30} - 1. \end{cases}$$

Після вычисления интегралов система принимает вид

$$\begin{cases} 0,000120 \cdot c_{0,1} + 0,000007 \cdot c_{0,2} = -0,0000026, \\ 0,000958 \cdot c_{0,1} + 0,000035 \cdot c_{0,2} = -0,000036, \end{cases}$$

а ее решение  $c_{0,1} = -0,008318$ ;  $c_{0,2} = -0,8008757$ . Тогда

$$P_0(x) = 1 - 0,008318x - 0,8008757 \frac{x^2}{2}.$$

Вычислив значение  $\tilde{y}(\frac{\pi}{30}) = P_0(\frac{\pi}{30}) = 0,990339$ , можно сравнить

его с точным  $y(\frac{\pi}{30}) = 0,994517$  (точное решение  $y(x) = \cos x$ ).

**Пример 2.** Уравнение Вольтерры 2 рода

$$y(x) = 2 + \int_0^x \left[ \frac{y(s)}{s+1} - \frac{s+1}{y(s)} \right] ds$$

(точное решение  $y(x) = (x+1)\sqrt{4-2\ln(x+1)}$ ) решалось на интервале  $[0; 6,375]$  при  $h = 0,025$ ,  $m = 3$ .

Ввиду того, что ядро решаемого уравнения не зависит от  $x$ , система (22) имеет более простой вид. Для этого случая

$$\tilde{K}_{1,0} = \tilde{K}_{2,0} = \tilde{K}_{3,0} = K_0; \quad \tilde{K}_{1,1} = \tilde{K}_{2,1} = \tilde{K}_{3,1} = K_1;$$

$$\tilde{K}_{1,2} = \tilde{K}_{2,2} = \tilde{K}_{3,2} = \tilde{K}_2; \quad \tilde{K}_{1,3} = \tilde{K}_{2,3} = \tilde{K}_{3,3} = K_3.$$

Учитывая выполнение уравнения (13) в точке  $x = 3(k-1)h$ , легко видеть, что  $F_i = 0$ ,  $i = 1, 3$ .

Таким образом, согласно (22) для  $k$ -го участка получаем систему

$$\begin{cases} c_{k,1} = \frac{1}{4}(3K_0 + 3K_1 - 3K_2 + K_3), \\ c_{k,2} = \frac{1}{24h}(-11K_0 + 3K_1 + 15K_2 - 7K_3), \\ c_{k,3} = \frac{1}{12h^2}(K_0 - K_1 - K_2 + K_3), \end{cases}$$

где

$$K_0 = \frac{y_0}{x_0 + 1} - \frac{x_0 + 1}{y_0},$$

$$K_1 = \frac{y_0 + c_{k,1}h + c_{k,2}h^2 + c_{k,3}h^3}{x_0 + h + 1} - \frac{x_0 + h + 1}{y_0 + c_{k,1}h + c_{k,2}h^2 + c_{k,3}h^3},$$

$$K_2 = \frac{y_0 + 2c_{k,1}h + 4c_{k,2}h^2 + 8c_{k,3}h^3}{x_0 + 2h + 1} - \frac{x_0 + 2h + 1}{y_0 + 2c_{k,1}h + 4c_{k,2}h^2 + 8c_{k,3}h^3},$$

$$K_3 = \frac{y_0 + 3c_{k,1}h + 9c_{k,2}h^2 + 27c_{k,3}h^3}{x_0 + 3h + 1} - \frac{x_0 + 3h + 1}{y_0 + 3c_{k,1}h + 9c_{k,2}h^2 + 27c_{k,3}h^3},$$

$$x_0 = 3(k-1)h, \quad y_0 = P_{k-1}(3(k-1)h).$$

Полученная система уравнений решалась методом простых итераций, а в качестве начальных приближений выбирались значения  $c_{k,0} = y_0 = 2$ ,  $c_{k,1} = c_{k,2} = c_{k,3} = 0$  для  $k = 1$  и  $c_{k,i} = c_{k-1,i}$ ,  $i = \overline{1,3}$  для  $k \geq 2$ .

Полученный вид решаемой системы непосредственно использовался в качестве итерационного выражения и обеспечил сходимость процесса. При других формах итерационных выражений процесс последовательных приближений может оказаться расходящимся.

Результаты итерационного процесса для коэффициентов  $c_{1,i}$  и  $c_{2,i}$  приведены в табл. 1 и табл. 2 соответственно. В табл.3 для ряда значений аргумента приведены результаты приближенного решения  $\tilde{y}(x)$ , точного решения  $\bar{y}(x_j)$  и ошибка.

Таблица 1

Значения коэффициента  $c_{1,i}$ 

Номер итерации	$c_{1,1}$	$c_{1,2}$	$c_{1,3}$
0	0	0	0
1	1,4999595	-1,2469478	0,5978266
2	1,5000319	-0,3149309	-0,2673441
3	1,4999887	-0,3116330	0,0476275
4	1,4999968	-0,3122627	0,0625618
5	1,4999972	-0,3122876	0,0629694
6	1,4999972	-0,3122882	0,0629775

Таблица 2

Значения коэффициента  $c_{2,i}$ 

Номер итерации	$c_{2,1}$	$c_{2,2}$	$c_{2,3}$
0	1,4999972	-0,3122882	0,0629775
1	1,4542129	-0,2714302	0,0365664
2	1,4542105	-0,2980747	0,0635452

Продолжение таблицы 2

3	1,4542117	-0,2981652	0,0551428
4	1,4542115	-0,2981493	0,0547663
5	1,4542115	-0,2981487	0,0547567

Таблица 3

Результаты решения тестового примера 2

$x_j$	$\tilde{y}(x_j)$	$\bar{y}(x_j)$	$\Delta y(x_j)$
0	2,000000000	2,000000000	0
0,075	2,110769735	2,110769734	0,000000001
0,15	2,218181613	2,218181612	0,000000001
0,6	2,798853594	2,798853590	0,000000004
1,2	3,424577755	3,424577748	0,000000007
1,8	3,900713732	3,900713722	0,000000011
2,4	4,236308787	4,236308773	0,000000014
3,0	4,431543818	4,431543799	0,000000019
3,6	4,478537424	4,478537399	0,000000024
4,2	4,358961092	4,358961061	0,000000031
4,8	4,036250689	4,036250650	0,000000039
5,4	3,431044869	3,431044831	0,000000038
6,0	2,302347325	2,302347800	-0,000000475

**Пример 3.** Было взято уравнение Вольтерры 2 рода с тем же точным решением, что и в примере 2, но с ядром общего вида.

$$y(x) = x + 2 + \int_0^x \left[ \frac{y(s)}{2(s+1)} - \frac{(x+s+2)}{y(s)} \right] ds,$$

точное решение  $y(x) = (x+1)\sqrt{4-2\ln(x+1)}$ . Уравнение решалось на интервале  $[0; 6,375]$  с шагом  $h = 0,0125$ ,  $m = 3$  (для  $x > \exp(2) - 1 \approx 6.4$  решение не существует).

В табл. 4 приведено решение  $\tilde{y}(x)$ , точное решение  $\bar{y}(x)$  и ошибка для этого уравнения.

Таблица 4

Результаты решения тестового примера 3

$x_j$	$\tilde{y}(x_j)$	$\bar{y}(x_j)$	$\Delta y(x_j)$
0	2,000000000	2,000000000	0
0,6	2,7988535896	2,7988535900	$-4 \cdot 10^{-10}$
1,2	3,4245777471	3,4245777478	$-8 \cdot 10^{-10}$
1,8	3,9007137204	3,9007137217	$-1,3 \cdot 10^{-9}$
2,4	4,2363087713	4,2363087731	$-1,8 \cdot 10^{-3}$
3,0	4,4315437967	4,4315437993	$-2,5 \cdot 10^{-9}$

Продолжение таблицы 4

3,6	4,4785373958	4,4785373992	$-3,4 \cdot 10^{-9}$
4,2	4,3589610561	4,3589610606	$-4,5 \cdot 10^{-9}$
4,8	4,0362506434	4,0362506497	$-6,3 \cdot 10^{-9}$
5,4	3,4310448204	3,4310448306	$-1,01 \cdot 10^{-8}$
6,4	2,302477494	2,3023478001	$-5,07 \cdot 10^{-8}$

Резкое возрастание погрешности вблизи точки  $x = 6,4$  объясняется тем, что в этой точке все производные решения обращаются в  $\infty$  и для  $x > 6.4$  решения уравнения не существуют.

**Выводы.** В работе изложен метод коллокации для интегральных уравнений Вольтерры 1 и 2 рода. Приближенное решение уравнений представляется в форме кусочно-гладкого полинома, что позволяет найти решение в любой точке заданного интервала. Результаты расчетов тестовых примеров 1–3 подтверждают работоспособность алгоритмов, реализующих данный метод. Алгоритм решения уравнений Вольтерры 1 рода прост в реализации. Алгоритм коллокационного метода для уравнений Вольтерры 2 рода предусматривает использование квадратурных формул. Максимальная абсолютная погрешность результата при решении уравнения Вольтерры 2 рода с ядром общего вида составила  $5,07 \cdot 10^{-8}$ . Метод может быть использован при рассмотрении задач восстановления входных воздействий и идентификации динамических объектов и систем.

### Список использованной литературы:

1. Довгий С. А. Методы решения интегральных уравнений. Теория и приложения / С. А. Довгий, И. К. Лифанов. — К. : Наукова думка, 2002. — 342 с.
2. Вержбицкий В. М. Численные методы (математический анализ и обыкновенные дифференциальные уравнения) : учеб. пособие для вузов / В. М. Вержбицкий. — 2-е изд., испр. — М. : ОНИКС 21 век, 2005. — 400 с.
3. Габдулхаев Б. Г. Прямые и проекционные методы решения слабосингулярных интегральных уравнений I-го рода : учебное пособие / Б. Г. Габдулхаев. — Казань : Казанский государственный университет, 2006. — 137 с.
4. Бойков И. В. Приближенные методы решения сингулярных интегральных уравнений : монография / И. В. Бойков. — Пенза : Пензенский государственный университет, 2004. — 297 с.
5. Имомов А. И. Организация приближённого решения интегральных уравнений в MathCAD / А. И. Имомов // Молодой ученый. — 2014. — № 14 (73). — С. 6–15.
6. Карчевский Е. М. Численные методы решения интегральных уравнений и комплекс программ на языке Matlab : учебное пособие / Е. М. Карчевский. — Казань : Казанский федеральный университет, 2017. — 61 с.
7. Манжиров А. В. Справочник по интегральным уравнениям: Методы решения / А. В. Манжиров, А. Д. Полянин. — М. : Факториал Пресс, 2000. — 384 с.
8. Спиридонов А. О. Метод коллокации решения нелинейных спектральных задач для граничных интегральных уравнений Мюллера / А. О. Спиридо-

нов, Е. М. Карчевский, А. И. Носич // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. — 2015. — № 2 (34). — С. 32-45.

Despite the extensive use of the collocation method for solving integral equations with constant integration limits, little attention has been paid so far to the implementation of this method with respect to integral equations with variable limits. In this article tasks of solving Volterra integral equations of 1 and 2 kinds were considered. An approximate solution is defined as a piecewise-smooth polynomial composed of polynomials over sections of the domain of definition of the variable of integration. The algorithm of the method is an iterative process. The problem is reduced to solving systems in the general case of non-linear equations with respect to the coefficients of the corresponding polynomials. At each step of the iteration, an analytic expression for the next polynomial is determined, which allows finding a solution at any point of the given interval. A special feature of the collocation algorithm for Volterra equations of the 2nd kind is the replacement of integrals by quadrature formulas, which are comprised into the system of equations with respect to the approximate values of the coefficients. The choice of the coefficients of quadrature formulas depends on the accepted number of nodes in the section. A special case of a system for three nodes is considered in the article. In doing so, the integrand of the solved equation was replaced by an interpolation polynomial in the Newton form. The results of the solution of the test cases confirm the efficiency of the proposed algorithms and indicate the high accuracy of the calculations. The collocation method allows to obtain solutions of the Volterra equations for the segments of the integration interval, choosing their length and applying on each of them an approximating expression with a small number of coordinate functions. This method can be used in identifying of the dynamic objects and systems, as well as in solving problems of reduction input signals.

**Keywords:** *Volterra integral equations, collocation method, quadrature formulas.*

Отримано: 15.05.2018

UDC 004.94

**V. A. Ivanyuk**, Cand. of Techn. Sciences,  
Kamianets-Podilskyi National Ivan Ohienko University,  
Kamianets-Podilskyi

## **METHOD OF INVERSE OPERATOR FOR THE RECOVER INPUT SIGNAL**

There have been considered the methods of construction of the inverse operator for the restoration of signals in conditions of weak nonlinear dynamic and nonlinear static distortions in the registration devices and transmission of continuous signals are considered. The simplest structure of the implementation block of the inverse operator is based on the adder, whose second inverse communication competitor includes the simulation model of the direct operator. A linear inertia-free unit with a set transmission factor is used as regularizer.

The inverse operator, based on the output signal of an object and its mathematical model, is able to restore the input signal of an object.

Depending on the method of construction of the inverse feedback, there are considered various methods of the inverse operator construction.

It is necessary to specify that the amplitudes of input and output signals should be agreed. Failure to meet this condition leads to the inverse operator accuracy loss. The regularization parameter should differ from the unit, and the accurate functioning of the structure may go beyond the stability limits. Physical dimension of variables differ, but the ranges of their changes in numbers should coincide.

When using a regularizer with a value above than one, the computational process may vary however there is a small amount of stability thanks to digitalization being used as a regularization parameter.

The algorithms for the implementation of the inverse operator may be used while improving the efficiency of the operation of energy-saturated equipment, improving the resolution of surveillance systems, improving the information exchange rate in communication lines, improving the information capacity of the information registration means, etc.

The effectiveness of the offered approaches is studied on model problems implemented in the Matlab/Simulink system. There have been made the computational experiments that demonstrated the efficiency of the method of inverse operators for the signals restoration in the presence of weak nonlinear dynamic and nonlinear static distortions in the registration devices and transmission of continuous signals in real-time mode.

**Key words:** *restoration of signals, nonlinear dynamic distortions, stability.*

**Introduction.** At present the application of computers in various technical devices and control systems has become the habitual phenomenon. The special interest is represented with cases where the computing way of im-

provement of their physical and economical properties has no alternative. Application of analogue or digital filters for correction of dynamic characteristics of the element in system allows to lower the technical requirements to this element. It frequently allows not only to reduce the cost of the whole system, but also to improve its basic technical parameters essentially. It is possible to note as examples the inertial measuring converters or executive elements, communication line with large attenuation etc [1–3].

There is the perfect computer equipment for solving such problems. However, the known computer algorithms do not always provide the effective using of this equipment. This problem is not only the question how to solve a computing problem, but mainly how to formulate it.

The majority of computing problems arising in this case may be divided into two classes: the direct problems and the inverse ones. In technical systems the solution of an inverse problem usually names as recovering of signal  $x = By$ . The initial data are the output signal  $y$  and mathematical model of investigated object  $A$ . The block which solves this problem is named as the block of realisation of the inverse operator  $B = 1 / A$ , and the block, which solves a direct problem of simulation of object  $y = Ax$ , is named as the block of realisation of direct operator  $A$ .

One of the effective methods of solving the signal recovering problem is the inverse operator's method. The essential feature of this method is the explicit using of the direct operator for obtaining the inverse one. As a rule, block  $A$  is an element of one of feedback circuits in the structure of block  $B$  [2, 3].

The concept of direct and inverse operators is especially often used in the theory of ill posed problems solving. The solution of these problems is characterised by instability or high sensitivity to errors of the initial data. These problems are also called as inverse because their sense consists in recovering the input signal of the inertial measuring device from its registered output signal. On the contrary, the direct problem of simulation of such measuring device (or realisation of the direct operator) is correct. This problem is characterised by insensibility to initial data errors, that is the rather rough measurements are allowed.

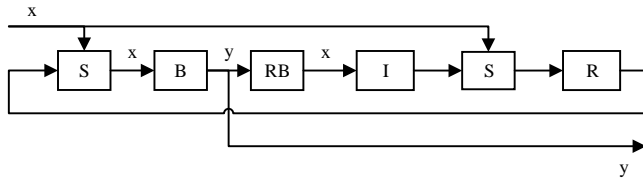
The most important advantage of the inverse operator's method is the technology of construction of stable computing process which realises unstable (complex) inverse operator on the base of explicit application of stable (simple) direct operator. Moreover, the inverse operators method allows to organise two independent loops for adaptation the block  $B$  to the processes of ageing of the object  $A$  model and changing the errors quality [3].

**1. Examples of application in technical systems.** In control systems the problem of maintaining the stability is solved rather good by known classical methods with the selection of regulator parameters at realisation of a principle of a deviation control. However, the necessity of use of the inverse operator arises at realisation of more simple principle of specifying influence control. It is necessary not for increasing the stability of a con-

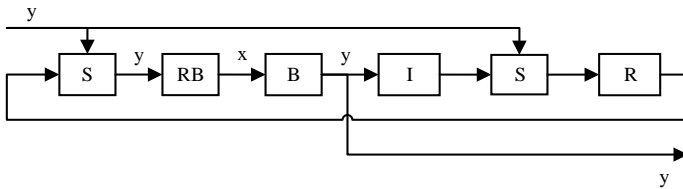


trol system, but contrary for decreasing its roughness. Introduction of the inverse operator allows to solve automatically one more problem which is paid not enough attention in the theory of automatic control. It is a problem of dimensions. And not only in sense of discrepancy in dimensions of physical values on the input and output of controlled object, but also in the sense of discrepancy in number of inputs and outputs of this object.

The usual combined control system from proportional and specifying action can be represented in two variants: Fig. 1 and Fig. 2. Here  $X$  is input, and  $Y$  is output signal of controlled object  $B$ ,  $RB$  is computing model of the inverse operator of this object,  $I$  is inverter,  $S$  is adder,  $R$  is regulator.



*Fig. 1. Control by input*



*Fig. 2. Control by output*

In the case when block  $RB$  is instantaneous element with unit gain ( $RB = 1$ ) the both structures Fig. 1 and Fig. 2 coincide completely.

In case when  $R = 0$  the specifying action control is realised. In case of switching-off of the first adder input, the second input of which is connected to output of regulator, the proportional action control is realised. The structures Fig. 1 and Fig. 2 differ only by a place of connection of block  $RB$ . Block  $RB$  carried out some of standard functions from the block  $R$ , for example, differentiation or integration. A case when  $R = 1$  is quite possible, when block  $RB$  carried out all functions according to robustness and stability balance of control.

The organisation from output is especially convenient at control of multiconnected objects. So, for example, usual carburettor engine has at least two outputs: tachometer (crankshaft rotation speed) and flowmeter (fuel consumption). Inputs are the structure of a combustible mix (ratio petrol/air) and the ignition timing. The classical control circuit consists in control from the first input (at  $RB = 1$ ) with organisation of a feedback of the first output on the second input. However, it is possible to organise the control from the first, or on the second output. In the first case the dynamics of automobile control is improved, and in the second case the fuel consumption decreases.

The algorithms of realisation of the inverse operator are important not only for increasing the efficiency of power-intensive equipment operation. Represent some other examples of their use. These are: increasing the resolution of observation systems; increasing the speed of information interchange in communication lines (compression of spectrum at digital transmitting of continuous signals, multitone coding); increasing the capacity of telephone exchange by reduction of signal recognition time in tone dialling; increasing the information capacity of information recording devices (magnetic and thermoplastic record); for images recognition in technical diagnostics by transients; for synthesis of band-pass filters [3].

The separate attention can be paid to full-scale 'semivirtual reality'-type simulators, where simplified (base) object plus computer plays the role of complex object. On Fig. 3 the block diagram of such simulator is presented, where  $U$  are control signals, which the person generates acting on controls, block  $RB$  realises the inverse operator the base object mathematical model  $B$ ,  $M$  is computing model of simulated object,  $Z$  are output signals of object or model.

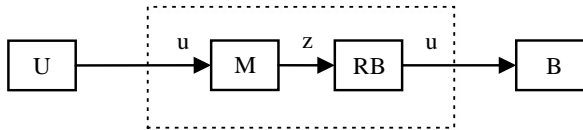
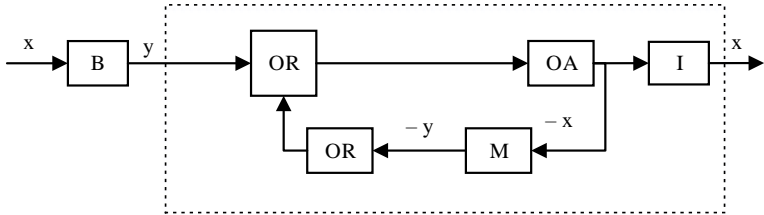


Fig. 3. Simulation model

The inverse operator's method also useful in construction of numerical algorithms for solving the various applied problems.

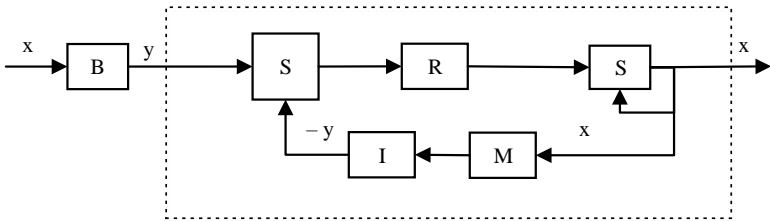
**2. Simple numerical experiment.** As simple example we can consider the calculation of square root as inverse operation to square. This numerical experiment demonstrates an opportunity of application of the inverse operator's method not only to solving the problems for linear dynamic systems or systems with weak nonlinearity usual in applications mentioned above, but also for essentially nonlinear problems. Certainly, the known classical algorithms for of a square root calculation are better in many senses, except one: they cannot be applied to calculation of other inverse functions. There is one more parameter, on which there may be superiority in comparison with traditional algorithms. It is balance of accuracy and speed.

The analogue prototype of our digital filter is the known circuit with connection of the direct operator in a feedback of operational amplifier Fig. 4, where  $B$  is the object, described by direct operator,  $M$  is mathematical (electronic) model of this object,  $OA$  is operational amplifier,  $OR$  are operational resistors,  $I$  is inverter. The dotted line leads round blocks, which form block  $RB$  which carries out the inverse function relative to object. In other words, according to the object signal and its mathematical model this block restores the input signal of object. But this structural diagram cannot be converted into discreet form explicitly. That is why the similar analogue structures received the name 'nonalgorithmic' [2, 3].



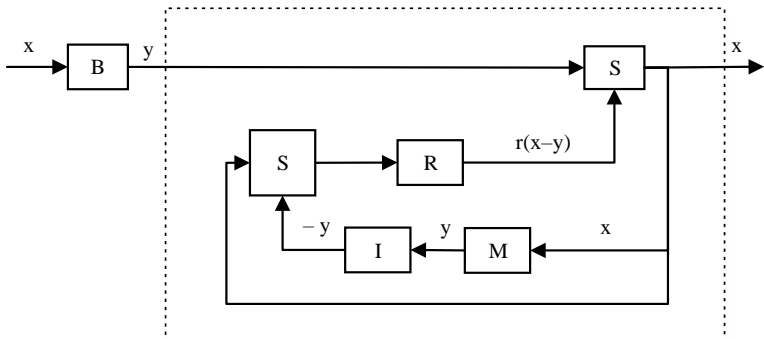
**Fig. 4.** Structural diagram of the inverse operator

On Fig. 5 the other variant of this computing structure transformed to algorithmic form is represented. Here  $S$  is adder,  $I$  is inverter,  $R$  is regularizator (linear instantaneous element with gain  $r$ ). In fact, the second adder is accumulator (there is the feedback on its second input). This circuit is realized in digital computing elements, but already it cannot be realized in analogue ones.



**Fig. 5.** Structural diagram of the inverse operator (short loop)

In other cases, e.g. for dynamic objects (differential or integral equations) the block  $RB$  has another structure (Fig. 6) and allows both types of realization (analogue and digital or nonalgorithmic and algorithmic). Here the regularizator not only limits the magnitude of residual between the output signals of object and its model, but also limits the amplification in a loop of positive feedback by restored signal. The modification of these structures with several regularizators also represent the practical interest.



**Fig. 6.** Structural scheme of the inverse operator (long loop)

The structural diagrams Figs. 5 and 6 can be easily converted into corresponding recurrent formula

$$x(i) = x(i-1) + r(y(i) - M(x(i-1))), \tag{1}$$

$$x(i) = y(i) + r(x(i) - M(x(i-1))), \tag{2}$$

where  $y$  is output signal and  $x$  is input signal of computing process,  $M$  realizes the mathematical model of direct operator, and  $r$  is regularizing parameter. In the case of square root calculation  $M(x) = x^2$ , and we have two additions and two multiplications at the iteration step. Because of the double recursion by calculated output signal the term birecursive digital filter can be used to characterize such algorithms realized the inverse operator's method in application to signal recovering problems. In mathematical literature (1) corresponds to Friedman iterative regularization, and (2) corresponds to Lavrentyev algorithm respectively.

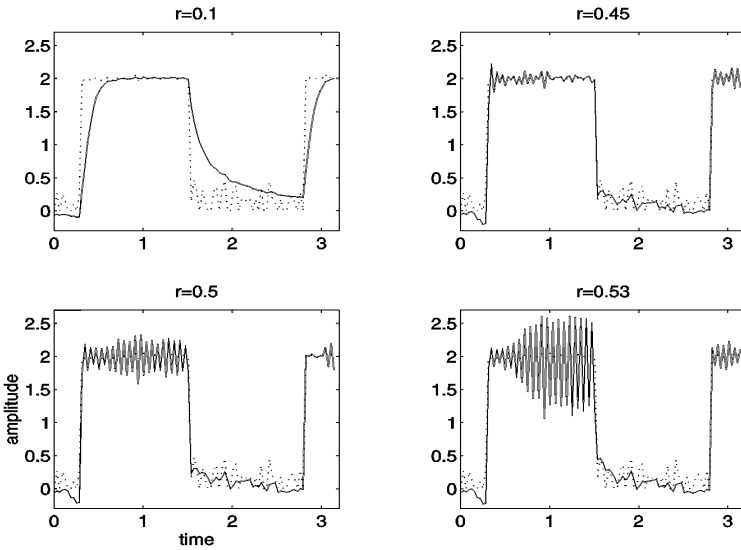
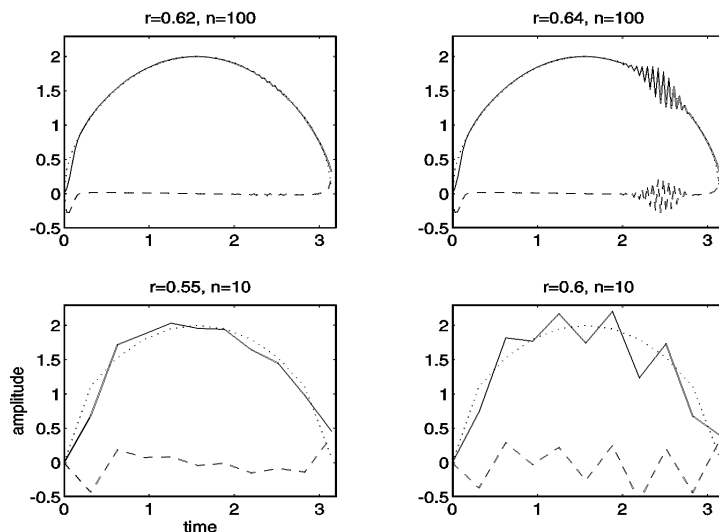


Fig. 7. The initial signal sinusoidal type

The graphs on Figs. 7 and 8 represent the results of restoring the squared signal with one iteration at every time step. The initial time interval was divided into 100 discrettes. On Fig. 7 the initial signal  $x(t)$  was rectangular meander with addition of normal white noise having the amplitude 0.1 of initial signal. Fig. 8 corresponds to the unnoised sinusoide. In both cases magnitude of initial signal was 4. Dotted lines correspond to standard function  $\sqrt{x}$ .



**Fig. 8.** The initial signal rectangular meander with addition normal white noise

From graphs Figs. 7 and 8 we can see that parameter  $r$  has the influence on the stability of computing process. At variations of magnitude and type of signal or characteristics of noise it is possible to choose such  $r$ , which provides the best balance of stability and accuracy of computing process. The instability is especially appearing in places of fast amplitude variations or sign of initial signal derivative. At change of digitalisation step the balance of accuracy and stability of calculations on BRDF algorithm will change, the traditional algorithm has not such property. With increasing the quantity of digitisation units, the accuracy, naturally, grows, and for providing the stability it is necessary to change the regularizing parameter  $r$ .

**Conclusion.** Algorithm can be applied to solving the systems of linear and nonlinear equations, including differential and integral ones. The most positive moment is an achievement of high speed, which is very important for real time signal processing.

### References:

1. Mathematical Methods for Signal and Image Analysis and Representation / eds. L. Florack, R. Duits, G. Jongbloed, M. C. van Lieshout, L. Davies. — New York : Springer London Dordrecht Heidelberg, 2012. — 316 p.
2. Ivanyuk V. A. The method of inverse operators for the restoration of signals at the input of linear dynamic systems, given by transfer functions / V. A. Ivanyuk, V. V. Ponedilok, O. A. Diachuk // Mathematical and computer simulation. Series: Engineering sciences: collection of research papers / V. M. Hlushkov Institute of Cybernetics of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kamianets-

- Podilskyi National Ivan Ohiienko University / [editorship: Yu. H. Kryvonos (ed.), et.al.] — Kamianets-Podilskyi : Kamianets-Podilskyi National Ivan Ohiienko University, 2017. — Vol. 15. — P. 62–67. (Ukr.)
3. Verlan A. F. Methods and devices of experimental dependencies interpretation at research and control of power processes / A. F. Verlan, B. B. Abdusatarov, A. A. Ignatchenko, N. A. Maksimovich. — Kiev : Naukova dumka, 1993. — 208 p. (Rus.).

## МЕТОД ОБЕРНЕНОГО ОПЕРАТОРА ДЛЯ ВІДНОВЛЕННЯ ВХІДНОГО СИГНАЛУ

Розглянуто методи побудови оберненого оператора для відновлення сигналів при умовах слабких нелінійних динамічних і нелінійних статичних спотворень у пристроях реєстрації та передачі неперервних сигналів. Найпростіша структура блока реалізації оберненого оператора будується на основі накопичуваного суматора, у другий контур оберненого зв'язку якого включена імітаційна модель прямого оператора. В якості регуляризатора використано лінійний безінерційний блок із визначеним коефіцієнтом передачі.

Обернений оператор по вихідному сигналу об'єкта і його математичної моделі відновлює вхідний сигнал об'єкта.

В залежності від підходу до побудови оберненого зв'язку розглядаються різні методи побудови оберненого оператора.

Важливо відмітити, що амплітуди вхідного і вихідного сигналів повинні бути узгоджені. Якщо ця умова не виконується точність оберненого оператора знизиться. Параметр регуляризації необхідно буде вибирати відмінним від одиниці, а точне функціонування структури може бути за межами стійкості. Фізичні розмірності величин можуть бути різними, але діапазони їх змін в числах повинні співпадати.

При використанні регуляризатора, значення якого більше одиниці, обчислювальний процес може розходитись, хоча залишається невеликий запас стійкості за рахунок кроку дискретизації, який використовується як регуляризуючий параметр.

Алгоритми реалізації оберненого оператора можуть бути використані при підвищенні ефективності експлуатації енергонасиченого обладнання, підвищення роздільної здатності систем спостереження, підвищення швидкості обміну інформації в лініях зв'язку, підвищення інформаційної смістості засобів реєстрації інформації тощо.

Ефективність запропонованих підходів досліджено на модельних задачах, які реалізовано в системі Matlab/Simulink. Проведені обчислювальні експерименти показали ефективність методу обернених операторів для відновлення сигналів при наявності слабких нелінійних динамічних і нелінійних статичних спотворень у пристроях реєстрації та передачі неперервних сигналів в умовах реального часу.

**Ключові слова:** відновлення сигналів, нелінійні динамічні спотворення, стійкість.

Отримано: 28.05.2018

УДК 621.501.72

**П. І. Ковальчук\***, д-р. техн. наук,

**В. І. Рожко\***,

**Г. А. Балихіна\***, канд. техн. наук,

**О. С. Демчук\*\***, канд. техн. наук

\* Інститут водних проблем і меліорації НААН України, м. Київ,

\*\* Національний університет водного господарства

та природокористування, м. Рівне

## **МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ СЦЕНАРІЇВ ВОДООБМІНУ В СИСТЕМІ КАНАЛУ ДНІПРО-ДОНБАС**

Запропоновано математичне моделювання сценаріїв проведення водообміну в системі каналу Дніпро-Донбас. Канал наповнюється дніпровською водою з Кам'янського водосховища з метою покращення стану Краснопавлівського водосховища, з якого вода подається для питних потреб м. Харків. Ставиться задача вибору найбільш економічно ефективного варіанту водообміну при забезпеченні доброго екологічного стану водних ресурсів в Орільському та Краснопавлівському водосховищах. Для вибору структури системи управління водообміном пропонується метод сценарного аналізу. Розглянуто підхід, в результаті реалізації якого критерій економії водних ресурсів необхідно спрямувати до максимального значення. Критерій якості води розглядається як обмеження згідно чинних нормативів.

Для екосистемного оцінювання якості води вздовж каналу використовуються нейронні мережі. Системний просторово-часовий аналіз якості води за ансамблем нейронів перцептронного типу дозволяє співставляти зміни якості води в каналі за окремими показниками та групами показників. Це дає можливість виявити найбільш перспективні варіанти прийняття рішень. Пропонуються балансові моделі водообміну, що базуються на рівняннях динаміки та збереження мас забруднюючих речовин. Спочатку розраховуються потоки води, а потім концентрації забруднюючих речовин в результаті змішування. Математичне моделювання надає можливість відслідковувати щодобові зміни гідрологічних та гідрохімічних показників у водосховищах при різних варіантах проведення водообміну, процеси транспортування та перемішування водних мас різної якості в Орільському та Краснопавлівському водосховищах. Варіанти сценаріїв визначають добу настання запланованого результату якості води та тривалість водообміну. За результатами сценарного аналізу найбільш економічно доцільним і при цьому екологічно безпечним є варіант виключення спрацювання та наповнення Орільського водосховища. У цьому варіанті тривалість проведення водообміну зменшується до

45 днів, не здійснюються безповоротні скиди води та лише на 5.6 % підвищується жорсткість у Краснопавлівському водосховищі протягом перших 12 діб.

**Ключові слова:** *нейронні мережі, моделювання водообміну, перцептронна модель, імітаційні сценарії, екосистемний підхід, категорія та клас якості вод.*

**Вступ.** Математичне моделювання дозволяє прогнозувати кількісні та якісні показники зміни стану водного середовища з метою розроблення рекомендацій щодо здійснення заходів покращення водообміну на основі аналізу варіантів сценаріїв [1], зокрема і в системі каналу Дніпро-Донбас.

Канал Дніпро-Донбас наповнюється дніпровською водою з Кам'янського водосховища з метою безперебійної подачі води на м. Харків та покращення екологічного стану Краснопавлівського водосховища у Харківській області. Однак у зв'язку з відсутністю фінансування на виконання цих заходів, водообмін проводиться раз на 2–3 роки. За період відсутності проведення чергового водообміну у Краснопавлівському водосховищі відмічається близька до кризової ситуація: наповнення водосховища наближається до рівня його робочого спрацювання, жорсткість води перевищує нормативи для питних потреб [2, 3].

На основі імітаційного моделювання сценаріїв водообміну потребує дослідження як економічна ефективність варіантів, так і забезпечення доброго екологічного стану водних ресурсів в Орільському та Краснопавлівському водосховищах [4].

Ставиться задача вибору найбільш ефективного варіанту водообміну і наповнення Краснопавлівського водосховища із забезпеченням належної якості води згідно методик [2, 3, 5]. Для оптимізації еколого-економічних оцінок ефективності необхідно провести математичне моделювання різних сценаріїв згідно затвердженого варіанту водообміну [6] та інших перспективних варіантів управління подачею води.

**Метод моделювання сценаріїв. Інтегрований підхід за екологічними та економічними цілями.** При виборі сценаріїв водообміну інтегрований підхід за екологічними та економічними цілями є одним із напрямів реалізації системної узгодженості управління. В умовах сталого розвитку системна узгодженість управління полягає в тому, що функціонування системи передбачає багатокритеріальну оптимізацію економічних цілей, які визначаються як сумарні прирости на інтервалі  $T$ :

$$\left\{ \int_0^T F_1(X(t+1), U(t)) dt, \dots, \int_0^T F_n(X(t+1), U(t)) dt \right\} \rightarrow \max, \quad (1)$$

де  $F_1, \dots, F_n$  — економічні критерії оцінювання кількості та якості водокористування;  $X(t)$  та  $U(t)$  — відповідно стани системи та управління в момент  $t$ .



При цьому безумовно враховують екологічні цілі, задані як обмеження або як критерії досягнення доброго екологічного стану системи:

$$\begin{cases} F_{n+1}(X(t+1), U(t)) \leq C_{n+1}(t); \\ \dots \\ F_p(X(t+1), U(t)) \leq C_p(t); \end{cases} \quad (2)$$

де  $F_{n+1}, \dots, F_p$  — екологічні критерії,  $C_{n+1}(t), \dots, C_p(t)$  — обмеження в моменти  $t \in [0; T]$  для досягнення доброго або відмінного екологічного стану.

Для еколого-економічного обґрунтування варіантів управління водообміном розробляються різні сценарії динаміки руху водного потоку та поширення забруднень. Сценарії оцінюються за критеріями (1, 2), оптимальне рішення стосовно системи управління визначається на основі багатокритеріальної оптимізації, зокрема з використанням принципу Парето.

При виборі структури управління водообміном в системі каналу Дніпро-Донбас пропонується підхід, в результаті реалізації якого економічний критерій (економія водних ресурсів) необхідно спрямувати до максимального значення:

$$F^* - F_1(x, t) \rightarrow \max, \quad (3)$$

де  $F^*$  — максимальні (планові) витрати водних ресурсів;  $F_1(x, t)$  — поточні витрати водних ресурсів за варіантами.

При цьому, показники якості води Краснопавлівського водосховища залишаються в межах допустимих (нормативних) значень (в межах концентрацій  $\leq$  ГДК):

$$\begin{cases} F_2(X, t) \leq C_1(t); \\ \dots \\ F_p(X, t) \leq C_p(t), \end{cases} \quad (4)$$

де  $F_2(x, t), \dots, F_p(x, t)$  — екологічні критерії,  $C_1(t), \dots, C_p(t)$  — обмеження показників якості води згідно чинних нормативів.

**Нейронні мережі як метод моделювання якості води в процесі водообміну.** Для екологічної оцінки ефективності проведення водообміну пропонується екосистемний підхід, що базується на використанні нейронної мережі [7]. Для адекватної розробки нейронної мережі та візуалізації екологічної оцінки на вибраному об'єкті необхідно розробити карту-схему каналу Дніпро-Донбас з нанесенням пунктів відбору проб (рис. 1).



Рис. 1. Карта-схема каналу Дніпро-Донбас

Сукупність нейронів, що взаємодіють на рівні певної системи при прийнятті рішень будемо називати нейронною мережею або ансамблем нейронів. Формальний нейрон являє собою елементарний перцептрон, тобто систему прийняття рішення в окремій точці, що складається з кількох шарів, які утворені відповідно елементами трьох типів: сенсорних елементів, тобто рецепторів ( $S$ -елементів), що фіксують концентрації гідрохімічних показників в заданій точці; асоціативних елементів ( $A$ -елементів), які здійснюють пороговий відбір;  $R$ -елементів прийняття рішень, що реалізують інтегровані оцінки якості води (числові, графічні, логіко-лінгвістичні) за рівнями ієрархії (рис. 2).

Досить адекватною для реалізації екосистемного підходу в системі каналу, на нашу думку, є методика екологічної оцінки [5], за якою рішення приймаються в кожному пункті вимірювань. Точки спостережень складають елементи системи і являються формальними нейронами (індикаторами), прийняття рішень в яких здійснюється на основі перцептронної моделі [7]. Використання моделі нейронної мережі полягає в розрахунку якості води в системі каналу до водообміну та після його проведення.

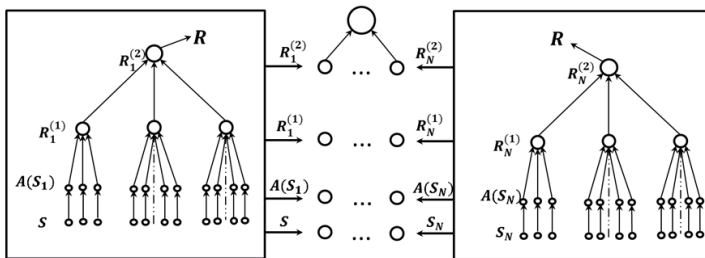


Рис. 2. Схема басейнових екологічних оцінок якості води за ансамблем нейронів перцептронного типу

Особливістю системної моделі є можливість повної екологічної оцінки, що враховує проміжні оцінки вихідних значень нейронної мережі на всіх рівнях ієрархії. Такий системний просторово-часовий

аналіз якості води за ансамблем нейронів перцептронного типу дає можливість виявити найбільш перспективні напрямки прийняття рішень для покращення якості води у водних об'єктах.

**Математичні моделі водообміну.** Пропонуються балансові моделі, що базуються на рівнянні динаміки та збереження мас забруднюючих речовин, побудовані таким чином, що спочатку розраховуються потоки води, а потім концентрації забруднюючих речовин в результаті змішування [8]. Водообмін у каналі відбувається таким чином, що частина забрудненої води витісняється потоком води з Кам'янського водосховища.

$$W_i^{n+1} = W_i^n + q_i^n - p_i^n, n = 1, \dots, N, \quad (5)$$

де  $W_i^{n+1}$ ,  $W_i^n$  — об'єм водних ресурсів у водосховищі в  $(n + 1)$ -й і  $n$ -й моменти часу в  $i$ -й комірці;  $q_i^n$  — водні ресурси, що надходять з каналу у водосховище;  $p_i^n$  — водні ресурси, що відбираються з водосховища, в результаті скиду в р. Орілька або забору в систему каналу для подачі в Краснопавлівське водосховище;  $i$  — номер комірки.

Концентрація речовини в  $n$ -й момент часу в  $i$ -й комірці в результаті змішування знаходиться за формулою:

$$U_i^{n+1} = \frac{W_i^n U_i^n + q_i^n C_i^n - p_i^n S_i^n}{W_i^{n+1}}, \quad (6)$$

де  $W_i^n U_i^n$  — водні ресурси  $W_i^n$  з концентрацією  $U_i^n$ , що знаходяться в  $i$ -й комірці в  $n$ -й момент часу;  $q_i^n C_i^n$  — водні ресурси  $q_i^n$ , що надходять з каналу в Орільське водосховище з певною концентрацією  $C_i^n$  в  $i$ -й комірці в  $n$ -й момент часу;  $p_i^n S_i^n$  — водні ресурси  $p_i^n$ , що відбираються з водосховища, з концентрацією  $S_i^n$  в  $i$ -й комірці в  $n$ -й момент часу.

**Аналіз якості води при проведенні водообміну.** Згідно методики [5] проводилась екологічна оцінка якості вод у системі каналу Дніпро-Донбас до водообміну та після його проведення. Результати аналізу якості вод до проведення водообміну показують, що води каналу відносяться до 2–4 категорій 2–3 класів. В системі каналу якість вод змінювалася від «дуже добрих», «чистих» з тенденцією наближення до категорії «добрих», «досить чистих» (с. Шульгівка) до «задовільних», «слабко забруднених» вод з тенденцією наближення до «посередніх», «помірно забруднених» (Орільське та Краснопавлівське водосховища) (рис. 3).

Після проведення водообміну у каналі відмічається покращення якості води від дуже добрих, «чистих» вод (с. Шульгівка) до перехідних за якістю від «дуже добрих», «чистих» до «добрих», «досить чистих» вод (с. Орілька) 2–3 категорій 2 класу якості та «задовільних», «слабко забруднених» вод з ухилом до «добрих», «досить чистих» вод 4 категорії 3 класу якості (рис. 3).

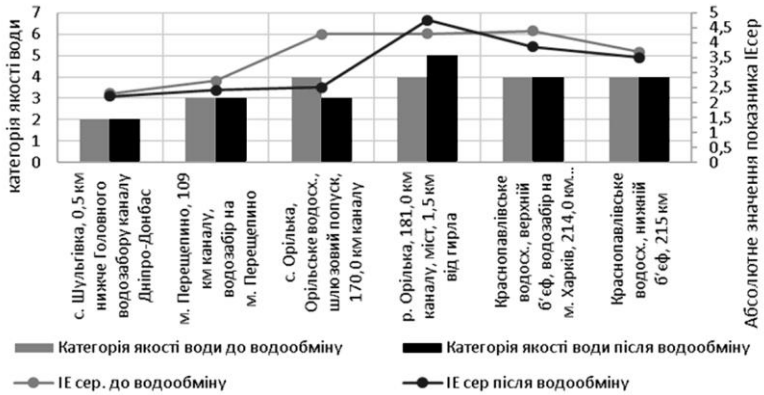


Рис. 3. Категорії якості води та абсолютні значення показника  $I_{сер}$  до водообміну та після його проведення

Якість води за показником жорсткості до водообміну коливалася від 3 мг-екв/куб.дм (с. Шульгівка) до 18,4 мг-екв/куб.дм (Орільське водосховище), зокрема в Краснопавлівському водосховищі становила 8,0–8,1, при ГДК для питного водоспоживання 7,0 мг-екв/куб.дм. Після проведення водообміну якість води суттєво покращилась від 3,3 до 7,5 мг-екв./куб.дм, що не перевищує норми ГДК для питних потреб (рис. 4).

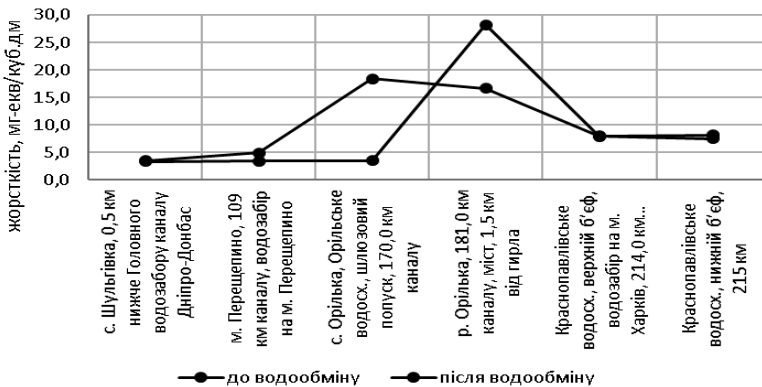


Рис. 4. Величина жорсткості води до водообміну та після його проведення

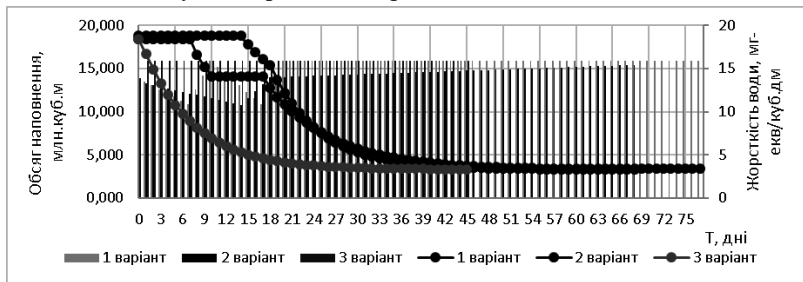
**Сценарний аналіз варіантів водообміну.** Імітаційна модель складається з двох взаємопов'язаних блоків — Орільського та Краснопавлівського водосховищ.

Розглянуто *перший варіант сценарію проведення водообміну відповідно до регламенту* [6]. Водообмін в Орільському водосховищі триває 20–21 добу і включає п'ять етапів: двократне спрацювання і наповнення водосховища та власне водообмін з подальшим перека-

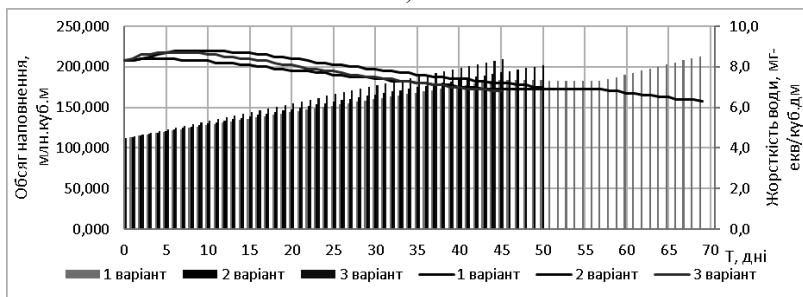
чуванням води до Краснопавлівського водосховища. Математична модель водообміну у Краснопавлівському водосховищі включає два етапи наповнення з паралельним водозабором на м. Харків і етап лише спрацювання на питні потреби м. Харкова.

**Другий варіант сценарію відповідає фактично проведеному водообміну**, який включає разове спрацювання і наповнення Орільського водосховища, в результаті якого жорсткість води знижується з 18,8 до 15,4 мг-екв./куб.дм, та власне етап водообміну з одночасним наповненням водосховища з каналу Дніпро-Донбас та подачею води до Краснопавлівського водосховища протягом 50 днів.

**Імітаційна модель водообміну за третім варіантом виключає етап безповоротного скиду вод високої жорсткості з Орільського водосховища у р. Орілька**, адже це економічно недоцільні витрати. Сценарій даної моделі включає етап наповнення водосховища та власне етап водообміну, який триває до моменту зниження жорсткості води у Краснопавлівському водосховищі до 7,0 мг-екв./куб.дм, згідно моделі — 45 діб. Жорсткість води у Краснопавлівському водосховищі знижується з 8,3 до 7,0 мг-екв./куб.дм з нетривалим підвищенням до 8,8 мг-екв./куб.дм протягом перших 12 діб.



а)



б)

**Рис. 5.** Взаємозв'язок між жорсткістю води та обсягом наповнення водосховищ за варіантами сценаріїв імітаційних моделей: а) для Орільського водосховища; б) для Краснопавлівського водосховища

**Висновки.** Математичне моделювання надає можливість відслідковувати щодобові зміни гідрологічних та гідрохімічних показників у водосховищах при проведенні водообміну, процеси транспортування та перемішування водних мас різної якості у Орільському та Краснопавлівському водосховищах. Варіанти сценаріїв визначають добу настання запланованого результату якості води та тривалість водообміну.

За результатами першого сценарію покращення якості води по жорсткості у Краснопавлівському водосховищі до позначки 6,2 мг-екв/куб.дм досягається на 56 день проведення водообміну (загальний термін становить 77 днів). За другим сценарієм водообміну жорсткість води у Краснопавлівському водосховищі понизилась до позначки 7,0 мг-екв/куб. дм на 50 добу. Відповідно до третього сценарію, що виключає попередній водообмін у Орільському водосховищі, показник жорсткості знижується до позначки 7,0 мг-екв/куб. дм на 45 добу.

Результати математичного моделювання показують, що в усіх трьох варіантах сценаріїв до Краснопавлівського водосховища буде подаватися вода підвищеної жорсткості у перші дні наповнення, проте час наповнення водосховища залежить від інтенсивності водообміну у Орільському водосховищі. Найбільш тривалим (77 днів) та економічно затратним є варіант проведення водообміну згідно затвердженого регламенту, адже він включає двократне спрацювання Орільського водосховища та безповоротні скиди води загальним об'ємом 10 млн. куб. м. Але при даному сценарії досягається найкраще значення показника жорсткості — 6,2 мг-екв/куб. дм.

Найбільш економічно доцільним і при цьому екологічно безпечним є варіант виключення спрацювання та наповнення Орільського водосховища. У даному варіанті тривалість проведення водообміну зменшується до 45 днів, не здійснюються безповоротні скиди води та лише на 5,6% підвищується жорсткість у Краснопавлівському водосховищі протягом перших 12 діб.

### Список використаних джерел:

1. Kovalchuk P. Modelling of water use and river basin environmental rehabilitation / P. Kovalchuk, H. Balykhina, O. Demchuk, V. Kovalchuk // Комп'ютерні науки та інформаційні технології CSIT 2017 : матеріали XII Міжнародної науково-технічної конференції CSIT 2017. — Львів : Видавництво «Вежа і Ко», 2017. — Т. 1. — С. 468–472.
2. Державні санітарні норми та правила охорони поверхневих вод від забруднення (ДСанПіН 4630-88).
3. ДСТУ 4808:2007 Джерела централізованого питного водопостачання. Гігієнічні та екологічні вимоги щодо якості води і правила вибирання. — К. : Держспоживстандарт України, 2007.
4. Directive 2000/60/EC of the European Parliament and of the Council of 23 October 2000 establishing a framework for Community action in the field of water policy // Official Journal of the European Communities. 22.12.2000, ENL327/1.

5. Методика екологічної оцінки якості поверхневих вод за відповідними категоріями / В. Д. Романенко, В. М. Жукинський, О. П. Оксіюк [та ін.]. — К. : Символ-Г, 1988. — 28 с.
6. Регламент проведення водообміну у Краснопавлівському водосховищі у період жовтень-грудень 2016 року, затверджений Державним агентством водних ресурсів України від 29 серпня 2016 р.
7. Kovalchuk P. I. Perceptron model of system environmental assessment of water quality in river basins / P. I. Kovalchuk, A. V. Gerus, V. P. Kovalchuk // 4-th international conference on inductive modeling. Proceedings. — К., 2013. — P. 279–284.
8. Ковальчук П. І. Сценарне моделювання промивки річки Інгулець при подачі води на зрошення / П. І. Ковальчук, О. С. Демчук, Р. Ю. Коваленко, Г. А. Балихіна // Індуктивне моделювання складних систем : збірник наукових праць. — 2016. — № 8. — С. 117–127.

## **THE MATHEMATICAL MODELING OF WATER EXCHANGE SCENARIOS IN THE DNIPRO-DONBASS CHANNEL SYSTEM**

The mathematical modeling of water-exchange scenarios in the Dnipro-Donbass channel system is proposed. The channel is filled with Dnipro water from the Kamensky reservoir in order to improve the conditions of the Krasnopavliv reservoir, from which the water is supplied for Kharkiv city drinking needs. The task of choosing the most cost-effective variant of water exchange is determined, while providing a good ecological state of water resources in the Orilsk and Krasnopavliv reservoirs. The method of scenario analysis is proposed for selecting the structure of the water management system. An approach is considered, as a result of which the criterion of water resources saving should be directed to the maximum value. The water quality criterion is considered as a limitation according to the current standards.

Neural networks are used for ecosystem assessment of water quality in the channel system. System spatial-temporal analysis of water quality by ensemble of neurons of the perceptron type allows to compare the changes of water quality in the channel by separate indicators and groups of indicators. It gives the opportunity to find the most promising options for decision making. The balance models of water exchange, based on the equations of dynamics and preservation of the masses of pollutants, are proposed. Initially, the water flows are calculated, and then the concentration of pollutants as a result of mixing. The mathematical modeling provides the opportunity to monitor daily changes in hydrological and hydrochemical parameters in reservoirs at different variants of water exchange, processes of transportation and mixing of water mass of different quality in the Orilsky and Krasnopavliv reservoirs. The scenario options are defined the day onset of the planned result of water quality and duration of water exchange. According to the results of the scenario analysis, the most economically feasible and at the same time environmentally safe is the option to exclude the drain and filling of the Orilsky reservoir. In this embodiment, the duration of water exchange is reduced to 45 days, no irreversible

discharges of water are carried out and only a 5.6% increase in rigidity in the Krasnopavliv reservoir during the first 12 days.

**Key words:** *neural networks, water exchange modeling, perceptron model, simulation scenarios, ecosystem approach, category and water quality class.*

Отримано: 28.05.2018

УДК 537.7

**О. Д. Кожушко**, молодший науковий співробітник,  
**П. М. Мартинюк**, д-р техн. наук, професор

Національний університет водного господарства  
та природокористування, м. Рівне

## **ДОСЛІДЖЕННЯ ВПЛИВУ РОЗЛИВУ ЗАБРУДНЮЮЧОЇ РЕЧОВИНИ НА ВОЛОГОПЕРЕНОСЕННЯ В ҐРУНТІ ЗАСОБАМИ КОМП'ЮТЕРНОГО ТА МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ**

Комп'ютерне та математичне моделювання процесів вологоперенесення в ґрунтах займає чільне місце при проектуванні гідроспоруд, дослідженні стійкості зсувонебезпечних ґрунтових масивів, прогнозуванні врожайності тощо. Ці задачі є складовими забезпечення економічної безпеки держави.

Для формулювання задачі вологоперенесення в даній роботі використовувалася модель, що враховує взаємопов'язані процеси перенесення вологи, тепла та хімічних речовин. Розглянуто різні змінні параметри середовища та згаданих процесів, а також описано деякі залежності для їх знаходження. Дослідження даної моделі здійснено на прикладі двовимірної задачі для випадку розливу забруднюючої речовини на поверхні ґрунту. Особливістю такої задачі є забруднення ґрунту внаслідок адсорбції твердими частками ґрунту хімічної речовини. У цьому випадку, на нашу думку, особливо важливим стає врахування зміни пористості ґрунту, що відбувається внаслідок збільшення об'єму твердих часток. Також відіграють свою роль зміна густини порової рідини, що зростає при розчиненні у ній забруднюючих солей, та явище хімічного осмосу, що впливає на рух рідини.

Поставлена задача вологоперенесення в ґрунті з врахуванням змінної пористості була розв'язана чисельно методом скінченних елементів. Програмна реалізація відповідних алгоритмів здійснена в середовищі FreeFem++. Здійснено чисельні експерименти, в яких порівняно розв'язки класичної задачі вологоперенесення та поставленої задачі із врахуванням тепломасопере-



несення. У другому випадку в розподіл вологи у ґрунті спостерігалися значно більші перепади вологості. Це більш точно відображає умови розглянутої задачі та пояснюється впливом описаних вище змінних параметрів процесу. Результати чисельних експериментів свідчать про важливість врахування масоперенесення та пов'язаних із ним факторів для подібних задач.

**Ключові слова:** *математична модель, пористе середовище, вологоперенесення, масоперенесення, метод скінченних елементів.*

**Вступ.** Складність моделювання процесів вологоперенесення полягає у тому, що на їх перебіг впливає велика кількість інших факторів та процесів. Серед них — перенесення та дифузія розчинених речовин, масообмін між фазами ґрунту, теплоперенесення та сонячна активність, динаміка опадів, розвиток рослинності та відбір вологи їх кореневою системою, фільтраційне руйнування поверхневими та підземними водами тощо [14]. При цьому відбувається зміна вологості та параметрів пористого середовища, які, в свою чергу, здійснюють вплив на перелічені процеси. Наприклад, пористість ґрунту значною мірою залежить від ступеня його засоленості та динаміки масообмінних процесів; на коефіцієнт фільтрації чинять вплив тепловий стан порової рідини, її хімічний склад та рівень вологи у ґрунті [11]. Такі залежності є складними, і часто навіть неоднозначними, наприклад, явище гістерезису [17].

Математичне моделювання взаємозв'язаних процесів в гетерогенних пористих середовищах на даний час інтенсивно розвивається. Наприклад, математичні моделі для дослідження вказаних процесів в контексті прогнозування врожайності побудовані в [17]. У роботах [12, 16] запропоновано моделі, що описують переміщення вологи, водяної пари та повітря у ґрунті при неізотермічних умовах. У [2], [3] показано вплив температури та солеперенесення на перебіг процесу фільтраційної консолідації. Процеси тепло- та вологоперенесення у ґрунті під час пожеж розглянуто у [13]. Також вивчається вплив вказаних процесів на параметри ґрунту, наприклад у [7] досліджено вплив теплосолеперенесення на зміну коефіцієнта фільтрації. У роботі [6] проаналізовано залежності параметрів компонент ґрунту (коефіцієнта вологоперенесення, коефіцієнта дифузії ґрунтової вологи, пористості тощо) від впливу врахованих факторів. Вплив ще одного змінного параметру, густини порової рідини, розглянутий у роботі [5]. Крім того, вивчаються процеси вологоперенесення в інших середовищах. Зокрема, застосування існуючих моделей вологоперенесення до процесів сушіння зерна було здійснено у [4].

В роботі [6] побудовано математичну модель вологоперенесення в умовах впливу техногенних факторів при змінній пористості ґрунту. Зміна пористості впливає на зміну насиченості пористого середовища, що

опосередковано впливає і на вологість. Однак, числових досліджень відповідних нелінійних крайових задач проведено ще не було. Це і становить мету даної роботи. В якості конкретизації для числових експериментів розглянемо двовимірну задачу у випадку розливу забруднюючої речовини на поверхні ґрунту. Задача є актуальною з точки зору екосистем, сільського господарства, водного господарства.

Чисельне розв'язування нелінійної крайової задачі для системи диференціальних рівнянь у частинних похідних у двовимірному випадку вимагає складних обчислювальних алгоритмів та затрат ресурсів ЕОМ. З метою спрощення програмної реалізації таких задач часто використовуються вже існуючі пакети прикладних програм. При розв'язуванні поставленої в даній роботі задачі використаємо програмне середовище FreeFem++, яке реалізує розв'язування крайових задач математичної фізики методом скінченних елементів [10].

**Математична модель.** Дослідимо модель вологоперенесення в обмеженій двовимірній області  $\Omega$  з межею  $\Gamma$  для випадку однокомпонентного хімічного розчину. Маємо нелінійну математичну модель, яка містить наступні рівняння (1)–(3):

1. Рівняння вологоперенесення

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \rho_p}{\partial c} \frac{\partial c}{\partial t} (s(\sigma - \theta_{\min}) + \theta_{\min}) + \rho_p (\sigma - \theta_{\min}) \frac{\partial s}{\partial t} + \\ & + \rho_p s \left( \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{\partial \sigma}{\partial N} \frac{\partial N}{\partial t} \right) = \nabla \cdot (\rho_p D((\sigma - \theta_{\min}) \nabla s + s \nabla \sigma)) + \\ & + \nabla \cdot (\rho_p (K_p \nabla y - K_c \nabla c)), X \in \Omega, t > 0. \end{aligned} \quad (1)$$

2. Рівняння солеперенесення

$$\theta \left( 1 - \frac{c}{\rho_p} \frac{\partial \rho_p}{\partial c} \right) \frac{\partial c}{\partial t} = \nabla \cdot (D_c \nabla c) - q_p \left( 1 - \frac{c}{\rho_p} \frac{\partial \rho_p}{\partial c} \right) \nabla c - \frac{\partial N}{\partial t}, X \in \Omega, t > 0. \quad (2)$$

3. Рівняння кінетики масообмінного процесу вигляду

$$\frac{\partial N}{\partial t} = f(c, N), X \in \bar{\Omega}, t > 0. \quad (3)$$

У вищенаведених рівняннях використані наступні позначення:

$\theta$  — об'ємна вологість ґрунту;  $s = \frac{\theta(X, t) - \theta_{\min}}{\sigma(X, t) - \theta_{\min}}$  — функція насичення

(відносна вологість);  $\sigma$  — пористість ґрунту;  $\sigma_0$  — пористість «скелету» ґрунту із твердих водонерозчинних частинок;  $\theta_{\min}$  — залишкова (мінімальна) вологість;  $c$  — концентрація хімічної речовини в поровій рідині;  $N$  — концентрація хімічної речовини в твердих частках ґрунту;

$\rho_p$  — густина порової рідини;  $q_p = -D_p \nabla \theta - K_p \nabla x_2 + K_c \nabla c$  — вектор швидкості руху порової рідини;  $D_p$  — коефіцієнт дифузії ґрунтової вологи;  $K_p$  — коефіцієнт вологоперенесення;  $K_c$  — коефіцієнт хімічного осмосу;  $D_c$  — коефіцієнт конвективної дифузії;  $\rho_c$  — густина хімічної речовини в твердій компоненті.

Рівняння кінетики масообмінних процесів подано у загальному вигляді (3). Існують різні способи конкретизації цього рівняння. В даній роботі використано рівняння нерівноважної оборотної адсорбції і десорбції розчинених речовин при ізотермі Генрі [1, с. 175]:

$$\frac{\partial N}{\partial t} = -\gamma_1 (c\sigma - \alpha N), \quad (4)$$

де  $\gamma_1$  — стала швидкості адсорбції та десорбції,  $\alpha = 1/\Gamma$  — коефіцієнт розподілу,  $\Gamma = N_0/\sigma c_0$  — коефіцієнт Генрі,  $N_0, c_0$  — рівноважні концентрації речовини в твердій та рідкій фазах ґрунту.

Коефіцієнти  $D_p, K_p, K_c, K_T, D_c$  в рівняннях (1), (2) в загальному випадку є тензорами. Надалі приймемо, що ґрунт є ізотропним, і вважатимемо дані коефіцієнти скалярними функціями. Це не зменшує загальності подальших викладок. В статті використано нижченаведені способи отримання деяких змінних характеристик середовища та параметрів процесу вологоперенесення.

**Густина порової рідини**  $\rho_p(c, T)$ . В якості забруднюючої речовини для даної задачі прийнято концентрований розчин кам'яної солі (NaCl), адже характеристики його розчинів є добре вивченими. Зокрема, формулу залежності густини водного розчину від концентрації солі та температури  $T$  наведено в роботі [15]

$$\rho_p(c, T) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 a_{ij} c^{j-1} T^{i-1}.$$

Зауважимо, що концентрація солей  $c$  у даній формулі вимірюється у відсотках від маси, а не у  $\text{кг}/\text{м}^3$ , як у решті формул. За допомогою визначень концентрації та густини отримана наступна формула для переходу від  $c$  ( $\text{кг}/\text{м}^3$ ) до  $c_{\%}$ :

$$c_{\%} = \frac{c}{\rho_p}.$$

**Пористість**  $\sigma(N)$ . Згідно [6], та враховуючи той факт, що розглядаємо вплив лише одного хімічного елемента, маємо наступну залежність для пористості:

$$\sigma = \sigma_0 - \frac{N}{\rho_c}.$$

Вважаємо пористість скелету ґрунту  $\sigma_0$  та густину солі  $\rho_c$  сталими. В такому випадку отримуємо похідну від пористості за  $N$  у вигляді  $\frac{\partial \sigma}{\partial N} = \frac{1}{\rho_c}$  — тобто можемо вважати залежність динаміки зміни пористості від концентрації солей в твердій компоненті ґрунту сталою.

**Коефіцієнти вологоперенесення та дифузії.** Існує велика кількість емпіричних формул для визначення коефіцієнтів вологоперенесення та дифузії. Для розв'язування даної задачі використаємо, наприклад, одну із поширених моделей, що має назву модель ВС (Brooks — Corey model) [9]:

$$K_p(c, T, s, \sigma) = K_0(c, T, \sigma) s^{\frac{2+3\lambda}{\lambda}},$$

$$D(c, T, s, \sigma) = D_0(c, T, \sigma) s^{2+\frac{1}{\lambda}}, D_0 = \frac{K_0(c, T, \sigma) \psi_b}{\lambda(\sigma - \theta_{\min})},$$
(5)

де  $K_0(c, T, \sigma)$  — коефіцієнт фільтрації,  $\lambda$  — характеристичний параметр розподілу розміру пор ґрунту;  $\psi_b$  — тиск повітря у ґрунті.

**Коефіцієнт фільтрації  $K_0$ .** Коефіцієнт фільтрації входить як складова частина залежностей для коефіцієнтів вологоперенесення та дифузії ґрунтової вологи. Він залежить від великої кількості фізико-механічних та хімічних факторів, в тому числі від температури та хімічного складу порової рідини. Також значною мірою він залежить від коефіцієнта пористості ґрунту  $e$  — величини, що пов'язана з пористістю  $\sigma$  рівністю

$$e = \frac{\sigma}{1 - \sigma}.$$

Однією із найпростіших емпіричних формул для залежності коефіцієнта фільтрації від  $e$  є формула Козені-Кармана

$$K_0 = k_0 \frac{1 - e_0}{1 - e} \left( \frac{e}{e_0} \right)^3,$$

де  $k_0, e_0$  — початкові значення коефіцієнтів фільтрації та пористості. Початкові значення коефіцієнта фільтрації обчислювалося залежно від концентрації речовини в поровій рідині згідно емпіричної формули [2] (значення коефіцієнтів  $a_i, i = 0, 5$  наведено в [2, с. 163])

$$k_0(c) = a_5 c^5 + a_4 c^4 + a_3 c^3 + a_2 c^2 + a_1 c + a_0.$$

Решта коефіцієнтів (коефіцієнти осмосу, конвективної дифузії, теплоємності та ін.) вважаємо сталими.

**Постановка задачі.** Нехай маємо масив ґрунту шириною  $L$  м та глибиною  $H$  м. Припустимо, що ґрунтовий масив настільки довгий, що цією довжиною можна знехтувати і розглянути профільну двовимірну задачу. Верхня межа шару ґрунту контактує з атмосферою. Нижня межа ґрунту з певних причин є непроникною — або лежить на кам'яній основі, або на слабопроникних глинистих ґрунтах. Дослідимо процеси вологоперенесення в заданому масиві ґрунту у випадку розливу на поверхні рідини з високою концентрацією хімічної речовини.

На нижній межі  $\Gamma_1$  встановлено граничні умови, що відповідають непроникності

$$\left. \frac{\partial s}{\partial n} \right|_{\Gamma_1} = \left. \frac{\partial c}{\partial n} \right|_{\Gamma_1} = 0, \quad X \in \Gamma_1, t \geq 0.$$

На бічних межах встановлюємо умови симетричності, що математично аналогічні умовам непроникності

$$\left. \frac{\partial s}{\partial n} \right|_{\Gamma_2 \cup \Gamma_4} = \left. \frac{\partial c}{\partial n} \right|_{\Gamma_2 \cup \Gamma_4} = \left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_{\Gamma_2 \cup \Gamma_4} = 0, \quad X \in \Gamma_2 \cup \Gamma_4, t \geq 0.$$

Згідно поставленої задачі, на верхній межі  $\Gamma_3$  маємо граничні умови першого роду, що відповідають повній насиченості ґрунту та концентрації солі у поровій рідині такої, як і в розлитому розчині  $C_2$

$$s(X, t)|_{\Gamma_3} = 1, \quad c(X, t)|_{\Gamma_3} = C_2, \quad X \in \Gamma_3, 0 \leq t \leq t_1.$$

Проте, коли розлита рідина випарується або вбереться ґрунтом (позначимо цей момент часу  $t_1$ ) межа  $\Gamma_3$  стане межею контакту з атмосферою. Для цього випадку встановлено умову Данквертса для рівняння солеперенесення та граничну умову другого роду, що відповідає випаровуванню, для рівняння вологоперенесення [8, с. 47]

$$\left[ D_c \frac{\partial c}{\partial n} - (q_p, n)(c - C_1) \right] \Big|_{\Gamma_3} = 0,$$

$$-D_p \frac{\partial s}{\partial n} (\sigma - \theta_{\min}) \Big|_{\Gamma_3} = q_E, \quad X \in \Gamma_3, t > t_1,$$

де  $q_E$  — обсяг випаровування вологи з поверхні ґрунту.

Момент часу  $t_1$ , до якого розлита речовина знаходиться на поверхні ґрунту, визначено з наступних міркувань. Нехай маємо  $Q$  — об'єм рідини, що знаходиться на поверхні. Рідина просочується у ґрунт зі швидкістю  $q_p$ , та випарується зі швидкістю  $q_E$ . Маємо наступну формулу для визначення залишку рідини на поверхні:

$$Q^i = Q^{i-1} + \left( (q_p, n) - q_E \right) \cdot \Delta t,$$

де  $Q^i$  — залишок рідини на поверхні на  $i$ -му часовому кроці,  $\Delta t$  — величина часового кроку,  $n$  — вектор зовнішньої нормалі до межі  $\Gamma_3$ . Таке значення часового кроку  $i$ , при якому  $Q^i$  досягне нуля, тобто вичерпаються поверхневі запаси рідини, і буде відповідати моменту часу  $t_1$ .

При розв'язуванні поставлених задач виділено два основні випадки та порівняно їх результати:

1. Класична задача вологоперенесення — враховані лише рівняння вологоперенесення у вигляді рівняння Річардса та зміна коефіцієнтів вологоперенесення та дифузії згідно (5).
2. Вологоперенесення із врахуванням солеперенесення з усіма переліченими вище змінними параметрами.

**Слабка постановка задачі.** Домножуємо обидві частини рівняння (1) на довільну функцію  $v \in H_0$ ,  $H_0 = \left\{ v(x) : v(x) \in W_2^1, v(x)|_{\Gamma_1} = 0 \right\}$  та інтегруємо по області  $\Omega$ . Маємо

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega} \frac{\partial \rho_p}{\partial c} \frac{\partial c}{\partial t} (s(\sigma - \theta_{\min}) + \theta_{\min}) v d\Omega + \\ & + \iint_{\Omega} \left( \rho_p (\sigma - \theta_{\min}) \frac{\partial s}{\partial t} + \rho_p s \left( \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{\partial \sigma}{\partial N} \frac{\partial N}{\partial t} \right) \right) v d\Omega = \\ & = \iint_{\Omega} \left( \nabla \cdot (\rho_p D((\sigma - \theta_{\min}) \nabla s + s \nabla \sigma)) + \nabla \cdot (\rho_p (K_p \nabla y - K_c \nabla c)) \right) v d\Omega. \end{aligned}$$

До тих доданків, що містять оператор дивергенції, застосовуємо формулу Остроградського-Гаусса та використовуємо відповідні граничні умови. Дискретизацію задачі здійснюємо у вигляді неявної схеми. Отримуємо слабку постановку рівняння (1)

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega} \frac{\partial \rho_p}{\partial c} \frac{c^{k+1} - c^k}{\Delta t} (s^{k+1} (\sigma - \theta_{\min}) + \theta_{\min}) v d\Omega + \\ & + \iint_{\Omega} \rho_p s^{k+1} \left( \frac{\sigma^{k+1} - \sigma^k}{\Delta t} + \frac{1}{\rho_c} \frac{N^{k+1} - N^k}{\Delta t} \right) v d\Omega + \\ & + \int_{\Omega} \rho_p (\sigma - \theta_{\min}) \frac{s^{k+1} - s^k}{\Delta t} v + \rho_p (K_p \nabla y - K_c \nabla c^{k+1}) \cdot \nabla v d\Omega - \\ & - \iint_{\Omega} \left( \rho_p D((\sigma - \theta_{\min}) \nabla s^{k+1} + s^{k+1} \nabla \sigma) \right) \cdot \nabla v d\Omega = 0, k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Виконавши аналогічні операції над рівнянням (2), отримуємо

$$\iint_{\Omega} \theta \left( 1 - \frac{c^k}{\rho_p} \frac{\partial \rho_p}{\partial c} \right) \frac{c^{k+1} - c^k}{\Delta t} v d\Omega + \iint_{\Omega} (D_c \nabla c^{k+1}) \cdot \nabla v d\Omega + \\ + \iint_{\Omega} \left( 1 - \frac{c^k}{\rho_p} \frac{\partial \rho_p}{\partial c} \right) \nabla c^{k+1} \cdot q_p v d\Omega - \iint_{\Omega} \frac{N^{k+1} - N^k}{\Delta t} v d\Omega = 0, k = 0, 1, 2, \dots$$

Рівняння (4) достатньо лише дискретизувати за часом

$$\frac{N^{k+1} - N^k}{\Delta t} = -\gamma_1 (c^{k+1} \sigma - \alpha N^{k+1}), k = 0, 1, 2, \dots$$

Його розв'язок шукаємо ітераційно у вигляді

$$N^{k+1} = \frac{N^k - \gamma_1 c^{k+1} \sigma \Delta t}{1 - \gamma_1 \alpha \Delta t}, k = 0, 1, 2, \dots$$

Результати числових експериментів та їх аналіз. При проведенні числових модельних експериментів використано такі значення коефіцієнтів:

$$K_c = 3 \cdot 10^{-6} \frac{\text{м}^5}{\text{кг} \times \text{доба}}, D_c = 0.01 \frac{\text{м}^2}{\text{доба}}, C_m = 365 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3},$$

$$\rho_c = 2165 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}, \Delta t = 1 \text{ доба}, \gamma_1 = 0.1 \text{ доба}^{-1}, T = 20^\circ \text{C},$$

$$\alpha = 0.33, \lambda_1 = 3, \psi_b = 100 \text{ кПа}, \theta_{\min} = 0.065.$$

У тих випадках задачі, коли зміна описаних вище параметрів не враховувалася, вони приймалися рівними наступним значенням:

$$\rho_p = 1000 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}, k_0 = 0.013 \frac{\text{м}}{\text{доба}}, K_p = 0.013 \frac{\text{м}}{\text{доба}},$$

$$D_p = 0.02 \frac{\text{м}^2}{\text{доба}}.$$

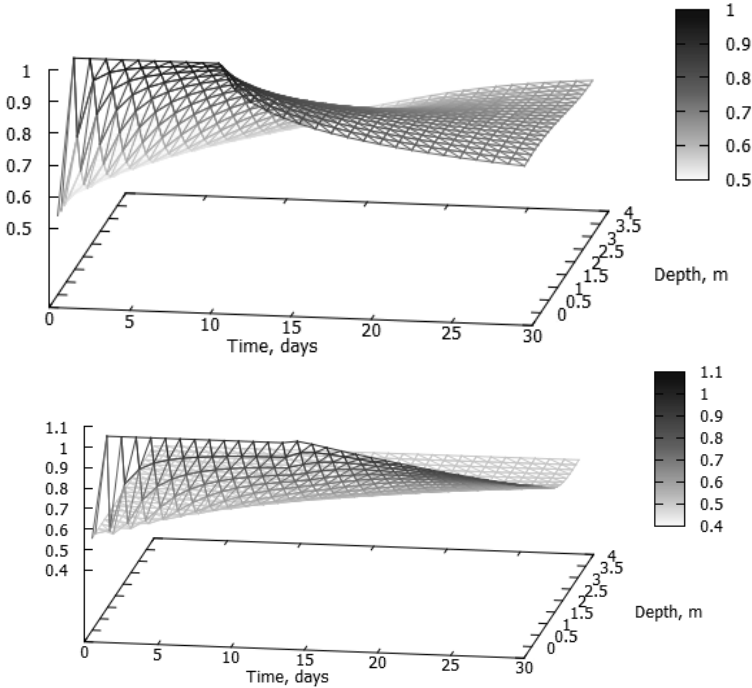
Розміри області —  $L = 1 \text{ м}$ ,  $H = 4 \text{ м}$ . Функції, що визначають початкові та граничні умови задачі, вибрані наступним чином:

$$S_0 = 0.5, C_0 = 8 \frac{\Gamma}{\text{л}}, N_0 = 10 \frac{\Gamma}{\text{л}}, \sigma_0 = 0.4, Q^0 = 0.01 \text{ м},$$

$$C_1 = C_{\min} = 8 \frac{\Gamma}{\text{л}}, C_2 = C_{\max} = 250 \frac{\Gamma}{\text{л}}, q_E = 0.007.$$

Розв'язок задачі знайдено у програмному середовищі FreeFem++. Це — безкоштовне програмне забезпечення для розв'язування крайових задач для диференціальних рівнянь в частинних похідних методом скінченних елементів. Воно містить засоби для аналітичного опису областей, граничних умов, автоматичного генерування сіток скінченних елементів, розв'язування крайових задач у слабкій постановці та побудови дво- та тривимірних графіків. FreeFem++ має власну C-подібну мову, що дозволяє програмувати алгоритми розв'язування задач, зокрема методи дискретизації та лінеаризації [10].

Поставлена задача розв'язана на 30-денному проміжку часу з кроком в 1 день. Як вже сказано вище, у статті порівняно розв'язки задачі вологоперенесення у її класичному випадку ( $s$ ) та із врахуванням масоперенесення ( $s^*$ ). На рис. 1 зображені графіки зміни розподілу вологи з часом (отримані за допомогою утиліти gnuplot).



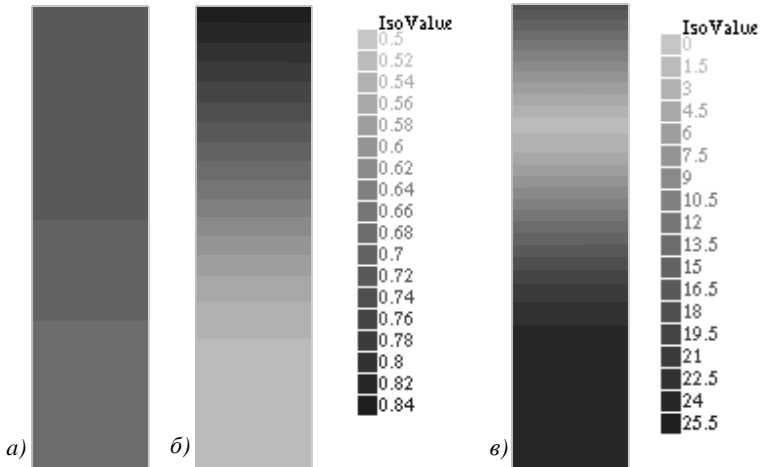
**Рис. 1.** Графіки розподілу вологи з часом на бічній межі  $\Gamma_4$  у класичній задачі  $q_E$  (зверху) та у задачі із врахуванням масоперенесення  $s^*$  (знизу)

З рис. 1 видно, що у класичній задачі розлита речовина швидше просочується у ґрунт. Для класичної задачі кількість днів, які речовина затримувалася на поверхні ґрунту, становить  $t_1 = 10$ , а у випадку врахування масоперенесення —  $t_1 = 13$  днів. Також помітно, що у класичній задачі швидше спадає рівень вологи на верхній межі.

Розглянемо також побудовані у FreeFem++ графіки розподілу вологи на останньому часовому кроці  $t = 30$  для обох задач, а також графік відносної різниці між ними, що обчислюється у вигляді (при умові  $s \neq 0$ )

$$\Delta_s = \frac{|s^* - s|}{s} \cdot 100\%.$$





**Рис. 2.** Розв'язки класичної задачі вологоперенесення  $q_E$  (а), поставленої в роботі задачі  $q_E$  (б) та їх різниця  $\Delta_s$ , % (в)

З рис. 2 бачимо, що у класичній задачі волога просочується на всю глибини ґрунту та встановлюється на рівні 0,66–0,72. В той же час при врахуванні масопереносу розлита волога не досягає нижньої межі, де значення вологості залишається рівним початковій умові. Відносна різниця вологостей як розв'язків цих задач досягає 25% біля нижньої межі. Така різниця зумовлюється насиченістю розлитого розчину: концентрований розчин має більшу густину та в'язкість, що сповільнює рух рідини. Також присутнє явище хімічного осмосу, що змушує порову рідини рухатися у напрямку зростання градієнта концентрації, тобто до верхньої межі. Крім того, адсорбція солі твердими частками призводить до збільшення їх об'єму та зменшення пористості ґрунту. Всі ці фактори призводять до сповільнення швидкості вологоперенесення.

**Висновки.** У статті досліджено математичну модель задачі вологоперенесення в умовах змінної пористості. Розглянуто деякі, пов'язані з впливом солеперенесення, змінні параметри процесу вологоперенесення та деякі, описані в науковій літературі, способи їх отримання. Сформовано математичну постановку задачі вологоперенесення у випадку розливу на поверхні рідини з високою концентрацією забрудника. Програмну реалізацію розв'язування відповідної задачі здійснено із застосуванням пакету FreeFem++. Під час проведення числових експериментів для модельних випадків порівнювалися розв'язки класичної задачі та задачі з врахуванням солеперенесення в умовах змінної пористості. В результаті встановлено, що у задачі із врахуванням солеперенесення рух вологи відбувався повільніше, забруднююча речовина довше знаходилася на

поверхні ґрунту (13 днів у порівнянні з 10). Відносна різниця розв'язків цих задач досягає 25% на глибині більше 3 м.

Подальші дослідження за даною темою можуть стосуватися ускладнення області задачі, зокрема розгляду її тривимірного випадку. Також варто розглянути вплив теплоперенесення.

### Список використаних джерел:

1. Веригин Н. Н. Гидродинамические и физико-химические свойства горных пород / Н. Н. Веригин, С. В. Васильев, В. С. Саркисян и др. — М. : Недра, 1977. — 271 с.
2. Власюк А. П. Математичне моделювання фільтраційної консолідації зростаючого шару ґрунту за наявності солепереносу в неізотермічних умовах / А. П. Власюк, П. М. Мартинюк // Математичні методи та фізико-механічні поля. — 2006. — Вип. 49. — № 4. — С. 157–166.
3. Власюк А. П. Числове розв'язування двовимірної задачі фільтраційної когнідації ґрунтового масиву за наявності тепло-масоперенесення в деформівній області / А. П. Власюк, П. М. Мартинюк, М. В. Каленик // Вісник Львівського університету. Серія: Прикладна математика та інформатика. — 2007. — Вип. 13. — С. 78–89.
4. Гайвась Б. Конвективно-теплове сушіння шару зерна / Б. Гайвась, Є. Чапля, Д. Чаплаєв // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. — 2015. — Вип. 21. — С. 39–51.
5. Герус В. А. Узагальнення рівнянь фільтрації та тепломасоперенесення на випадок суфозійних процесів / В. А. Герус, Т. В. Кутя, П. М. Мартинюк // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки. — 2016. — Вип. 14. — С. 48–63.
6. Кутя Т. В. Рівняння вологоперенесення в ґрунтах з урахуванням теплових та хімічних чинників / Т. В. Кутя, В. А. Герус, П. М. Мартинюк // Математичні методи та фізико-механічні поля. — 2017. — Т. 60, № 1. — С. 169–177.
7. Медвідь Н. В. Дослідження впливу тепло-солеперенесення на швидкість фільтрації в ґрунтовій греблі (просторова задача) / Н. В. Медвідь, П. М. Мартинюк // Вісник Тернопільського національного технічного університету. — 2015. — Вип. 4 (80). — С. 172–181.
8. Мічута О. Р. Математичне моделювання процесів хімічної та контактної суфозії в ґрунтах / О. Р. Мічута, П. М. Мартинюк, В. А. Герус. — Рівне : Вид-во НУВГП, 2016. — 207 с.
9. Study and comparison the efficiency of Mualem-Van Genuchten and Brooks-Corey models in predicting unsaturated hydraulic conductivity in compacted soils / Н. Abbaspour, М. Sorafa, R. Daneshfaraz et al. // Journal Civil Engineering and Urbanism. — 2012. — Vol. 2 (2). — P. 56–62.
10. FreeFem++. Third Edition. Laboratoire Jacques-Louis Lions / F. Hecht, S. Auliac, O. Pironneau et al. — Paris : Universite Pierre et Marie Curie. — 378 p. — URL: <http://www.freefem.org/ff++/ftp/freefem++.doc.pdf>.
11. Modeling coupled water flow, solute transport and geochemical reactions affecting heavy metal migration in a podzol soil / D. Jacques, J. Simunek, D. Mallants et al. // Geoderma. — 2008. — Vol. 145 (3–4). — P. 449–461.

12. Mathematical model of nonisothermal moisture referrence in the form of water and vapor in soils in the case of chemical internal erosion / P. M. Martyniuk, M. T. Kuzlo, S. K. Matus et al. // Far East Journal of Mathematical Sciences. — 2017. — Vol. 102 (12). — P. 3211–3221.
13. Massman W. J. Modeling soil heating and moisture transport under extreme conditions: Forest fires and slash pile burns / W. J. Massman // Water Resources Research. — 2012. — Vol. 48. — W10548. — P. 1–12.
14. Saifadeen, A., Gladneyva, R. Modeling of solute transport in the unsaturated zone using HYDRUS-1D. Division of Water Resources Engineering / A. Saifadeen, R. Gladneyva. — Lund University. — 74 p. — URL: <https://lup.lub.lu.se/student-papers/search/publication/3051081> (дата звернення: 14.04.2018)
15. Mathematical modeling of density and viscosity of NaCl aqueous solutions / A. I. Simion, C.-G. Grigoras, A.-M. Rosu et al. // Journal of Agroalimentary Processes and Technologies. — 2015. — Vol. 21 (1). — P. 41–52.
16. Shao W. Simulations of coupled non-isothermal soil moisture transport and evaporation fluxes in a forest area / W. Shao, Y. Su, J. Langhammer // Journal of Hydrology and Hydromechanics. — 2017. — Vol. 65 (4). — P. 410–425.
17. Theory of SWAP version 2.0. Simulation of water flow, solute transport and plant growth in the Soil-Water-Atmosphere-Plant environment / J. C. Van Dam, J. Hyugen, J. G. Wesseling et al. — Wageningen Agricultural University and DLO Winand Staring Centre, 1997. — 168 p.

## **INVESTIGATING THE INFLUENCE OF SPILLED CONTAMINANT ON SOIL MOISTURE TRANSPORT BY THE MEANS OF COMPUTER AND MATHEMATICAL MODELLING**

Computer and mathematical modelling of moisture transport processes holds a prominent place in designing hydraulic structures, evaluating strength of potential slide soils, modelling crop growth etc. Such problems are among those constituting economic security of the country.

For the purpose of formulating moisture transport problem the model including interconnected processes of moisture, heat and mass transfer has been used in this paper. Different variable environmental and process parameters have been considered, as well as some relations for their calculating. Investigation of the given model has been conducted for the instance of the two-dimensional problem in the case of contaminant spillage on the soil surface. The characteristic feature of this problem is contamination of the soil in consequence of contaminant adsorption by the solid soil particles. In this case, we believe that accounting for porosity changes, which occur due to expansion of soil particles, is highly important. Moreover, other factors are making difference, such as variable pore solute density, which is increasing on dissolving contaminant salts, and the chemical osmosis, which influences soil water flow.

The set moisture transport problem including variable porosity has been solved numerically using the finite element method. Program implementation of the corresponding algorithms has been conducted in FreeFem++ environment. A series of numerical experiments has been done, and solutions of the classical moisture transport problem and the one considering mass and heat

transport have been compared. In the second case moisture distribution in the soil is much more irregular. It reflects more accurately the setting of the problem and is explained by the impact of mentioned above variable parameters. The results of the numerical experiments attest the importance of considering mass transfer and accompanying factors for that kind of problems.

**Key words:** *mathematical model, porous medium, moisture transport, mass transfer, finite element method.*

Отримано: 18.05.2018

УДК 004.942+681.62

**Я. Ю. Коляно\***, канд. фіз.-мат. наук,

**Є. Г. Іваник\*\***, канд. фіз.-мат. наук,

**О. В. Сікора\*\*\***, канд. техн. наук,

**М. В. Дорошенко\*\*\***, канд. фіз.-мат. наук

\*Українська Академія друкарства, м. Львів,

\*\*Національна академія сухопутних військ  
імені гетьмана Петра Сагайдачного, м. Львів,

\*\*\*Дрогобицький державний педагогічний університет  
імені Івана Франка, м. Дрогобич

## МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ ТЕПЛОМАСОПЕРЕНЕСЕННЯ В КОМПОЗИТНИХ ПОЛІГРАФІЧНИХ СТРУКТУРАХ

Сформульовано математичну модель процесу кондуктивно-го нагрівання композитних поліграфічних систем, яка зводиться до розв'язування початково-крайової задачі для однорідного нестационарного рівняння теплопровідності для двошарової пластини з несиметричними граничними умовами. Отриману початково-крайову задачу для нестационарного рівняння теплопровідності розв'язано методом інтегральних перетворень Лапласа, а саме: методом інтегральних перетворень Лапласа в аналітичному вигляді отримано трансформанти розподілів температури в спряжених шарах. Трансформанти розподілів температури представляються у вигляді лінійних комбінацій гіперболічних тригонометричних функцій. Проведено чисельні обрахунки стаціонарної задачі теплопровідності для двошарової нескінченної пластини щодо кондуктивного сушіння; для дослідження взято композитні структури полімер-картон і полімер-папір. Визначено теплофізичні параметри картону, паперу і поліуретану, що дає змогу моделювати процес кондуктивного нагрівання картону різної товщини на основі встановленого стаціонарного розподілу температури в двошарових композитах типу поліуретан-папір, поліуретан-картон, внаслідок чого виникає можливість удосконалення процесу кондуктивного нагрівання двоша-

рових поліграфічних матеріалів і процесу припресування полімерних плівок. Встановлено, що папір є кращим теплоізолятором, ніж картон, оскільки під час нагрівання двошарової пластини, виготовленої з поліуретану і паперу виникають більші градієнти температури, ніж при нагріванні двошарової пластини такої ж товщини з поліуретану і картону. Також, встановлено, що шар поліуретану, товщиною 1 мм втримує приблизно таку ж температуру, як і картон чи папір, товщиною 5 мм. Чисельні розрахунки стаціонарної задачі теплопровідності для двошарової нескінченної пластини дозволяють перевірити адекватність розв'язків поставленої нестаціонарної задачі.

**Ключові слова:** *теплова обробка, математична модель, поліграфічні системи, нестаціонарна задача термовологопровідності, композитні матеріали, термодинамічні параметри.*

**Вступ.** Конвективний підвід тепла широко застосовується при сушінні капілярно-пористих колоїдних тіл (дерево, картон, папір, целюлоза та ін.). Цей спосіб сушіння застосовується при виробництві пиломатеріалів, деревостружкових та деревоволокнистих плит, шпону, меблів тощо. Конвективний спосіб сушіння широко використовується у поліграфічному виробництві [3–6].

Стан поліграфічних матеріалів, як і будь-якого вологого матеріалу, визначається його температурою і вологістю. Якісно висушені поліграфічні матеріали і напівфабрикати з врахуванням умов експлуатації можуть служити 50–100 і більше років. Сушіння поліграфічних матеріалів і напівфабрикатів дає значний економічний і екологічний ефект. Але проблема сушіння поліграфічних матеріалів і напівфабрикатів повністю не розв'язана.

Тому, побудова та дослідження математичних моделей процесу тепломасоперенесення в композитних поліграфічних структурах є актуальною та відповідає сучасним тенденціям наукових досліджень у поліграфії.

**Постановка проблеми.** Значна кількість поліграфічних матеріалів і напівфабрикатів піддаються сушінню та тепловій обробці на різних етапах поліграфічного виробництва. Сушіння в природних умовах значно збільшує тривалість технологічного процесу, тому необхідно застосовувати штучне висушування.

Процес сушіння — це складний теплофізичний і технологічний процес [1]. Основою теорії сушіння є закономірності переносу тепла і вологи у вологих матеріалах при взаємодії їх з нагрітими газами (конвективне сушіння), з гарячими поверхнями (контактне сушіння), а також в процесах опромінення тепловими і електромагнітними хвилями (терморадіаційне сушіння) при наявності фазових перетворень. Теорія сушіння є важливим розділом теплофізичної науки про тепло- і масообмін. Проте

процес сушіння вологих матеріалів є одночасно і технологічним процесом, в якому міняються структурно-механічні, технологічні і біохімічні властивості матеріалів. Зміна цих властивостей обумовлена тим, що в процесі сушіння відбувається зміна форм зв'язку вологи з матеріалом і її часткове видалення шляхом випаровування. Тому теорія сушіння включає в себе не тільки розділи тепло- і масоперенесення в тілі, але і вчення про форми зв'язку вологи з вологими матеріалами, ряд основних розділів фізико-хімічної механіки і деякі розділи технології і біохімії.

**Аналіз попередніх публікацій.** В середині ХХ сторіччя академіком О.В. Ликовим були закладені математичні основи теорії сушіння, згідно яких процес сушіння матеріалу характеризується зміною в часі трьох основних функцій: 1) температури (температурна крива в залежності від часу), 2) вологовмісту (вологості) матеріалу (крива сушіння в залежності від часу), 3) швидкості сушіння (крива швидкості сушіння) [1–3]. Першим кроком для аналізу процесу сушіння є отримання температурних кривих в залежності від часу, на основі яких можна встановити основні закономірності процесу сушіння [1, 3]. Наступний етап — отримання кривої вологості спостереження за тим, як вони взаємозв'язано змінюються в часі залежно від швидкості нагріву [1, 2]. Важливим етапом розвитку теорії сушіння є встановлення Ликовим О. В. явища термодифузії надлишкової вологи (термовологопровідності).

Тісний зв'язок з практикою є запорукою вирішення будь-якої наукової проблеми. При цьому першочергове значення має сама технологія процесу, розроблена на підставі аналізу складних виробничих ситуацій. Завдання технології теплової обробки (нагрівання, сушіння) полягає в розробці методів керування процесами, які відбуваються у матеріалі, з метою отримання готового продукту або напівфабрикату високої якості, скорочення тривалості процесу, термінів випуску продукції, а також оптимізації витрат енергії. Розробка методів штучного висушування і нагрівання базується на теорії нагрівання, теорії сушіння і фізико-хімічній механіці [4, 5].

**Мета статті:** дослідження математичної моделі кондуктивного нагрівання композитних поліграфічних систем та визначення теплофізичних параметрів картону, паперу та поліуретану.

**Виклад основного матеріалу.** Значна кількість матеріалів, що використовуються у поліграфії є складеними з кількох різноманітних шарів тілами, тобто композитами [4–10]. Більшість з них піддаються сушінню та теплової обробці на різних стадіях поліграфічного виробництва (гідротермічна обробка — ГТО); оптимізація цього процесу є актуальною проблемою процесу отримання різноманітної поліграфічної продукції. Найтипівішими композитами, що піддаються різноманітним видам ГТО, є: деякі види паперу (крейдований папір (паперова основа та покриття на

основі крейди чи каніфолію); картографічний папір); картону (шаруватий картон, що складається з різних шарів (целюлоза, деревна маса, картон) [7], картон із захисною плівкою); сучасні пакувальні матеріали (папір-лак, папір-фольга, папір-поліетилен тощо) [6, 9, 10]; ламіновані відбитки (нанесення полімеру методом розплаву, припресування полімерних плівок) [6]; палітурні кришки (картон, клейовий шар, покрівельний матеріал) [3, 4]; обкладинки (паперова основа і полімерне покриття) [11]; корінці книжкових блоків при вставленні книжкового блоку в обкладинку [4]; друкарські форми (полімерні та фотополімерні друкарські форми на основі металу, гуми та полімеру) [11] та багато інших.

Математична постановка задачі вивчення процесів тепломасоперенесення реалізується на моделі пластинчатих структур і здійснена згідно з теорією нестационарної термовологопровідності А. В. Ликова, розглядається у вигляді початково-крайової задачі для температури  $t(z, \tau)$  з несиметричними граничними умовами.

Отже, розглянемо необмежену плиту товщиною  $h$ , що складається з двох шарів (рис. 1), які мають різні теплофізичні параметри (коефіцієнти) і товщини  $z_1, z_2$ . Початкова температура цих шарів однакова і дорівнює  $t_0$ . У початковий момент часу  $\tau=0$  її верхня поверхня  $z=h$ , що взаємодіє з оточуючим середовищем згідно закону конвективного теплообміну, піддається дії температурою  $t_c$ , а нижня поверхня  $z=0$  нагрівається тепловим потоком  $q$ . На границі розділу  $z=z_1$  приймаються умови ідеального теплового контакту. Потрібно знайти розподіл температури в довільній точці  $z$  цієї двохшарової плити залежно від часу.

Математична постановка поставленої задачі, згідно з класичною теорією нестационарної теплопровідності Ликова А. В. [1, 8], виглядає наступним чином:

$$\frac{\partial^2 t_j}{\partial z^2} = \frac{1}{a_j} \frac{\partial t}{\partial \tau} (j=1,2), \quad (1)$$

$$\lambda_2 \frac{\partial t_2}{\partial z} + \alpha (t_2 - t_c) = 0 \text{ при } z=h, \quad (2)$$

$$\lambda_1 \frac{\partial t_1}{\partial z} = -q S_+ (\tau) \text{ при } z=0, \quad (3)$$

$$t_j(z, \tau) = t_0 \text{ при } \tau=0 \quad (4)$$

на границі розділу  $z=z_1$  приймаємо умови ідеального теплового контакту:

$$\begin{aligned}
 t_1(z_1, \tau) &= t_2(z_1, \tau), \\
 \lambda_1 \frac{\partial t_1(z_1, \tau)}{\partial z} &= \lambda_2 \frac{\partial t_2(z_1, \tau)}{\partial z}.
 \end{aligned}
 \quad (5)$$

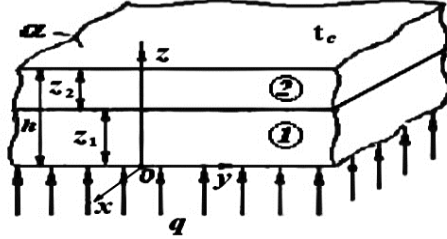


Рис. 1. Схема перерізу двошарової пластини, що кондуктивно нагрівається тепловим потоком

Тут  $a_j, \lambda_j$  — коефіцієнти температуропровідності і теплопровідності відповідно шарів 1 і 2;  $\alpha$  — коефіцієнт теплообміну між шаром 2 і контактуючим з ним зовнішнім середовищем;  $q$  — величина густини теплового потоку;  $S_+(\tau) = \begin{cases} 1, & \tau > 0, \\ 0, & \tau \leq 0, \end{cases}$  — асиметрична функція Гевісайда [12].

Розв'язок поставленої крайової задачі (1)–(5) отримується з використанням інтегрального перетворення Лапласа [13] по часу  $\tau$ ; виконуючи необхідні перетворення отримуємо трансформанти розподілів температури в спряжених шарах:

$$\begin{aligned}
 \bar{T}_1(z, s) &= \bar{T}_1^{(1)}(z, s) + \bar{T}_1^{(2)}(z, s) = \frac{\varphi(z, s)}{\psi(s)} - \frac{\Phi_1(z, s)}{\Psi_1(s)}; \\
 \bar{T}_2(z, s) &= -\frac{\Phi_2(z, s)}{\Psi_2(s)}; \\
 \varphi(z, s) &= \frac{q}{\lambda_1} \cdot \frac{\text{sh}S_1(z - z_1)}{S_1}; \quad \psi(s) = \text{sch}S_1 z_1; \\
 \Phi_1(z, s) &= \left[ \frac{q}{\lambda_1} \left( S_2 \text{ch}S_2 z_2 + \frac{\alpha}{\lambda_2} \text{sh}S_2 z_2 \right) + \frac{\alpha}{\lambda_2} K t_c \text{ch}S_1 z_1 \right] \frac{\text{ch}S_1 z}{\text{ch}S_1 z_1}; \\
 \Phi_2(z, s) &= \frac{q}{\lambda_1 S_1} \left[ S_2 \text{ch}S_2 (h - z) + \right. \\
 &+ \left. \frac{\alpha}{\lambda_2} \text{sh}S_2 (h - z) \right] + \frac{\alpha}{\lambda_2} t_c \left[ K \text{ch}S_1 z_1 \text{ch}S_2 (z - z_1) + \text{sh}S_1 z_1 \text{sh}S_2 (z - z_1) \right];
 \end{aligned}$$



$$\Phi_1(s) = \Psi_1(s) = s\Delta(s);$$

$$\delta_{jk} = \begin{cases} 0, & j \neq k, \\ 1, & j = k, \end{cases} \text{ — символ Кронекера [14]; } iS_1 z_1 = i\sqrt{\frac{s}{a_1}} z_1 = \nu.$$

Проведено чисельні обрахунки стаціонарної задачі теплопровідності для двошарової нескінченної пластини щодо кондуктивного сушіння; для дослідження взято композитні структури полімер-картон і полімер-папір (рис. 2).

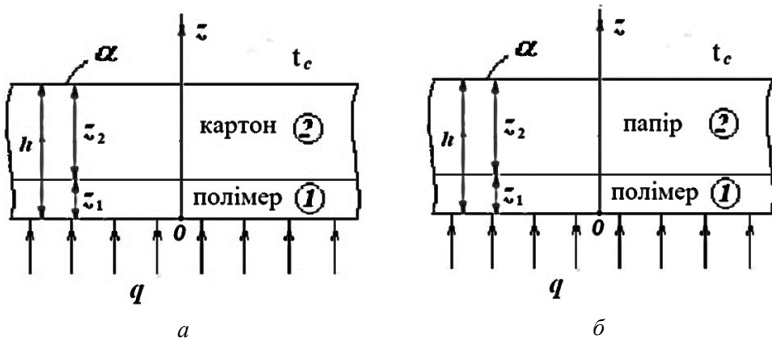
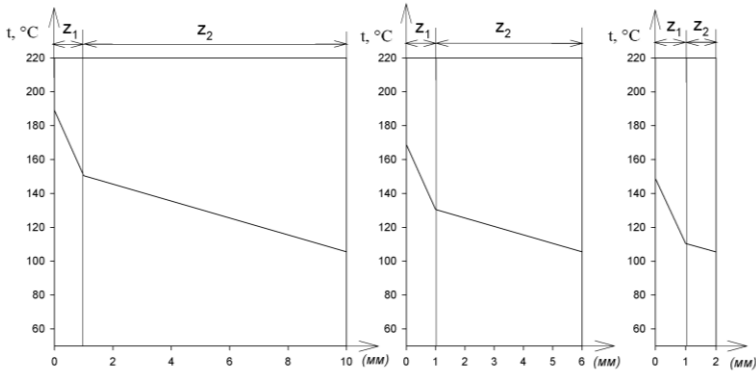


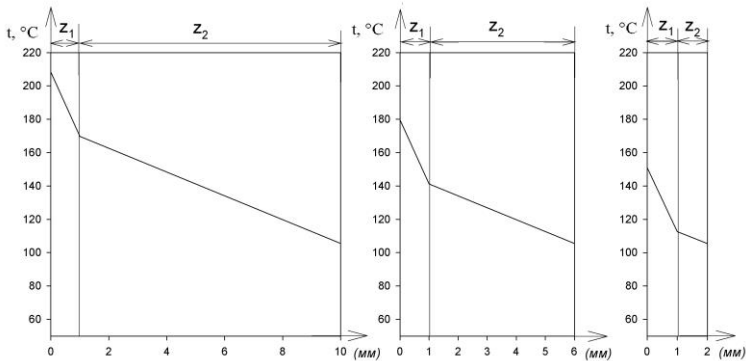
Рис. 2. Схема перерізу двошарової пластини, що кондуктивно нагрівається тепловим потоком: а) полімер-картон; б) полімер-папір

Приймемо, що перший шар пластини виготовлений з поліуретану ( $\lambda = 0,026 \text{ Вт}/(\text{м}\cdot\text{С})$ ) [16, 17]), а другий з картону ( $\lambda = 0,2 \text{ Вт}/(\text{м}\cdot\text{С})$ ,  $\alpha \approx 11,7 \text{ Вт}/(\text{м}^2\cdot\text{С})$ ) [1, 16, 17]) чи паперу ( $\lambda = 0,14 \text{ Вт}/(\text{м}\cdot\text{С})$ ,  $\alpha \approx 11,7 \text{ Вт}/(\text{м}^2\cdot\text{С})$ ) [1]); пластинка має початкову температуру  $t_0 = +10^\circ\text{С}$ , нагрівається через нижню поверхню тепловим потоком  $q = 1000 \text{ Вт}/\text{м}^2$ . Температура оточуючого середовища  $t_c = +30^\circ\text{С}$ . Обрахунки виконано для наступних товщин поліуретану ( $z_1$ ) і картону ( $z_2$ ): 1)  $z_1 = 1 \text{ мм.}$ ,  $z_2 = 9 \text{ мм.}$  ( $h = 10 \text{ мм.}$ ); 2)  $z_1 = 1 \text{ мм.}$ ,  $z_2 = 5 \text{ мм.}$  ( $h = 6 \text{ мм.}$ ); 3)  $z_1 = 1 \text{ мм.}$ ,  $z_2 = 1 \text{ мм.}$  ( $h = 2 \text{ мм.}$ ); обрахунки проведено для наступних товщин поліуретану ( $z_1$ ) і паперу ( $z_2$ ): 1)  $z_1 = 1 \text{ мм.}$ ,  $z_2 = 9 \text{ мм.}$  ( $h = 10 \text{ мм.}$ ); 2)  $z_1 = 1 \text{ мм.}$ ,  $z_2 = 5 \text{ мм.}$  ( $h = 6 \text{ мм.}$ ); 3)  $z_1 = 1 \text{ мм.}$ ,  $z_2 = 1 \text{ мм.}$  ( $h = 2 \text{ мм.}$ ).

На графіках, зображених на рис. 3, рис. 4, дано розподіл стаціонарної температури по товщині матеріалу під час нагрівання пластин (плит) різної товщини; спостереження проводилось за трьома поверхнями пластини:  $z = 0$  — нижня поверхня пластини,  $z = z_1$  — поверхня розділу між матеріалами,  $z = h$  — верхня поверхня пластини.



**Рис. 3.** Розподіли температури по товщині при кондуктивному нагріванні двошарових пластин (поліуретан-картон) товщиною:  
а)  $h = 10$  мм.; б)  $h = 6$  мм.; в)  $h = 2$  мм.



**Рис. 4.** Розподіли температури по товщині при кондуктивному нагріванні двошарових пластин (поліуретан-папір) товщиною:  
а)  $h = 10$  мм. б)  $h = 6$  мм. в)  $h = 2$  мм.

Як видно із графіків, поведінка розподілу температури для пластин різної товщини відрізняється. При товщині пластини поліуретан-картон  $h = 10$  мм. перепад (градієнт) температури між верхньою і нижньою поверхнею складає  $83^{\circ}\text{C}$ , причому перепад температури в шарі поліуретану —  $38^{\circ}\text{C}$ , а в картонному шарі —  $45^{\circ}\text{C}$ . При товщині пластини  $h = 6$  мм. перепад (градієнт) температури між верхньою і нижньою поверхнею складає  $63^{\circ}\text{C}$ . Стаціонарна температура на верхній (вільній) поверхні у всіх випадках однакова —  $105^{\circ}\text{C}$ , тоді як на нижній поверхні зменшується зі зменшенням товщини пластини (плити) за рахунок зменшення картонного шару. Поліуретан є добрим теплоізолятором, бо добре затримує тепло, порівняно із картоном.

### **Висновки.**

1. Сформульовано математичну модель процесу кондуктивного нагрівання композитних поліграфічних систем.
2. Методом інтегральних перетворень Лапласа отримано трансформанти розподілів температури в спряжених шарах.
3. Проведено чисельні розрахунки стаціонарної задачі теплопровідності для двошарової нескінченної пластини щодо кондуктивного сушіння.

Як видно із наведених графіків, папір є кращим теплоізолятором, ніж картон, оскільки під час нагрівання двошарової пластини, виготовленої з поліуретану і паперу виникають більші градієнти температури, ніж при нагріванні двошарової пластини такої ж товщини з поліуретану і картону. Шар поліуретану, товщиною 1 мм втримує приблизно таку ж температуру, як і картон чи папір, товщиною 5 мм. Відзначимо, що стаціонарні графіки температури дозволяють перевірити адекватність розв'язків поставленої нестаціонарної задачі.

### **Список використаних джерел:**

1. Лыков А. В. Теория сушки / А. В. Лыков. — М. : Энергия, 1968. — С. 472.
2. Алабовский А. Н. Теплотехника / А. Н. Алабовский, С. М. Константинов, И. А. Недужий. — К. : Вища школа, 1986. — С. 255.
3. Шот Р. І. Теплові процеси в поліграфії : навч. посіб. / Р. І. Шот, І. Т. Стрелко. — Львів : УАД «Фенікс», 1998. — С. 202.
4. Воробьев Д. В. Технология послепечатных процессов / Д. В. Воробьев. — М. : МГУП, 2000. — С. 392.
5. Озарків І. М. Науково-технічні основи конвективно-радіаційного сушіння деревини: автореф. дис. ... д-ра техн. наук : спец. 05.05.07 / І. М. Озарків. — Львів, 2006. — С. 26.
6. Гавенко С. Ф. Технологія ламінування друкарських відбитків / С. Ф. Гавенко, М. С. Мартинюк. — Львів : УАД, 2008. — С. 79.
7. Загаринская Л. А. Полиграфические материалы: учебник / Л. А. Загаринская, Б. Н. Шахкельдян. — М. : Книга, 1975. — С. 351.
8. Коляно Я. Ю. Нестаціонарна задача теплопровідності для двошарової плити щодо сушіння поліграфічної продукції / Я. Ю. Коляно, Т. С. Сасс // Комп'ютерні технології друкарства : зб. наук. праць — Львів : УАД, 2009. — № 21. — С. 226–234.
9. Угрин Я. М. Основи пакувальної справи. Металева тара: навч.-метод. посіб. / Я. М. Угрин, Ю. Й. Хведчин, І. І. Регей. — Львів : Укр. акад. друкарства, 2011. — С. 119.
10. Угрин Я. М. Основи пакувальної справи. Полімерна тара : навч.-метод. посіб. / Я. М. Угрин, Ю. Й. Хведчин, І. І. Регей. — Львів : Укр. акад. друкарства, 2011. — С. 142.
11. Йордан Г. М. Основи поліграфії / Г. М. Йордан. — Тернопіль : Підручники і посібники, 2007. — С. 176.
12. Подстригач Я. С. Термоупругость тел неоднородной структуры / Я. С. Подстригач, Ю. М. Коляно, В. А. Ломакин — М. : Наука, 1984. — С. 366.

13. Дурняк Б. В. Математична модель нестационарної стрічкопровідної ділянки / Б. В. Дурняк, І. М. Хмельницька, М. М. Луцків // Поліграфія і вид. справа : наук.-техн. зб. — Львів : УАД, 2008. — № 2. — С. 123–131.
14. Корн Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн. — М. : Наука, 1975. — 832 с.
15. Ильинский В. М. Строительная теплофизика / В. М. Ильинский — М. : Высшая школа, 1974. — С. 320.
16. Луцки П. П. Массотермическое деформирование капиллярно-пористых коллоидных тел в процессах сушки / П. П. Луцки // Теплообмен-VII. — Минск : 1984. — С. 90–93.
17. Исаченко В. П. Теплопередача / В. П. Исаченко, В. А. Осипова, А. С. Сукомел. — М. : Энергоиздат, 1981. — С. 416.

### **SIMULATION OF THE PROCESS OF HEAT AND MASS TRANSFER IN COMPOSITE POLYGRAPH STRUCTURES**

A mathematical model of the conductive heating process of composite polygraphic systems is formulated, which reduces to the solution of the initial boundary value problem for a homogeneous non-stationary thermal equation for a two-layer plate with asymmetric boundary conditions. The obtained initial boundary value problem for a non-stationary heat equation is solved by the method of Laplace integral transformations, namely: the transformation of temperature distributions in conjugate layers is obtained in the analytical form by the method of integral transformations of Laplace. Transformants of temperature distributions are represented in the form of linear combinations of hyperbolic trinometric functions. Numerical calculations of the stationary heat conduction problem for a double-layer infinite plate in relation to conductive drying are carried out; To study the composite structures of polymer-cardboard and polymer-paper are taken. The thermophysical parameters of cardboard, paper and polyurethane have been determined, which allows to simulate the process of conductive heating of cardboard of different thickness on the basis of the established stationary temperature distribution in two-layer composites of polyurethane-paper type, polyurethane-cardboard, which leads to the possibility of improving the process of conductive heating of two-layer printing materials and process compression of polymer films. It has been established that paper is the best thermal insulator than cardboard, since during the heating of a two-layer plate made of polyurethane and paper there are large temperature gradients than when heating a double-layer plate of the same thickness of polyurethane and cardboard. It has also been established that a layer of polyurethane with a thickness of 1 mm holds about the same temperature as a cardboard or paper, 5 mm thick. Numerical calculations of the stationary heat conduction problem for a two-layer infinite plate allow us to verify the adequacy of the solutions of the set nonstationary problem.

**Key words:** *thermal processing, mathematical model, polygraphic systems, non-stationary thermal conductivity problem, composite materials, thermodynamic parameters.*

Отримано: 21.05.2018

УДК 004.9:004.75

**Ю. М. Лисецкий**, д-р техн. наук  
ДП «ЭС ЭНД ТИ УКРАИНА», г. Киев

## **ДИНАМИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРЕДПРИЯТИЯ НА ОСНОВЕ СЕТЕЙ ПЕТРИ**

Рассмотрена проблема моделирования предприятия, как сложной производственной системы. Показано, что наиболее адекватным для построения бизнес-моделей, описывающих функционирование предприятия, является имитационное (динамическое) моделирование, которое рассматривает модель как совокупность правил, которые определяют, в какое состояние в будущем перейдет моделируемый объект из некоторого предшествующего состояния. Описано, что процесс динамического моделирования предприятия можно выразить следующим образом: предприятие сводится к иерархической модели, формируемой из элементарных функциональных модулей (бизнес-функций), которые объединяются в информационные потоки (бизнес-процессы), и организационной структуры предприятия (бизнес-организации). А совокупность моделей бизнес-функций, моделей бизнес-процессов и модели бизнес-организации представляет собой имитационную бизнес-модель предприятия. Рассмотрены сети Петри, в качестве средства построения динамических моделей систем и их анализа, с помощью которого можно получить информацию о структуре и динамическом поведении моделируемой системы. Эта информация нужна для оценки моделируемой системы и выработки предложений по её усовершенствованию, что позволяет гибко использовать данный математический аппарат для отображения и анализа причинно-следственных связей в различных процессах, происходящих в дискретных динамических системах. Поведение таких систем описывается выполнением событийной модели, а с помощью сети Петри моделируется структура и динамика ее функционирования. Приведена методика и элементы динамического моделирования предприятия на основе сетей Петри. Описаны виды сетей Петри и их основные свойства. Даны рекомендации по моделированию процессов в потоках сетей Петри. Показано, что сети Петри являются достаточно эффективным

**Ключевые слова:** *модель, предприятие, бизнес-процессы, бизнес-функции, классификация, правила, роли, сети Петри, конструктивные элементы, конструктивные блоки.*

**Введение.** Основная цель моделирования заключается в том, чтобы модель достаточно хорошо отражала исследуемый аспект функционирования системы. Наиболее адекватным для моделирова-

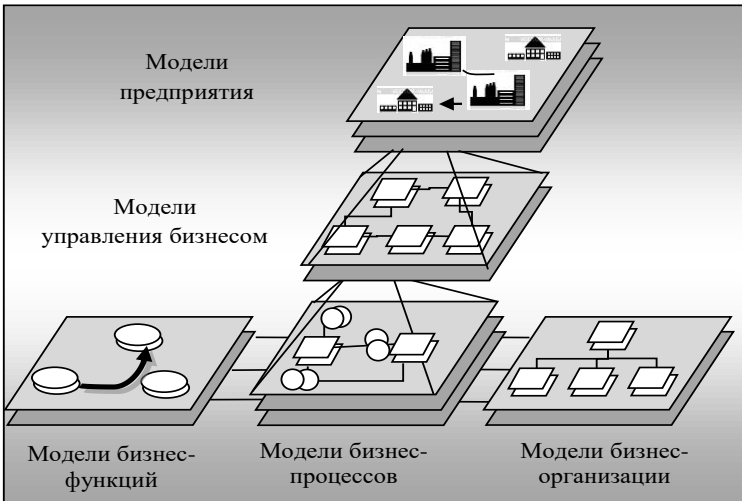
ния бизнес-деятельности предприятия, то есть для построения бизнес-моделей, описывающих функционирование предприятия, является имитационное моделирование.

Имитационное (динамическое) моделирование — создание модели, имитирующей поведение той или иной системы в изменяющихся во времени условиях [1].

К помощи имитационных моделей обращаются в случаях, когда объект моделирования настолько сложен, что адекватно описать его поведение математическими уравнениями невозможно либо затруднительно. Имитационное (динамическое) моделирование рассматривает модель как совокупность правил, которые определяют, в какое состояние в будущем перейдет моделируемый объект из некоторого предшествующего состояния [1].

**Цель статьи.** Рассмотрение процесса динамического моделирования предприятия на основе сетей Петри.

**Основная часть. Методика и элементы имитационного (динамического) моделирования предприятия.** В целом процесс динамического моделирования предприятия (Dynamic Enterprise Model) можно выразить следующим образом: предприятие сводится к иерархической модели, формируемой из элементарных функциональных модулей (бизнес-функций), которые объединяются в информационные потоки (бизнес-процессы), и организационной структуры предприятия (бизнес-организации) [2]. Совокупность моделей бизнес-функций, моделей бизнес-процессов и модели бизнес-организации представляет собой имитационную бизнес-модель предприятия (рис. 1).



*Рис. 1. Уровни динамического моделирования предприятия*

Бизнес-модели состоят из следующих компонентов:

- модель бизнес-функций, в состав которой входят дерево бизнес-функций, отношение оптимизации, «ноу-хау» в области совершенствования бизнеса, ключевые показатели деятельности;
- модель бизнес-процессов, которая состоит из основных бизнес-процессов и детальных бизнес-процессов.

В основе концепции динамического моделирования лежит построение (моделирование) предприятия в терминах и методами сетей Петри. При этом используются следующие подходы [2]:

- деятельность предприятия делится на виды в соответствии с функционально-организационной структурой;
- виды деятельности связаны двумя типами каналов: информационным и управляющим. Первый передает необходимую входную информацию для инициализации деятельности, а второй –право действия (знак исполнения, при поступлении которого на вход начинается выполнение бизнес-процессов, составляющих сущность деятельности);
- если деятельность имеет более одной бизнес-функции в бизнес-процессе, управление переходами происходит таким же образом — передачей входных данных и знака каналами, по которым связываются бизнес-функции в бизнес-процессы;
- после выполнения деятельности и по ее результатам знак копируется в один или несколько соответствующих каналов для передачи факта осуществления деятельности;
- после выполнения деятельности и по ее результатам (или по совокупности результатов нескольких видов деятельности) определяется одно и только одно новое направление знака.

Для понимания процедуры динамического моделирования предприятия следует рассмотреть сущность и свойства элементов динамической модели предприятия [2].

*Модель бизнес-процесса* — это описание общего производственного процесса в терминах конкретной корпоративной системы. Такая модель описывает бизнес-процессы в определенном направлении деятельности, которые могут поддерживаться конкретной корпоративной системой и как это может быть осуществлено. В модели можно создать иерархию, в результате чего, например, поток заказов внутри организации может быть смоделирован в так называемую «основную» процедуру, тогда как подробности о данном потоке заказа приводятся в схемах детальных процедур.

Модель бизнес-процесса имеет следующие цели:

- дать наглядное представление того, каким образом корпоративная система работает с бизнес-процессами высокого уровня, особенно

для определенного направления или вида деятельности (основные процедуры);

- дать наглядное представление и задокументировать общие бизнес-процессы (подробные процедуры), поддерживаемые системой;
- дать наглядное представление и задокументировать периодические детальные бизнес-процессы;
- дать наглядное представление и задокументировать процедуры начального запуска и установочные процедуры, необходимые для внедрения системы;
- зафиксировать разработку процесса (особенно для детальных бизнес-процессов) для приведения в движение операционного рабочего процесса;
- задокументировать административные процессы, при которых возможно приписать владельцев бизнес-процессов в зависимости от рода деятельности, должности, полномочий, должностных инструкций и тому подобное;
- разработать и задокументировать преобразования корпоративной системой бизнес-процессов, связанных с конкретным проектом.

Бизнес-процессы имеют следующие характеристики:

- бизнес-процессы состоят из ряда компонентов (состояний, видов деятельности и контроля). Работа является основной частью бизнес-процессов. Состояние предшествует каждому виду деятельности и определяется им. Деятельность может представлять собой сеанс работы с корпоративной системой, быть прикладным программным обеспечением, которое не принадлежит к ней, и неавтоматизированную деятельность или встроенный бизнес-процесс;
- бизнес-процессы моделируются на основе сетей Петри и могут иметь несколько иерархических уровней;
- должностные инструкции, документы аналогового вывода и коды утилит (сервисных программ) могут быть соотнесены с видами деятельности. Должностные инструкции могут содержать особую вспомогательную информацию для сеанса в пределах конкретного бизнес-процесса. В рамках определенного вида деятельности возможно соотнесение документа аналогового вывода, созданного в рамках данного вида деятельности. Коды утилит — это блоки сеансов, которые могут быть использованы как вспомогательные сеансы (сеанс вывода на экран, распечатка на принтере) при осуществлении определенного вида деятельности;
- вывод бизнес-процесса на экран в графическом виде может использоваться как интерфейс вместо структуры меню;
- работники и выполняемые ими функции могут быть соотнесены с видами деятельности бизнес-процесса;



- ссылки на другой бизнес-процесс могут быть применены к такому компоненту, как состояние, в результате чего может быть дано определение бизнес-процессу из нескольких переходов;
- любой узел контроля может иметь несколько выходных стрелок. Каждой стрелке может соответствовать определенное условие. С помощью так называемых «правил» данным условиям может быть предоставлено значение. Когда бизнес-процесс выводится на экран, происходит оценка значения условия, и, если условие не выполняется, часть диаграммы выводится на экран в затемненном виде.

В зависимости от модели бизнес-функции или установленных параметров схема бизнес-процесса может быть скомпонована динамично. В результате с самого начала общая схема будет конкретно ориентирована на одну из определенных бизнес-моделей. Работа является основной частью бизнес-процессов. Выделяют следующие типы работ:

- ручная работа — работа, не связанная с приложением;
- бизнес-процесс — работа как процесс, являющийся составной текущего процесса;
- сеанс;
- прикладная программа — программа, запускаемая с помощью вызова оболочки операционной системы;
- управляющая работа обозначает момент принятия решения в процессе, после чего процесс может разветвляться.

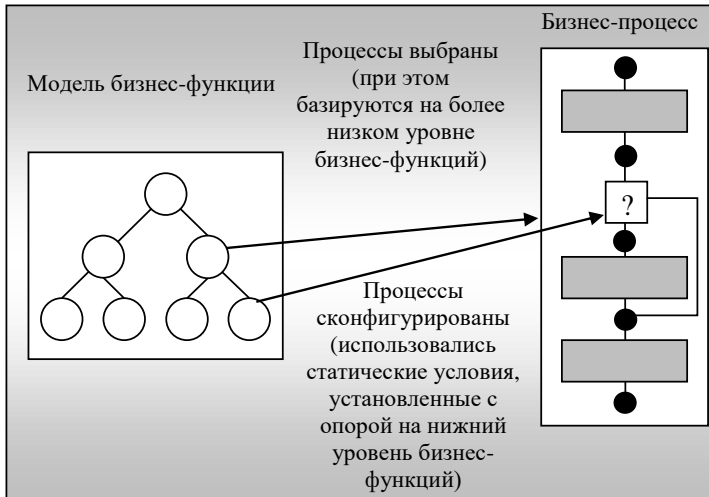
При описании работы выбирается тип работы, тип управляющего элемента (если работа является управляющей работой), код (если работа бизнес-процессом, сеансом, прикладной программой), аргумент (для сеанса аргумент определяет набор действий пользователя, которые ему разрешено выполнять во время работы в потоке работ), описание, категория работ, административно-организационный документ (связывает тип документа с работой), утилита, выбор типа события: событие пользователя, внешнее событие (работа ждет срабатывания внешнего триггера), событие таймера (работа ждет наступления определённого времени), автоматическая событие (если работа может быть выполнена без вмешательства пользователя) [2].

*Классификация бизнес-процессов.* В архиве бизнес-процессов различают главные и детализированные процессы. Главные процессы, воспроизводя общий товаро- и документооборот, соответствующие концептуальной модели, определенные специализацией бизнеса и, в принципе, являются уникальными. Детализированные процессы имеют обобщенный характер и могут применяться во многих секторах.

*Модель бизнес-функций.* Модель бизнес-функции представляет собой функциональную иерархическую декомпозицию бизнес-функций.

Отношения между такими бизнес-функциями образуют бизнес-процессы (рис. 2).

Бизнес-функции используются для достижения конкретных целей. В модели бизнес-функции они описываются терминами, привычными для бизнеса (а не терминами корпоративной системы). На низшем уровне бизнес-функции могут варьироваться в зависимости от варианта бизнес-модели. В этом случае подобные бизнес-функции называют вариантами бизнес-функции [2].



*Рис. 2. Преобразование бизнес-функций в бизнес-процессы*

Данный компонент моделирования предназначен для достижения следующих целей:

- модель бизнес-функции может быть использована как первый логический шаг в процессе моделирования, в котором на базе общих целей и бизнес-функций может быть создана модель бизнес-процесса;
- модель бизнес-функции может применяться как вспомогательное средство для советников и консультантов при проведении презентаций для руководства, на которых демонстрируется модель предприятия для определенной отрасли промышленности;
- модель бизнес-функции может служить средством представления отраслевого «ноу-хау» в области совершенствования хозяйственной деятельности (например, расширение направлений оптимизации бизнес-функций), лучшей практики ведения бизнеса и показателей деятельности;
- модель бизнес-функции может быть использована как инструмент наложения нейтральной бизнес-модели, определенной в терминах,

привычных в бизнесе, в специфическое для корпоративной системы решения.

Модель бизнес-функции может быть передана следующими характеристиками:

- бизнес-функции подаются как узлы в древовидной диаграмме, в которой может перемещаться пользователь;
- бизнес-функции могут объясняться текстами, в которых описываются характеристики отдельной бизнес-функции;
- с бизнес-функциями могут быть связаны показатели деятельности. В бизнес-моделях проекта конкретному показателю деятельности может быть приписано стандартное значение;
- между вариантами бизнес-функции могут существовать отношения оптимизации, указывающие на возможность поэтапного внедрения данных бизнес-функций. Отношения оптимизации могут быть связаны с текстами, с помощью которых описываются организационные аспекты оптимизации процессов;
- в модели бизнес-функции проекта варианты бизнес-функций объединяются с отношениями оптимизации, могут быть связаны с фазами внедрения.

*Классификация бизнес-функций.* Архив обобщенных бизнес-функций для всей промышленности требует системы классификации, чтобы иметь возможность отыскать необходимую структуру при формировании референтной модели. В системе динамического моделирования рассматривается иерархическое дерево бизнес-функций для классификации, соответствующее стандартной структуре, используемой британской аудиторско-консалтинговой компанией Ernst&Young [2]. В рамках этой структуры определены четыре иерархических уровня:

- мега-функции — каждая компания может быть классифицирована в соответствии с шестью мега-функциями (табл. 1). Эти мега-функции имеют обобщенный характер и не подчиняются определенной специализации деятельности. Упомянутые функции охватывают как управление, так и процессы стратегического планирования, развития и исполнения;
- главные функции — каждая мега-функция может включать несколько основных функций. Это означает, что имеет место функциональная декомпозиция. Главная функция теснее связана со специализацией бизнеса, чем мега-функция. Именно поэтому архив главных функций будет расти в процессе увеличения количества специализированных моделей бизнеса;
- базовые функции — каждая базовая функция представляет главный процесс в процессной модели. В совокупности они определены для одного варианта документооборота, который будет проработан;

- бизнес-функции, опции и варианты — базовые функции выражаются через формирование определенных подчиненных функций. Кроме этого, опции и варианты могут быть определены обслуживающей системой для замены или дополнения основного содержания бизнес-процессов.

В табл. 1 приведена стандартная классификация для бизнес-функций в соответствии со стандартом Ernst&Young.

Таблица 1

*Стандартная классификация бизнес-функций*

<b>Мега-функции</b>	<b>Главные функции</b>
1. Приобретение нового бизнеса	11. Рыночные исследования 12. Перспективы, клиентура, соотношения 13. Реклама, публикация, связь 14. Технологические нововведения, системные исследования 15...
2. Исполнение (реализация)	21. Деловое планирование 22. Контроль исполнения 23. Деловой контроль (управление) 24...
3. Поддержка	31. Финансовый бухгалтерский учет 32. Планирование и контроль (управление) 33. Казначейское планирование 34. Работа с персоналом 35...
4. Новое изделие и проект обслуживания	41. Нововведение изделия 42. Нововведение процесса 43. Нововведение обслуживания (службы) 44...
5. Действия: (подразделяются)	
5a Продажа	5a1. Заказ и предложение 5a2. Коммерческая обработка заказа 5a3. Ассигнование и финансовая оценка 5a4...
5b Разработка	5b1. Инженерное проектирование 5b2. Проведение разработки 5b3. Документация 5b4...
5c Планирование	5c1. Проектирование 5c2. Планирование производства и управление 5c3. Планирование инвентаря 5c4...
5d Производство	5d1. Управление цехом 5d2. Сбор данных 5d3. Регистрация использованных материалов 5d4...

Продолжение таблицы 1

5e Доставка	5e1. Приемные экзамены 5e2. Транспортирование и установка 5e3....
5f Закупка	5f1. Приобретение материалов 5f2. Закупка товарной продукции 5f3. Заключение договоров субподряда 5f4....
6. Послепродажная под- держка	61. Обслуживание жалоб 62. Гарантийное обслуживание 63. Послегарантийный ремонт 64. Планирование и контроль системы обслуживания

При внешней кодировке используется иерархичность классификации, например:

- мега-функции: 1, 2, 3,...;
- основные функции: 1.1, 1.2, 1.3,...;
- базовые функции: 1.1.1, 1.1.2, 1.1.3;
- функции и варианты: 1.1.1.1, 1.1.2.1, 1.1.3.1,...

**Правила.** Для построения из бизнес-функций бизнес-процессов и объединение последних в рамках модели бизнес-организации используется ряд правил, а именно:

1. *Правила целостности.* Правила целостности используются для проверки согласованности модели. Пример целостности: если есть в наличии вариант бизнес-функции «Прямая поставка», то бизнес-функции «Обработка заказа на приобретение» и «Обработка заказа на сбыт» должны быть представлены в модели. После того, как бизнес-модель создана, можно проверить ее согласованность, оценивая все правила целостности.

2. *Правила преобразования.* Модель бизнес-функции может быть автоматически преобразована в модель бизнес-процесса с помощью правил преобразования. Например: если вариант бизнес-функции «Обработка заказа на приобретение контрактам» был определен, необходимо выбрать бизнес-процесс «Обработка контрактов». Так же с помощью данных правил преобразования можно показать непосредственную связь модели бизнес-функции с моделью бизнес-процесса.

3. *Правила конфигурации.* Правила конфигурации используются для присвоения значения параметра в зависимости от его наличия в бизнес-функциях, бизнес-процессах или комбинаций последних в бизнес-модели. (Пример правила конфигурации: Если был определен вариант бизнес-функции «Обработка заказа на покупку в ЭОД (Электронный обмен данными)», то значение параметра ЭОД настраивается на «да»).

4. *Правила статического режима.* Контроль является одним из компонентов бизнес-процесса и используется для моделирования вариантов. Под термином «вариант» следует понимать условие. Условия

соединяются с входными стрелками на диаграммах сетей Петри. В дополнение к тексту в диаграмме условие может содержать значение, которое устанавливается путем использования правил. Если значение логического условия «Ошибочно», то в результате такая неактивная ветвь «дерева» сети Петри подается в затемненном виде. Поскольку эти правила могут быть определены в середине модели бизнес-функции, то возможным становится динамическое конфигурирование бизнес-процесса.

*Роли и обязанности.* Роль является функцией, которая может быть реализована только теми работниками, за которыми эта функция закреплена. Роли и, если необходимо, обязанности могут быть связаны с работами, бизнес-процессами, организационными компонентами и бизнес-функциями. С помощью ролей определяется, какие работники (группы работников) уполномочены на выполнение определенной работы (или имеют соответствующие обязанности) [2].

Различают два типа ролей:

«Роли по организационным единицам» являются функциями работников, связанных с организационными единицами в специфической для заказчика организационной диаграмме (проектной модели).

«Роли в бизнес-функциях» являются функциями работников, выполняемых в рамках определенных бизнес-функций.

Обязанность представляет собой определенную задачу, с помощью которой специфицируется роль (то есть функция, выполняемая группой работников), например:

- «Доступность для рекомендации»;
- «Необходимость в консультации»;
- «Необходимость в информировании»;
- «Принятие окончательного решения»;
- «Выполнение»;
- «Контроль исполнения».

С работой могут быть связаны не более шести ролей. Для каждой роли можно задать не более шести обязанностей.

Роли и обязанности унаследуются на нижних уровнях бизнес-процессов. Если для бизнес-процесса одна роль используется для всех обязанностей во всех работах, то достаточно связать эту роль и соответствующие обязанности с данным процессом. Наследование ролей и обязанностей не применяется к организационным компонентам и бизнес-функциям.

*Модель бизнес-организации* — это описание организационной структуры и структуры персонала организации. Структура персонала может быть описана на абстрактном уровне с помощью описания ролей или на конкретном уровне — сопоставлением работников и организационных единиц [2].

Модель бизнес-организации имеет следующие цели:

- получить представление о текущей и, по возможности, будущей (целевой) организационной структуре и задокументировать их;
- получить представление об изменениях в структурах подразделений компании в зависимости от расположения их в общей системе и задокументировать их;
- сделать возможным создание интерфейса пользователя корпоративной системы в разрезе работников или выполняемых функций, что облегчается наложением организационной модели на модель бизнес-процесса.

Модель бизнес-организации имеет следующие характеристики:

- организационная модель состоит из ряда организационных компонентов. С этими организационными компонентами можно соотнести имя, тип и текст;
- между организационными компонентами могут быть установлены функциональные отношения. К таким функциональными отношениями можно соотнести текст;
- организационная модель может состоять из одной или более организационных схем, которые могут соотноситься друг с другом посредством определения компонентов субдиаграмм;
- пользователи и функции, выполняемые ими, могут соотноситься с организационными компонентами;
- организационные модели могут определяться по фазам оптимизации так, чтобы создавать наглядное представление об эффекте проекта наложения бизнес-процессов на организацию.

В общем случае модель предприятия включает следующие объекты: основные данные, референты и модели, проектные модели [2].

Прежде чем воспользоваться некоторой референтной моделью и построить на ее основе для конкретного предприятия проектную модель, надо сначала ввести некоторые основные данные (рис. 3).

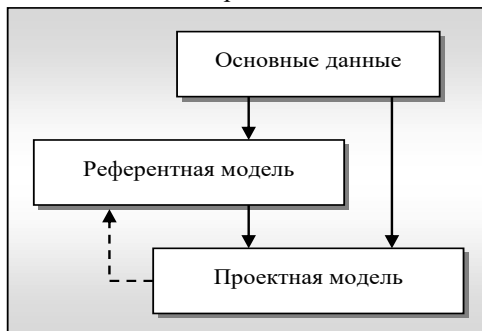


Рис. 3. Связь между объектами моделирования

Во-первых, должна быть определена версия, на основе которой будет создаваться модель. Во-вторых, компоненты, используемые в моделях, должны быть определены как основные данные. Последние включают такие составляющие, как бизнес-функции, бизнес-процессы и правила. Эти основные данные размещаются в так называемом архиве, содержащем конструктивные блоки для моделей, которые будут создаваться.

Затем создаются референтные модели, представляющие собой использование опыта и типологии организаций с высокой эффективностью моделирования. Каждая референтная модель состоит из модели бизнес-функций, модели организации и модели бизнес-процессов.

Эти модели описывают бизнес-функции в организации, иерархическую структуру организации и рабочее состояние действий, необходимых для выполнения бизнес-функции. Модели бизнес-функций и модели бизнес-процессов референтных моделей построены путем копирования из архива, в котором эти компоненты были определены. Далее создаются проектные модели, представляющие собой структуру определенной организации. Эти модели подобны референтным моделям, за исключением того, что они привязаны к одной конкретной организации. В проектных моделях можно определить варианты бизнес-функций, представляющих различные средства выполнения бизнес-функций. Для этих вариантов могут быть определены связи оптимизации, которые приводят оптимальные пути и какими нужно идти, переходя от одного средства работы в более оптимизированного средства.

Итак, можно сделать следующие выводы:

- 1) референтные модели состоят из ряда компонентов, доступных в архиве (как определено в бизнес-объекте «Основные данные»);
- 2) проектные модели часто основаны на референтных моделях;
- 3) проектные модели состоят из ряда компонентов, доступных в архиве (или недавно включенных или полученных с помощью референтных моделей);
- 4) референтные модели могут быть основаны на проектных моделях.

**Сети Петри как средство построения динамических моделей предприятия.** Метод моделирования «Сети Петри» был разработан Адамом Петри в 60-х годах XX в. С тех пор он стал одним из самых признанных стандартов моделирования процессов [3]. В динамическом моделировании предприятия метод сетей Петри служит средством описания потоков бизнес-процессов. Для осуществления такого описания используются четыре базовых конструктивных элемента (табл. 2).



Моделирование потока процесса через сети Петри базируется на нескольких принципах:

- деятельность начинается, когда есть хотя бы один символ работы во всех объединенных состояниях входа деятельности;
- деятельность потребляет один символ работы по каждому состоянию входа и производит один символ работы для каждого объединенного состояния выхода;
- действия управления имеют специальные возможности (табл. 3);
- они могут умножать один символ работы из состояния входа и помещать их в два или большее количество состояний выхода. Для этого строится конструкция AND-развилки;
- они могут маршрутизировать символ работы через процесс, размещая этот символ в один из объединенных состояний выхода, основанных на определенных состояниях. Этот способ реализуется через конструкции OR-развилки;
- они могут синхронизировать действия, выполненные в параллельных шагах. Для этого используется конструкция AND-сочетания.

Таблица 2

*Конструктивные элементы сетей Петри*





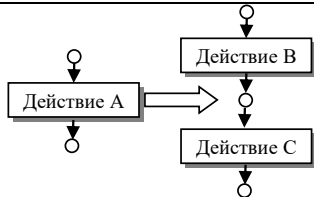
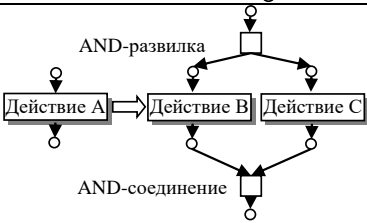
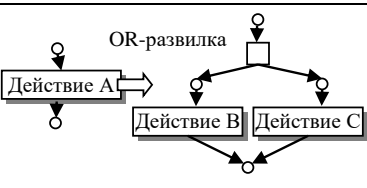
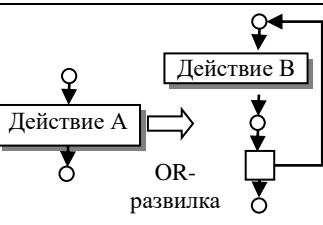
Конструктивный элемент	Характеристика
	<p>Состояния</p> <p>Состояния несут в себе символы работы, которые должны доработаться в деятельности, которая следует за символом состояния. Пример символа в состоянии — коммерческий заказ, который будет принят и подтвержден. Состояние может фиксировать определенный тип символа работы, описанный при определении состояния</p>
	<p>Действия управления</p> <p>Действия управления отвечают за перемещение символа работы в потоке процесса. Есть три возможности:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• (X) ОК — развилка (направление 1 или 2);</li> <li>• AND — развилка (параллельный);</li> <li>• АКВ — соединение (синхронизация)</li> </ul>
	<p>Процессы</p> <p>Ручные или автоматизированные действия, которые превращают символ работы из состояния входа в другой символ работы в состоянии выхода</p>
	<p>Подпроцессы</p> <p>Подпроцессы позволяют структурировать процессы на более низком уровне</p>

Таблица 3

*Конструктивные блоки сетей Петри*

Конструктивный блок	Характеристика
	<p><b>Распределение действий</b> Деятельность разделена на два действия В и С, выполненные в указанном порядке</p>
	<p><b>Действия, выполненные параллельно</b> Деятельность разделена на два действия В и С. Последовательность, в которой выполняются В и С, не имеет никакого значения. Однако оба должны быть выполнены до завершения процесса</p>
	<p><b>Специализированные действия</b> Деятельность разделена на два альтернативных действия В или С. На основе определенной деятельности состояния В или С отобраны R-объединением — единым местом выхода в конце процесса</p>
	<p><b>Итерация действий</b> Выполнение действий допускает выполнение деятельности В один или большее количество раз. Число итераций урегулируется во время определения состояния</p>

На основе опыта моделирования процессов в потоках сетей Петри можно предложить несколько рекомендаций:

- каждый поток процесса начинается и заканчивается только одним состоянием;
- вход и выход потока должны иметь четкое и однозначное формирование;
- нужно использовать только стандартные блоки. Это гарантирует корректные сети Петри, которые могут быть реализованы системой управления потоками;
- процесс следует ограничивать пятью-десятью шагами. Если требуется большее количество шагов, строится подпроцесс.

Данные рекомендации также основываются на свойствах сети Петри [4]:

- ограниченность сети Петри — свойство сети, число меток которой в любой позиции сети не может превысить некоторого значения  $K$ ;
- безопасность сети Петри — это частный случай ограниченности,  $K = 1$ ;
- сохраняемость сети Петри — это постоянство загрузки ресурсов, когда  $\sum A_i N_i$  постоянна, где  $N_i$  — число маркеров в  $i$ -той позиции,  $A_i$  — весовой коэффициент;
- достижимость сети Петри — возможность перехода сети из одного заданного состояния (характеризуемого распределением меток) в другое;
- активность (живость) сети Петри — возможность срабатывания любого перехода при функционировании моделируемого объекта.

В основе исследования перечисленных свойств лежит анализ достижимости. Методы анализа свойств сетей Петри основаны на использовании графов достижимых (покрывающих) маркировок, решении уравнения состояний сети и вычислении линейных инвариантов позиций и переходов. Применяются также вспомогательные методы редукции, позволяющие уменьшить размер сети Петри с сохранением ее свойств, и декомпозиции, разделяющие исходную сеть на подсети [4].

Сети Петри моделируют широкий класс систем, но для некоторых распространенных специальных классов систем удобно применять сети Петри не общего вида, а некоторые их подклассы или более адекватные рассматриваемым системам [5]:

- временную сеть — переходы обладают весом, определяющим продолжительность срабатывания (задержку);
- стохастическую сеть — задержки являются случайными величинами;
- функциональную сеть — задержки определяются как функции некоторых аргументов, например, количества фишек в каких-либо позициях, состояния некоторых переходов;
- цветную сеть — метки могут быть различных типов, обозначаемых цветами, тип метки может быть использован как аргумент в функциональных сетях;
- ингибиторную сеть — возможны ингибиторные дуги, запрещающие срабатывание перехода, если во входной позиции, связанной с переходом ингибиторной дугой, находится метка;
- иерархическую сеть — содержит не мгновенные переходы, в которые вложены другие, возможно, также иерархические, сети. Срабатывание такого перехода характеризует выполнение полного жизненного цикла вложенной сети.

При построении сетей Петри достаточно часто используют композиционный подход, который предполагает возможность построения более сложных сетей из менее сложных составляющих.

**Заключение.** Теория сетей Петри развивается по двум направлениям: формальному и прикладному. Формальная теория занимается разработкой средств, методов и понятий, необходимых для применения сетей Петри. Прикладная теория связана с применением сетей Петри к моделированию систем и их анализу [5]. Анализ помогает получить информацию о структуре и динамическом поведении моделируемой системы. Эта информация нужна для оценки моделируемой системы и выработки предложений по её усовершенствованию, что позволяет гибко использовать данный математический аппарат для отображения и анализа причинно-следственных связей в разнообразных процессах, происходящих в дискретных динамических системах различной природы. Поведение таких систем описывается выполнением событийной модели, а с помощью сети Петри моделируется структура и динамика ее функционирования.

Таким образом, сети Петри являются достаточно мощным инструментом для динамического моделирования предприятия как сложной производственной системы.

#### Список использованной литературы:

1. Советов Б. Я. Моделирование систем / Б. Я. Советов, С. А. Яковлев. — М. : Высшая школа, 2005. — 344 с.
2. Лисецкий Ю. М. Інформаційні системи і технології у менеджменті : монографія / Ю. М. Лисецкий. — К. : Логос, 2014. — 417 с.
3. Питерсон Дж. Теория сетей Петри и моделирование систем / Дж. Питерсон. — М. : Мир, 1984. — 264 с.
4. Сети Петри — математический аппарат для моделирования [Электронный ресурс]. — Режим доступа: [http://bourabai.kz/cm/petri\\_nets.htm](http://bourabai.kz/cm/petri_nets.htm).
5. Мальков М. В. Сети Петри и моделирование / М. В. Мальков, С. Н. Мальгина // Труды Кольского научного центра РАН. — 2010. — № 3. — С. 35–40.

#### DYNAMIC MODELING OF ENTERPRISE ON THE BASIS OF PETRI NETS

The paper considered the problem of modeling the enterprise as a complex production system. It has been demonstrated that imitational (dynamic) modeling is the most adequate method for building business models that describe enterprise functioning. Imitational modeling considers model as a combination of rules defining the state into which the modeled object will get from certain preceding state. The process of dynamic enterprise modeling can be described as a sequence of the following actions: the enterprise is brought to hierarchical model formed by elementary functional modules (business functions) which are combined into informational streams (business processes) and by enterprise organizational structure (business organization). The aggregate of business functions models, business process models

and business organization model is the imitational business model of the enterprise. The Petri nets have been considered as a means to build and analyze system dynamic models. The analysis allows eliciting information on structure and dynamic behavior of the modeled system. This information is required to assess the modeled system and generate suggestions on its improvement. This allows flexible usage of the above mathematical apparatus to reflect and analyze cause-and-effect relations in different processes in discrete dynamic systems. Behavior of such systems is described by the execution of the event model and Petri nets are used to model structure and dynamics of its functioning. There have been described methods and elements of enterprise dynamic modeling based on Petri nets. Types and essential features of Petri nets are described. There has been given recommendation for process modeling in the Petri nets streams. There has been demonstrated that efficiency of Petri nets is significantly high.

**Key words:** *model, enterprise, business processes, business functions, classifications, rules, roles, Petri nets, structural component, structural block.*

Отримано: 14.05.2018

УДК 519.6

**О. М. Литвин**, д-р. фіз.-мат. наук, професор,

**М. В. Артюх**

Українська інженерно-педагогічна академія, м. Харків

## **ТЕСТУВАННЯ МЕТОДУ ПОБУДОВИ ВИРОБНИЧИХ ФУНКЦІЙ ЗІ ЗМІННИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ (ВФЗКЕ)**

В статті розглядається класична виробнича функція Кобба-Дугласа, яка є виробничою функцією зі сталими коефіцієнтами та використовується для дослідження економічних систем будь-якого масштабу. Наведено формулу класичної виробничої функції Кобба-Дугласа та дано пояснення, що її параметри  $\alpha$ ,  $\beta$  є частинними коефіцієнтами еластичності. Але при більш детальному дослідженні виявилось, що можливо побудувати виробничу функцію зі змінними коефіцієнтами еластичності. Така виробнича функція зі змінними коефіцієнтами дозволяє отримати краще наближені дані. Наведено приклади побудови виробничої функції зі змінними коефіцієнтами та виробничої функції зі сталими коефіцієнтами, в яких порівнюється якість наближення виробничої функції Кобба-Дугласа та виробничої функції зі змінними коефіцієнтами. Розглянуто приклад виробничої функції зі змінними коефіцієнтами для дослідження економіки сільського господарства України. При проведенні досліджень, автори виявили, що очевидним є наступне твердження: середньоквадратичне відхилення  $\sigma$ , знайдене для наближення експериментальних даних за допомогою функцій зі

змінними коефіцієнтами еластичності, не може бути більшим, ніж середньоквадратичне відхилення, отримане для наближених функцій зі сталими коефіцієнтами еластичності.

Оскільки відслідковується ефективність використання виробничої функції зі змінними коефіцієнтами в дослідженні економічних задач, виникає необхідність провести тестування методу побудови виробничих функцій зі змінними коефіцієнтами. Сформульовано та доведено теорему про тестування методу побудови виробничих функцій зі змінними коефіцієнтами (ВФЗКЕ). Наводиться результат обчислювального експерименту з використанням виробничої функції зі змінними коефіцієнтами для ілюстрації доведеної теореми. В подальшому планується продовжити дослідження використання виробничих функцій зі змінними коефіцієнтами в інших економічних системах.

**Ключові слова:** *виробнича функція зі сталими коефіцієнтами, виробнича функція зі змінними коефіцієнтами, коефіцієнт еластичності, виробнича функція Кобба-Дугласа, метод побудови виробничих функцій зі змінними коефіцієнтами ВФЗКЕ.*

**Вступ.** При проведенні досліджень економічних систем різного масштабу на практиці доволі часто використовується економіко-математичне моделювання за допомогою виробничих функцій. Зокрема, досить уживаною є виробнича функція Кобба-Дугласа, оскільки вона легко може бути застосована для аналізу різноманітних форм суб'єктів господарювання.

Класична виробнича функція Кобба-Дугласа має вигляд [1]:

$$Y = AL^\alpha K^\beta, \quad (1)$$

де  $K$  — основний капітал,  $L$  — робоча сила,  $A, \alpha, \beta$  — параметри.

Параметри  $\alpha, \beta$  функції Кобба-Дугласа є частинними коефіцієнтами еластичності:

1) частинний коефіцієнт еластичності продукту по фондах

$$E_K = \frac{\partial Y}{\partial K} \cdot \frac{K}{Y} = A \beta L^\alpha K^{\beta-1} \frac{K}{AL^\alpha K^\beta} = \beta; \quad (2)$$

2) еластичність продукту по праці

$$E_L = \frac{\partial Y}{\partial L} \cdot \frac{L}{Y} = A \alpha L^{\alpha-1} K^\beta \frac{L}{AL^\alpha K^\beta} = \alpha. \quad (3)$$

Ці коефіцієнти еластичності відображають відсоток приросту обсягу випуску продукції при збільшенні витрат ресурсу на 1%.

Для функції Кобба-Дугласа коефіцієнти  $\alpha, \beta$  постійні й не залежать від обсягу факторів  $K, L$ .

**Аналіз останніх досліджень.** При більш детальному дослідженні виявилось, що можливо побудувати виробничу функцію зі змінними

коефіцієнтами еластичності. Така функція дозволяє отримати краще наближені дані [2–6].

Наприклад, було побудовано функцію зі змінними коефіцієнтами еластичності у вигляді:

$$Y(L, K, A, a, b) = A \cdot L^{f(L, K, a)} \cdot K^{g(L, K, b)}, \quad (4)$$

$$f(L, K, a) = \sum_{i=0}^M \sum_{m=0}^N a_{im} \varphi_i(L) \varphi_m(K), \quad (5)$$

$$g(L, K, b) = \sum_{i=0}^M \sum_{m=0}^N b_{im} \varphi_i(L) \varphi_m(K). \quad (6)$$

При проведенні обчислювального експерименту на основі даних Кобба-Дугласа була отримана така виробнича функція [4]:

$$Y = e^{48,021} \times L^{-15,515+0,074L+0,06K-2,244 \cdot 10^{-4} L \cdot K} \times K^{3,399-0,059L-0,43K+1,866 \cdot 10^{-4} L \cdot K}. \quad (7)$$

Для функції (7) середньоквадратичне відхилення  $\sigma_1 = 0,034$ , в той час, як для класичної виробничої функції Кобба-Дугласа

$$Y = 1,01 \cdot L^{0,75} \cdot K^{0,25} \quad (8)$$

$\sigma_2 = 0,054$ . Це підтверджує, що виробнича функція зі змінними коефіцієнтами еластичності краще наближується до фактичних значень.

Також було побудовано виробничу функцію зі змінними коефіцієнтами еластичності для дослідження економіки сільського господарства України [6]:

$$Y_z = e^{29,089} \times L^{-23,818-7,391 \cdot L+0,046K} \times K^{-12,302+5,69 \cdot L+0,014 \cdot K} \quad (9)$$

та виробничу функцію зі сталими коефіцієнтами:

$$Y_c = 2,374 \times L^{-0,779} \times K^{0,91}. \quad (10)$$

Для функції (9) середньоквадратичне відхилення  $\sigma_3 = 0,047$ , а для функції (10) —  $\sigma_4 = 0,057$ , що також доводить краще наближення до фактичних значень саме виробничої функції зі змінними коефіцієнтами. Інші приклади див. у [4–6].

Очевидним є наступне твердження: середньоквадратичне відхилення  $\sigma$ , знайдене для наближення експериментальних даних за допомогою функцій із змінними коефіцієнтами еластичності, не може бути більшим, ніж середньоквадратичне відхилення, отримане для наближуваних функцій зі сталими коефіцієнтами еластичності. Для доведення цього твердження достатньо відмітити, що випадок зі сталими коефіцієнтами еластичності отримується із загального випадку для рівних 0 всіх інших коефіцієнтів, що входять у вирази для функцій  $f(L, K, a)$ ,  $g(L, K, b)$ .

**Постановка задачі.** Оскільки відслідковується ефективність використання виробничої функції зі змінними коефіцієнтами в дослідженні економічних задач, виникає необхідність провести тестування методу побудови виробничих функцій зі змінними коефіцієнтами (ВФЗКЕ).

**Теорема 1.** Якщо у формулі (4) всі коефіцієнти поліномів  $f(L, K, a)$ ,  $g(L, K, b)$  та коефіцієнт  $A$  відомі, то метод ВФЗКЕ точно їх відновлює.

**Доведення.** В методі ВФЗКЕ для знаходження невідомих коефіцієнтів  $A$ ,  $a_{im}$ ,  $b_{im}$ ,  $i = \overline{0, M}$ ,  $m = \overline{0, N}$  на практиці зручно знаходити мінімум функціонала

$$j(C) = \sum_{p=1}^Q \left( A \cdot L_p^{f(L_p, K_p, a)} \cdot K_p^{g(L_p, K_p, b)} - Y_p \right)^2 \rightarrow \min_{A, a_{im}, b_{im}},$$

який отримується шляхом логарифмування функціоналу  $Y(L, K, a, b) = A \cdot L^{f(L, K, a)} \cdot K^{g(L, K, b)}$ . Отримаємо

$$\ln Y = \ln A + (\ln L) \cdot f(L, K, a) + (\ln K) \cdot g(L, K, b), \quad (11)$$

звідки знаходимо невідомі  $A$ ,  $a_{im}$ ,  $b_{im}$ ,  $i = \overline{0, M}$ ,  $m = \overline{0, N}$  [4]. Після знаходження невідомих  $A$ ,  $a_{im}$ ,  $b_{im}$ ,  $i = \overline{0, M}$ ,  $m = \overline{0, N}$  підставляємо їх у функцію (4), отримавши таким чином конкретну функцію вже з відомими коефіцієнтами

$$Y(L, K, A, a, b) = A \cdot L^{f(L, K, a)} \cdot K^{g(L, K, b)}. \quad (12)$$

Після цього у функцію (12) з відомими коефіцієнтами підставляємо вихідні дані  $K$ ,  $L$  і знову відновлюємо функціонал  $Y(L, K, a, b) = A \cdot L^{f(L, K, a)} \cdot K^{g(L, K, b)}$ . В результаті отримуємо матрицю з 0 (з урахуванням похибки).

**Теорему доведено.**

Було проведено обчислювальний експеримент з допомогою системи комп'ютерної математики Mathcad, що підтверджує дану теорему. Для відновлення функції використовували дані економіки США за 1899–1922рр., які наведено в статті Кобба-Дугласа (табл.1) [1].

Спочатку за цими даними було знайдено виробничу функцію зі змінними коефіцієнтами (7), після цього в цю функцію з відомими коефіцієнтами підставили вихідні дані з табл. 1 (робоча сила  $L$  та капітал  $K$ ) і відновили функцію.



Таблиця 1

Рік	Обсяг виробництва	Робоча сила (L)	Капітал (K)
1899	100	100	100
1900	101	105	107
1901	112	110	114
1902	122	118	122
1903	124	123	131
1904	122	116	138
1905	143	125	149
1906	152	133	163
1907	151	138	176
1908	126	121	185
1909	155	140	198
1910	159	144	208
1911	153	145	216
1912	177	152	226
1913	184	154	236
1914	169	149	244
1915	189	154	266
1916	225	182	298
1917	227	196	335
1918	223	200	366
1919	218	193	387
1920	231	193	407
1921	179	147	417
1922	240	161	431

В результаті проведення обчислювального експерименту отримано матрицю значень, наближених до 0. Похибка обчислень склала від  $-1,496 \cdot 10^{-5}$  до  $-8,427 \cdot 10^{-7}$ .

**Висновки.** Протестовано метод побудови виробничих функцій зі змінними коефіцієнтами (ВФЗКЕ). Доведено теорему про точне відновлення методом ВФЗКЕ коефіцієнтів для виробничої функції зі змінними коефіцієнтами (4).

В подальшому планується дослідити використання виробничих функцій зі змінними коефіцієнтами в різних економічних системах.

#### Список використаних джерел:

1. Cobb C. W. A Theory of Production / C. W. Cobb, P. H. Douglas // American Economic Review. — 1928. — December. — P. 139–165.
2. Артюх М. В. Загальне представлення функції двох змінних зі змінними дивідендами першого роду по X та по Y / М. В. Артюх // Праці міжнародної молодіжної математичної школи «Питання оптимізації обчислень (ПОО-

- XXXVII)». — К. : Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова НАН України, 2011. — С. 14–15.
3. Литвин О. М. Деякі теореми про виробничі функції від двох змінних зі змінними коефіцієнтами еластичності та їх застосування / О. М. Литвин, М. В. Артюх // Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут» : збірник наукових праць. Тематичний випуск: Математичне моделювання в техніці та технологіях. — Харків : НТУ «ХПІ», 2012. — № 2. — С. 23–29.
  4. Литвин О. М. Виробнича функція зі змінними коефіцієнтами еластичності, побудована на основі даних Кобба-Дугласа / О. М. Литвин, М. В. Артюх // Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут» : збірник наукових праць. Тематичний випуск: Математичне моделювання в техніці та технологіях. — Харків : НТУ «ХПІ», 2012. — № 27. — С. 124–129.
  5. Артюх М. В. Математична модель виробничої функції, яка явно залежить від капіталоозброєності та обсягів ресурсів / М. В. Артюх, О. М. Литвин // Інформатика та системні науки (ІСН-2014) : матеріали V Всеукр. наук.-практ. конф., (м. Полтава, 13-15 березня 2014 р.) / за ред. О. О. Ємця. — Полтава : ПУЕТ, 2014. — С. 34–37.
  6. Артюх М. В. Застосування дивідіріального та мультигального числень в дослідженні економіки сільського господарства України / М. В. Артюх, О. М. Литвин // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки : зб. наук. праць. — Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2016. — Вип. 13. — С. 16–26.

## TESTING THE METHOD OF CONSTRUCTING PRODUCTION FUNCTIONS WITH VARIABLE COEFFICIENTS (PFVCE)

In the article we consider the classical Cobb-Douglas production function, which is a production function with constant coefficients and is used for the study of economical systems of any scale. The formula for the classical production function of Cobb-Douglas is given and it is explained that its parameters  $\alpha$ ,  $\beta$  are partial elasticity coefficients. But with a more detailed study it turned out that it is possible to construct a production function with variable elasticity factors. Such a production function with variable coefficients allows for better approximation of data. Examples are given of construction of a production function with variable coefficients and a production function with constant coefficients in which the quality of the approximation of the Cobb-Douglas production function and the production function with variable coefficients are compared. An example of a production function with variable coefficients for the study of the economy of agriculture in Ukraine is considered. In the course of the research, the authors found that the following is evident: the mean square deviation  $\sigma$  found for the approximation of experimental data by means of functions with variable elasticity coefficients can not be greater than the mean square deviation obtained for approximating functions with stable elasticity coefficients.

Since the effectiveness of using the production function with variable coefficients in the study of economic problems is monitored, it is necessary

to test the method of constructing production functions with variable coefficients. A theorem on the testing of the method for constructing production functions with variable coefficients (PFVCE) is formulated and proved. The result of a computational experiment using a production function with variable coefficients for illustrating the proved theorem is given. In the future, it is planned to continue research on the use of production functions with variable coefficients in other economic systems.

**Key words:** *production function with constant coefficients, production function with variable coefficients, coefficient of elasticity, production function of Cobb-Douglas, method of constructing production functions with variable coefficients PFVCE.*

Отримано: 23.05.2018

УДК 539.3

**Р. С. Мусій**, д-р фіз.-мат. наук, професор,  
**Н. Б. Мельник**, канд. фіз.-мат. наук,  
**І. В. Андрусyak**, канд. фіз.-мат. наук,  
**О. Я. Бродяк**, канд. фіз.-мат. наук,  
**Л. В. Гошко**, канд. фіз.-мат. наук

Національний університет «Львівська політехніка», м. Львів

### **МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТА АНАЛІЗ ТЕРМОПРУЖНОЇ ПОВЕДІНКИ ЕЛЕКТРОПРОВІДНОГО ЦИЛІНДРА З ТОНКИМ ЕЛЕКТРОПРОВІДНИМ ПОКРИТТЯМ ЗА ІМПУЛЬСНОЇ ЕЛЕКТРОМАГНІТНОЇ ДІЇ**

Побудовано математичну модель визначення термонапруженого стану довгого суцільного електропровідного циліндра з тонким електропровідним покриттям та запропоновано критерії оцінки його роботоздатності і збереження властивостей контактної з'єднання залежно від параметрів зовнішньої нестационарної електромагнітної дії. Вибрано розрахункову модель задачі для розглядуваного електропровідного циліндра, що складається з трьох етапів.

На першому етапі зі співвідношень Максвелла визначається відмінна від нуля осьова компонента вектора напруженості магнітного поля в циліндрі і покритті та відповідні їй питомі густини джоулевих тепловиділень і пондеромоторних сил. На другому етапі з рівняння теплопровідності за відомими джоулевими тепловиділеннями знаходять розподіл температури в циліндрі і покритті. На третьому етапі за відомими пондеромоторними силами і температурою зі співвідношень плоскої осесиметричної задачі термопружності в переміщеннях визначаються радіальна компонента вектора переміщень та радіальна, колова і осьова

компоненти тензора динамічних напружень, а також інтенсивності сумарних напружень, зумовлених як Джоулевым теплом, так і пондеромоторними силами у циліндрі та покритті. Для розв'язування сформульованих початково-крайових задач термомеханіки запропоновано методіку, яка ґрунтується на апроксимації розподілів визначальних функцій (осьової компоненти вектора напруженості магнітного поля, температури і радіальної компоненти вектора переміщень) в циліндрі і покритті квадратичними поліномами за радіальною змінною. Дана методіка дала змогу звести вихідні початково-крайові задачі на визначальні функції до відповідних задач Коші за часом на інтегральні характеристики цих функцій. Знайдено розв'язки розглядуваної задачі термопружності за дії електромагнітного імпульсу і проведено комп'ютерний аналіз пондеромоторної сили, температури і радіальних та колових напружень. Результати аналізу проілюстровано графіками зміни в часі визначальних функцій в розгляданому циліндрі з тонким електропровідним покриттям.

**Ключові слова:** *математична модель, термомеханіка, довгий суцільний електропровідний циліндр, тонке електропровідне покриття, імпульсне електромагнітне поле, роботоздатність, властивості контактного з'єднання.*

**Вступ.** Електропровідні конструктивні елементи сучасних приладів і пристроїв в процесі їх роботи та експлуатації зазнають впливу різних фізичних дій — силових, температурних та електромагнітних [1, с. 7–10]. Такі дії створюють в цих елементах відповідний термонапружений стан, аналіз якого необхідний для прогнозування їх роботоздатності як конструктивних елементів.

Важливе значення мають електропровідні конструктивні елементи з тонким електропровідним покриттям [2, с. 77–83]. Таке покриття може створювати значний вплив на характер зміни в часі і по координатах температури і механічних напружень в розглядуваних конструктивних елементах.

Вплив силових та температурних факторів на конструктивні елементи з тонким покриттям розглянуто, зокрема, в роботах [3, с. 221–232; 4, с. 87–98]. Проте вплив зовнішніх нестационарних електромагнітних полів (ЕМП) на термопружну поведінку електропровідних конструктивних елементів з тонким електропровідним покриттям, які використовуються в різних пристроях [5, с. 123–147], зокрема в хвилеводах електромагнітного випромінювання радіочастотного діапазону, вивчено недостатньо.

**Метою роботи** є математичне моделювання термопружної поведінки електропровідного циліндра з тонким електропровідним покриттям (ЕЦТЕП) за нестационарної електромагнітної дії та її комп'ютерний аналіз за дії електромагнітного імпульсу (ЕМІ).

**1. Формулювання проблеми.** Розглядається електропровідний циліндр радіуса  $R$  з тонким електропровідним циліндричним покриттям товщини  $h = R_1 - R$ , де  $R_1$  — радіус його зовнішньої поверхні. Циліндр віднесений до циліндричної системи координат  $(r, \varphi, z)$ , вісь центр  $Oz$  якої співпадає з його віссю симетрії.

Циліндр знаходиться за дії однорідного нестационарного (ЕМП), заданого значеннями осьової компоненти  $H_z$  вектора напруженості магнітного поля  $\vec{H} = \{0; 0; H_z\}$  на його поверхні  $r = R_1$ , що є теплоізольованою і вільною від зовнішнього силового навантаження. Дія нестационарного ЕМП створює в циліндрі і тонкому покритті нестационарні об'ємно розподілені джерела джоулевого тепла  $Q$  і пондеромоторні сили  $\vec{F} = \{F_r; 0; 0\}$ . Ці два фізичні чинники створюють в циліндрі та тонкому покритті нестационарні поля температури  $T$  і механічних напружень, що описуються тензором динамічних напружень  $\hat{\sigma}$ . Значення температури  $T$  і напружень  $\hat{\sigma}$ , за якими проводиться оцінка роботоздатності ЕЦТЕП, залежать як від амплітудно-частотних характеристик ЕМП, так і від фізико-механічних характеристик циліндра і покриття, а також від електромагнітних, теплових і механічних умов на поверхні їх з'єднання.

Для визначення термонапруженого стану ЕЦТЕП побудовано математичну модель, яка використовує співвідношення термомеханіки двошарового електропровідного циліндра [6, с. 109–120]. Приймається, що на поверхні з'єднання Ц і ТП забезпечуються умови ідеального електромагнітного, теплового і механічного контактів [7, с. 35–43]. За певних значень параметрів ЕМП температура  $T$  і компоненти  $\sigma_{jj}$  ( $j = r, \varphi, z$ ) тензора  $\hat{\sigma}$  досягають величин, за яких відповідні їм інтенсивності напружень [8, с. 256–259]  $\sigma_i^H$  у циліндрі та  $\sigma_i^H$  у покритті можуть перевищувати межу плинності матеріалів циліндра  $\sigma_d^H$  чи покриття  $\sigma_d^H$ .

Важливим для функціонування ЕЦТЕП як конструктивного елемента є також збереження властивостей його контактного з'єднання. ЕЦТЕП втрачає такі властивості за умови, що максимальні значення інтенсивностей напружень на поверхні з'єднання  $r = R$  у циліндрі  $\sigma_{i*}^H$  чи у покритті  $\sigma_{i*}^H$  перевищують межу міцності  $\sigma_M$  контактного з'єднання.

Для встановлення граничних значень параметрів ЕМП, дія якого створює термонапружений стан ЕЦТЕП потрібно, розв'язавши на основі запропонованої математичної моделі динамічну задачу термомеханіки для ЕЦТЕП, обчислити величини інтенсивностей напру-

жень  $\sigma_i^U$  і  $\sigma_i^N$ , а також  $\sigma_{i*}^U$  і  $\sigma_{i*}^N$  і порівняти їх із відомими з експериментальних досліджень значеннями  $\sigma_d^U$  і  $\sigma_d^N$  та  $\sigma_M$ .

**2. Математична модель.** За таких умов розрахункова модель визначення термопружної поведінки розглядуваного циліндра складається з трьох етапів [6, с. 109–111]: на першому етапі з рівнянь електродинаміки визначається вектор напруженості магнітного поля  $\vec{H}^{(n)}$  в циліндрі ( $n = 1$ ) і покритті ( $n = 2$ ) та зумовлені ним джоулеві тепловиділення  $Q^{(n)}$  ( $n = 1, 2$ ) і пондеромоторні сили  $\vec{F}^{(n)}$  ( $n = 1, 2$ ); на другому — з рівнянь теплопровідності визначається розподіл температурного поля  $T^{(n)}$  ( $n = 1, 2$ ); на третьому — з рівнянь динамічної термопружності за відомою температурою і об'ємними силами визначаються компоненти вектора переміщень  $\vec{u}^{(n)}$  ( $n = 1, 2$ ) та тензора напружень  $\hat{\sigma}^{(n)}$  ( $n = 1, 2$ ).

**2.1. Визначення ЕМП.** Осьова компонента  $H_z^{(n)}(r, t)$  вектора  $\vec{H}^{(n)}$  в циліндрі ( $n = 1$ ) і покритті ( $n = 2$ ) визначається з рівняння [9, с. 250]

$$\frac{\partial^2 H_z^{(n)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial H_z^{(n)}}{\partial r} - \sigma_n \mu_n \frac{\partial H_z^{(n)}}{\partial t} = 0 \quad (1)$$

за граничних умов на зовнішній поверхні  $r = R_1$  циліндра

$$H_z^{(2)}(R_1, t) = H_z^+(t) \quad (2)$$

та умов ідеального електромагнітного контакту на поверхні  $r = R$  з'єднання циліндра і покриття

$$H_z^{(1)}(R, t) = H_z^{(2)}(R, t), \quad \frac{\partial H_z^{(1)}(R, t)}{\partial r} = k_\sigma \frac{\partial H_z^{(2)}(R, t)}{\partial r}, \quad (3)$$

а також початкових умов  $H_z^{(n)}(r, 0) = 0$ . Тут  $\sigma_n$ ,  $\mu_n$  — коефіцієнт електропровідності та магнітна проникливість матеріалів  $n$ -го тіла,  $k_\sigma = \sigma_1/\sigma_2$ .

За знайденою функцією  $H_z^{(n)}(r, t)$  питомі густини джоулевих тепловиділень  $Q^{(n)}(r, t)$  та пондеромоторної сили  $\vec{F}^{(n)} = \{F_r^{(n)}(r, t); 0; 0\}$  в  $n$ -му тілі визначаються за формулами

$$Q^{(n)} = \frac{1}{\sigma_n} \left( \frac{\partial H_z^{(n)}}{\partial r} \right)^2, \quad F_r^{(n)} = -\mu_n \left( \frac{\partial H_z^{(n)}}{\partial r} \right) H_z^{(n)}.$$

**2.2. Визначення температурного поля.** На другому етапі за знайденими питомими густинами джоулевих тепловиділень  $Q^{(n)}(r, t)$  визначаємо розподіл температури  $T^{(n)}(r, t)$  в кожному  $n$ -му ( $n = 1, 2$ ) тілі з рівняння теплопровідності [9, с. 251]

$$\frac{\partial^2 T^{(n)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T^{(n)}}{\partial r} - \frac{1}{\kappa_n} \frac{\partial T^{(n)}}{\partial t} = - \frac{Q^{(n)}}{\lambda_n}, \quad (4)$$

за крайової умови теплоізоляції зовнішньої поверхні  $r = R_1$  циліндра

$$\frac{\partial T^{(2)}(R_1, t)}{\partial r} = 0 \quad (5)$$

та умов ідеального теплового контакту на поверхні  $r = R$  з'єднання циліндра і покриття.

$$T^{(1)}(R, t) = T^{(2)}(R, t), \quad \frac{\partial T^{(1)}(R, t)}{\partial r} = k_\lambda \frac{\partial T^{(2)}(R, t)}{\partial r}, \quad (6)$$

а також за початкових умов  $T^{(n)}(r, 0) = 0$ . Тут  $\kappa_n$ ,  $\lambda_n$  — коефіцієнти температуро- і теплопровідності матеріалів  $n$ -го тіла,  $k_\lambda = \lambda_2 / \lambda_1$ .

**2.3. Визначення термонапруженого стану.** Для визначення відмінних від нуля радіальної  $\sigma_{rr}^{(n)}$ , азимутальної  $\sigma_{\varphi\varphi}^{(n)}$  та осьової  $\sigma_{zz}^{(n)}$  компонент тензора динамічних напружень  $\hat{\sigma}^{(n)}(r, t)$  в кожному  $n$ -му тілі ( $n = 1, 2$ ) за вихідну вибираємо систему рівнянь плоскої осесиметричної задачі термопружності в переміщеннях. Тоді радіальна компонента  $u_r^{(n)}(r, t)$  вектора переміщень в  $n$ -му тілі ( $n = 1, 2$ ) визначається з рівняння [9, с. 252]

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 u_r^{(n)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r^{(n)}}{\partial r} - \frac{1}{r^2} u_r^{(n)} - \frac{1}{c_n^2} \frac{\partial^2 u_r^{(n)}}{\partial t^2} = \\ & = \alpha_n \frac{1 + \nu_n}{1 - \nu_n} \frac{\partial T^{(n)}}{\partial r} - \frac{(1 + \nu_n)(1 - 2\nu_n)}{E_n(1 - \nu_n)} F_r^{(n)} \end{aligned} \quad (7)$$

за крайової умови на зовнішній поверхні  $r = R_1$  циліндра

$$\frac{\partial u_r^{(2)}(R_1, t)}{\partial r} + \frac{\nu_2}{1 - \nu_2} \frac{1}{R_1} u_r^{(2)}(R_1, t) = \alpha_2 \frac{1 + \nu_2}{1 - \nu_2} T^{(2)}(R_1, t) \quad (8)$$

та умов ідеального механічного контакту на поверхні  $r = R$  з'єднання циліндра і покриття

$$u_r^{(1)}(R, t) = u_r^{(2)}(R, t), \quad (9)$$

$$(1-\nu_1) \frac{\partial u_r^{(1)}(R,t)}{\partial r} + \nu_1 \frac{1}{R} u_r^{(1)}(R,t) - \alpha_1 (1+\nu_1) T^{(1)}(R,t) = \\ = k_E \left[ (1-\nu_2) \frac{\partial u_r^{(2)}(R,t)}{\partial r} + \nu_2 \frac{1}{R} u_r^{(2)}(R,t) - \alpha_2 (1+\nu_2) T^{(2)}(R,t) \right],$$

а також за початкових умов  $u_r^{(n)}(r,0) = 0$ ,  $\frac{\partial u_r^{(n)}(r,0)}{\partial r} = 0$ . Тут

$c_{1n} = (E_n(1-\gamma_n)/(\rho_n(1+\gamma_n)(1-2\gamma_n)))^{-1/2}$  — швидкість пружних хвиль розширення у циліндрі ( $n=1$ ) та покритті ( $n=2$ ),  $\alpha_n$ ,  $\nu_n$ ,  $E_n$  — коефіцієнти лінійного теплового розширення, Пуассона і модуль Юнга матеріалів циліндра і покриття.

За знайденою компонентою  $u_r^{(n)}(r,t)$  вектора переміщень  $\vec{u}^{(n)}$  визначаємо компоненти  $\sigma_{jj}^{(n)}$  ( $j=r,\varphi,z$ ) тензора напружень  $\hat{\sigma}^{(n)}$  в  $n$ -му тілі за формулами

$$\sigma_{rr}^{(n)} = \frac{E_n}{(1+\nu_n)(1-2\nu_n)} \left[ (1-\nu_n) \frac{\partial u_r^{(n)}}{\partial r} + \nu_n \frac{u_r^{(n)}}{r} - \alpha_n (1+\nu_n) T^{(n)} \right], \\ \sigma_{\varphi\varphi}^{(n)} = \frac{E_n}{(1+\nu_n)(1-2\nu_n)} \left[ (1-\nu_n) \frac{u_r^{(n)}}{r} + \nu_n \frac{\partial u_r^{(n)}}{\partial r} - \alpha_n (1+\nu_n) T^{(n)} \right], \\ \sigma_{zz}^{(n)} = \nu_n \left( \sigma_{rr}^{(n)} + \sigma_{\varphi\varphi}^{(n)} \right) - \alpha_n E_n T^{(n)}. \quad (10)$$

За відомими сумарними напруженнями  $\sigma_{jj}^{(n)}$  знаходимо інтенсивності напружень  $\sigma_i^{(n)}$  в  $n$ -му тілі, які будуть

$$\sigma_i^{(n)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\left( \sigma_{rr}^{(n)} - \sigma_{\varphi\varphi}^{(n)} \right)^2 + \left( \sigma_{\varphi\varphi}^{(n)} - \sigma_{zz}^{(n)} \right)^2 + \left( \sigma_{zz}^{(n)} - \sigma_{rr}^{(n)} \right)^2}. \quad (11)$$

За обчисленими інтенсивностями  $\sigma_i^{(n)}$  і  $\sigma_{*i}^{(n)}$  на основі запропонованих вище критеріїв проводимо оцінку роботоздатності ЕЦТЕП і властивостей його контактного з'єднання.

**3. Методика розв'язування сформульованих задач.** Для побудови розв'язків сформульованих початково-крайових задач (1)–(3), (4)–(6) і (7)–(9) апроксимуємо ключові функції  $H_z^{(n)}(r,t)$ ,  $T^{(n)}(r,t)$ ,  $u_r^{(n)}(r,t)$  за радіальною змінною в  $n$ -му тілі квадратичними многочленами [9, с. 253; 10, с. 61]:



$$\Phi^{(n)}(r, t) = \sum_{i=0}^2 a_i^{(n)}(t) r^i. \quad (12)$$

Коефіцієнти  $a_i^{(n)}$  апроксимаційних поліномів (12) подаємо у вигляді лінійної комбінації

$$a_i^{(n)}(t) = a_{i1}^{(n)} \Phi_1(t) + a_{i2}^{(n)} \Phi_2(t) + a_{i3}^{(n)} \Phi^+(t) + a_{i4}^{(n)} \Phi_0(t)$$

граничних значень  $\Phi^+(t)$  шуканих функцій на поверхні  $r = R_1$  та сумарних по основі і покритті циліндра інтегральних характеристик

$$\Phi_s(t) = \sum_{n=1}^2 \int_{r_{n-1}}^{r_n} \Phi^{(n)}(r, t) r^{s+l} dr, \quad s = 1, 2 \quad (13)$$

ключових функцій  $\Phi^{(n)}(r, t)$ . Рівняння на інтегральні характеристики  $\Phi_s(t)$  отримуємо, інтегруючи рівняння (1), (4), (7) згідно формули (13). Тоді початково-крайові задачі стосовно ключових функцій зводяться до задач Коші на інтегральні характеристики. Розв'язки задач Коші отримано за використанням інтегрального перетворення Лапласа на всьому числовому інтервалі електромагнітної дії і приведено в роботах [9, с. 253; 10, с. 62].

#### 4. Числовий аналіз задачі за дії електромагнітного імпульса.

Чисельно проаналізовано термонапружений стан електропровідного циліндра з тонким покриттям за дії електромагнітного імпульсу, який математично описуємо функцією [11, с. 186–189]

$$H_z^+(t) = kH_0 \left( e^{-\beta_1 t} - e^{-\beta_2 t} \right). \quad (14)$$

Тут  $k$  — нормувальний коефіцієнт,  $H_0$  — максимальне значення напруженості магнітного поля на поверхні  $r = R_1$  циліндра,  $\beta_1$  і  $\beta_2$  — параметри, що відповідають часам фронтів наростання  $\tau_{\phi.n.}$  і спадання  $\tau_{\phi.c.}$  імпульсу. Підставляючи вираз (14) в загальні розв'язки задачі, приведені в роботі [6, с. 115–119], отримано розв'язок задачі термонапруженості для розглядуваного циліндра за дії ЕМІ. Комп'ютерний аналіз отриманого розв'язку виконано для циліндра, виготовленого зі сталі X18H9T, його покриття — з міді. Радіуси поверхонь  $R = 1 \cdot 10^{-3}$  м,  $R_1 = 1.1 \cdot 10^{-3}$  м. Тривалість імпульсу  $\tau_i = 10^{-4}$  с, співвідношення  $\tau_{\phi.n.} / \tau_{\phi.c.} \approx 0.1$ .

На рис.1–6 показано зміну в часі радіальної компоненти  $F_r^{(n)}(r, t)$  вектора пондеромоторної сили і температури  $T^{(n)}(r, t)$ , радіальної  $\sigma_{rr}^{(n)}$  і колової  $\sigma_{\varphi\varphi}^{(n)}$  компонент тензора динамічних напружень, зумовлених дією пондеромоторної сили і Джоулевым теплом по-

середині шарів основи і покриття. Лінії 1, 2 на рисунках відповідають значенням величин в основі при  $r = 5 \cdot 10^{-4}$  м та покритті при  $r = 1,05 \cdot 10^{-3}$  м. Коливні осциляції складників напружень  $\sigma_{\varphi\varphi}^{F(n)}$  і  $\sigma_{\varphi\varphi}^{Q(n)}$ , зображені на рис. 4, 6, в основі і покритті взаємно накладаються. Відповідно амплітуди осциляцій цих складників колових напружень в основі перевищують такі ж амплітуди в покритті. Максимальні значення стискальних напружень  $\sigma_{\varphi\varphi}^{F(n)}$  і  $\sigma_{\varphi\varphi}^{Q(n)}$  однакового порядку в основі і покритті. Таким чином, термонапружений стан даного циліндра за вибраних геометричних параметрів і параметрів електромагнітного імпульсу визначається як напруженнями, зумовленими джоулевым теплом, так і напруженнями, зумовленими пондеромоторною силою.

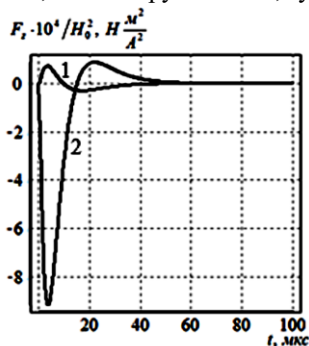


Рис. 1. Зміна в часі пондеромоторної сили  $F_r^{(n)}$

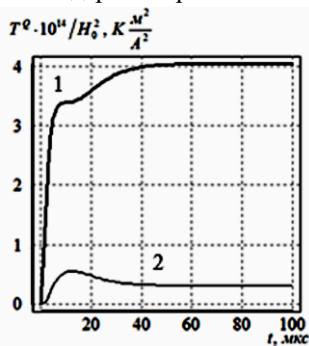


Рис. 2. Зміна в часі температури  $T^{(n)}$

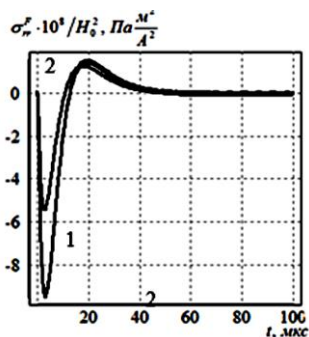


Рис. 3. Зміна в часі складників радіальних напружень, зумовлених дією пондеромоторної сили  $F_{rr}^{(n)}$

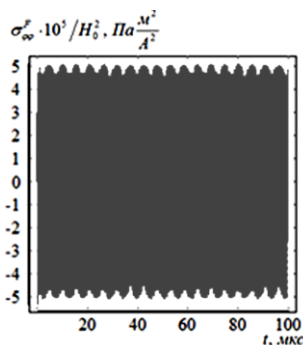
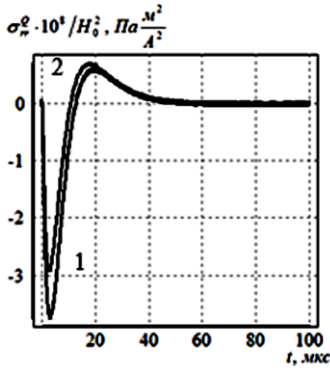
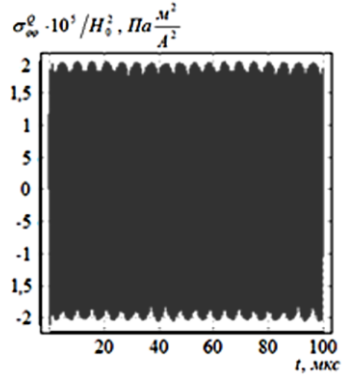


Рис. 4. Зміна в часі складників колових напружень, зумовлених дією пондеромоторної сили  $\sigma_{\varphi\varphi}^{F(n)}$



*Рис. 5. Зміна в часі складників радіальних напружень, зумовлених дією джоулевого тепла  $\sigma_{rr}^{Q(n)}$*



*Рис. 6. Зміна в часі складників колових напружень, зумовлених дією джоулевого тепла  $\sigma_{\varphi\varphi}^{Q(n)}$*

**Висновки.** Вплив мідного покриття проявляється в зростанні максимальних значень всіх величин порівняно з такими ж значеннями для аналогічного сталевого циліндра без покриття, а також у тому, що радіальні напруження, зумовлені як пондеромоторною силою, так і джоулевим теплом, у циліндрі з покриттям стають приблизно вдвічі більшими за колові і осеві напруження.

### Список використаних джерел:

1. Гачкевич О. Р. Термомеханіка неферомагнітних електропровідних тіл за дії імпульсних електромагнітних полів з модуляцією амплітуди / О. Р. Гачкевич, Р. С. Мусій, Д. В. Тарлаковський. — Львів : СПОЛОМ, 2011. — 216 с.
2. Малахов А. И. Коррозия и основы гальваностегии / А. И. Малахов, К. М. Тютина. — М. : Химия, 2007. — 238 с.
3. Мэттьюз Ф. Композитные материалы. Механика и технология / Ф. Мэттьюз, Р. Ролингс. — М. : Техносфера, 2004. — 408 с.
4. Арзамасов В. Б. Материаловедение / В. Б. Арзамасов, А. А. Черепанин. — М. : Академия, 2013. — 176 с.
5. Батыгин Ю. В. Импульсные магнитные поля для прогрессивных технологий / Ю. В. Батыгин, В. И. Лавинский, Л. Т. Хименко. — Харьков : МОСТ — Торнадо, 2003. — 288 с.
6. Hachkevych O. Mathematical modeling of physico-mechanical processed in two-layer electrodeduction bodies under impulse electromagnetic fields / O. Hachkevych, O. Humenchuk, N. Melnyk, R. Musii // Manufacturing processes. Actual problems — 2017. — Opole, 2017. — Vol. II: Modeling and optimization of manufacturing processes. — P. 109–120.
7. Термоупругость электропроводных тел / Я. С. Подстригач, Я. И. Бурак, А. Р. Гачкевич, Л. В. Чернявская. — К. : Наук. думка, 1977. — 248 с.

8. Ионов В. Н. Напряжения в телах при импульсивном нагружении / В. Н. Ионов, П. М. Огибалов. — М. : Высш. школа, 1975. — 463 с.
9. Мусій Р. С. Термонапружений стан довгого порожнистого біметалевого циліндра за електромагнітної дії в режимі з імпульсним модульним сигналом / Р. С. Мусій, Н. Б. Мельник // Вестник Херсонского национального технического университета. — Херсон, 2012. — № 2(45). — С. 250–254.
10. Musij R. Effect of resonant frequencies in thermostressed state and load-carrying ability of bimetallic layer by electromagnetic action in the mode with pulse modulating signal / Р. С. Мусій, Н. Б. Мельник, М. М. Махоркін // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. — 2016. — Вип. 24. — С. 58–65.
11. Мусій Р. С. Динамічні задачі термомеханіки електропровідних тіл канонічної форми : монографія / Р. С. Мусій. — Львів : Вид-во «Растр-7», 2010. — 216 с.

### **THE MATHEMATICAL MODELING AND ANALYSIS OF THE THERMOELASTIC BEHAVIOR OF THE ELECTROCONDUCTIVE CYLINDER WITH A THIN ELECTROCONDUCTIVE COATING UNDER THE NON-STATIONARY ELECTROMAGNETIC ACTION**

A mathematical model for determination of the thermostressed state of a long integrate electroconductive cylinder with a thin conductive coating is constructed and the evaluation criterion for its operability and properties preservation of contact connection depending on the parameters of the external electromagnetic action is proposed. A calculation model of the problem for the considered electroconductive cylinder consisting of three stages is selected. In the first stage, from the Maxwell relations the nonzero axial component of the magnetic field stress vector in the cylinder and in the coating and the corresponding to it specific densities of the Joule heat ejections and ponderomotive forces are determined. In the second stage, from the equation of the heat conductivity taking into account the known Joule heat ejections, the temperature distribution in the cylinder and in the coating are obtained. In the third stage, according to the known ponderomotive forces and temperature, from the relations of the plane axisymmetric problem of thermoelasticity in displacements, the radial component of the displacement vector and the radial, circle and axial components of the dynamic stresses tensor, as well as the intensity of the total stresses caused both by Joule heat and ponderomotor forces in the cylinder and coverings are determined. For solving the formulated initial-boundary value problems of thermomechanics, the method which is based on approximation of distributions of the determining functions (axial components of the magnetic field stress vector, temperature and radial component of the displacement vector) in the cylinder and in the cover by the quadratic polynomials in radial variable was proposed. This method has made it possible to reduce the initial-boundary value problems for the determining functions to the corresponding time Cauchy problems on the integral characteristics of these functions. The solutions of the considered thermoelasticity problem under the action of electro-

magnetic impulse were obtained and the computer analysis of the ponderomotive force, the temperature and the radial and circular stresses was done. The results of the analysis are illustrated by the graphs of time dependence of determining functions in the considered cylinder with a thin conductive coating.

**Key words:** *mathematical model, thermomechanics, long integrate electroconductive cylinder, pulsed electromagnetic field, bearing capacity, properties of the contact connection.*

Отримано: 30.05.2018

UDC 004.94

**V. V. Ponedilok**, senior lector

Kamianets-Podilskyi National Ivan Ohiienko University,  
Kamianets-Podilskyi

## **REGULARIZATION METHOD OF RESTORATION OF INPUT SIGNALS OF NONLINEAR DYNAMIC OBJECTS THAT DETERMINED BY INTEGRO-POWER VOLTERRA SERIES**

The article offers a regularization method for solving the polynomial integral Volterra equations of the first kind while solving the problem of restoration of the input signal of a nonlinear dynamic object determined by the integro-power Volterra series. The use of integro-power Volterra series makes it possible to simplify the primary nonlinear mathematical models of nonlinear dynamic objects turning them into quasi-linear ones. Polynomial Volterra equations of the first kind are solved by introducing the additional differential regularization operator. It is offered to solve the obtained integro-differential equations using quadrature algorithms by iterative methods. This approach allows makes it possible to increase the efficiency of the process of signals restoration on the input of nonlinear dynamic objects if there is noise. The efficiency of the offered algorithm is verified for the restoration of input signal of a nonlinear dynamic object given in the form of a sequential connection of linear and nonlinear parts. At the same time, the linear part is represented by an inertial joint, while the nonlinear is represented by polynomial dependence of the second kind. There are presented the results of solving of polynomial Volterra integral equations of the first kind in the presence of different noises on the input dependencies. Based on the described method, in Matlab / Simulink, there are created simulation models and software-based methods for solving inverse problems of signal restoration on the input of nonlinear dynamic objects. The results of computational experiments demonstrated that the offered regularization method for solving the polynomial Volterra integral

equations of the first kind may be effectively used to restore the input signals of nonlinear dynamical systems being described by the integro-power Volterra series.

**Keywords:** *input signals restoration, polynomial Volterra integral equation of the first kind, differential regularization operator, Matlab.*

**Introduction.** When solving the problem of the input signal of nonlinear dynamic systems restoration, as well as the problems of control, monitoring and diagnostics, serving as examples of ill-posed problem, usually it is necessary to solve the Volterra nonlinear equations of the first kind being more complex problems. The use of regularization methods is the most common approach to solving such ill-posed problems. A promising direction in solving such complex problems is the use of integro-power Volterra series, simplifying primary nonlinear mathematical models by transforming them into quasilinear ones. The use of tools of the integro-power Volterra series and regularization methods determines the need of creation of new and more effective mathematical methods and corresponding software-based means for solving inverse problems for nonlinear dynamic objects.

The universal mathematical model of nonlinear dynamical systems of the black box type is the integro-power Volterra series [3]:

$$y(t) = \int_0^t K_1(t, s)x(s)ds + \int_0^t \int_0^t K_2(t, s_1, s_2)x(s_1)x(s_2)ds_1ds_2 + \dots, \quad (1)$$

where  $x(t)$ ,  $y(t)$  — is the input and output signals of the object, accordingly,  $t$  — transition process time,  $K_i(t_1, \dots, t_i)$  — Volterra kernel.

The solution of inverse problems leads to the polynomial integral Volterra equations of the first kind (1). No effective methods and means exist to solve this class of equations, that is why it is crucial to improve and develop new methods for solving integral Volterra equations of the first kind.

The **purpose** of this paper is to develop a method for solving the inverse problems of the dynamics of nonlinear objects by solving the polynomial integral Volterra equations of the first kind.

**Main part.** It is offered to solve the problem by replacing the integrals in (1) to quadrature formulas, providing many advantages simpler implementation and high stability of computational algorithms thanks to the regularizing properties of the quadrature step [1].

The application of this method is considered while solving the polynomial Volterra integral equation of the second kind:

$$y(t) = \int_0^t K_1(t, s)x(s)ds + \int_0^t \int_0^t K_2(t, s_1, s_2)x(s_1)x(s_2)ds_1ds_2. \quad (2)$$

Solving the posed problems of restoration of the signals passing through nonlinear dynamic signals is incorrect and the application of clas-

sical methods, with input signals with noises, fails to provide the required accuracy solutions. It is offered to use the first kind differential regularization operator. In such a case solving the polynomial Volterra equation is reduced to the solving of the following equation:

$$\alpha \frac{dx}{dt} + \int_0^t K_1(t, s)x(s)ds + \int_0^t \int_0^t K_2(t, s_1, s_2)x(s_1)x(s_2)ds_1ds_2 = y(t), \quad (3)$$

where  $\alpha$  – regularization parameter.

Having applied to (3) the trapezoid method [4] difference formula of the first order we will obtain:

$$\begin{aligned} y(t_i) = & \alpha \frac{x(t_i) - x(t_{i-1})}{h} + \frac{1}{2}hK_1(t_i, t_i)x(t_i) + \sum_{j=1}^{i-1} hK_1(t_i, t_j)x(t_j) + \\ & + \frac{1}{2}hK_1(t_i, t_0)x(t_0) + \frac{1}{4}h^2K_2(t_i, t_0, t_0)x(t_0)x(t_0) + \\ & + \frac{1}{2}h^2 \sum_{j=1}^{i-1} (K_2(t_i, t_0, t_j) + K_2(t_i, t_j, t_0))x(t_0)x(t_j) + \\ & + h^2 \sum_{j=1}^{i-1} \sum_{g=1}^{i-1} K_2(t_i, t_j, t_g)x(t_j)x(t_g) + \\ & + \frac{1}{4}h^2 (K_2(t_i, t_i, t_0) + K_2(t_i, t_0, t_i))x(t_0)x(t_i) + \\ & + \frac{1}{2}h^2 \sum_{j=1}^{i-1} (K_2(t_i, t_i, t_j) + K_2(t_i, t_j, t_i))x(t_j)x(t_i) + \frac{1}{4}h^2K_2(t_i, t_i, t_i)x(t_i)x(t_i), \end{aligned} \quad (4)$$

where  $i = \overline{1..n}$ ,  $h = t_i - t_{i-1}$ . Let's rewrite (4) having grouped addends for desired  $x(t_i)$ :

$$\begin{aligned} y(t_i) = & \frac{1}{4}h^2K_2(t_i, t_i, t_i)x(t_i)x(t_i) + \left( \frac{1}{4}h^2 (K_2(t_i, t_i, t_0) + K_2(t_i, t_0, t_i))x(t_0) + \right. \\ & + \left. \frac{1}{2}h^2 \sum_{j=1}^{i-1} (K_2(t_i, t_i, t_j) + K_2(t_i, t_j, t_i))x(t_j) + \frac{1}{2}hK_1(t_i, t_i) + \frac{\alpha}{h} \right)x(t_i) + \\ & + \sum_{j=1}^{i-1} hK_1(t_i, t_j)x(t_j) + \frac{1}{2}hK_1(t_i, t_0)x(t_0) + \frac{1}{4}h^2K_2(t_i, t_0, t_0)x(t_0)x(t_0) + \\ & + \frac{1}{2}h^2 \sum_{j=1}^{i-1} (K_2(t_i, t_0, t_j) + K_2(t_i, t_j, t_0))x(t_0)x(t_j) + \\ & + h^2 \sum_{j=1}^{i-1} \sum_{g=1}^{i-1} K_2(t_i, t_j, t_g)x(t_j)x(t_g) - \frac{\alpha}{h}x(t_{i-1}). \end{aligned} \quad (5)$$

Let introduce:

$$A_i = \frac{1}{4} h^2 K_2(t_i, t_i, t_i), \quad (6)$$

$$B = \frac{1}{4} h^2 (K_2(t_i, t_i, t_0) + K_2(t_i, t_0, t_i)) x(t_0) + \frac{1}{2} h^2 \sum_{j=1}^{i-1} (K_2(t_i, t_i, t_j) + K_2(t_i, t_j, t_i)) x(t_j) + \frac{1}{2} h K_1(t_i, t_i) + \frac{\alpha}{h}, \quad (7)$$

$$C_i = \sum_{j=1}^{i-1} h K_1(t_i, t_j) x(t_j) + \frac{1}{2} h K_1(t_i, t_0) x(t_0) + \frac{1}{4} h^2 K_2(t_i, t_0, t_0) x(t_0) x(t_0) + \frac{1}{2} h^2 \sum_{j=1}^{i-1} (K_2(t_i, t_0, t_j) + K_2(t_i, t_j, t_0)) x(t_0) x(t_j) + h^2 \sum_{j=1}^{i-1} \sum_{g=1}^{i-1} K_2(t_i, t_j, t_g) x(t_j) x(t_g) - \frac{\alpha}{h} x(t_i) - y(t_i). \quad (8)$$

Then (5) considering (6)–(8) will be:

$$A_i x_i^2 + B_i x_i + C_i = 0 \quad (9)$$

$n$  square equations (9) are solved sequentially based on the iterative method, the root of the previous equation is taken as the initial approximation.

Generally, we should search for the roots of a polynomial of some kind. For the computer implementation of the algorithms for solving the polynomial equation, it is offered to use the MATLAB — fzero. But, there it is necessary to separate the real and complex roots that may be solved by the roots function [2].

The essence of the roots function is that the roots of the polynomial equation

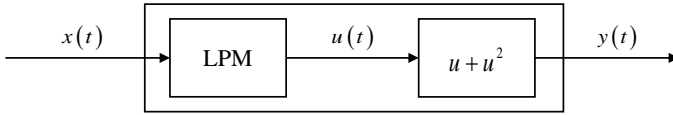
$$p(x) = a_1 x^n + a_2 x^{n-1} + \dots + a_n x + a_{n+1} \quad (10)$$

are the numbers of the so-called companion matrix being determined for the given polynomial (10) as follows:

$$C = \begin{pmatrix} -\frac{a_2}{a_1} & -\frac{a_3}{a_1} & \dots & -\frac{a_n}{a_1} & -\frac{a_{n+1}}{a_1} \\ a_1 & a_1 & & a_1 & a_1 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Computational experiments.** The effectiveness of this approach was studied while the signal restoration that passes through the system given in Fig. 1, where LPM is the linear part model. In this system, the nonlinearity of the second kind is considered.



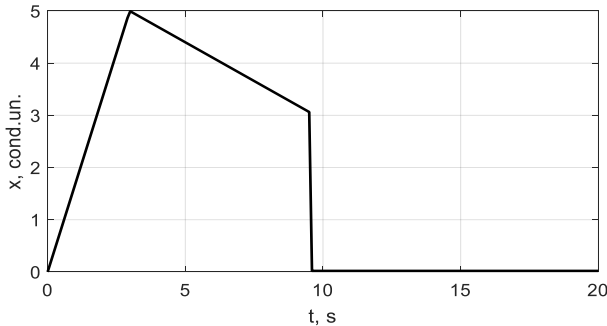


**Fig. 1.** Structure diagram of the nonlinear dynamic system

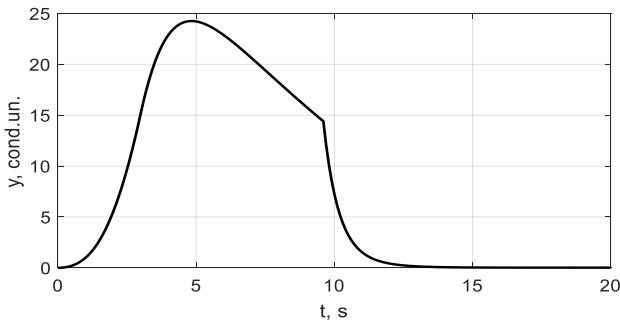
There have been considered the cases when the linear part is determined by different types of models inertial joint. In this case, we will have the following model:

$$\alpha \frac{dx(t)}{dt} + \int_0^t e^{-s} x(t-s) ds + \int_0^t \int_0^t e^{-(s_1+s_2)} x(t-s_1) x(t-s_2) ds_1 ds_2 = y(t).$$

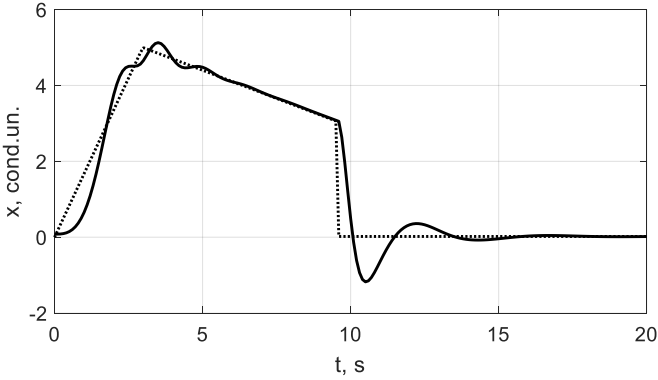
The results of computational experiments are given in the figures below. The input signal has the form given in Fig. 2. Simulation step in experiments — 0.1. Fig. 3 demonstrates the signal based on which the input signal is restored while applying 1% noise, Fig. 4 — restored signal, fig. 5 — the accuracy of recovery. Fig. 6 demonstrates the signal based on which the input signal is restored while applying 10% noise, Fig. 7 — the restored signal, Fig. 8 — the accuracy of recovery.



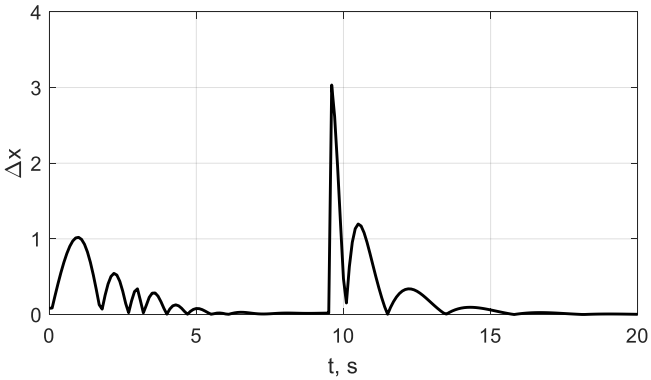
**Fig. 2.** Input signal



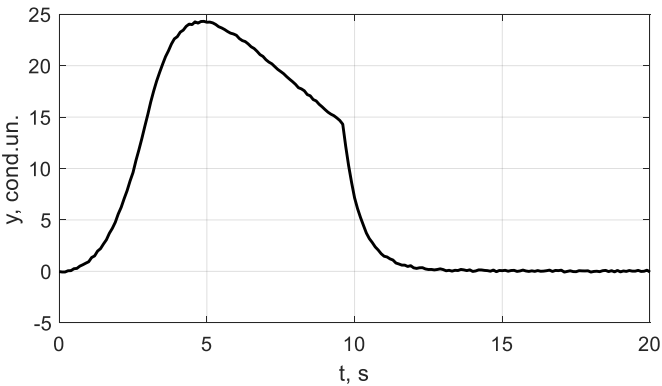
**Fig. 3.** Signal on the output of the nonlinear system (the case when the linear part is determined by the inertial joint) applying 1% noise



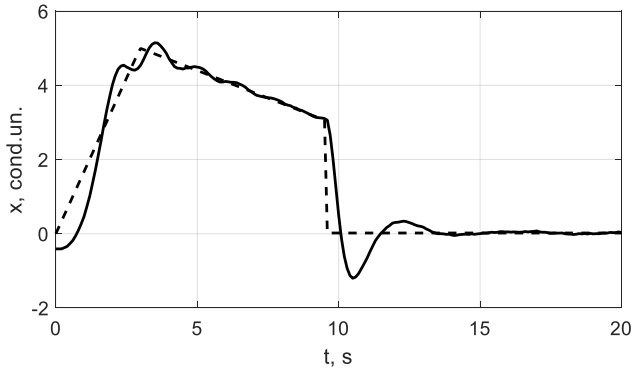
**Fig. 4.** Restored signal — accurate and approximate



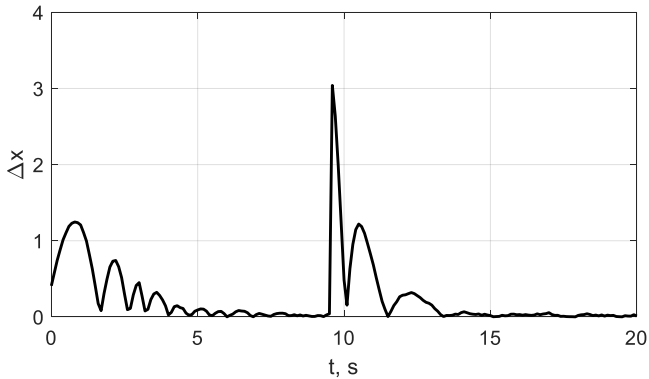
**Fig. 5.** The accuracy of recovery



**Fig. 6.** Signal on the output of the nonlinear system (the case when the linear part is determined by the inertial joint) applying 10% noise



*Fig. 7. Restored signal — accurate and approximate*



*Fig. 8. The accuracy of recovery*

**Conclusion.** There has been developed the regularization method for solving polynomial Volterra integral equations of the first kind based on the introduction of the differential regularization operator making it possible to improve the efficiency of the process of restoring signals on the input of nonlinear dynamic objects if there is noise.

#### References:

1. Verlan A. F. Application of the method of inverse operators for the computer restoration of the signal of an inertial measuring device / A. F. Verlan, N. A. Maksymovich // *Electronic simulation*. — 2001. — Vol. 23, No. 4. — P. 14–26. (Rus.)
2. Verlan A. F. Simulation of control systems in the Matlab / A. F. Verlan, I. O. Horoshko, D. E. Kontrares, V. A. Fedorchuk, V. F. Yuzvenko. — K., 2002. — 68 p. (Rus.)
3. Ivaniuk V. A. Computer realization of the deterministic method for identification of integral models of nonlinear dynamic objects / V. A. Ivaniuk, V. V. Ponedilok, V. A. Hryshchuk // *Mathematical and computer simulation. Series: Engineering*

- sciences: collection of research papers / V. M. Hlushkov Institute of Cybernetics of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kamianets-Podilskyi National Ivan Ohienko University; [Editorship: Yu. H. Kryvonos (ed.), et. al.]. — Kamianets-Podilskyi: Kamianets-Podilskyi National Ivan Ohienko University? 2014 — Vol. 10. — P. 59–67. (Ukr.)
4. Ivanyuk V. Solving inverse problems of dynamics of nonlinear objects based on the Volterra series / V. Ivanyuk, V. Ponedilok, J. Sterten // Computational problems of electrical engineering. — Lviv : Lviv Polytechnic National University, 2016. — Vol. 6, No. 1. — P. 9–16.

### **РЕГУЛЯРИЗАЦІЙНИЙ МЕТОД ВІДНОВЛЕННЯ СИГНАЛІВ НА ВХОДІ НЕЛІНІЙНИХ ДИНАМІЧНИХ ОБ'ЄКТІВ, ЩО ЗАДАНІ ІНТЕГРО-СТЕПЕНЕВИМИ РЯДАМИ ВОЛЬТЕРРИ.**

У статті пропонується регуляризаційний метод розв'язування поліноміальних інтегральних рівнянь Вольтерри I-го роду при розв'язуванні задачі відновлення вхідного сигналу нелінійного динамічного об'єкта, що поданий інтегро-степеневим рядом Вольтерри. Застосування інтегро-степеневих рядів Вольтерри дає змогу спростити першвинні нелінійні математичні моделі нелінійних динамічних об'єктів перетворивши їх до квазілінійного вигляду. Розв'язування поліноміальних інтегральних рівнянь Вольтерри I-го роду здійснюється шляхом введення додаткового диференціального регуляризаційного оператора. Отримані інтегро-диференціальні рівняння пропонується розв'язувати за допомогою квадратурних алгоритмів шляхом використання ітераційних методів. Такий підхід дозволяє підвищити ефективність процесу відновлення сигналів на вході нелінійних динамічних об'єктів при наявності шумових завад. Ефективність запропонованого алгоритму, перевірено для відновлення вхідного сигналу нелінійного динамічного об'єкта, що поданий у вигляді послідовного з'єднання лінійної та нелінійної частин. При цьому лінійна частина представлена інерційною ланкою, а нелінійна – поліноміальною залежністю другого порядку. Представлено результати розв'язування поліноміальних інтегральних рівнянь Вольтерри I-го роду при наявності шумових завад різного характеру у вхідних залежностях. На основі описаного методу, створено у середовищі Matlab / Simulink імітаційні моделі та програмні засоби розв'язування обернених задач відновлення сигналів на вході нелінійних динамічних об'єктів. Результати обчислювальних експериментів показали, що запропонований регуляризаційний метод розв'язування поліноміальних інтегральних рівнянь Вольтерри I-го роду може ефективно використовуватись для відновлення вхідних сигналів нелінійних динамічних систем, які описуються інтегро-степеневим рядом Вольтерри.

**Ключові слова:** відновлення вхідних сигналів, поліноміальне інтегральне рівняння Вольтерри I-го роду, диференціальний регуляризаційний оператор, Matlab.

Отримано: 24.05.2018

УДК 004.93'11:004.942

**О. О. Фомін**, канд. тех. наук

Одеський національний політехнічний університет, м. Одеса

## **ФОРМУВАННЯ ПРОСТОРУ ДІАГНОСТИЧНИХ ОЗНАК НА ОСНОВІ ПЕРЕТИНІВ ЯДЕР ВОЛЬТЕРРА**

Розглядається клас задач непрямого контролю і діагностики складних неперервних нелінійних динамічних об'єктів різної фізичної природи. Ці задачі відносяться до класу задач індуктивного моделювання, суть яких полягає в переході від емпіричної інформації до математичної моделі з метою здобуття нових знань і прийняття рішень в умовах істотної неповноти і апріорної невизначеності інформації.

Метою роботи є підвищення достовірності діагностичної процедури на основі формування інформативних просторів ознак для створення ефективних інструментальних засобів діагностування об'єктів різної природи.

В роботі розглядається метод модельної діагностики нелінійних динамічних об'єктів, заснований на описі об'єктів у вигляді інтегро-ступеневих рядів Вольтерра, багатовимірні ядра яких використовуються при побудові простору діагностичних ознак.

Запропоновано метод формування простору діагностичних ознак на основі ядер Вольтерра шляхом спрямованого перебору довільних перетинів ядер, який на відміну від існуючого методу, що використовує для формування простору діагностичних ознак діагональних перетинів ядер здатний істотно збільшити достовірність діагностування. Наведено покроковий алгоритм формування простору діагностичних ознак, який полягає в послідовному виконанні операцій ідентифікації об'єкта діагностування, формування сімейства діагностичних моделей об'єкта, побудові класифікатора станів і вибору підсумкового простору діагностичних ознак.

У задачі діагностування станів тестового нелінійного динамічного об'єкта використання інформації у вигляді перетинів ядер Вольтерра, відмінних від діагонального, дозволило збільшити достовірність діагностичної процедури на 24%

Встановлено, що найбільш повну інформацію для діагностування станів об'єкта досліджень дає ядро другого порядку. Аналіз діагностичної цінності формуються на основі функції діагонального перетину ядра Вольтерра другого порядку просторів ознак показав, що найбільш високою інформативністю володіє початкова область перетину, відповідна першим трьом відлікам.

**Ключові слова:** *інформаційні технології, діагностика неперервних систем, діагностичні моделі, моделі Вольтерра, ідентифікація, класифікація, достовірність діагностування.*

**Вступ.** Останнім часом, все більший інтерес при визначенні працездатності складних об'єктів викликає перехід до оцінки його фактичного технічного стану. Цей напрям обумовлює активний розвиток

засобів і методів технічної діагностики. При цьому великий інтерес представляють задачі непрямого контролю і діагностики складних неперервних нелінійних динамічних об'єктів різної фізичної природи. Ці задачі відносяться до класу задач індуктивного моделювання, суть яких полягає в переході від емпіричної інформації до математичної моделі з метою здобуття нових знань і прийняття рішень в умовах істотної неповноти і апріорної невизначеності інформації.

Використання існуючих автоматизованих систем діагностування (АСД) для рішення подібних задач обмежується дією протиріччя: з одного боку технічне обслуговування на основі показників фактичного стану об'єктів висуває підвищені вимоги до достовірності результатів діагностування, а з іншого — діагностування в умовах неповної апріорної інформації про об'єкт дослідження та дії завод при вимірюванні його параметрів для формування первинного опису, що заважає отриманню високої достовірності діагнозу.

Розв'язання цього протиріччя є перспективною і актуальною задачею, яка може бути вирішена шляхом побудови інтегральних нелінійних динамічних моделей і методів їх параметризації для формування інформативних діагностичних просторів в умовах неповної апріорної інформації.

**Метою роботи** є підвищення достовірності діагностичної процедури на основі формування інформативних просторів ознак для створення ефективних інструментальних засобів діагностування об'єктів різної природи.

**Огляд літератури.** Існуючі методики модельної діагностики, засновані на використанні динамічних характеристик, обмежуються тільки лінійними моделями [1], а методики, засновані на обліку ефектів нелінійності, використовують інформацію тільки про властивості статичних характеристик [2]. Реальні об'єкти, як правило, одночасно володіють і нелінійними і динамічними властивостями.

Для універсального опису об'єктів діагностування (ОД) невідомої структури доцільно використовувати нелінійні непараметричні динамічні моделі на основі інтегродіференціальних рядів Вольтерра (РВ) — моделі Вольтерра, головною особливістю яких є одночасне і компактне урахування нелінійних і динамічних властивостей ОК у вигляді багатовимірних вагових функцій — ядер Вольтерра (ЯВ) [2, 3].

### **Виклад основного матеріалу.**

#### *1. Нелінійні непараметричні динамічні моделі.*

Ряди Вольтерра від багатьох функціональних аргументів  $x_1(t), \dots, x_n(t)$  застосовуються при описі нелінійних багатовимірних систем:

$$y_j(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i_1=1}^n \dots \sum_{i_n=1}^n \int_0^t \dots \int_0^t w^j_{i_1 i_2 \dots i_n}(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) \prod_{k=1}^n u_{i_k}(t - \tau_k) d\tau_k, \quad (1)$$

де  $w_{i_1, i_2, \dots, i_n}^j(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n)$  — багатовимірні вагові функції або ядра Вольterra (ЯВ)  $n$ -го порядку з  $i_1, i_2, \dots, i_n$  входів і  $j$ -му виходу, симетричні відносно  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ ;  $u(t)$  — вхідний вплив, а  $y(t)$  — відгук об'єкту при нульових початкових умовах.

Діагностична процедура в цьому випадку зводиться до визначення ЯВ за даними експерименту «вхід — вихід» [2] і побудові на основі отриманих ядер діагностичної системи ознак, в просторі яких будується вирішальне (діагностичне) правило оптимальної класифікації.

Ефективність застосування методів розпізнавання образів для діагностування в основному залежить від інформативності використовуваної сукупності параметрів.

## 2. Формування простору діагностичних ознак.

Процедура розпізнавання станів об'єкта в інформативному просторі ознак виявляється більш простий, так як обсяг оброблюваної діагностичної інформації зменшується. Зменшення розмірності простору ознак дозволяє використовувати більш складні нелінійні вирішальні правила, що підвищує якість розпізнавання.

Математично задача вибору діагностичних ознак формулюється в такий спосіб. Нехай задано вихідне простір  $X$ , розмірністю  $p$ . Необхідно знайти перетворене простір  $Y$ , елементами якого є  $q$ -мірні вектори, причому  $q < p$ . Формально така задача полягає у визначенні відображення  $A: X \rightarrow Y$ , яке вихідному простору  $X$  ставить у відповідність шуканий простір  $Y$ . Рішення цієї задачі може бути досягнуто різними шляхами. Оптимальне в деякому сенсі перетворення початкового простору векторів вимірювань в простір зображень меншої розмірності визначається шляхом зважування той чи інший спосіб різних систем ознак з метою оцінки їх інформативності (корисності) при розпізнаванні. У роботі, ефективність обраного набору ознак оцінювалась за результатами рішення задачі класифікації об'єктів екзаменаційної вибірки за допомогою побудованого одним з алгоритмів навчання вирішального правила.

Ефективним методом опису нелінійних і динамічних властивостей ОД у вигляді вектора ознак  $x \in$  параметризація моделей ОД у вигляді багатовимірних ЯВ. При цьому, функція  $w_k(\tau_1, \dots, \tau_k)$  представляється вектором  $x_k = (x_{1k}, \dots, x_{nk})'$ . Інформативні ознаки можуть бути отримані за допомогою попереднього перетворення  $T_j: C[a, b] \rightarrow R^n$ , ( $j = 1, \dots, n$ ):  $x_{jk} = T_j(w_k(\tau_1, \dots, \tau_k))$ ; де  $C[a, b]$  — простір дійсних безперервних функцій, заданих на відрізку  $[a, b]$ ;  $a, b$  — деякі дійсні числа. В якості оператора  $T_j$  можуть застосовуватися ортогональні розкладання і інтегральні перетворення БВФ в вектори коефіцієнтів базисних функцій. У найпростішому випадку оператор  $T_j \in$  оператором дискретизації  $x_{jk} = w_k(t_j, \dots, t_j)$ ,  $t_j = j\Delta t$ , де  $\Delta t$  — крок дискретизації. Аналогічно формується вектор ознак на ос-

нові частотних характеристик: багатовимірної амплітудно-частотної  $A_k(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k)$  і фазо-частотної  $\varphi_k(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k)$ :  $x_{2j-1} = A_k(\omega_j, \dots, \omega_j)$ ,  $x_{2j} = \varphi_k(\omega_j, \dots, \omega_j)$ ,  $\omega_j = j\Delta\omega$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$  [5, 6].

Зважаючи на значну обчислювальної складності процедури побудови моделей Вольтерра для формування простору діагностичних ознак використовувалися Вибіркі відліків діагональних перетинів ЯВ  $w_k(t_j, \dots, t_j)$  порядку  $k = 1, 2, 3$  ( $t_j = \dots = t_j$ ) Із завдань дискретністю (рис. 1). При цьому, інформація, яка знаходиться в точках ЯВ, котрі належать до діагональним перетинах, не береться до уваги.

Значне зростання продуктивності обчислень і зниження вартості сучасних багатоядерних процесорів в останні часи дозволяють істотно підвищити ефективність АСД та розширити галузі застосування інформаційних технологій непрямого контролю і діагностики. У зв'язку з цим, з'являється можливість використання діагностичної інформації, не обмеженої тільки діагональними перетинами ЯВ різних порядків.

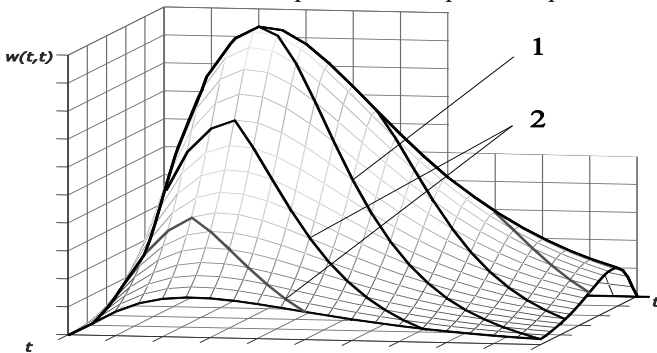


Рис. 1. Перетин ЯВ 2-го порядку: 1 — діагональний, 2 — піддіагональні

Беручи до уваги викладене, запропоновано розвиток методу формування простору діагностичних ознак на основі ядер Вольтерра шляхом спрямованого перебору довільних перетинів ядер і полягає в послідовному вирішенні наступних завдань:

1. *Ідентифікація ОД.* Мета — отримання інформаційної моделі ОД у вигляді ЯВ. Етапи реалізації: подача тестових сигналів на входи ОД; вимір відгуків на них; визначення ЯВ на основі даних експерименту «вхід-вихід».
2. *Побудова діагностичної моделі ОД.* Мета — формування простору ознак  $x$ . Етапи реалізації: послідовне визначення перетинів ЯВ із зсувом на  $s\Delta t$ , де  $s = 1, 2, \dots$  — порядковий номер перетину ЯВ.
3. *Побудова класифікатора станів ОД.* Мета — побудова сімейства вирішальних правил оптимальної класифікації. Етапи реалізації: побудови вирішальних правил — навчання; оцінка достовірності класифікації — іспит; оптимізація діагностичної моделі.



4. Вибір простору діагностичних ознак. Визначення діагностичної цінності кожної системи ознак  $x_s$ ; вибір оптимальної системи ознак  $x$  згідно цільової функції — достовірності класифікації ОД екзаменаційної вибірки.

Для підвищення достовірності та завадостійкості діагностичної процедури розглядаються діагностичні моделі, що поєднують в собі ознаки на основі ядра першого порядку  $x_{1s}$  та перетинів ЯВ старших порядків  $x_{ks}$  ( $x = x_{1s} \cup \dots \cup x_{ks}$ ). Аналогічно розглядаються набори ознак, які об'єднують ознаки на основі різних сполучень перетинів ЯВ одного порядку.

3. Формування простору діагностичних ознак нелінійної динамічної системи, що зображена на рис. 2.

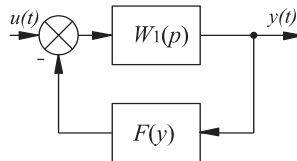


Рис. 2. Структурна схема нелінійної динамічної системи

Запропонована методика формування інформативного простору ознак для діагностичного контролю нелінійного динамічного об'єкта розглядається на прикладі системи (рис. 1), де  $W_1(p)$  — лінійний динамічний елемент, з ваговою функцією  $e^{-\alpha t}$ ,  $F(y)$  — безінерційний нелінійний елемент с характеристикою  $\beta y^2(t)$ . Така система описується нелінійним диференціальним рівнянням виду:

$$\frac{dy(t)}{dt} + \alpha \cdot y(t) + \beta \cdot y^2(t) = u(t), \quad (2)$$

де  $\alpha$  та  $\beta$  — постійні коефіцієнти (параметри), що недопустимі для вимірювань.

Для діагностики станів об'єкта використовується ЯВ першого, другого і третього порядку. Модель об'єкта у вигляді трьох членів ряду Вольтерра при нульових початкових умовах має вигляд:

$$\begin{aligned} y(t) = & \int_0^t w_1(\tau_1) u(t - \tau_1) d\tau_1 + \int_0^t \int_0^t w_2(\tau_1, \tau_2) u(t - \tau_1) u(t - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 + \\ & + \int_0^t \int_0^t \int_0^t w_3(\tau_1, \tau_2, \tau_3) u(t - \tau_1) u(t - \tau_2) u(t - \tau_3) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \end{aligned} \quad (3)$$

тут  $u(t)$  і  $y(t)$  — сигнали, що вимірюються відповідно на вході і виході ОД;

$$w_1(\tau_1) = e^{-\alpha\tau_1}; \quad w_2(\tau_1, \tau_2) = \frac{\beta}{\alpha} (e^{-\alpha\tau_1} e^{-\alpha\tau_2} - e^{-\alpha\tau_2}), \quad \tau_1 \leq \tau_2;$$

$$w_3(t, t, t) = \frac{2}{3} \left( \frac{\beta}{\alpha} \right)^2 \cdot (3e^{a(\tau_1 - \tau_2 - \tau_3)} + 3e^{-a(\tau_1 + \tau_2 + \tau_3)} - 4e^{-a(\tau_2 + \tau_3)} - 2e^{-a(\tau_1 + \tau_3)} + 2e^{-a\tau_3}), \quad \tau_1 \leq \tau_2 \leq \tau_3. \quad (4)$$

Діагональні перетини ЯВ другого та третього порядку при  $\tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = t$  мають вигляд:

$$w_2(t, t) = \frac{\beta}{\alpha} (e^{-2at} - e^{-at}),$$

$$w_3(t, t, t) = 2 \left( \frac{\beta}{\alpha} \right)^2 \cdot (e^{-3at} - 2e^{-2at} + e^{-at}). \quad (5)$$

При дослідженні інформативності формуються на основі ЯВ діагностичних ознак використовуються аналітичні вирази для ЯВ (4) і (5).

Розглядаються простори ознак, що формуються на основі дискретних значень відгуків діагностичного об'єкта на імпульсні збурення різної інтенсивності  $s = A \tau_p$  ( $A$  — амплітуда,  $\tau_p$  — тривалість імпульсу), наближено розраховуються за формулою:

$$y_s(t) = s w_1(t) + s^2 w_2(t, t) + s^3 w_3(t, t, t). \quad (6)$$

Навчальна та екзаменаційна вибірки отримані для об'єктів чотирьох класів (по сто об'єктів для кожного класу), придатних і непридатних за параметрами  $\alpha$  і  $\beta$ . Перший клас складають об'єкти умовно працездатні (параметри  $\alpha$  і  $\beta$  змінюються в межах  $\pm 5\%$  від номінальних значень  $\alpha_n$  і  $\beta_n$ ); другий клас — об'єкти умовно непрацездатні з параметру  $\alpha$  (параметр  $\beta$  змінюється в межах  $\pm 5\%$   $\beta_n$ , а параметр  $\alpha \in (-1.1\alpha_n; -1.05\alpha_n) \cup (1.05\alpha_n; 1.1\alpha_n)$ ); третій клас — об'єкти умовно непрацездатні по параметру  $\beta$  (параметр  $\alpha$  змінюється в межах  $\pm 5\%$   $\alpha_n$ , а параметр  $\beta \in (-1.1\beta_n; -1.05\beta_n) \cup (1.05\beta_n; 1.1\beta_n)$ ); четвертий клас — непрацездатні об'єкти по  $\alpha$  і  $\beta$  одночасно.

Проведено дослідження інформативності систем діагностичних ознак, які формуються на основі десяти відліків (з рівномірним кроком на інтервалі  $(0, t_m]$ ) ЯВ першого ( $V_1$ ) порядку і перетинів ЯВ другого ( $V_2$ ) і третього ( $V_3$ ) порядку. Результати досліджень інформативності просторів ознак зазначених систем у вигляді достовірності розпізнавання наведені в таблиці 1.

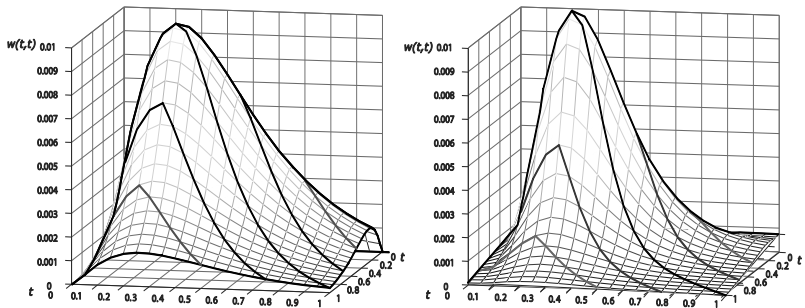
Таблиця 1

*Достовірність розпізнавання чотирьох класів  
ОД для систем ознак  $V_1, V_2, V_3$*

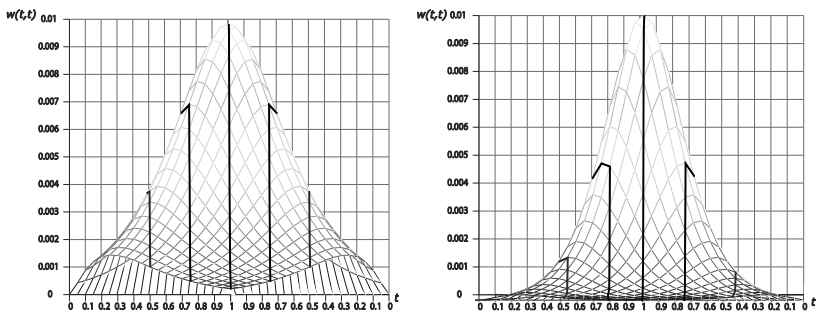
Система ознак	Перетин ЯВ				
	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$
$V_1$	0,67	—	—	—	—
$V_2$	0,76	0,89	1,0	0,81	0,72
$V_3$	0,74	0,83	0,97	0,77	0,69

Найбільш інформативною частиною ЯВ першого, другого і третього порядку виявилася початкова область, відповідна першим трьом відлікам: для системи  $V_1$  —  $w_1(t_1)$ ,  $w_1(t_2)$ ,  $w_1(t_3)$ ; для системи  $V_2$  —  $w_2(t_1, t_1)$ ,  $w_2(t_2, t_2)$ ,  $w_2(t_3, t_3)$  і для системи  $V_3$  —  $w_3(t_1, t_1, t_1)$ ,  $w_3(t_2, t_2, t_2)$ ,  $w_3(t_3, t_3, t_3)$ .

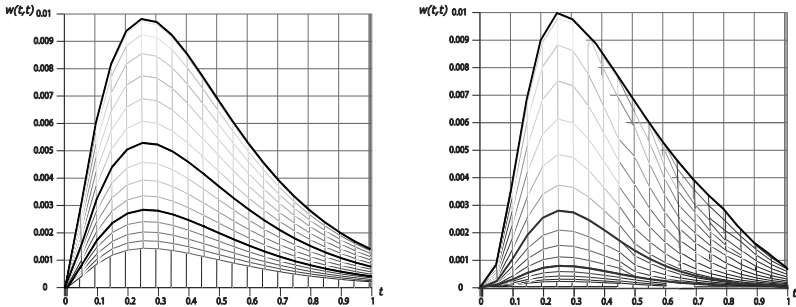
На рис. 3 представлені ЯВ другого порядку для ОД 1-го і 4-го класів. Проекція ЯВ другого порядку на площину, паралельну діагональному перерізу ЯВ другого порядку (рис. 4) наочно демонструє близькість діагональних перетинів обох ОД. Отже, розпізнавання за параметрами, виділеним на основі цих функцій матиме низьку достовірність. У той же час піддіагональні перетини ЯВ другого порядку для ОД 1-го і 4-го класів істотно відрізняються, що свідчить про високу інформативність цих характеристик для процесу діагностування. Найбільш наочно відмінності видно на проекціях ЯВ другого порядку на площину, перпендикулярну діагональному перерізу, представлених на рис. 5.



**Рис. 3.** ЯВ другого порядку для ОД різних класів:  
1 клас — зліва, 4 клас — справа



**Рис. 4.** Проекція ЯВ другого порядку на площину, паралельну діагональному перерізу ЯВ другого порядку для ОД різних класів:  
1 клас — зліва, 4 клас — справа



*Рис. 5. Проекція ЯВ другого порядку на площину, перпендикулярну діагонального перерізу для ОД різних класів: 1 клас — ліворуч, 4 клас — праворуч*

Найбільш інформативний опис ОД з розглянутих систем ознак дає система  $V_2$ . На її прикладі нижче демонструються переваги використання перетинів, відмінних від діагональних для формування простору діагностичних ознак.

Таким чином, використання методу формування простору діагностичних ознак на основі піддіагональних перетинів ЯВ дозволяє підвищити достовірність діагностичної процедури, а алгоритми на його основі є ефективним засобом для створення інструментальних засобів діагностування об'єктів різної природи.

**Висновки.** В роботі розглядається метод модельної діагностики нелінійних динамічних об'єктів діагностування, заснований на описі об'єктів у вигляді інтегро-ступеневих рядів Вольтерра, багатовимірні ядра яких використовуються при побудові простору діагностичних ознак.

Запропоновано метод формування простору діагностичних ознак на основі ядер Вольтерра шляхом спрямованого перебору довільних перетинів ядер, який на відміну від існуючого методу, що використовує діагональні перетини ядер, здатний істотно збільшити достовірність діагностування.

У задачі діагностування станів тестового нелінійного динамічного об'єкта використання інформації у вигляді перетинів ядер Вольтерра, відмінних від діагонального, дозволило збільшити достовірність діагностичної процедури на 24%.

Встановлено, що найбільш повну інформацію для діагностування станів об'єкта досліджень дає ядро другого порядку. Аналіз діагностичної цінності просторів ознак показав, що найбільш високою інформативністю володіє початкова область перетину, відповідна першим трьом відлікам.

### Список використаних джерел:

1. Пупков Л. А. Функциональные ряды в теории нелинейных систем / Л. А. Пупков, В. И. Капалин, А. С. Ющенко. — М. : Наука, 1976. — 448 с.

2. Данилов Л. В. Теория нелинейных электрических цепей / Л. В. Данилов, П. Н. Матханов, Е. С. Филиппов. — Л. : Энергоатомиздат, 1990. — 256 с.
3. Апарцин А. С. О математическом моделировании нелинейных динамических систем рядами Вольтерры / А. С. Апарцин, С. В. Солодуша // Электронное моделирование. — 1999. — № 2. — С. 3–12.
4. Дубровин В. И. Сокращение объема данных в задачах распознавания и диагностики / В. И. Дубровин, С. А. Субботин, В. И. Кривенко, Л. Н. Евченко // Труды VIII Всероссийской конференции «Нейрокомпьютеры и их применение» НКП-2002 с международным участием. Москва, 21–22 марта 2002 г. / под ред. проф. А. И. Галушкина. — М. : Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, 2002. — С. 954–963.
5. Фомін О. О. Метод побудови простору діагностичних ознак на основі інтегральних динамічних моделей / О. О. Фомін // Вчені записки ТНУ імені В. І. Вернадського. Серія: Технічні науки. — 2018. — Т. 29 (68). — № 1. — Ч. 2. — С. 43–47.
6. Medvedew A. Diagnostic features space construction using Volterra kernels wavelet transforms / A. Medvedew, O. Fomin, V. Pavlenko, V. Speransky // Proceedings of the 2017 IEEE 9th International Conference on Intelligent Data Acquisition and Advanced Computing Systems: Technology and Applications, IDAACS. — 2017. — P. 1077–1081.

## **CONSTRUCTION OF DIAGNOSTIC SIGNS SPACE BASED ON THE SECTIONS OF VOLTERRA KERNELS**

The class of problems of indirect control and diagnostics of complex continuous nonlinear dynamic objects of various physical nature is considered. These problems belong to the class of inductive modeling problems, the essence of which lies in the transition from empirical information to the mathematical model with the aim of obtaining new knowledge and decision-making under conditions of substantial incompleteness and a priori uncertainty of information.

The purpose of the work is to increase the reliability of the diagnostic procedure on the basis of the formation of informative feature spaces for the creation of effective tools for diagnosing objects of different nature.

The method of model diagnostics of non-linear dynamic objects is considered, based on the description of objects in the form of Volterra integro-power series whose multidimensional kernels are used in constructing the space of diagnostic features.

A method is proposed for the formation of a space of diagnostic features based on Volterra kernels by a directional search of arbitrary cross sections of nuclei, which, unlike the existing method, which uses for the formation of a space of diagnostic features of diagonal nuclear bonds, can significantly increase the reliability of diagnosis.

A step-by-step algorithm for the formation of a space of diagnostic features is presented. This algorithm consists in the sequential implementation of identification operations of the diagnostic object, the formation of a family of diagnostic models of the object, the construction of a state classifier, and the selection of the resulting space of diagnostic features.

It is established that the second-order kernel provides the most complete information for diagnosing the states of an object of research. Analy-

sis of the diagnostic value is formed on the basis of the diagonal cross section of the Volterra kernels of the second order of feature spaces showed that the initial region of intersection corresponding to the first three samples has the highest informative value.

**Keywords:** *information technologies, diagnostics of continuous systems, diagnostic models, Volterra models, identification, classification, reliability of diagnosis.*

Отримано: 29.05.2018

UDC 004.042;004.5

**I. E. Furtat\***, Ph. D.,

**Yu. O. Furtat\*\***, Ph. D.

\* National Technical University of Ukraine

«Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute», Kyiv,

\*\* Pukhov Institute for Modeling in Energy Engineering, NASU, Kyiv

## **CUSTOMIZABLE ADAPTIVE USER INTERFACES IMPLEMENTATION IN CONTROL AND LEARNING AUTOMATED SYSTEMS AS WAY OF INCREASING THEIR RELIABILITY AND EFFICIENCY**

In modern automated systems users are often facing the information overload problem because of ever increasing volumes of information requiring treatment in short time. Working in these conditions affects the system operator's work quality and the systems' reliability. One possible approach to solving the information overload problem is to create personalized interfaces that take into account the user's information management particularities. System operator's features, which determine their preferred information representation shape and pace, form the user's cognitive portrait. Cognitive portrait is built as a result of user interaction with the software diagnostic tools that are based on the cognitive psychology methods. The effect of using personalized user interface in an automated system can be estimated by quantifying how exactly a reduction in user response time to critical events affects the reliability and efficiency of the system. To do this, the formulae in the theory of reliability of complex automated systems are used, showing the dependency between the system reliability and critical event response time.

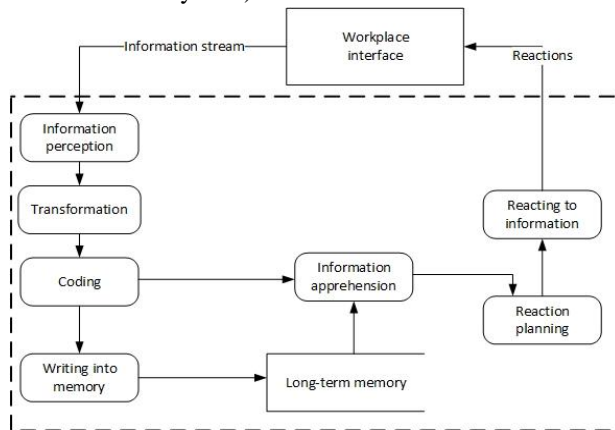
**Key words:** *automated system, user interface, personalization, interface adaptation, cognitive portrait.*

**Introduction.** Reliability and efficiency of the modern automated systems largely depend on operators' manual actions. Nowadays, because of the constant complications of automated systems operators are in a situation of information overload that affects the focus on workflow and response time to critical events.

To solve this problem in modern computer systems attempts have been made to increase the effectiveness of user interaction with the workplace interface. A variety of approaches is used: organizational, ergonomic and more. However, they do not always give satisfactory results because they do not take into account the individual characteristics of users, focusing on some «average» user account.

Consequently, it was necessary to create system that allows you to personalize the user interaction with the system, implements the mechanism of diagnosing physiological and cognitive user characteristics to take them into account together with the user actions peculiarities in the construction of the adaptive interface.

**Method.** Message formal characteristics include: content, form, tempo and rhythm of the flow of information (intervals between individual messages, regularity of income, etc.) [6]. Fig. 1 shows the stages of human information processing of information from the external environment (or by the user — from the system)



*Fig. 1. Process of human perception of information from the environment*

The results of experimental studies suggest that the phase of the initial situation representation holds a special place [5].

Thus, as the form of information representation is an essential factor that provides the perception, understanding and assimilation of information from the system, it can be seen as a way to manage the activities of the user. It is known that, while studying the material, people treat its content, form and shape selectively [1–3].

In addition to the preferred information representation form, each user possesses a number of characteristics that affect the pace and intensity of information flow from the system to the user.

These characteristics are divided into cognitive, physiological and intellectual.

Cognitive characteristics largely determine the speed at which the user is guided in the new information and switch between different types of activities. They are field dependence, equivalence range, impulsiveness and intellectual lability.

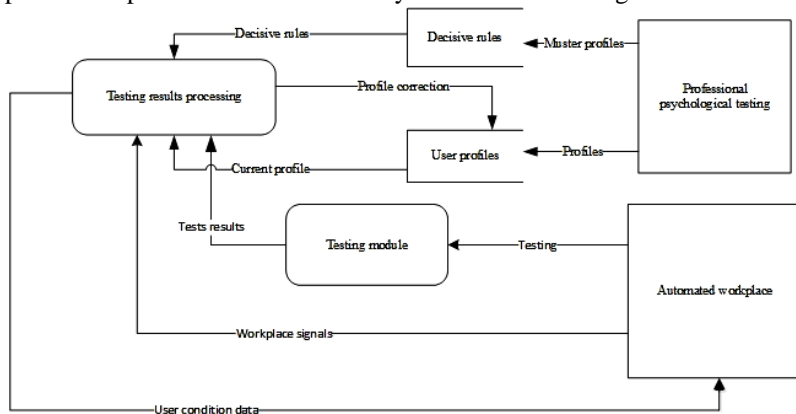
For each of these characteristics within cognitive psychology have been developed appropriate diagnostic techniques, many of which are sufficiently formalized to be implemented as a part of the automated characteristics diagnostic subsystem.

To assess the psychophysiological state of the user often are uses options such as his attitude to risk, quality of memory and attention. In this case, the testing impact reaction time and the responses errors should allow to evaluate concentration and coordination of user actions, because these depend on personal characteristics [7].

Intelligent features include the level of IQ and EQ (intelligence and emotional intelligence quotient, respectively) [4]. Although the coefficient of emotional intelligence is associated with the value of IQ, there is no direct relationship, namely the value of EQ determines predisposition to creativity when working with information. This characteristic is very important for users of design and training systems.

Nowadays cognitive portraits of the automated systems users are created based on professional psychological testing. But this method has two major drawbacks. First, it requires the participation of a professional psychologist, and the number of automated systems and their operators is growing faster than in an equal number of professional psychologists can be prepared. Secondly, this testing is not operational, it is a separated from the user's work process and workplace.

Both of these drawbacks can be eliminated by introducing an automatic testing subsystem into the interface adaptation system. Scheme of a possible implementation of this subsystem is shown in Fig. 2.



*Fig. 2. Users' characteristics' diagnostics system*



User testing is conducted both explicitly (during performing of tests) and in the background when on the computer workstations are monitored indicators such as speed of action or response to the changing situation. In both cases, user characteristics information is treated by a separate testing system module and supplements or modifies an initial cognitive profile that is used for further user interface management system work. This way — through modifying user interface and observing the performance changes with it (which is reflected in increasing responsiveness and reducing the number of errors when dealing with information) can the finite number of steps of the iterative process be taken to optimize the form of the interface for a particular user (in the case of interfaces with automatic adjustment).

To evaluate the effect of the use of the adaptive user interface in the automated system, we have to determine how reducing user response time to critical events affects reliability and efficiency of the system.

Let us assume that the automated system is effective if time  $T_1$  actually spent on handling critical events does not exceed the maximum allowable time  $T_2$ . Moreover, the time  $T$  consists of the time of critical events occurrence and time of reacting on them. Then the condition of system efficiency can be written ( $T$  and  $T_2$  are considered random values) as the probability  $P$ :

$$P\{T_2 - T_1 \geq 0\} \geq a, \quad (1)$$

where  $a$  is a probability with which the efficiency of the system is guaranteed.

The values of  $T_1$  and  $T_2$  are determined by skills and cognitive and psychophysiological state of the staff. On the basis of (1) we have

$$P\{T_1 < T_2\} = \int_0^{\infty} F(t) dG(t) = \int_0^{\infty} F(t) g(t) dt, \quad (2)$$

where the distribution function of the random variable  $F(t)$  and  $G(t)$  are defined as follows:

$$F(t) = P\{T_1 < t\}; G(t) = P\{T_2 < t\}; g(t) = G'(t). \quad (3)$$

Formulas (2) and (3) can be used with any laws of distribution of random variables  $T_1$  and  $T_2$ , taking only positive values and have a density distribution of zero for negative values of the argument. However, these formulas are derived based on the fact that there is no more than one critical situation during the operation or task.

In the real conditions during the task with duration  $t$  critical situation may occur repeatedly. In this case, the performance of the automated system for a given time of the assignment will be provided with the following possible events: no critical situation, there is one critical situation that has been processed in the allowable time, there were two critical situations, each of which has also been removed in the allowable time.

Let's define  $\xi_i$  ( $i = 0, 1, \dots$ ) as the time interval between the  $i$ -th and the  $(i + 1)$ -th event, and  $F_i(t) = P\{\xi_i < t\}$  — as the distribution function of  $\xi_i$ . Let's assume that the flow of events forms a stream with limited after-effect ( $\xi_i$  are independent in total). Then according to the definition of system failure by the formula of total probability the probability of the functioning over time  $t$  can be written as:

$$P(t) = \bar{F}_1(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{t-x_1} \int_0^{\dots} \dots \int_0^{t-\sum_{s=1}^{k-1} x_s} \bar{F}_k \left( t - \sum_{s=1}^k x_s \right) \prod_{s=1}^k dF_s(x_s) W \left( t - \sum_{l=1}^s x_l \right), \quad (4)$$

where  $e \bar{F}_i(t) = 1 - F_i(t)$ .

Here  $W(t)$  — the probability that an event that occurred at some time, will not lead in time  $t$  to irreparable situation. Let's determine this probability. Obviously,

$$W(t) = P\{T_2 > t\} + \int_0^t P\{T_1 < u\} dP\{T_2 < u\} = \bar{G}(t) + \int_0^{\infty} F(u) dG(u). \quad (5)$$

Expression (5) is obtained under the assumption that every event is handled independently. It is often assumed that the flow of critical system events forms the simplest form of flow with parameter  $\lambda$ . In this case,

$$F_i(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t} & \text{for } t \geq 0, \\ 0 & \text{for } t < 0. \end{cases} \quad (6)$$

Substituting (6) into equation (4), we obtain the desired probability:

$$P(t) = e^{-\lambda t} + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k e^{-\lambda t} \int_0^t \int_0^{\dots} \dots \int_0^{t-\sum_{s=1}^{k-1} x_s} \prod_{s=1}^k W \left( t - \sum_{l=1}^s x_l \right) dx_s. \quad (7)$$

In the real conditions, sometimes there is a situation where only one event can be treated and the presence of two critical events in the system leads to failure. Obviously, the appearance of some events at the moment  $\sum_{l=1}^s x_l$  will not result in an accident either when

$T_2 > t - \sum_{l=1}^s x_l$  while  $x_{s+1} \geq t - \sum_{l=1}^s x_l$ , meaning more critical events have not appeared within time  $t$  and the allowable time  $T_2$  is large enough, or when the next event happens before the moment  $t$ , i.e.  $x_{s+1} < t - \sum_{l=1}^s x_l$ , but

previous event has been so far treated before allowable time  $T_2$ . In other words, in this case there is a situation

$$\{T_1 < \min(x_{s+1}, T_2)\}. \quad (8)$$

In the first case, the probability of failure equals  $W\left(t - \sum_{l=1}^s x_l\right)$ , in the second case the probability of situation (8) is as follows:

$$W^*(x_{s+1}) = \int_0^{x_{s+1}} \bar{G}(x) dF(x). \quad (9)$$

Equations (7) and (4) take the form

$$P(t) = \bar{F}_1(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t \cdots \int_0^{t-\sum_{s=1}^{k-1} x_s} \bar{F}_k\left(t - \sum_{s=1}^k x_s\right) \prod_{s=1}^k dF_s(x_s) \prod_{s=1}^{k-1} W^*(x_s) W\left(t - \sum_{s=1}^k x_s\right),$$

$$P(t) = e^{-\lambda t} + e^{-\lambda t} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k \int_0^t \cdots \int_0^{t-\sum_{s=1}^{k-1} x_s} \prod_{s=1}^{k-1} W^*(x_s) W\left(t - \sum_{s=1}^k x_s\right) dx_1 \cdots dx_k.$$

**Result.** Probability (9) is an important component in both final expressions. It depends on the values of  $T_1$ ,  $T_2$  and values of moments  $\sum_{l=1}^s x_l$ .

The values of moments are random, the value of  $T_2$  is defined by the organizational requirements and features of the workflow. The easiest way to influence the performance efficiency of the automated systems is by changing (decreasing) values of  $T_1$ . This value depends on the specifics of processing information from the system by the user and the comfort level of the working with information. Since user interacts with the information in the s through the user interface interact, the convenience and efficiency of the interface affects the important parameter  $T_1$ .

**Discussion.** Proposed approach to the personalized user interfaces construction allows automated systems to be tailored to suit specific cognitive portraits and adapt interaction with information in the system to these features. This can increase the user's comfort level when working with information, reduce information overload, improve concentration and time of reaction to critical events. As the value of user response time affects the overall reliability and efficiency of the system, we can expect that the use of adaptive personalized user interfaces will increase the reliability and efficiency of automated systems.

### References:

1. Gal'skova N. D. *Sovremennaja metodika obuchenija inostrannym jazykam: Posobie dlja uchitelja* / N. D. Gal'skova. — M. : ARKTI, 2004. — 192 p.

2. Jakimanskaja I. S. Principy postroenija obrazovatel'nyh programm i lichnostnoe razvitie uchashhihsja / I. S. Jakimanskaja // Voprosy psihologii. — 1999. — Vol. 13. — № 3. — P. 39–47.
3. Ljahovickij M. V. Metodika prepodavaniya inostrannyh jazykov: Metodicheskoe posobie / M. V. Ljahovickij. — M. : Drofa, 2006. — 369 p.
4. Nemov R. S. Psihologija: Ucheb. dlja stud. vyssh. ped. ucheb. zavedenij : in 3 books / R. S. Nemov. — 4th ed. — M. : Gumanit. izd. centr VLADOS, 2003. — Book 1: Obshhie osnovy psihologii. — 688 p.
5. Solso R. Kognitivnaja psihologija / R. Solso. — 6th ed. — SPb : Piter, 2006. 589 p.
6. Turzin P. S. Urovni ponimaniya informacii i struktura kommunikativnogo akta / P. S. Turzin, V. A. Ponomarenko, S. L. Rysakova-Romashkan // Psihologicheskij zhurnal. — 1992. — Vol. 13. — № 1. — P. 30–39.
7. Verlan A. F. Osobennosti operativnogo testirovanija na rabochem meste operatorov sistem podderzhki prinjatija reshenij (SPPR) / A. F. Verlan, M. F. Sopol, Yu. O. Furtat // Sbornik nauchnyh trudov «Matematichne ta komp'juterne modeljuvannya. Serija: Tehnichni nauki». — Kamenec-Podol's'kij : Kamenec-Podol's'kij nacional'nyj universitet im. Ivana Ogienko, 2010. — Iss. 3. — P. 37–45.

## **ЗАСТОСУВАННЯ НАСТРОЮВАНОВОГО ІНТЕРФЕЙСУ КОРИСТУВАЧА В АВТОМАТИЗОВАНИХ СИСТЕМАХ КОНТРОЛЮ ТА НАВЧАННЯ ЯК ШЛЯХ ДО ПІДВИЩЕННЯ ЇХ НАДІЙНОСТІ ТА ЕФЕКТИВНОСТІ**

В сучасних автоматизованих системах користувачі часто стикаються з проблемою перевантаження інформацією через все зростаючий обсяг інформації, що потребує обробки за обмежений час. Робота в цих умовах впливає на роботу оператора та надійність системи. Одним із можливих підходів до вирішення проблеми інформаційного перевантаження є створення персоналізованих інтерфейсів, які враховують роботи користувача з інформацією. Особливості оператора системи, які визначають її бажану форму та швидкість подання, утворюють когнітивний портрет користувача. Когнітивний портрет будується в результаті взаємодії користувача з діагностичними інструментами програмного забезпечення, що базується на методах когнітивної психології. Ефект використання персоналізованого користувачького інтерфейсу в автоматизованій системі можна оцінити, кількісно визначивши, як саме зменшення часу відгуку користувача на критичні події впливає на надійність та ефективність системи. Для цього використовуються формули в теорії надійності складних автоматизованих систем, що показують залежність між надійністю системи та критичним часом реакції на події.

**Ключові слова:** *автоматизована система, інтерфейс користувача, персоналізація, адаптація інтерфейсу, когнітивний портрет.*

Отримано: 22.05.2018

## ВІДОМОСТІ ПРО АВТОРІВ

**Андрусяк Іванна Володимирівна** — кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент Національного університету «Львівська політехніка», м. Львів, andrusyak.ivanna@gmail.com

**Артюх Марина Володимирівна** — асистент кафедри інформаційних комп'ютерних і поліграфічних технологій Української інженерно-педагогічної академії, м. Харків, artgarmony@gmail.com

**Балихіна Ганна Андріївна** — кандидат технічних наук, завідувач лабораторії моніторингу та охорони вод Інституту водних проблем і меліорації НААН, м. Київ, maslova-anna@ukr.net

**Бродяк Оксана Ярославівна** — кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент Національного університету «Львівська політехніка», м. Львів, brodyakoksana1976@gmail.com

**Верлань Анатолій Федорович** — доктор технічних наук, професор, член кореспондент НАПН України, Інститут проблем моделювання в енергетиці імені Г. С. Пухова НАН України, м. Київ, a.f.verlan@gmail.com

**Газдюк Катерина Петрівна** — аспірант кафедри програмного забезпечення комп'ютерних систем Інституту фізико-технічних і комп'ютерних наук Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича, м. Чернівці, kateryna.gazdyk@gmail.com

**Гошко Любомир Васильович** — кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент Національного університету «Львівська політехніка», м. Львів, avanttes@gmail.com

**Громик Андрій Петрович** — кандидат технічних наук, доцент, завідувач кафедри математичних дисциплін і моделювання Подільського державного аграрно-технічного університету, м. Кам'янець-Подільський

**Демчук Олена Станіславівна** — кандидат технічних наук, доцент кафедри прикладної математики Національного університету водного господарства та природокористування, м. Рівне, ldem1997@ukr.net

**Дорошенко Микола Васильович** — кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри інформатики та інформаційних систем Дрогобицького державного педагогічного університету імені Івана Франка, м. Дрогобич, dornik247@gmail.com

**Дуднік Андрій Сергійович** — кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри мережових та інтернет технологій Київського національного університету імені Т. Шевченка, м. Київ, a.s.dudnik@gmail.com

**Дячук Олександр Анатолійович** — кандидат технічних наук, старший науковий співробітник державної установи Інститут економіки та прогнозування НАН України, м. Київ, diachuk@ief.org.ua

**Жихаревич Володимир Вікторович** — кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри програмного забезпечення комп'ютерних систем Інституту фізико-технічних і комп'ютерних наук Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича, м. Чернівці, zhikhar81@gmail.com

**Іваник Євген Григорович** — кандидат фізико-математичних наук, доцент, провідний спеціаліст Львівської академії сухопутних військ, м. Львів, dedykto@ukr.net

**Іванюк Віталій Анатолійович** — кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри інформатики Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський, wivanyuk@gmail.com

**Ковальчук Павло Іванович** — доктор технічних наук, професор, головний науковий співробітник Інституту водних проблем і меліорації НААН, м. Київ, volokovalchuk@gmail.com

**Кожушко Олена Дмитрівна** — молодший науковий співробітник Національного університету водного господарства та природокористування, м. Рівне, kozhushko\_ak13@nuwm.edu.ua

**Коляно Ярослав Юрійович** — кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри математики та фізики Української академії друкарства, м. Львів, orang@gmail.com

**Костян Наталія Леонідівна** — кандидат технічних наук, доцент кафедри автомобілів та технології їх експлуатації Черкаського державного технологічного університету, м. Черкаси, 438knl@gmail.com

**Лисецький Юрій Михайлович** — доктор технічних наук, генеральний директор ДП «ЕС ЕНД ТІ УКРАЇНА», м. Київ, Yuri.Lysetskyi@snt.ua

**Литвин Олег Миколайович** — доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри вищої та прикладної матема-

тики Української інженерно-педагогічної академії, м. Харків, academ\_mail@ukr.net

**Мартинюк Петро Миколайович** — доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри прикладної математики Національного університету водного господарства та природокористування, м. Рівне, martinjuk@ukr.net

**Мельник Наталія Богданівна** — кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент Національного університету «Львівська політехніка», м. Львів, melnyk.n.pz@gmail.com

**Мусій Роман Степанович** — доктор фізико-математичних наук, професор, професор Національного університету «Львівська політехніка», м. Львів, musiy@lp.edu.ua

**Нікітіна Ольга Михайлівна** — кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри інформаційних систем Чернівецького факультету Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут», м. Чернівці, o.nikitina.chv@gmail.com

**Остапов Сергій Едуардович** — доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри програмного забезпечення комп'ютерних систем Інституту фізико-технічних і комп'ютерних наук Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича, м. Чернівці, sergey.ostapov@gmail.com

**Понеділок Вадим Віталійович** — старший викладач кафедри інформатики Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський, ponedilok@gmail.com

**Рожко Вікторія Ісламівна** — аспірант Інституту водних проблем і меліорації НААН, м. Київ, victoria\_ro@ukr.net

**Сікора Оксана Володимирівна** — кандидат технічних наук, доцент, завідувач кафедри інформатики та інформаційних систем Дрогобицького державного педагогічного університету імені Івана Франка, м. Дрогобич, sikora60@ukr.net

**Федорчук Володимир Анатолійович** — доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри інформатики Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський, fedvld@ukr.net

**Фомін Олександр Олексійович** — кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри комп'ютеризованих систем управління Одеського національного політехнічного університету, м. Одеса, [aleksandr.fomin@gmail.com](mailto:aleksandr.fomin@gmail.com)

**Фуртат Ірина Едуардівна** — кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри теоретичної і промислової теплотехніки теплоенергетичного факультету Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», м. Київ, [i.e.furtat@gmail.com](mailto:i.e.furtat@gmail.com)

**Фуртат Юрій Олегович** — кандидат технічних наук, науковий співробітник Інституту проблем моделювання в енергетиці імені Г. С. Пухова НАН України, м. Київ, [saodhar@ipme.kiev.ua](mailto:saodhar@ipme.kiev.ua)



## АЛФАВІТНИЙ ПОКАЖЧИК АВТОРІВ

<b>А</b>		<b>Л</b>	
Андрусяк І. В.	123	Лисецький Ю. М.	101
Артюх М. В.	117	Литвин О. М.	117
<b>Б</b>		<b>М</b>	
Балихіна Г. А.	71	Мартинюк П. М.	80
Бродяк О. Я.	123	Мельник Н. Б.	123
		Мусій Р. С.	123
<b>В</b>		<b>Н</b>	
Верлань А. Ф.	5	Нікітіна О. М.	16
<b>Г</b>		<b>О</b>	
Газдюк К. П.	16	Остапов С. Е.	16
Гошко Л. В.	123		
Громик А. П.	26	<b>П</b>	
<b>Д</b>		Понеділок В. В.	133
Демчук О. С.	71	<b>Р</b>	
Дорошенко М. В.	92	Рожко В. І.	71
Дуднік А. С.	40		
Дячук О. А.	49	<b>С</b>	
<b>Ж</b>		Сікора О. В.	92
Жихаревич В. В.	16	<b>Ф</b>	
<b>І</b>		Федорчук В. А.	5
Іваник Є. Г.	90	Фомін О. О.	141
Іванюк В. А.	63	Фуртат І. Е.	150
		Фуртат Ю. О.	150
<b>К</b>			
Ковальчук П. І.	71		
Кожушко О. Д.	80		
Коляно Я. Ю.	90		
Костьян Н. Л.	49		

## **МІЖНАРОДНА НАУКОВА КОНФЕРЕНЦІЯ «СУЧАСНІ ПРОБЛЕМИ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ, ПРОГНОЗУВАННЯ ТА ОПТИМІЗАЦІЇ»**

З 18 по 20 квітня 2018 року на базі кафедри інформатики фізико-математичного факультету Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка проведено VIII Міжнародну наукову конференцію «Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації», присвячену 100-річчю Національної академії наук України та 100-річчю Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка.

Організатори наукового форуму — Міністерство освіти і науки України, Національна академія наук України, Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова НАН України, Інститут проблем моделювання в енергетиці імені Г. Є. Пухова НАН України, Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», OKAN University (Istanbul, Turkey), Norwegian University of Science and Technology (Gjøvik, Norway), Lublin University of Technology (Lublin, Poland), Tashkent State Technical University named after Islam Karimov (Tashkent, Uzbekistan).

Інформаційним спонсором конференції виступила компанія «ЕС ЕНД ТІ УКРАЇНА», яка займає провідні позиції в Україні у галузі проєктування та впровадження корпоративних інтегрованих інформаційних систем, складних мережевих і телекомунікаційних рішень.

Програмний комітет конференції очолювали — Копилов Сергій Анатолійович, ректор Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка, доктор історичних наук, професор; Бейко Іван Васильович, доктор технічних наук, професор (Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»); Верлань Анатолій Федорович, доктор технічних наук, професор, член-кореспондент НАПН України (Інститут проблем моделювання в енергетиці ім. Г. Є. Пухова НАН України). Організаційний комітет працював під керівництвом Щирби Віктора Самуїловича, кандидата фізико-математичних наук, доцента, професора кафедри інформатики, декана фізико-математичного факультету Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка.

18 квітня об 11:30 конференція розпочала свою роботу в конференц-залі головного корпусу університету. Конференцію відкрив Федорчук Володимир Анатолійович, доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри інформатики.

Доповідь «Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка: історія та наукова діяльність» виголосив Ко-

нет Іван Михайлович, доктор фізико-математичних наук, професор, проректор з наукової роботи.

З вітальним словом від Національної академії наук України до учасників конференції звернувся Задірака Валерій Костянтинович, доктор фізико-математичних наук, професор, академік НАН України (Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова НАН України).

Далі конференція продовжила роботу в режимі пленарних засідань.

Цікавими та змістовними, інколи дискусійними, були пленарні доповіді:

- **Принципи організації керованих натурних моделюючих систем** (А. Ф. Верлань, Інститут проблем моделювання в енергетиці ім. Г. Є. Пухова НАН України);
- **Сучасні інформаційні технології у підвищенні якості навчання** (І. В. Бейко, Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»);
- **Теорія обчислень. Резерви оптимізації алгоритмів** (В. К. Задірака, Інститут кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України);
- **Розвиток методів комплексного аналізу і теорії збурень для моделювання нелінійних процесів з керуванням, ідентифікацією та оптимізацією параметрів** (А. Я. Бомба, Рівненський державний гуманітарний університет);
- **Формування базисів в задачах математичного моделювання** (В. С. Абрамчук, Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського).

Тематика пленарних доповідей була присвячена проблемам розвитку сучасного математично-комп'ютерного інструментарію для створення математичних моделей динамічних систем, теорії обчислень, побудови оптимального керування, ідентифікації та оптимізації параметрів математичних моделей. Актуальність цих проблем пов'язана із зростанням запитів сучасного комп'ютеризованого виробництва для формування конкурентоспроможності з використанням новітніх інформаційних технологій.

19-20 квітня конференція продовжила роботу в корпусі фізико-математичного факультету в режимі секційних засідань. Працювали 4 секції:

1. **Математичне та комп'ютерне моделювання у прикладних задачах. Системний аналіз і прийняття рішень** (керівники — А. Ф. Верлань, доктор технічних наук, професор, член-кореспондент НАПН України; О. Є. Коваленко, кандидат технічних наук, доцент);
2. **Питання оптимізації обчислень. Моделювання і оптимізація керованих процесів. Методи моделювання та прогнозування**

- динамічних процесів** (керівники — В. К. Задірака, доктор фізико-математичних наук, професор, академік НАН України; І. В. Бейко, доктор технічних наук, професор);
3. **Проблеми моделювання і прогнозування процесів із розподіленими параметрами** (керівники — А. Я. Бомба, доктор технічних наук, професор; І. М. Конет, доктор фізико-математичних наук, професор);
4. **Інформаційні технології в освіті** (керівники — А. М. Кух, доктор педагогічних наук, доцент; А. Б. Андруховський, старший викладач кафедри інформатики).

Учасники конференції активно і творчо обговорювали актуальні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації, їхню роль і значення для розвитку сучасної освіти, науки і техніки.

У роботі конференції брали участь науковці з багатьох регіонів України, а також з Норвегії, Польщі, Туреччини, Узбекистану. Вони представляли провідні наукові установи та заклади вищої освіти, у яких проводяться інтенсивні наукові дослідження за тематикою конференції. Зпоміж них 33 доктори наук і понад 70 кандидатів наук, докторанти, аспіранти, магістранти та студенти закладів вищої освіти України.

Регламент роботи (доповідь на пленарному засіданні — до 30 хв., на секційному — до 10 хв.) дозволив оприлюднити основні результати своїх досліджень доповідачеві й надав можливість для дискусії та обговорення доповіді учасникам конференції.

На секційних засіданнях кращими було визнано доповіді кандидатів технічних наук, доцентів Іванюка В. А., Коваленка О. С., Ночвая В. І., аспірантки Геселевої К. Г. (науковий керівник — доктор фізико-математичних наук, професор Конет І. М.). Їм було вручено монографії доктора технічних наук, професора, члена-кореспондента НАН України Верланя А. Ф.

За результатами роботи конференції опубліковано збірник «Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації: тези доповідей 8-ї Міжнародної наукової конференції, присвяченої 100-річчю Національної академії наук України та 100-річчю Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка. — Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2018. — 160 с.».

Статті учасників конференції будуть опубліковані у фахових збірниках наукових праць «Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки», «Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки», які видаються Кам'янець-Подільським національним університетом імені Івана Огієнка спільно з Інститутом кібернетики імені В. М. Глушкова НАН України.

Для учасників конференції було проведено екскурсію до Національного історико-архітектурного заповідника «Кам'янець-Подільський» — одного з 7 чудес України.

20 квітня о 14:00 відбулося підведення підсумків роботи та закриття конференції. Наступну конференцію «Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації» заплановано провести в 2020 році.

**І. В. Бейко**, доктор технічних наук, професор;

**А. Ф. Верлань**, доктор технічних наук, професор, член-кореспондент НАПН України;

**В. К. Задірака**, доктор фізико-математичних наук, професор, академік НАН України;

**І. М. Конет**, доктор фізико-математичних наук, професор;

**В. А. Федорчук**, доктор технічних наук, професор.

**ЗМІСТ**

**Верлань А. Ф., Федорчук В. А.**  
 Відновлення сигналів в системах спостереження та керування на основі розв'язування оберненої задачі з урізанням спектру ядра інтегрального оператора ..... 5

**Газдюк К. П., Жихаревич В. В., Нікітіна О. М., Остапов С. Е.**  
 Застосування методу рухомих клітинних автоматів до моделювання локомоції черв'якоподібних організмів ..... 16

**Громик А. П.**  
 Математичне моделювання коливних процесів у кусково-однорідному клиновидному циліндрично-круговому просторі з порожниною ..... 26

**Дуднік А. С.**  
 Методи визначення відстані між об'єктами засобами сенсорних мереж ..... 40

**Дячук А. А., Костьян Н. Л.**  
 Коллокационные алгоритмы решения уравнений Вольтерры ..... 49

**Ivanyuk V. A.**  
 Method of Inverse Operator for the Recover Input Signal ..... 63

**Ковальчук П. І., Рожко В. І., Балихіна Г. А., Демчук О. С.**  
 Математичне моделювання сценаріїв водообміну в системі каналу Дніпро-Донбас ..... 71

**Кожушко О. Д., Мартинюк П. М.**  
 Дослідження впливу розливу забруднюючої речовини на вологоперенесення в ґрунті засобами комп'ютерного та математичного моделювання ..... 80

**Коляно Я. Ю., Іваник Є. Г., Сікора О. В., Дорошенко М. В.**  
 Моделювання процесу тепломасоперенесення в композитних поліграфічних структурах ..... 92

**Лисецкий Ю. М.**  
 Динамическое моделирование предприятия на основе сетей Петри ..... 101

**Литвин О. М., Артюх М. В.**  
 Тестування методу побудови виробничих функцій зі змінними коефіцієнтами (ВФЗКЕ) ..... 117

**Мусій Р. С., Мельник Н. Б., Андрусак І. В.,  
Бродяк О. Я., Гошко Л. В.**

Математичне моделювання та аналіз термопружної поведінки електропровідного циліндра з тонким електропровідним покриттям за імпульсної електромагнітної дії ..... 123

**Ponedilok V. V.**

Regularization Method of Restoration of Input Signals of Nonlinear Dynamic Objects that Determined by Integro-Power Volterra Series .... 133

**Фомін О. О.**

Формування простору діагностичних ознак на основі перетинів ядер Вольтерра ..... 141

**Furtat I. E., Furtat Yu. O.**

Customizable Adaptive User Interfaces Implementation in Control and Learning Automated Systems as Way of Increasing their Reliability and Efficiency ..... 150

**Відомості про авторів** ..... 157

**Алфавітний покажчик авторів** ..... 161

Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова  
Національної академії наук України  
Кам'янець-Подільський національний університет  
імені Івана Огієнка

НАУКОВЕ ВИДАННЯ

## МАТЕМАТИЧНЕ ТА КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ

Серія: Технічні науки

Збірник наукових праць

Випуск 17

---

---

Підписано до друку 27.06.2018 р. Гарнітура «Таймс».  
Папір офісний. Друк різнографічний.  
Формат 60x84/16. Умовн. друк. арк. 9,8. Обл.-вид. арк. 10,5.  
Тираж 100. Зам. № 815.  
Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка,  
вул. Огієнка, 61, м. Кам'янець-Подільський, 32300.  
Свідоцтво серії ДК № 3382 від 05.02.2009 р.

Надруковано в Кам'янець-Подільському національному  
університеті імені Івана Огієнка,  
вул. Огієнка, 61, м. Кам'янець-Подільський, 32300.  
Свідоцтво серії ДК № 3382 від 05.02.2009 р.