

Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова
Національної академії наук України
Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка

МАТЕМАТИЧНЕ ТА КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ

Серія: Фізико-математичні науки

Збірник наукових праць

Випуск 17

Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка
2018

УДК 519.6:519.7

ББК 22

М34

Свідоцтво про державну реєстрацію друкованого засобу масової інформації:
Серія КВ № 14521-3492Р від 25.06.2008 р.

Збірник наукових праць включено до Переліку наукових фахових
видань ДАК Міністерства освіти і науки України з фізико-математичних наук
(наказ №1021 від 07 жовтня 2015 р.)

Друкуються згідно з рішенням вченої ради Кам'янець-Подільського
національного університету імені Івана Огієнка,
протокол №6 від 26 червня 2018 року.

Рецензенти:

М. Р. Петрик, доктор фізико-математичних наук, професор,
завідувач кафедри програмної інженерії Тернопільського національного
технічного університету імені Івана Пулюя;

І. М. Черевко, доктор фізико-математичних наук, професор,
професор кафедри математичного моделювання, декан факультету математики та
інформатики Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича.

Редакційна колегія:

О. М. Хіміч, член-кореспондент НАНУ,
доктор фізико-математичних наук, професор (*відповідальний редактор*);

А. Ф. Верлань, член-кореспондент НАПНУ,
доктор технічних наук, професор (*заст. відповідального редактора*);

І. Б. Ковальська, кандидат фізико-математичних наук, доцент
(*відповідальний секретар*);

В. К. Задірака, академік НАНУ, доктор фізико-математичних наук, професор;

В. П. Клименко, доктор фізико-математичних наук, професор;

І. М. Конет, доктор фізико-математичних наук, професор;

М. О. Перестюк, академік НАНУ, доктор фізико-математичних наук, професор;

Ю. В. Теплінський, доктор фізико-математичних наук, професор;

А. О. Чикрій, академік НАНУ, доктор фізико-математичних наук, професор.

**Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-матема-
М34 тичні науки** : зб. наук. праць / Інститут кібернетики імені В. М. Глуш-
кова Національної академії наук України, Кам'янець-Подільський національ-
ний університет імені Івана Огієнка ; [редкол.: О. М. Хіміч (відп.
ред.) та ін.]. — Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національ-
ний університет імені Івана Огієнка, 2018. — Вип. 17. — 172 с.

У збірнику друкуються результати досліджень вітчизняних та закордонних
науковців, що стосуються проблем застосування математичних моделей в різних
галузях людської діяльності.

Для наукових та інженерно-технічних працівників, аспірантів, студентів.

УДК 519.6:519.7

ББК 22

© Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова НАН України, 2018

© Кам'янець-Подільський національний
університет імені Івана Огієнка, 2018

ISSN 2308-5878

V. M. Glushkov Institute of Cybernetics
of National Academy of Sciences of Ukraine
Kamianets-Podilskyi National Ivan Ohiienko University

MATHEMATICAL AND COMPUTER MODELLING

Series: Physical and mathematical sciences

Scientific journal

ISSUE 17

Kamianets-Podilskyi National Ivan Ohiienko University
2018

Critics:

M. Petryk, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor,
Head of Department Program Engineering Ternopil Ivan Pil'uj
National Technical University;

I. Cherevko, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor,
Professor at Department Mathematical Modeling, Dean of Faculty
Mathematics and Informatics Yurii Fedkovych Chernivtsi National University.

Editorial board:

O. Himich, Corresponding Member of the NAS of Ukraine,
Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor (*Executive Editor*);

A. Verlan, Corresponding Member NAPS of Ukraine,
Doctor of Technical Science, Professor (*Vice Executive Editor*);

I. Kovalska, Candidate of Physical and Mathematical Sciences,
Docent (*Responsible Secretary*);

V. Zadiraka, Academician NAS of Ukraine,
Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor;

V. Klimenko, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor;

I. Konet, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor;

M. Perestjuk, Academician NAS of Ukraine,
Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor;

Yu. Teplinsky, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor;

A. Chikriy, Academician NAS of Ukraine,
Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor.

Mathematical and computer modelling. Series: Physical and mathematical sciences : scientific journal / V. M. Glushkov Institute of Cybernetics of National Academy of Sciences of Ukraine, Kamianets-Podilskyi National Ivan Ohiienko University ; [Editorial Board: O. Himich (Executive Editor) and others]. — Kamianets-Podilskyi : Kamianets-Podilskyi National Ivan Ohiienko University, 2018. — ISSUE 17. — 172 p.

There are printed results of investigation of national and foreign scientists that concern to problems of practice mathematical models in different spheres of human activity.

For scientific and technical staff, postgraduate students.

© V. M. Glushkov Institute of Cybernetics
of NAS of Ukraine, 2018

© Kamianets-Podilskyi National
Ivan Ohiienko University, 2018

УДК 517.9+531.19+530.145

В. І. Герасименко, д-р фіз.-мат. наук, професор,

В. В. Кречко, аспірант

Інститут математики НАН України, м. Київ

ПРО ПОШИРЕННЯ КОРЕЛЯЦІЙ В КВАНТОВИХ СИСТЕМАХ В НАБЛИЖЕННІ САМОУЗГОДЖЕНОГО ПОЛЯ

Розглянуто проблему строгого опису процесу поширення кореляцій початкових станів квантових систем багатьох частинок, які взаємодіють через обмежений потенціал взаємодії та задовольняють статистику Максвелла-Больцмана, в скейлінговій границі самоузгодженого поля на основі асимптотичної поведінки непертурбативного розв'язку задачі Коші для ієрархії квантових рівнянь ББГКІ (Боголюбов – Борн - Грін - Кірквуд - Івон). А саме, досліджено розв'язок задачі Коші для ієрархії квантових рівнянь Власова для послідовності граничних маргінальних операторів густини, у випадку початкових станів, які описуються одночастинковим оператором густини з простору ядерних операторів та обмеженими операторами, якими характеризуються кореляції станів.

Побудовано явний вигляд послідовності граничних маргінальних операторів густини, якою описується стан системи в такому наближенні, а саме, встановлено, що стан системи описується за допомогою граничного одночастинкового оператора густини, який є розв'язком задачі Коші для квантового кінетичного рівняння Власова з початковими кореляціями немарковського типу. Для чистих станів сформульоване кінетичне рівняння еквівалентно кінетичному рівнянню Хартрі з початковими кореляціями, зокрема, якими характеризуються конденсовані стани квантових систем багатьох частинок. Для початкових станів системи статистично незалежних квантових частинок кінетичне рівняння Власова з початковими кореляціями є квантовим кінетичним рівнянням Власова, а послідовність граничних маргінальних операторів густини в цьому випадку описує процес поширення початкового хаосу.

Ключові слова: *ієрархія рівнянь Власова, квантове кінетичне рівняння, кореляційний оператор, границя самоузгодженого (середнього) поля.*

Вступ. Однією з відкритих проблем сучасної теорії еволюційних рівнянь залишається проблема математичного обґрунтування нелінійних кінетичних рівнянь для систем багатьох частинок в конденсованих станах. В останнє десятиліття спостерігається значний прогрес у дослідженні проблеми строгого виведення квантових кінетичних рівнянь [1–6], наприклад, нелінійного рівняння Шрьодінгера і рівняння Гросса-

Пітаєвського, якими описуються колективна поведінка квантових систем багатьох частинок, зокрема Бозе газу та його конденсату [7–10].

Загально прийнятий підхід до побудови таких кінетичних рівнянь ґрунтується на дослідженні скейлінгових асимптотичних властивостей розв'язку задачі Коші для ієрархії квантових рівнянь ББГКІ (Боголюбов-Борн-Грін-Кірквуд-Івон) для послідовності маргінальних операторів густини [11, 12]. Зауважимо, що традиційно в границі самоузгодженого (середнього) поля досліджується асимптотична поведінка розв'язку задачі Коші для ієрархії квантових рівнянь ББГКІ побудованого методами теорії збурень [11–13], зокрема, для неї встановлено властивість поширення початкового хаосу [5, 6], тобто описана еволюція граничних станів квантових систем за відсутності початкових кореляцій.

Мета роботи полягає в описі процесу поширення кореляцій початкового стану квантових систем багатьох частинок в скейлінговій границі самоузгодженого поля на основі відповідної асимптотики непертурбативного розв'язку задачі Коші для ієрархії квантових рівнянь ББГКІ [13–15], а саме, розв'язку задачі Коші для ієрархії квантових рівнянь Власова у випадку початкових станів, які описуються одночастинковим оператором густини та кореляційними операторами, якими характеризуються конденсовані стани квантових систем багатьох частинок [11].

Асимптотична поведінка маргінальних операторів густини в границі самоузгодженого поля. У границі самоузгодженого поля еволюція всіх можливих станів квантових систем нескінченної кількості частинок, які задовольняють статистику Максвелла-Больцмана, описується задачею Коші для ієрархії квантових рівнянь Власова (граничної ієрархії квантових рівнянь ББГКІ)

$$\frac{\partial}{\partial t} f_s(t) = \sum_{j=1}^s \mathcal{N}^*(j) f_s(t) + \sum_{j=1}^s Tr_{s+1} \mathcal{N}_{\text{int}}^*(j, s+1) f_{s+1}(t), \quad (1)$$

$$f_s(t)|_{t=0} = f_s^0, \quad s \geq 1, \quad (2)$$

де оператор $\sum_{j=1}^s \mathcal{N}^*(j)$ — генератор рівняння фон Неймана у випадку еволюції системи s незв'язаних частинок [12, 13], і, відповідно, оператор $\mathcal{N}_{\text{int}}^*$ визначається через оператор парного потенціалу взаємодії Φ такою формулою: $\mathcal{N}_{\text{int}}^*(j_1, j_2) f_n \doteq -i(\Phi(j_1, j_2) f_n - f_n \Phi(j_1, j_2))$, які визначені на підпросторі вироджених ядерних операторів із нескінченно диференційованими ядрами з компактними носіями і використано систему одиниць, де $h = 2\pi\hbar = 1$ — постійна Планка, $m = 1$ — маса частинок.

Розв'язок задачі Коші (1), (2) — послідовність маргінальних операторів густини $f(t) = (f_0, f_1(t), \dots, f_n(t), \dots) \in \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{L}^1(\mathcal{H}^{\otimes n})$, зображується такими розкладами в ряд:

$$f_s(t, 1, \dots, s) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t dt_1 \dots \int_0^{t_{n-1}} dt_n Tr_{s+1, \dots, s+n} \prod_{j_1=1}^s \mathcal{G}_1^*(t-t_1, j_1) \sum_{i_1=1}^s \mathcal{N}_{\text{int}}^*(i_1, s+1) \quad (3)$$

$$\prod_{l_1=1}^{s+1} \mathcal{G}_1^*(t_1-t_2, l_1) \dots \prod_{j_n=1}^{s+n-1} \mathcal{G}_1^*(t_{n-1}-t_n, j_n) \sum_{i_n=1}^{s+n-1} \mathcal{N}_{\text{int}}^*(i_n, s+n)$$

$$\prod_{l_n=1}^{s+n} \mathcal{G}_1^*(t_n, l_n) f_{s+n}^0(1, \dots, s+n), \quad s \geq 1,$$

де однопараметрична сім'я відображень

$$\mathbb{R}^1 t \mapsto \mathcal{G}_1^*(t, j) f_1 \doteq e^{-itK(j)} f_1 e^{itK(j)}, \quad (4)$$

визначена на просторі ядерних операторів $\mathcal{L}^1(\mathcal{H})$ та оператор $K(j)$ — оператор кінетичної енергії j частинки. Якщо $f^0 \in \oplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{L}^1(\mathcal{H}^{\otimes n})$ ряд (3) існує і збігається за нормою простору $\mathcal{L}^1(\mathcal{H}_s)$ за умови: $t < t_0 \equiv (\text{const} \|\Phi\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_t)})^{-1}$.

Для початкових станів $f_s^0 \in \mathcal{L}_0^1(\mathcal{H}^{\otimes s}) \subset \mathcal{L}^1(\mathcal{H}^{\otimes s})$, $s \geq 1$, послідовністю (3) зображується сильний розв'язок задачі Коші для ієрархії квантових рівнянь Власова (1), (2) та для довільних початкових станів з простору $\oplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{L}^1(\mathcal{H}^{\otimes n})$ — слабкий розв'язок [13].

Зауважимо, що для розв'язку задачі Коші для ієрархії квантових рівнянь Власова (1), (2) справедлива властивість поширення початкового хаосу [5], тобто в границі самоузгодженого поля кореляції станів в процесі еволюції системи не народжуються, якщо відсутні кореляції початкового стану.

Дійсно, у випадку початкових даних (2) за відсутності кореляцій $f^{(c)} = (I, f_1^0(1), \prod_{i=1}^2 f_1^0(i), \dots, \prod_{i=1}^n f_1^0(i), \dots)$, послідовність маргінальних операторів густини (3) зображується таким розкладом

$$f_s(t, 1, \dots, s) = \prod_{i=1}^s f_1(t, i), \quad s \geq 1,$$

де одночастинковий оператор густини зображується розкладом в ряд

$$f_1(t, 1) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t dt_1 \dots \int_0^{t_{n-1}} dt_n Tr_{2, \dots, n+1} \mathcal{G}_1^*(t-t_1, 1) \mathcal{N}_{\text{int}}^*(1, 2)$$

$$\prod_{j_1=1}^2 \mathcal{G}_1^*(t_1-t_2, j_1) \dots \prod_{i_n=1}^n \mathcal{G}_1^*(t_{n-1}-t_n, i_n) \sum_{k_n=1}^n \mathcal{N}_{\text{int}}^*(k_n, n+1)$$

$$\prod_{j_n=1}^{n+1} \mathcal{G}_1^*(t_n, j_n) \prod_{i=1}^{n+1} f_1^0(i),$$

і задовольняє квантове кінетичне рівняння Власова

$$\frac{\partial}{\partial t} f_1(t, 1) = \mathcal{N}^*(1) f_1(t, 1) + \text{Tr}_2 \mathcal{N}_{\text{int}}^*(1, 2) f_1(t, 1) f_1(t, 2).$$

Зокрема, для чистих станів в термінах ядра такого оператора $f_1(t, q, q') = \psi(t, q) \psi^*(t, q')$ рівняння Власова зводиться до рівняння Хартрі

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi(t, q) = -\frac{1}{2} \Delta_q \psi(t, q) + \int dq' \Phi(q - q') |\psi(q')|^2 \psi(t, q),$$

де функція Φ — парний потенціал взаємодії частинок, які задовольняють статистику Максвелла — Больцмана.

Основний результат: процес поширення початкових кореляцій. Розглянемо початкові стани квантових систем нескінченної кількості частинок, які визначаються одночастинковим (маргінальним) оператором густини та кореляційними операторами (статистика Максвелла-Больцмана)

$$f^{(cc)} = (I, f_1^0(1), g_2(1, 2) \prod_{i=1}^2 f_1^0(i), \dots, g_n(1, \dots, n) \prod_{i=1}^n f_1^0(i), \dots), \quad (5)$$

де операторами $g_n(1, \dots, n) \equiv g_n \in \mathcal{L}_0^1(\mathcal{H}_n)$, $n \geq 2$, визначаються кореляції початкових станів. Підкреслимо, що зазначене припущення (5) стосовно початкового стану є типовим для кінетичного опису систем багатьох частинок в конденсованих станах, які характеризуються кореляціями [11].

Для таких початкових станів послідовність $f(t) = (f_1(t, 1), \dots, f_n(t, 1, \dots, n), \dots)$ маргінальних операторів густини зображується розкладами в ряд (3), які для обмежених потенціалів взаємодії є збіжними за нормою простору $\mathcal{L}^1(\mathcal{H})$ на скінченному проміжку часу: $t < t_0 \equiv (2 \|\Phi\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \|f_1^0\|_{\mathcal{L}^1(\mathcal{H})})^{-1}$.

Справедливе таке твердження. Для початкових станів (5) послідовність $f(t) = (I, f_1(t, 1), \dots, f_n(t, 1, \dots, n), \dots)$ маргінальних операторів густини, яка зображується розкладами в ряд (3), еквівалентна послідовності функціоналів $f(t | f_1(t)) = (I, f_1(t), f_2(t, 1, 2 | f_1(t)), \dots, f_n(t, 1, \dots, n | f_1(t)), \dots)$, де одночастинковий оператор густини зображується розкладом в ряд

$$f_1(t, 1) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t dt_1 \dots \int_0^{t_{n-1}} dt_n \text{Tr}_{2, \dots, n+1} \mathcal{G}_1^*(t - t_1, 1) \mathcal{N}_{\text{int}}^*(1, 2) \quad (6)$$

$$\prod_{j=1}^2 \mathcal{G}_1^*(t_1 - t_2, j_1) \dots \prod_{i_n=1}^n \mathcal{G}_1^*(t_{n-1} - t_n, i_n) \sum_{k_n=1}^n \mathcal{N}_{\text{int}}^*(k_n, n+1)$$

$$\prod_{j_n=1}^{n+1} \mathcal{G}_1^*(t_n, j_n) g_{n+1}(1, \dots, n+1) \prod_{i=1}^{n+1} f_1^0(i),$$

та в першому наближенні за густиною функціонали $f_n(t|f_1(t))$, $n \geq 2$, визначаються такою формулою:

$$f_n(t, 1, \dots, n|f_1(t)) = \prod_{i_1=1}^n \mathcal{G}_1^*(t, i_1) g_n(1, \dots, n) \prod_{i_2=1}^n (\mathcal{G}_1^*)^{-1}(t, i_2) \prod_{j=1}^n f_1(t, j), n \geq 2, \quad (7)$$

де одночастинковий оператор густини $f_1(t)$ зображується розкладом в ряд (6).

У випадку початкових даних (5) рівності $f_n(t) = f_n(t|f_1(t))$, $n \geq 2$, справедливі внаслідок почленної рівності для розкладу в ряд маргінальних операторів густини (3) та зображення розкладу в ряд для добутку розкладів в ряд для одночастинкового оператора густини (6).

Таким чином, в наближенні самоузгодженого поля встановлено явний вигляд граничних маргінальних операторів густини (7), а саме, встановлено, що стан системи описується за допомогою граничного одночастинкового оператора густини (6), який є розв'язком певного кінетичного рівняння, яке сформульовано в наступному розділі.

Зазначимо, що внаслідок справедливості в наближенні самоузгодженого поля для станів зображення (7), при еволюції системи нові кореляції не народжуються за виключенням тих, які породжуються початковими кореляціями.

Квантове кінетичне рівняння Власова з початковими кореляціями. Одночастинковий оператор густини (6) є слабким розв'язком задачі Коші для квантового кінетичного рівняння з початковими кореляціями:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} f_1(t, 1) &= \mathcal{N}^*(1) f_1(t, 1) + \\ &+ Tr_2 \mathcal{N}_{\text{int}}^*(1, 2) \prod_{i_1=1}^2 \mathcal{G}_1^*(t, i_1) g_2(1, 2) \prod_{i_2=1}^2 (\mathcal{G}_1^*)^{-1}(t, i_2) f_1(t, 1) f_1(t, 2), \end{aligned} \quad (8)$$

$$f_1(t)|_{t=0} = f_1^0, \quad (9)$$

де оператори $\mathcal{N}^*(1)$ та $\mathcal{N}_{\text{int}}^*(1, 2)$ визначені як і в ієрархії рівнянь (1) та групою операторів $(\mathcal{G}_1^*)^{-1}(t)$ позначено обернену групу операторів до групи (4).

Рівняння (8) виводиться внаслідок диференціювання в сенсі поточної збіжності в просторі ядерних операторів $\mathcal{L}^1(\mathcal{H})$ розкладу в ряд (6) та зображенні розкладу в ряд для двохчастинкового маргіна-

льного оператора густини у вигляді відповідного функціоналу (7). В результаті отриману тотожність в першому наближенні за густиною трактуємо, як еволюційне рівняння для одночастинкового оператора густини, тобто квантового кінетичного рівняння з початковими кореляціями типу кінетичного рівняння Власова.

Для чистих станів рівняння (8) зводиться до кінетичного рівняння Хартрі з початковими кореляціями. Зазначимо, що виведене кінетичне рівняння є немарковським кінетичним рівнянням.

Зауважимо також, що послідовність маргінальних операторів густини (6), (7) є розв'язком ієрархії квантових рівнянь Власова (1), (2), якою в границі самоузгодженого поля описується послідовність маргінальних операторів густини (3) у випадку довільних початкових станів.

Для початкових станів системи статистично незалежних частинок кінетичне рівняння (8) є квантовим рівнянням Власова, а функціонали (7) описують процес поширення початкового хаосу.

Висновки. Таким чином, для початкових станів, які описуються послідовністю маргінальних операторів густини (5), в роботі встановлено еквівалентність опису еволюції квантових систем в термінах маргінальних операторів густини (3) та за допомогою послідовності маргінальних функціоналів (6), (7), які визначаються розв'язком квантового кінетичного рівняння Власова з початковими кореляціями (8). Іншими словами, альтернативний метод опису еволюції станів квантових систем багатьох частинок в наближенні самоузгодженого поля ґрунтується на немарковському кінетичному рівнянні Власова з початковими кореляціями (8).

Аналогічно до роботи [13] отримані вище результати можуть бути поширені на системи багатьох бозонів або ферміонів.

Зазначимо також, що в роботах [16–18] було розвинуто інші підходи до опису процесу поширення початкових кореляцій в скейлінговій границі самоузгодженого поля. У роботі [16] така властивість доведена в інший спосіб, а саме, в термінах одночастинкового оператора густини, який визначається розв'язком узагальненого квантового кінетичного рівняння з початковими кореляціями, в роботі [17] властивість поширення початкових кореляцій було встановлено за допомогою опису еволюції квантової системи багатьох частинок в термінах маргінальних спостережуваних. У роботі [18] розвинуто підхід до побудови асимптотичної поведінки самоузгодженого поля непертурбативного розв'язку задачі Коші для ієрархії нелінійних квантових рівнянь ББГКІ для послідовності маргінальних кореляційних операторів.

Список використаних джерел:

1. Pezzotti F. Mean-field limit and semiclassical expansion of quantum particle system / F. Pezzotti, M. Pulvirenti // Ann. Henri Poincaré. — 2009. — Vol. 10. — P. 145–187.

2. Erdős L. Quantum dynamics with mean field interactions: a new approach / L. Erdős, B. Schlein // *J. Stat. Phys.* — 2009. — Vol. 134 (5). — P. 859–870.
3. Mean field evolution of fermions with Coulomb interaction / M. Porta, S. Rademacher, C. Saffirio, B. Schlein // *J. Stat. Phys.* — 2017. — Vol. 166 (6). — P. 1345–1364.
4. Golse F. The Schrödinger equation in the mean-field and semiclassical regime / F. Golse, T. Paul // *Arch. Rational Mech. Anal.* — 2017. — Vol. 223. — P. 57–94.
5. Golse F. On the dynamics of large particle systems in the mean field limit / F. Golse // *Lect. Notes Appl. Math. Mech.* — Vol. 3. — P. 1–144 In: *Macroscopic and large scale phenomena: coarse graining, mean field limits and ergodicity.* Springer. — 2016.
6. Benedikter N. Effective Evolution Equations from Quantum Dynamics / N. Benedikter, M. Porta, B. Schlein // *Springer Briefs in Mathematical Physics.* Springer. — 2016. — 125 p.
7. Erdős L. Derivation of the cubic nonlinear Schrödinger equation from quantum dynamics of many-body systems / L. Erdős, B. Schlein, H.-T. Yau // *Invent. Math.* — 2007. — Vol. 167. — P. 515–614.
8. Erdős L. Derivation of the Gross–Pitaevskii equation for the dynamics of Bose–Einstein condensate / L. Erdős, B. Schlein, H.-T. Yau // *Ann. of Math.* — 2010. — Vol. 172. — P. 291–370.
9. Benedikter N. Quantitative derivation of the Gross–Pitaevskii equation / N. Benedikter, G. Oliveira, B. Schlein // *Comm. Pure. Appl. Math.* — 2015. — Vol. 68. — P. 1399–1482.
10. Boccato C. Quantum many-body fluctuations around nonlinear Schrödinger dynamics / C. Boccato, S. Cenatiempo, B. Schlein // *Ann. Henri Poincaré.* — 2017. — Vol. 18 (1). — P. 113–191.
11. Боголюбов М. М. Лекції з квантової статистики. Питання статистичної механіки квантових систем / М. М. Боголюбов. — К. : Рад. школа, 1949. — 228 с.
12. Petrina D. Ya. Mathematical Foundations of Quantum Statistical Mechanics. Continuous Systems / D. Ya. Petrina. — Kluwer Acad. Publ., 1995. — 457 p.
13. Gerasimenko V. I. Hierarchies of quantum evolution equations and dynamics of many-particle correlations / V. I. Gerasimenko // *Statistical Mechanics and Random Walks: Principles, Processes and Applications.* — N.Y. : Nova Science Publ., Inc., 2013. — P. 233–288.
14. Gerasimenko V. I. Initial-value problem of the Bogolyubov hierarchy for quantum systems of particles / V. I. Gerasimenko, V. O. Shtyk // *Ukrain. Math. J.* — 2006. — Vol. 58 (9). — P. 1175–1191.
15. Gerasimenko V. I. On non-perturbative solution of quantum BBGKY hierarchy / V. I. Gerasimenko, V. V. Krechko // *Proc. Inst. Math. NASU.* — 2016. — Vol. 13 (2). — P. 7–26.
16. Gerasimenko V. I. On quantum kinetic equations of many-particle systems in condensed states / V. I. Gerasimenko, Zh. A. Tsvir // *Physica A: Stat. Mech. Appl.* — 2012. — Vol. 391 (24). — P. 6362–6366.
17. Gerasimenko V. I. New approach to derivation of quantum kinetic equations with initial correlations / V. I. Gerasimenko // *Carpathian Math. Publ.* — 2015. — Vol. 7 (1). — P. 38–48.

18. Gerasimenko V. I. The evolution of correlation operators of large particle quantum systems / V. I. Gerasimenko // *Methods Funct. Anal. Topology*. — 2017. — Vol. 23 (2). — P. 123–132.

ON THE PROPAGATION OF CORRELATIONS IN QUANTUM SYSTEMS IN A MEAN FIELD APPROXIMATION

The problem of the rigorous description of a process of the propagation of initial correlations of quantum many-particle systems, interacting by means of bounded interaction potential and obeying the Maxwell-Boltzmann statistics, in mean field scaling limit is considered within the framework of the corresponding asymptotic behavior of a nonperturbative solution of the Cauchy problem of the quantum BBGKY (Bogolyubov-Born-Green-Kirkwood-Yvon) hierarchy. Namely, we consider a solution of the Cauchy problem of the quantum Vlasov hierarchy for a sequence of the limit marginal density operators in case of initial states are specified in terms of a one-particle density operator from the space of trace class operators and bounded operators characterized the correlations of states.

The explicit form of a sequence of the limit marginal density operators, that describes the state of a system in a such approximation, is constructed. Namely, we establish that the state of a system is described by means of the limit one-particle density operator governed by the non-Markovian quantum Vlasov kinetic equation with initial correlations. For pure states the constructed kinetic equation is equivalent to the Hartree equation with initial correlations, in particular, that characterize the condensed states of quantum many-particle systems. In case of initial states of statistically independent particles the Vlasov kinetic equation with initial correlations is the quantum Vlasov kinetic equation and a sequence of the limit marginal density operators is described a process of the propagation of initial chaos.

Key words: *Vlasov hierarchy, quantum kinetic equation, correlation operator, mean field limit.*

Отримано: 15.05.2018

УДК 518.968

К. Г. Геселева, аспірант

Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

ДОСЛІДЖЕННЯ НА СУМІСНІСТЬ ТА ВІДШУКАННЯ НАБЛИЖЕНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ІНТЕГРО-ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З МАЛОЮ НЕЛІНІЙНІСТЮ ТА ОБМЕЖЕННЯМИ

У статті досліджується задача на сумісність одного типу інтегро-функціонального рівняння з малою не лінійністю та додатковими умовами (обмеженнями), коли оператор внутрішньої суперпозиції знаходиться в підінтегральному виразі інтегрального оператора. Приведена задача є важлива в зв'язку з тим, що до неї зводиться крайова задача для диференціального рівняння з відхиленням аргументу із запізненням та додатковими умовами. Показано, що в частковому випадку, коли $h(x) = x - \Delta$, отримується випадок сталого запізнення.

Крім основної задачі, в якій досліджується узгодженість шуканого розв'язку з додатковими умовами, також розглянуто допоміжну задачу, – задачу з керуванням. Основна ідея досліджень на сумісність згаданої задачі полягає в тому, що ця задача зводиться до аналогічної задачі для інтегрального рівняння з малою нелінійністю і з сумісності останньої впливає сумісність основної задачі.

У роботі розглянуто питання побудови наближених розв'язків як основної так і допоміжної задач. Показано, що при виконанні певних умов такі розв'язки можна отримати, застосувавши до задачі один варіант ітераційного методу. При застосуванні цього методу на кожному кроці ітерації виникає необхідність у розв'язанні лінійної системи алгебраїчних рівнянь. Оскільки основна матриця системи є невиродженою і однаковою для кожного кроку ітерації, то доцільно на початку цього процесу знайти обернену матрицю і в подальшому поетапно використовувати її при відшукуванні наближених розв'язків. Слід мати на увазі, що у випадку, коли основна задача є сумісною, використання додаткових умов, яким задовольняє шуканий розв'язок, дає змогу покращити умови збіжності та швидкість збіжності згаданого ітераційного методу.

Одержані результати є важливими в подальших дослідженнях різних типів наближених методів для відшукування розв'язків інтегро-функціональних рівнянь з обмеженнями.

Ключові слова: *наближений розв'язок, додаткові умови, обмеження, інтегро-функціональні рівняння з малою нелінійністю, інтегральне рівняння з малою нелінійністю ітеративний метод, обернений оператор.*

Вступ. Розглянемо в просторі $L_2[a, b]$ інтегро-функціональне рівняння

$$y(x) = f(x) + \int_a^b K(x,t)y(t)dt + \int_a^b H(x,t)y(h(t))dt + \varepsilon \int_a^b G(x;t)F(t;y(t))dt, x \in [a,b], \quad (1)$$

з умовою

$$y(x) = \psi(x), x \notin [a,b], \quad (2)$$

та обмеженнями

$$\int_a^b \Phi_i(x)y(x)dx = \gamma_i, i = \overline{1,m}, \quad (3)$$

де $f(x), \psi(x)$ — задані відповідно на $[a,b]$ та за його межами функції, а $y(x)$ — шукана функція. Лінійно-незалежна система функцій $\{\Phi_i(x)\}$ та числова множина $\{\gamma_i\}, i = \overline{1,m}$ — відомі. До рівняння (1) зводиться крайова задача для диференціального рівняння з відхиленням аргументу із запізненням, у випадку сталого запізнення $\Delta, h(x) = x - \Delta$.

Задачу (1)–(3) будемо вважати сумісною, якщо існує така функція $y(x)$, яка є розв'язком рівняння (1), задовольняє умову (2) та обмеження (3).

Основна частина. Розглянемо випадок, коли функції $K(x,t), H(x,t), G(x;t)$ в квадраті $[a,b]^2$ задовольняють умови

$$\iint_{aa}^{bb} K^2(x,t)dxdt = K^2 < \infty, \quad (4)$$

$$\iint_{aa}^{bb} H^2(x,t)dxdt = H^2 < \infty, \quad (5)$$

$$\iint_{aa}^{bb} G^2(x;t)dxdt = G^2 < \infty;$$

функція $\Phi(t;y)$ в області $D = \{a \leq t \leq b, -\infty < y < \infty\}$ вимірна за t при всіх y і неперервна за y при всіх t (умова Каратеодорі) і задовольняє умову Ліпшиця:

$$|\Phi(t;y) - \Phi(t;\bar{y})| \leq L|y - \bar{y}|,$$

де L — деяка додатня стала; функція $h(x)$ є неперервною разом із своєю похідною на $[a,b]$ і справджуються нерівності

$$x - h(x) \geq \Delta > 0, \quad (6)$$

$$h'(x) \geq l > 0. \quad (7)$$

Покажемо, що рівняння (1) з умовою (2) при виконанні умов (7) зводиться до інтегрального рівняння з малою нелінійністю. Перепишемо другий інтеграл правої частини рівняння (1) з урахуванням умови (2) так

$$\begin{aligned} \int_a^b H(x, t) y(h(t)) dt &= \int_a^{h^{-1}(a)} H(x, t) y(h(t)) dt + \int_{h^{-1}(a)}^b H(x, t) y(h(t)) dt = \\ &= \int_a^{h^{-1}(a)} H(x, t) \varphi(h(t)) dt + \int_{h^{-1}(a)}^b H(x, t) y(h(t)) dt = \\ &= \varphi(x) + \int_{h^{-1}(a)}^b H(x, t) y(h(t)) dt. \end{aligned}$$

В силу умови (7) неперервна функція $s = h(t)$ буде зростаючою і для неї існуватиме обернена функція $t = h^{-1}(s)$, $dt = \frac{ds}{h'(h^{-1}(s))}$. Тоді останній інтеграл буде мати вигляд

$$\begin{aligned} \int_{h^{-1}(a)}^b H(x, t) y(h(t)) dt &= \int_a^{h(b)} \frac{H(x, h^{-1}(s))}{h'(h^{-1}(s))} y(s) ds = \int_a^b \tilde{H}(x, s) y(s) ds, \\ \tilde{H}(x, s) &= \begin{cases} \frac{H(x, h^{-1}(s))}{h'(h^{-1}(s))}, & s \in [a, h(b)], \\ 0, & s \in (h(b), b], x \in [a, b]. \end{cases} \quad (8) \end{aligned}$$

Слід відмітити що оператор \tilde{H} , який визначається рівністю

$$(\tilde{H}v)(x) = \int_a^b \tilde{H}(x, t) v(t) dt, \forall v(x) \in L_2[a, b], \quad (9)$$

з виконанням умов (5)–(7) бачимо, що оператор K , який має вигляд

$$(Kv)(x) = \int_a^b K(x, t) v(t) dt, \forall v(x) \in L_2[a, b],$$

буде Фредгольмовим.

Дійсно,

$$\iint_{a a}^{b b} \tilde{H}^2(x, s) dx ds = \iint_{a a}^{b b} \frac{H^2(x, h^{-1}(s))}{(h'(h^{-1}(s)))^2} dx ds \leq \iint_{a a}^{b b} \frac{H^2(x, h^{-1}(s))}{h^2} dx ds =$$

$$= \frac{1}{h^2} \int_a^b \int_a^b H^2(x, h^{-1}(s)) dx ds \leq \frac{H^2}{h^2} < \infty.$$

З урахуванням приведених міркувань рівняння (1) з умовою (2) запишеться таким чином

$$y(x) = f(x) + \int_a^b K(x, t) y(t) dt + \varphi(x) + \int_a^b \tilde{H}(x, s) y(s) ds + \\ + \varepsilon \int_a^b G(x; t) F(t; y(t)) dt, x \in [a, b],$$

або

$$y(x) = f_1(x) + \int_a^b T(x, t) y(t) dt + \varepsilon \int_a^b G(x; t) F(t; y(t)) dt, \quad (10)$$

де

$$f_1(x) = f(x) + \varphi(t) = f(t) + \int_a^{h^{-1}(a)} H(x, t) \psi(h(t)) dt, \quad (11)$$

$$T(x, t) = K(x, t) + \tilde{H}(x, t), (x, t) \in [a, b]^2. \quad (12)$$

Таким чином, ми показали, що рівняння (1) з умовою (2) при виконанні умов (4)-(7) зводиться до інтегрального рівняння з малою нелінійністю (10) з цілком неперервним оператором T . Це означає, що задача (1)-(3), в свою чергу, зводиться до аналогічної задачі (10), (3) для інтегрального рівняння з малою нелінійністю і з сумісності впливає сумісність вихідної задачі і навпаки. Дослідженню умов сумісності задачі типу (10), (3) присвячена низка наукових праць, зокрема [2, 3]. Встановлений факт еквівалентності задач (1)-(3) та (10), (3) щодо їх сумісності дає можливість проводити подальші дослідження стосовно формулювання умов сумісності, безпосередньо, для задачі (10), (3) та розгляду питання застосування до цієї задачі наближених методів.

Зуваження. Умова (6), в приведених вище міркуваннях, не є суттєвою. Вона впливає лише на визначення нових меж при згаданій заміні змінної в другому інтегралі рівняння (1) та вказує на те, що умова (2) виконується конкретно на проміжку $[h^{-1}(a), a]$. Міркування аналогічні приведеним, можна провести і в тому випадку, коли стосовно функції $h(x)$ виконується лише умова (7). Це говорить про те, що для цієї функції може існувати такий проміжок $[x_1; x_2] \subseteq [a, b]$ (чи декілька проміжків), що $h(x) \geq x, \forall x \in [x_1; x_2]$.

Задача з керуванням. Розглянемо в просторі $L_2[a, b]$ задачу

$$\tilde{y}(x) = f(x) + \int_a^b K(x, t) \tilde{y}(t) dt + \int_a^b H(x, t) \tilde{y}(h(t)) dt + \quad (13)$$

$$+ \varepsilon \int_a^b G(x; t) F(t; \tilde{y}(t)) dt, x \in [a, b], x \in [a, b],$$

$$\tilde{y}(x) = \psi(x), x \notin [a, b], \quad (14)$$

$$\int_a^b \Phi_i(x) \tilde{y}(x) dx = \gamma_i + \int_a^b \Phi_i(x) u(x) dx, i = \overline{1, m}, \quad (15)$$

де $\tilde{y}(x)$ і $u(x)$ — шукані функції, причому

$$u(x) = \sum_{j=1}^m \lambda_j \xi_j(x), \quad (16)$$

$\{\xi_j(x)\}, j = \overline{1, m}$, — деяка лінійно-незалежна система функцій і $\xi_j(x) = 0$, коли $x \notin [a; b]$.

Покажемо, що задача (13)–(15) еквівалентна деякому рівнянню без обмежень. Введемо заміну

$$\tilde{y}(x) = z(x) + \int_a^b K(x; t) u(t) dt + \int_a^b H(x; t) u(h(t)) dt + \quad (17)$$

$$+ \varepsilon \int_a^b G(x; t) F(t; u(h(t))) dt, x \in [a, b], x \in [a; b],$$

яку будемо розглядати, як допоміжну задачу, вважаючи в ній функцію $z(x)$ заданою, а функції $\tilde{y}(x)$ та $u(x)$ треба знайти. Підставляючи (16) в (17), а потім (16) та (17) в рівність (15), отримаємо

$$\int_a^b \Phi_i(x) \left\{ z(x) + \sum_{j=1}^m \lambda_j \left(\int_a^b K(x, t) \xi_j(t) dt + \int_a^b H(x, t) \xi_j(h(t)) dt \right) \right\} dx +$$

$$+ \varepsilon \int_a^b G(x; t) F(t; \xi_j(t)) dt = \gamma_i + \int_a^b \Phi_i(x) \left(\sum_{j=1}^m \lambda_j \xi_j(x) \right) dx, i = \overline{1, m},$$

Перепишемо цю рівність так

$$\int_a^b \Phi_i(x) \left\{ \sum_{j=1}^m \lambda_j (\xi_j(x) - \int_a^b K(x, t) \xi_j(t) dt - \int_a^b H(x, t) \xi_j(h(t)) dt) \right\} dx -$$

$$- \varepsilon \int_a^b G(x; t) F(t; \xi_j(t)) dt = \int_a^b \Phi_i(x) z(x) dx - \gamma_i, i = \overline{1, m}.$$

Нехай

$$\eta_j(x) = \xi_j(x) - \int_a^b K(x,t)\xi_j(t)dt - \int_a^b H(x,t)\xi_j(h(t))dt - \varepsilon \int_a^b G(x;t)F(t; \xi_j(t))dt. \quad (18)$$

Позначивши

$$\int_a^b \Phi_i(x)\eta_j(x)dx = a_{ij}, b_i = \int_a^b \Phi_i(x)z(x)dx - \gamma_i, i, j = \overline{1, m}. \quad (19)$$

Останню рівність запишемо так

$$\sum_{j=1}^m a_{ij}\lambda_j = b_i, i = \overline{1, m}. \quad (20)$$

Отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь. Розглянемо випадок, коли матриця цієї системи, яку позначимо через Λ , не вироджена і нехай $\Lambda^{-1} = (c_{ij}), i, j = \overline{1, m}$ — обернена матриця. Тоді

$$\lambda_j = \sum_{i=1}^m c_{ij}b_i, j = \overline{1, m}, \quad (21)$$

і розв'язки допоміжної задачі (17), (15) запишуться так

$$\begin{aligned} u(x) &= \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^m \lambda_i \xi_j(x) = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^m c_{ji} b_i \xi_j(x) = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^m c_{ij} \left(\int_a^b \Phi_i(t) z(t) dt - \gamma_i \right) \xi_j(x) = \\ &= \int_a^b \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^m c_{ji} b_i \xi_j(x) \Phi_i(t) z(t) dt - \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^m c_{ij} \gamma_i \xi_j(x). \end{aligned}$$

Тобто

$$u(x) = \int_a^b R(x,t)z(t)dt - w(x), \quad (22)$$

$$R(x,t) = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^m c_{ij} \xi_j(x) \Phi_i(t), \quad (23)$$

$$w(x) = \sum_{j=1}^m \sigma_j \xi_j(x), \sigma_j = \sum_{i=1}^m c_{ji} \gamma_i, j = \overline{1, m}, \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \tilde{y}(x) &= u(x) + z(x) - \sum_{j=1}^m \lambda_j \eta_j(x) = u(x) + z(x) - \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^m c_{ji} b_i \eta_j(x) = \\ &= u(x) + z(x) - \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^m c_{ji} \left(\int_a^b \Phi_i(t) z(t) dt - \gamma_i \right) \eta_j(x) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= u(x) + z(x) - \int_a^b \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^m c_{ji} \Phi_i(t) \eta_j(t) dt - \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^m c_{ji} \gamma_i \eta_j(x) = \\
 &= u(x) + b(x) + \int_a^b P(x, t) z(t) dt, \\
 P(x, t) &= \delta(x - t) - \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^m c_{ji} \eta_j(x) \Phi_i(t), \tag{25}
 \end{aligned}$$

$$b(x) = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^m c_{ji} \gamma_i \eta_j(x) = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^m \sigma_i \eta_j(x), \tag{26}$$

Таким чином, єдиний розв'язок допоміжної задачі (17), (15) має вигляд

$$u(x) = \int_a^b R(x, t) z(t) dt - w(x), \quad y(x) = u(x) + b(x) + \int_a^b P(x, t) z(t) dt.$$

Згідно з теоремою 3 [3] задача (1)–(3) сумісна лише тоді, коли розв'язок $z^*(x)$ рівняння

$$z(x) = g(x) + \int_a^b M(x, t) z(t) dt, \tag{27}$$

задовольняє умову

$$\int_a^b P(x, t) z^*(t) dt = w(x), \tag{28}$$

де

$$g(x) = f(x) + \int_a^b K(x, t) z(t) dt + \int_a^b H(x, t) z(h(t)) dt + \varepsilon \int_a^b G(x; t) F(t; z(t)) dt, \tag{29}$$

$$M(x, t) = \int_a^b K(x, \xi) P(\xi, t) d\xi + \int_a^b H(x, \xi) P(h(\xi), t) dt + \varepsilon \int_a^b G(x; t) F(t; z(t)) dt. \tag{30}$$

Можна також показати, що умова (28) буде рівносильною умовою

$$\int_a^b \Gamma_j(t) z^*(t) dt = \sigma_j, \quad j = \overline{1, m}, \tag{31}$$

де

$$\Gamma_j(t) = \sum_{i=1}^m c_{ji} \Phi_i(t). \tag{32}$$

Ітераційний метод. Ідея ітераційного методу стосовно задачі (1)–(3) полягає в тому, що послідовні наближення до шуканого розв'язку знаходимо на підставі формул

$$z_k(x) = f(x) + \int_a^b K(x;t)y_{k-1}(t)dt + \int_a^b H(x;t)y_{k-1}(h(t))dt, x \in [a;b], \quad (33)$$

$$y_{k-1}(x) = \psi(x), x \notin [a;b], \quad (34)$$

$$\tilde{y}_k(x) = z_k(x) + \int_a^b K(x;t)u_k(t)dt + \int_a^b H(x;t)u_k(h(t))dt, x \in [a;b], \quad (35)$$

$$u_k(x) = \sum_{j=1}^m \lambda_j^k \xi_j(x), x \in [a,b], u_k(x) = 0, x \notin [a,b], \quad (36)$$

$$\int_a^b \Phi_i(x)y_k(x)dx = \gamma_i, i = \overline{1,m}, y_k(x) = \tilde{y}_k(x) - u_k(x). \quad (37)$$

Для визначення невідомих параметрів $\lambda_j^k, j = \overline{1,m}$, отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь. Дійсно, на підставі наведених вище формул матимемо

$$y_k(x) = z_k(x) - \sum_{j=1}^m \lambda_j^k \eta_j(x). \quad (38)$$

Якщо підставити цю функцію в першу з формул (37) і скористатись позначенням (19), то отримаємо

$$\sum_{j=1}^m a_{ij} \lambda_j^k = b^k, i = \overline{1,m}, \quad (39)$$

де

$$b_i^k = \int_a^b \Phi_i(x)z_k(x)dx - \gamma_i, i = \overline{1,m}. \quad (40)$$

Висновки. Метод (33)–(37) буде збіжним, якщо матриця Λ не вироджена, задача (1)–(3) сумісна і $\rho(M) < 1$, причому послідовність $\{y_k(x)\}$ збігатиметься до єдиного розв'язку $y^*(x)$ задачі (1)–(3), а послідовність $\{u_k(x)\}$ збігатиметься до нуля.

Список використаних джерел:

1. Канторович Л. В. Функциональный анализ / Л. В. Канторович, Г. П. Алимов. — М. : Наука, 1948. — 752 с.
2. Криль С. А. Решение интегро-разностных уравнений с малой нелинейностью проекционно-итеративным методом / С. А. Криль. — К., 1978. — 35 с. — (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 87.17).

3. Лучка А. Ю. Методи розв'язування рівнянь з обмеженнями і проєкційно-ітеративний метод Ю. Д. Соколова / А. Ю. Лучка // Укр. мат. журн. — 1996. — Вип. 48, № 11. — С. 1501–1509.
4. Лучка А. Ю. Интегральные уравнения и методы их решения / А. Ю. Лучка // Кибернетика и систем. анализ. — 1996. — №3. — С. 82–96.
5. Лучка А. Ю. Ітераційний метод побудови розв'язків лінійних рівнянь з обмеженнями / А. Ю. Лучка, Т. А. Кучерук // Укр. мат. журн. — 2002. — Т.54. — №4. — С. 472–482.

RESEARCH ON COMPATIBILITY AND REVIEW OF APPROPRIATE SOLUTIONS OF INTEGRO-FUNCTIONAL EQUATIONS WITH SMALL NONLINEARITY AND RESTRICTIONS

The article deals with the problem of compatibility of one type of integro-functional equation with additional conditions (restrictions) and with a small nonlinearity, when the operator of the internal superposition is in the integral operator integral expression. The given problem is important because it reduces the boundary value problem for a differential equation with delay deviation and additional conditions. It is shown that in the partial case, when $h(x) = x - \Delta$, a case of steady delay is obtained.

In addition to the main task, which investigates the coherence of the desired solution with the additional conditions, also considered the auxiliary problem — the task of management. The basic idea of research on the compatibility of this problem is that this problem is reduced to a similar problem for an integral equation with a small nonlinearity, and the compatibility of the latter implies compatibility of the main problem.

The paper deals with the problem of construction of approximate solutions of both basic and auxiliary problems. It is shown that under certain conditions, such solutions can be obtained by applying one variant of the iterative method to the problem. When applying this method, at every step of the iteration, there is a need to solve the linear system of algebraic equations. Since the main matrix of the system is not degenerate and is the same for each iteration step, it is expedient at the beginning of this process to find an inverse matrix and then use it step by step in the search for approximate solutions. It should be borne in mind that in the case where the primary task is compatible, the use of additional conditions that satisfies the desired solution will improve the convergence conditions and the convergence rate of the said iterative method.

The obtained results are important in the further research of various types of approximate methods for finding solutions to integro-functional equations with constraints.

Key words: *approximate solution, additional conditions, restrictions, integro-functional equations with small nonlinearity, integral equation with small nonlinearity, iterative method, inverse operator.*

Отримано: 29.05.2018

UDC 517.946

A. Gromyk*, Ph. D. of Tech. Sci,**I. Konet****, Doctor of Phys. and Mathem. Sciences, Professor,**T. Pylypiuk****, Ph. D of Physics and Mathem.*State Agrarian and Engineering University in Podilya,
Kamianets-Podilsky,**Kamianets-Podilsky Ivan Ohienko National University,
Kamianets-Podilsky

HYPERBOLIC BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR SEMIBOUNDED PIECEWISE-HOMOGENEOUS HOLLOW CYLINDER

By means of the method of integral and hybrid integral transforms, in combination with the method of main solutions (influence matrices and Green matrices) the integral image of exact analytical solution of hyperbolic boundary value problem of mathematical physics for semibounded piecewise-homogeneous hollow cylinder is obtained for the first time.

Keywords: *hyperbolic equation, initial and boundary conditions, conjugate conditions, integral transforms, the main solutions.*

Introduction. The theory of hyperbolic boundary value problems for partial differential equations and including equations of mathematical physics, is an important section of the modern theory of differential equations which is intensively developing in the present time. The achievements of this theory apply to research of different mathematical models of various processes and phenomena of mechanics, physics, technology and new technologies.

Significant results from the theory of Cauchy and initial-boundary value problems (mixed problems) for hyperbolic equations were obtained in the known works of J. Hadamard [1], L. Gording [2], Yu. Mitropolsky, G. Khoma, M. Hromyak [3], A. Samoilenko, B. Tkach [4], M. Smirnov [5], V. Chernyatyn [6] and others domestic and foreign mathematics.

It is well known that the complexity of a boundary-value problem significantly depends on the coefficients of equations (different types of degeneracy and features) and the geometry of domain (limited, unlimited, smoothness of the boundary, the presence of corner points, etc.) in which the problem is considered. The dependence of the properties of solutions of boundary value problems for linear, quasi-linear, and certain classes of nonlinear equations (elliptic, parabolic, hyperbolic) in homogeneous domains (homogeneous environments) on the above-mentioned properties of the coefficients of equations and geometry of domain are studied in detail, and functional spaces of correctness of problems in the sense of Hadamard are constructed.

However, many important applied problems of thermomechanics, thermal physics, diffusion, theory of elasticity, theory of electrical circuits, theory of vibrations of mechanical systems lead to boundary value problems and mixed problems not only in homogeneous domains when the coefficients of the equations are continuous, but also in inhomogeneous and piecewise homogeneous domains when the coefficients of the equations are piecewise continuous or piecewise constant [7, 8].

The method of hybrid integral transforms generated by hybrid differential operators when in each component of connectivity of piecewise homogeneous domain are treated different differential operators or differential operators look the same, but with different sets of coefficients is an effective method of constructing exact solutions for a fairly broad class of linear boundary value problems and mixed problems in piecewise homogeneous domains [9–12].

This article is a logical extension of [13]. By means of the method of hybrid integral transforms the exact solution of hyperbolic boundary value problem of mathematical physics for semibounded piecewise homogeneous hollow cylinder is obtained in this article.

Formulation of the problem. Let's consider the problem of structure of 2π -periodic for angular variable φ solution of partial differential equations of hyperbolic type of 2nd order [14]

$$\frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} - \left[a_{rj}^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{a_{\varphi j}^2}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + a_{zj}^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] u_j + \chi_j^2 u_j = f_j(t, r, \varphi, z); \quad r \in I_j; \quad j = \overline{1, n+1} \quad (1)$$

which is bounded in the set

$$D = \{(t, r, \varphi, z) : t > 0; r \in I_n^+ = \bigcup_{j=1}^{n+1} I_j \equiv \bigcup_{j=1}^{n+1} (R_{j-1}; R_j), R_0 > 0, R_{n+1} \equiv R < +\infty; \varphi \in [0; 2\pi); z \in (0; +\infty)\}$$

with initial conditions

$$u_j|_{t=0} = g_j^1(r, \varphi, z); \quad \frac{\partial u_j}{\partial t}|_{t=0} = g_j^2(r, \varphi, z); \quad r \in I_j; \quad j = \overline{1, n+1} \quad (2)$$

boundary conditions

$$\left(\alpha_{11}^0 \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{11}^0 \right) u_1 \Big|_{r=R_0} = g_0(t, \varphi, z);$$

$$\left(\alpha_{22}^{n+1} \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{22}^{n+1} \right) u_{n+1} \Big|_{r=R} = g(t, \varphi, z); \quad (3)$$

$$\left(-\frac{\partial}{\partial z} + h \right) u_j \Big|_{z=0} = g_j(t, r, \varphi); \quad \frac{\partial^s u_j}{\partial z^s} \Big|_{z=+\infty} = 0; \quad s = 0, 1; \quad j = \overline{1, n+1} \quad (4)$$

and conjugate conditions

$$\left[\left(\alpha_{j1}^k \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j1}^k \right) u_k - \left(\alpha_{j2}^k \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j2}^k \right) u_{k+1} \right]_{r=R_k} = 0; \quad j = 1, 2; \quad k = \overline{1, n}, \quad (5)$$

here $a_{rj}, a_{\varphi j}, a_{zj}, \chi_j, h, \alpha_{js}^k, \beta_{js}^k$ — some constants;

$$\alpha_{11}^0 \leq 0; \beta_{11}^0 \geq 0; \left| \alpha_{11}^0 \right| + \beta_{11}^0 \neq 0; \quad \alpha_{22}^{n+1} \geq 0; \beta_{22}^{n+1} \geq 0; \alpha_{22}^{n+1} + \beta_{22}^{n+1} \neq 0;$$

$$c_{jk} = \alpha_{2j}^k \beta_{1j}^k - \alpha_{1j}^k \beta_{2j}^k \neq 0; \quad c_{1k} \cdot c_{2k} > 0;$$

$$f(t, r, \varphi, z) = \{ f_1(t, r, \varphi, z), f_2(t, r, \varphi, z), \dots, f_{n+1}(t, r, \varphi, z) \};$$

$$g^1(r, \varphi, z) = \{ g_1^1(r, \varphi, z), g_2^1(r, \varphi, z), \dots, g_{n+1}^1(r, \varphi, z) \};$$

$$g^2(r, \varphi, z) = \{ g_1^2(r, \varphi, z), g_2^2(r, \varphi, z), \dots, g_{n+1}^2(r, \varphi, z) \};$$

$$g(t, r, \varphi) = \{ g_1(t, r, \varphi), g_2(t, r, \varphi), \dots, g_{n+1}(t, r, \varphi) \};$$

$$g_0(t, \varphi, z), \quad g(t, \varphi, z)$$

are known bounded continuous functions;

$$u(t, r, \varphi, z) = \{ u_1(t, r, \varphi, z), u_2(t, r, \varphi, z), \dots, u_{n+1}(t, r, \varphi, z) \}$$

is limited and twice-continuously differentiable desired function.

The main part. Let's assume that the solution of the problem (1)–(5) exists and defined and the unknown functions satisfy the condition of applicability of direct and inverse integral and hybrid integral transformations [15–17].

Let's apply the integral Fourier transform on Cartesian semiaxis $(0; +\infty)$ relative to variable z to the initial-boundary problem (1)–(5) [15]:

$$F_+ [f(z)] = \int_0^{+\infty} f(z) K(z, \sigma) dz \equiv \tilde{f}(\sigma), \quad (6)$$

$$F_+^{-1} [\tilde{f}(\sigma)] = \int_0^{+\infty} \tilde{f}(\sigma) K(z, \sigma) d\sigma = f(z), \quad (7)$$

$$F_+ \left[\frac{d^2 f}{dz^2} \right] = -\sigma^2 \tilde{f}(\sigma) + K(0, \sigma) \left(-\frac{df}{dz} + hf \right) \Big|_{z=0}, \quad (8)$$

here conversion kernel is $K(z, \sigma) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\cos(\sigma z) + h \sin(\sigma z)}{\sqrt{\sigma^2 + h^2}}$.

The integral operator F_+ due to the formula (6) as a result of identity (8) three-dimensional initial boundary value problem of conjugation (1)–(5) puts in accordance the task of constructing solution which is limited in the set $D' = \{ (t, r, \varphi); t > 0; r \in I_n^+; \varphi \in [0; 2\pi) \}$ and is 2π -periodical of angular variable φ of differential equations

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}_j}{\partial t^2} - \left[a_{rj}^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{a_{\varphi j}^2}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] \tilde{u}_j + (a_{zj}^2 \sigma^2 + \chi_j^2) \tilde{u}_j = \quad (9)$$

$$= \tilde{F}_j(t, r, \varphi, \sigma); \quad r \in I_j; \quad j = \overline{1, n+1},$$

with initial conditions

$$\tilde{u}_j \Big|_{t=0} = \tilde{g}_j^1(r, \varphi, \sigma); \quad \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial t} \Big|_{t=0} = \tilde{g}_j^2(r, \varphi, \sigma); \quad r \in I_j; \quad j = \overline{1, n+1}; \quad (10)$$

boundary conditions

$$\left(\alpha_{11}^0 \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{11}^0 \right) \tilde{u}_1 \Big|_{r=R_0} = \tilde{g}_0(t, \varphi, \sigma); \quad \left(\alpha_{22}^{n+1} \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{22}^{n+1} \right) \tilde{u}_{n+1} \Big|_{r=R} = \tilde{g}(t, \varphi, \sigma); \quad (11)$$

and conjugate conditions

$$\left[\left(\alpha_{j1}^k \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j1}^k \right) \tilde{u}_k - \left(\alpha_{j2}^k \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j2}^k \right) \tilde{u}_{k+1} \right] \Big|_{r=R_k} = 0; \quad j = 1, 2; \quad k = \overline{1, n}, \quad (12)$$

here $\tilde{F}_j(t, r, \varphi, \sigma) = \tilde{f}_j(t, r, \varphi, \sigma) + a_{zj}^2 K(0, \sigma) g_j(t, r, \varphi); \quad j = \overline{1, n+1}.$

Let's apply finite integral Fourier transform relative to the variable φ to the problem (9)–(12) [16]:

$$F_m [g(\varphi)] = \int_0^{2\pi} g(\varphi) \exp(-im\varphi) d\varphi \equiv g_m, \quad i = \sqrt{-1}; \quad (13)$$

$$F_m^{-1}[g_m] = \frac{\text{Re}}{2\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m g_m \exp(im\varphi) \equiv g(\varphi), \quad (14)$$

$$F_m \left[\frac{d^2 g}{d\varphi^2} \right] = -m^2 F_m [g(\varphi)] \equiv -m^2 g_m, \quad (15)$$

here $\text{Re}(\dots)$ – the real part of the expression (\dots) relative to the variable φ ; $\varepsilon_0 = 1, \quad \varepsilon_k = 2; \quad k = 1, 2, 3, \dots$

The integral operator F_m due to the formula (13) as a result of identity (15) two-dimensional initial boundary value problem of conjugation (9)–(12) puts in accordance the task of constructing solution which is limited in the set $D'' = \{(t, r); t > 0; r \in I_n^+\}$ of one-dimensional hyperbolic differential equations of 2nd order

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}_{jm}}{\partial t^2} - a_{rj}^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{v_{jm}^2}{r^2} \right) \tilde{u}_{jm} + (a_{zj}^2 \sigma^2 + \chi_j^2) \tilde{u}_{jm} = \quad (16)$$

$$= \tilde{F}_{jm}(t, r, \sigma); \quad r \in I_j; \quad j = \overline{1, n+1}; \quad v_{jm} = a_{\varphi j} m / a_{rj}$$

with initial conditions

$$\tilde{u}_{jm}|_{t=0} = \tilde{g}_{jm}^1(r, \sigma); \quad \left. \frac{\partial \tilde{u}_{jm}}{\partial t} \right|_{t=0} = \tilde{g}_{jm}^2(r, \sigma); \quad r \in I_j; \quad j = \overline{1, n+1}, \quad (17)$$

boundary conditions

$$\left(\alpha_{11}^0 \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{11}^0 \right) \tilde{u}_{1m} \Big|_{r=R_0} = \tilde{g}_{0m}(t, \sigma); \quad \left(\alpha_{22}^{n+1} \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{22}^{n+1} \right) \tilde{u}_{n+1,m} \Big|_{r=R} = \tilde{g}_m(t, \sigma); \quad (18)$$

and conjugate conditions

$$\left[\left(\alpha_{j1}^k \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j1}^k \right) \tilde{u}_{km} - \left(\alpha_{j2}^k \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j2}^k \right) \tilde{u}_{k+1,m} \right] \Big|_{r=R_k} = 0; \quad j = 1, 2; \quad k = \overline{1, n}. \quad (19)$$

Let's apply finite hybrid integral Hankel transform of 2nd kind relative to the variable r in piecewise homogeneous segment I_n^+ of n conjugation points to the problem (16)–(19) [17]:

$$H_{sn} [f(r)] = \int_{R_0}^R f(r) V(r, \lambda_s) \sigma(r) r dr \equiv \tilde{f}(\lambda_s), \quad (20)$$

$$H_{sn}^{-1} [\tilde{f}(\lambda_s)] = \sum_{s=1}^{\infty} \tilde{f}(\lambda_s) \frac{V(r, \lambda_s)}{\|V(r, \lambda_s)\|^2} \equiv f(r), \quad (21)$$

$$\begin{aligned} H_{sn} [B_{(m)}[f(r)]] = & -\lambda_s^2 \tilde{f}(\lambda_s) - \sum_{k=1}^{n+1} \gamma_k^2 \int_{R_{k-1}}^{R_k} f(r) V_k(r, \lambda_s) \sigma_k r dr - \\ & - a_1^2 R_0 \sigma_1 \left(\alpha_{11}^0 \right)^{-1} V_1(R_0, \lambda_s) \left(\alpha_{11}^0 \frac{df}{dr} + \beta_{11}^0 f \right) \Big|_{r=R_0} + \\ & + a_{n+1}^2 R \sigma_{n+1} \left(\alpha_{22}^{n+1} \right)^{-1} \left(\alpha_{22}^{n+1} \frac{df}{dr} + \beta_{22}^{n+1} f \right) \Big|_{r=R}. \end{aligned} \quad (22)$$

Spectral function $V(r, \lambda_s)$, weight function $\sigma(r)$ and hybrid Bessel differential operator $B_{(m)} = \sum_{k=1}^{n+1} a_{rk}^2 \theta(r - R_{k-1}) \theta(R_k - r) B_{V_{km}}$, written in [17], take part in formulas (20)–(22).

Here $B_{V_{km}} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{V_{km}^2}{r^2}$ is classical Bessel differential operator, $\theta(x)$ is the Heaviside step function.

Let's write the differential equations (16) and the initial conditions (17) in matrix form

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a_{r1}^2 B_{V_{1m}} + q_1^2(\sigma)\right) \tilde{u}_{1m} \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a_{r2}^2 B_{V_{2m}} + q_2^2(\sigma)\right) \tilde{u}_{2m} \\ \dots\dots\dots \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a_{r,n+1}^2 B_{V_{n+1,m}} + q_{n+1}^2(\sigma)\right) \tilde{u}_{n+1,m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{F}_{1m}(t, r, \sigma) \\ \tilde{F}_{2m}(t, r, \sigma) \\ \dots\dots\dots \\ \tilde{F}_{n+1,m}(t, r, \sigma) \end{bmatrix}, \quad (23)$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{u}_{1m}(t, r, \sigma) \\ \tilde{u}_{2m}(t, r, \sigma) \\ \dots\dots\dots \\ \tilde{u}_{n+1,m}(t, r, \sigma) \end{bmatrix}_{t=0} = \begin{bmatrix} \tilde{g}_{1m}^1(r, \sigma) \\ \tilde{g}_{2m}^1(r, \sigma) \\ \dots\dots\dots \\ \tilde{g}_{n+1,m}^1(r, \sigma) \end{bmatrix};$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \tilde{u}_{1m}(t, r, \sigma) \\ \tilde{u}_{2m}(t, r, \sigma) \\ \dots\dots\dots \\ \tilde{u}_{n+1,m}(t, r, \sigma) \end{bmatrix}_{t=0} = \begin{bmatrix} \tilde{g}_{1m}^2(r, \sigma) \\ \tilde{g}_{2m}^2(r, \sigma) \\ \dots\dots\dots \\ \tilde{g}_{n+1,m}^2(r, \sigma) \end{bmatrix}, \quad (24)$$

here $q_j^2(\sigma) = a_{rj}^2 \sigma^2 + \chi_j^2$; $j = \overline{1, n+1}$.

Let's represent the integral operator H_{sn} which operates due to the formula (20) as an operator matrix-row:

$$H_{sn} [\dots] = \begin{bmatrix} \int_{R_0}^{R_1} \dots V_1(r, \lambda_s) \sigma_1 r dr & \int_{R_1}^{R_2} \dots V_2(r, \lambda_s) \sigma_2 r dr \\ \int_{R_{n-1}}^{R_n} \dots V_n(r, \lambda_s) \sigma_n r dr & \int_{R_n}^R \dots V_{n+1}(r, \lambda_s) \sigma_{n+1} r dr \end{bmatrix}. \quad (25)$$

Let's apply the operator matrix-row (25) to the problem (23), (24) according to the matrix multiplication rule. As a result of the identity (22), we get a Cauchy problem

$$\sum_{j=1}^{n+1} \left(\frac{d^2}{dt^2} + \lambda_s^2 + \gamma_j^2 + q_j^2(\sigma) \right) \tilde{u}_{jm}(t, \lambda_s, \sigma) = \sum_{j=1}^{n+1} \tilde{F}_{jm}(t, \lambda_s, \sigma) -$$

$$- a_1^2 R_0 \sigma_1 \left(\alpha_{11}^0 \right)^{-1} V_1(R_0, \lambda_s) \tilde{g}_{0m}(t, \sigma) + a_{n+1} R \sigma_{n+1} \left(\alpha_{22}^{n+1} \right)^{-1} V_{n+1}(R, \lambda_s) \tilde{g}_m(t, \sigma), \quad (26)$$

$$\sum_{j=1}^{n+1} \tilde{u}_{jm}(t, \lambda_s, \sigma) \Big|_{t=0} = \sum_{j=1}^{n+1} \tilde{g}_{jm}^1(\lambda_s, \sigma); \quad \frac{d}{dt} \sum_{j=1}^{n+1} \tilde{u}_{jm}(t, \lambda_s, \sigma) \Big|_{t=0} = \sum_{j=1}^{n+1} \tilde{g}_{jm}^2(\lambda_s, \sigma), \quad (27)$$

$$\text{here } \tilde{u}_{jm}(t, \lambda_s, \sigma) = \int_{R_{j-1}}^{R_j} \tilde{u}_{jm}(t, r, \sigma) V_j(r, \lambda_s) \sigma_j r dr; \quad j = \overline{1, n+1},$$

$$\tilde{F}_{jm}(t, \lambda_s, \sigma) = \int_{R_{j-1}}^{R_j} \tilde{F}_{jm}(t, r, \sigma) V_j(r, \lambda_s) \sigma_j r dr, \quad j = \overline{1, n+1},$$

$$\tilde{g}_{jm}^k(\lambda_s, \sigma) = \int_{R_{j-1}}^{R_j} \tilde{g}_{jm}^k(r, \sigma) V_j(r, \lambda_s) \sigma_j r dr; \quad j = \overline{1, n+1}; \quad k = 1, 2.$$

Let's suppose that $\max\{q_1^2, q_2^2, \dots, q_{n+1}^2\} = q_1^2$ and put everywhere $\gamma_j^2 = q_1^2 - q_j^2; j = \overline{1, n+1}$. Cauchy problem (26), (27) takes the form

$$\frac{d^2 \tilde{u}_m}{dt^2} + \Delta^2(\lambda_s, \sigma) \tilde{u}_m = \tilde{P}_m(t, \lambda_s, \sigma), \quad (28)$$

$$\tilde{u}_m(t, \lambda_s, \sigma) \Big|_{t=0} = \tilde{g}_m^1(\lambda_s, \sigma); \quad \frac{d\tilde{u}_m}{dt} \Big|_{t=0} = \tilde{g}_m^2(\lambda_s, \sigma), \quad (29)$$

$$\text{here } \tilde{u}_m(t, \lambda_s, \sigma) = \sum_{j=1}^{n+1} \tilde{u}_{jm}(t, \lambda_s, \sigma); \quad \tilde{F}_m(t, \lambda_s, \sigma) = \sum_{j=1}^{n+1} \tilde{F}_{jm}(t, \lambda_s, \sigma);$$

$$\tilde{g}_m^k(\lambda_s, \sigma) = \sum_{j=1}^{n+1} \tilde{g}_{jm}^k(\lambda_s, \sigma); \quad k = 1, 2; \quad \Delta^2(\lambda_s, \sigma) = \lambda_s^2 + a_{z1}^2 \sigma^2 + \chi_1^2;$$

$$\begin{aligned} \tilde{P}_m(t, \lambda_s, \sigma) = & \tilde{F}_m(t, \lambda_s, \sigma) - a_1^2 R_0 \sigma_1 \left(\alpha_{11}^0 \right)^{-1} V_1(R_0, \lambda_s) \tilde{g}_{0m}(t, \sigma) + \\ & + a_{n+1}^2 R \sigma_{n+1} \left(\alpha_{22}^{n+1} \right)^{-1} V_{n+1}(R, \lambda_s) \tilde{g}_m(t, \sigma). \end{aligned}$$

It is known [13] that the only solution of the problem (28), (29) is a function

$$\begin{aligned} \tilde{u}_m(t, \lambda_s, \sigma) = & G(t, \lambda_s, \sigma) \tilde{g}_m^2(\lambda_s, \sigma) + \frac{d}{dt} G(t, \lambda_s, \sigma) \tilde{g}_m^1(\lambda_s, \sigma) + \\ & + \int_0^t G(t-\tau, \lambda_s, \sigma) \tilde{P}_m(\tau, \lambda_s, \sigma) d\tau, \end{aligned} \quad (30)$$

here Cauchy function $G(t, \lambda_s, \sigma) = \frac{\sin(\Delta(\lambda_s, \sigma)t)}{\Delta(\lambda_s, \sigma)}$.

The superposition of operators H_{sn} and H_{sn}^{-1} is a single operator $(H_{sn} \circ H_{sn}^{-1} = H_{sn}^{-1} \circ H_{sn} = I)$. Integral operator H_{sn}^{-1} , as inverse to H_{sn} , we represent as the operator matrix-column:

$$H_{sn}^{-1} [\dots] = \begin{bmatrix} \sum_{s=1}^{\infty} \dots \frac{V_1(r, \lambda_s)}{\|V(r, \lambda_s)\|^2} \\ \sum_{s=1}^{\infty} \dots \frac{V_2(r, \lambda_s)}{\|V(r, \lambda_s)\|^2} \\ \dots \dots \dots \\ \sum_{s=1}^{\infty} \dots \frac{V_{n+1}(r, \lambda_s)}{\|V(r, \lambda_s)\|^2} \end{bmatrix}. \quad (31)$$

Let's apply operator matrix-column (31) to the matrix-element $[\tilde{u}_m(t, \lambda_s, \sigma)]$, where the function $\tilde{u}_m(t, \lambda_s, \sigma)$ is defined by formula (30) due to matrices multiplication rule. As a result we get the only solution of one-dimensional hyperbolic initial boundary problem of conjugation (16)–(19):

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{jm}(t, r, \sigma) = & \sum_{s=1}^{\infty} \left[G(t, \lambda_s, \sigma) \tilde{g}_m^2(\lambda_s, \sigma) + \frac{\partial}{\partial t} G(t, \lambda_s, \sigma) \tilde{g}_m^1(\lambda_s, \sigma) + \right. \\ & \left. + \int_0^t G(t-\tau, \lambda_s, \sigma) \tilde{p}_m(\tau, \lambda_s, \sigma) d\tau \right] \frac{V_j(r, \lambda_s)}{\|V(r, \lambda_s)\|^2}; \quad j = \overline{1, n+1}. \end{aligned} \quad (32)$$

If to apply consistently inverse operators F_+^{-1} and F_m^{-1} to functions $\tilde{u}_{jm}(t, r, \sigma)$, which are defined by formulas (32) and perform the some simple transformation, we get functions

$$\begin{aligned} u_j(t, r, \varphi, z) = & \sum_{k=1}^{n+1} \int_0^t \int_{R_{k-1}}^{R_k} \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} E_{jk}(t-\tau, r, \rho, \varphi-\alpha, z, \xi) f_k(\tau, \rho, \alpha, \xi) \times \\ & \times \sigma_k \rho d\xi d\alpha d\rho d\tau + \frac{\partial}{\partial t} \sum_{k=1}^{n+1} \int_{R_{k-1}}^{R_k} \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} E_{jk}(t, r, \rho, \varphi-\alpha, z, \xi) g_k^1(\rho, \alpha, \xi) \times \\ & \times \sigma_k \rho d\xi d\alpha d\rho + \sum_{k=1}^{n+1} \int_{R_{k-1}}^{R_k} \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} E_{jk}(t, r, \rho, \varphi-\alpha, z, \xi) g_k^2(\rho, \alpha, \xi) \times \\ & \times \sigma_k \rho d\xi d\alpha d\rho + \sum_{k=1}^{n+1} a_{zk}^2 \int_0^t \int_{R_{k-1}}^{R_k} \int_0^{2\pi} W_{jk}(t-\tau, r, \rho, \varphi-\alpha, z) g_k(\tau, \rho, \alpha) \times \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} & \times \sigma_k \rho d\alpha d\rho d\tau + \int_0^t \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} [W_{jr}^1(t-\tau, r, \varphi-\alpha, z, \xi) g_0(\tau, \alpha, \xi) + \\ & + W_{jr}^2(t-\tau, r, \varphi-\alpha, z, \xi) g(\tau, \alpha, \xi)] d\xi d\alpha d\tau. \end{aligned}$$

Functions (33) define the only solution of hyperbolic initial boundary problem of conjugation (1)–(5).

In formulas (33) there are components

$$\begin{aligned} E_{jk}(t, r, \rho, \varphi, z, \xi) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m \sum_{s=1}^{\infty} \int_0^{+\infty} G(t, \lambda_s, \sigma) K(z, \sigma) K(\xi, \sigma) d\sigma \times \\ & \times \frac{V_j(r, \lambda_s) W_k(\rho, \lambda_s)}{\|V(r, \lambda_s)\|^2} \cos(m\varphi); j, k = \overline{1, n+1} \end{aligned}$$

of matrix of influence (function of influence), components $W_{jk}(t, r, \rho, \varphi, z) = E_{jk}(t, r, \rho, \varphi, z, 0)$ of tangential Green's matrix (tangential Green's function), components $W_{jr}^1(t, r, \varphi, z, \xi) = -a_1^2 R_0 \sigma_1 \left(\alpha_{11}^0\right)^{-1} E_{j1}(t, r, R_0, \varphi, z, \xi)$ of left radial Green's matrix (left radial Green's function) and components $W_{jr}^2(t, r, \varphi, z, \xi) = a_{n+1}^2 R \sigma_{n+1} \left(\alpha_{22}^{n+1}\right)^{-1} E_{j, n+1}(t, r, R, \varphi, z, \xi)$ of right radial Green's matrix (right radial Green's function) of considered problem.

Using a properties of functions of influence $E_{jk}(t, r, \rho, \varphi, z, \xi)$ and Green's functions $W_{jk}(t, r, \rho, \varphi, z)$, $W_{jr}^s(t, r, \varphi, z, \xi)$, $s = 1, 2$, we can verify that functions $u_j(t, r, \varphi, z)$ which are defined by formulas (33) satisfy the equation (1), the initial conditions (2), the boundary conditions (3), (4) and conjugate conditions (5) in the sense of theory of generalized functions [18].

The uniqueness of the solution (33) follows from its structure (integral image) and from uniqueness of the main solutions (functions of influence and Green's functions) of problem (1)–(5).

By methods from [18, 19] can be proved that under appropriate conditions on the initial data, formulas (33) define a limited classical solution of the hyperbolic initial boundary problem of conjugation (1)–(5).

We get the following theorem as the summary of the above results.

Theorem. If functions $f_j(t, r, \varphi, z)$, $g_j^1(r, \varphi, z)$, $g_j^2(r, \varphi, z)$, $g_j(t, r, \varphi)$ satisfy conditions:

- 1) are continuously differentiated twice for each variable;
- 2) have a limited variation for the geometric variables;

- 3) are absolutely summable with the variable z in $(0; +\infty)$;
- 4) conjugate conditions are true and functions $g_0(t, \varphi, z)$, $g(t, \varphi, z)$ are continuously differentiated twice for each variable, have a limited variation for the geometric variables, are absolutely summable with the variable z in $(0; +\infty)$, then hyperbolic initial boundary value problem (1)–(5) has the only limited classical solution, which is determined by formula (33).

Remark 1. In the case of $a_{rj} = a_{\varphi j} = a_{zj} \equiv a_j > 0$ formulas (33) define the structure of the solution of hyperbolic initial boundary value problem (1)–(5) in an isotropic semibounded piecewise homogeneous hollow cylinder.

Remark 2. Parameters $\alpha_{11}^0, \beta_{11}^0; \alpha_{22}^{n+1}, \beta_{22}^{n+1}$ allow to allocate the solutions of initial boundary value problems from formulas (33) in the case of boundary condition of the 1st kind, 2nd kind and 3rd kind on the radial surfaces $r = R_0$, $r = R$.

Remark 3. Parameter h allow to allocate the solutions of initial boundary value problems from formulas (33) in the case of boundary condition of the 1st kind ($h \rightarrow +\infty$) and 2nd kind ($h \rightarrow +0$) on the surface $z = 0$.

Remark 4. Analysis of the solution (33) is done directly from the general structure according to the analytical expression of functions $f_j(t, r, \varphi, z)$, $g_j^1(r, \varphi, z)$, $g_j^2(r, \varphi, z)$, $g_j(t, r, \varphi)$, $g_0(t, \varphi, z)$, $g(t, \varphi, z)$.

Remark 5. In the case of $\chi_j \equiv 0$ equation (1) is a classic three-dimensional inhomogeneous wave equation (the equation of fluctuations) for an orthotropic environment in cylindrical coordinates.

Remark 6. In the case of $\alpha_{11}^k = 0$, $\beta_{11}^k = 1$; $\alpha_{12}^k = 0$, $\beta_{12}^k = 1$; $\alpha_{21}^k = E_1^k$, $\beta_{21}^k = 0$; $\alpha_{22}^k = E_2^k$, here — Young's modulus (E), the conjugate conditions (5) coincide with conditions of ideal mechanical contact.

Thus, in these cases 5, 6 considered hyperbolic boundary value problem of mathematical physics (1)–(5) is a mathematical model of forced oscillating processes in semibounded piecewise homogeneous hollow cylinder.

Conclusions. By means of method of integral and hybrid integral transforms with the method of principal solutions (influence functions and Green's functions) integral image of exact analytical solution of hyperbolic boundary-value problem of mathematical physics in semibounded piecewise homogeneous hollow cylinder is obtained. The obtained solution is of algorithmic character, continuously depend on the parameters and data of problem and can be used in further theoretical research and in practical engineering calculations of real processes which are modeled by hyperbolic boundary-value problems of mathematical physics in piecewise homogeneous domains.

References:

1. Hadamard J. The Cauchy problem for linear partial differential equations of parabolic type / J. Hadamard. — Moscow : Nauka, 1978. — 352 p.
2. Gording L. Cauchy's problem for hyperbolic equations / L. Gording. — Moscow : IL, 1961. — 122 p.
3. Mytropol'skiy Yu. Asymptotic methods of investigation of quasi-wave equations of hyperbolic type / Yu. Mytropol'skiy, G. Khoma, M. Gromiak. — Kyiv : Naukova Dumka, 1991. — 232 p.
4. Samoilenko A. Numerical-analytic methods in the theory of periodic solutions of partial differential equations / A. Samoilenko, B. Tkach. — Kyiv : Naukova Dumka, 1992. — 208 p.
5. Smirnov M. Degenerating elliptic and hyperbolic equations / M. Smirnov. — Moscow : Nauka, 1962. — 292 p.
6. Cherniatyn V. Fourier method in mixed problem for partial differential equations / V. Cherniatyn. — Moscow : Izd. MGU, 1991. — 112 p.
7. Sergienko I. Mathematic modeling and the study of processes in heterogeneous environments / I. Sergienko, V. Skopetsky, V. Deineka. — Kyiv : Naukova Dumka, 1991. — 432 p.
8. Deineka V. Models and methods of solving of problems with conjugate conditions / V. Deineka, I. Sergienko, V. Skopetsky. — Kyiv : Naukova Dumka, 1998. — 614 p.
9. Konet I. The temperature fields in the piece-homogeneous cylindrical domains / I. Konet, M. Leniuk. — Chernivtsi : Prut, 2004. — 276 p.
10. Gromyk A. The temperature fields in the piece-homogeneous spatial environments / A. Gromyk, I. Konet, M. Leniuk. — Kamenets-Podilsky : Abetka-Svit, 2011. — 200 p.
11. Konet I. Hyperbolic boundary-value problems of mathematical physics in piecewise homogeneous spacial environments / I. Konet. — Kamenets-Podilsky : Abetka-Svit, 2013. — 120 p.
12. Konet I. Parabolic boundary value problems in piecewise homogeneous environments / I. Konet, T. Pylypiuk. — Kamenets-Podilsky : Abetka-Svit, 2016. — 244 p.
13. Gromyk A. Hyperbolic boundary value problem for semibounded piecewise-homogeneous solid cylinder / A. Gromyk, I. Konet, T. Pylypiuk // Mathematical and computer modelling. Series: Physics and Mathematics: scientific journal / Glushkov Institute of Cybernetics of National Academy of Sciences of Ukraine, Kamianets-Podilsky National Ivan Ohienko University. — Kamianets-Podilsky : Kamianets-Podil. Nat. I. Ohienko Un., 2017. — Issue 16. — P. 48–59.
14. Perestiuk M. The theory of equations of mathematical physics / M. Perestiuk, V. Marynets'. — Kyiv : Lybid', 2006. — 424 p.
15. Sneddon I. Fourier transforms / I. Sneddon. — Moscow : IL, 1955. — 668 p.
16. Tranter K. Integral transformations in mathematical physics / K. Tranter. — Moscow : Gostheorizdat, 1956. — 204 p.
17. Bybliv O. Integral Hankel transform of the 2nd kind for piecewise-homogeneous segments / O. Bybliv, M. Lenyuk // News of univ. Mathematics. — 1987. — № 5. — P. 82–85.

18. Shilov G. Mathematical analysis. Second special course / G. Shilov. — Moscow : Nauka, 1965. — 328 p.
19. Gelfand I. Some questions in the theory of differential equations / I. Gelfand, G. Shilov. — Moscow : Fizmatgiz, 1958. — 274 p.

ГІПЕРБОЛІЧНА КРАЙОВА ЗАДАЧА ДЛЯ НАПІВОБМЕЖЕНОГО КУСКОВО-ОДНОРІДНОГО ПОРОЖНИСТОГО ЦИЛІНДРА

Методом інтегральних і гібридних інтегральних перетворень у поєднанні з методом головних розв'язків (матриць впливу та матриць Гріна) вперше побудовано інтегральне зображення точного аналітичного розв'язку гіперболічної крайової задачі математичної фізики для напівобмеженого кусково-однорідного порожнистого циліндра.

Ключові слова: гіперболічне рівняння, початкові та крайові умови, умови спряження, інтегральні перетворення, головні розв'язки.

Отримано: 18.05.2018

УДК 517.5

У. В. Гудима, канд. фіз.-мат. наук,
В. О. Гнатюк, канд. фіз.-мат. наук

Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

КРИТЕРІЇ УЗАГАЛЬНЕНОГО ЧЕБИШОВСЬКОГО У РОЗУМІННІ ЗВАЖЕНИХ ВІДСТАНЕЙ ЦЕНТРА КІЛЬКОХ ТОЧОК ЛІНІЙНОГО НОРМОВАНОГО ПРОСТОРУ ВІДНОСНО ОПУКЛОЇ МНОЖИНИ ЦЬОГО ПРОСТОРУ

Загальновідомо, що визначальною ідеєю в питаннях зв'язків математики з практикою є ідея наближення.

Однією з центральних галузей теорії наближення є теорія наближення функцій, родоначальником якої вважається П. Л. Чебишов. У 50-х роках XIX століття він ввів поняття найкращого наближення неперервної на відріжку функції за допомогою алгебраїчних поліномів заданого степеня. Згодом було досліджено велику кількість подібних задач.

З розвитком теорії лінійних нормованих просторів стало зрозумілим, що низка задач найкращого наближення є частинними випадками задачі найкращого наближення елемента лінійного нормованого простору опуклою множиною цього простору.

Важливим питанням дослідження цієї задачі є встановлення критеріїв її екстремального елемента.

Загальний критерій екстремального елемента задачі найкращого наближення елемента лінійного нормованого простору опуклою множиною цього простору, оснований на співвід-

ношенні двоїстості для цієї задачі, встановлено М. П. Корнейчуком та В. М. Тихомировим.

Дещо відмінним від цього критерію є критерій колмогоровського типу.

Важливий клас задач теорії наближення утворюють задачі одночасного наближення кількох елементів лінійного нормованого простору множиною цього простору.

Серед них — задача відшукування чебишовського у розумінні зважених відстаней центра кількох точок лінійного нормованого простору відносно опуклої множини цього простору, яка розглядається в цій роботі. Частинними її випадками є згадані вище задачі.

У статті для розглядуваної задачі встановлено співвідношення двоїстості, критерії екстремальної послідовності, доведення яких базуються на цьому співвідношенні, критерії колмогоровського типу екстремальної послідовності, критерії екстремального елемента.

Отримані результати конкретизовано на окремі випадки досліджуваної задачі.

Встановлено низку допоміжних тверджень, які становлять і самостійний інтерес.

Ключові слова: лінійний нормований простір, зважені відстані, опукла множина, узагальнений чебишовський центр, екстремальна послідовність, критерії узагальненого чебишовського центра.

Вступ. У статті встановлено критерії узагальненого чебишовського у розумінні зважених відстаней центра кількох точок лінійного нормованого простору відносно опуклої множини цього простору, оснований на співвідношенні двоїстості для відповідної екстремальної задачі, та критерії колмогоровського типу.

Постановка задачі. Нехай X — лінійний над полем дійсних чисел нормований простір елементів x з нормою $\|x\|$, $a_i \in X$, $m_i \in R$, $m_i > 0$, $i = \overline{1, n}$, $n \in N$ і $n > 1$, V — опукла множина простору X .

Задачею відшукування чебишовського у розумінні зважених відстаней центра системи точок a_i , $i = \overline{1, n}$, відносно множини V (у множині V) будемо називати задачу відшукування величини

$$\inf_{x \in V} \max_{1 \leq i \leq n} (m_i \|a_i - x\|). \quad (1)$$

Послідовність $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ елементів $x_k \in V$, для якої

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \max_{1 \leq i \leq n} (m_i \|a_i - x_k\|) = \inf_{x \in V} \max_{1 \leq i \leq n} (m_i \|a_i - x\|), \quad (2)$$

будемо називати узагальненим чебишовським у розумінні зважених відстаней центром системи точок a_i , $i = \overline{1, n}$, відносно множини V або просто екстремальною послідовністю для величини (1).

Якщо існує елемент $x^* \in V$ такий, що

$$\max_{1 \leq i \leq n} (m_i \|a_i - x^*\|) = \inf_{x \in V} \max_{1 \leq i \leq n} (m_i \|a_i - x\|),$$

то його будемо називати чебишовським у розумінні зважених відстаней центром системи точок a_i , $i = \overline{1, n}$, відносно множини V або просто екстремальним елементом для величини (1).

Актуальність теми. Відомо, що необхідність наближення складних математичних об'єктів більш простими і зручними у користуванні виникає у різних розділах математичної науки, особливо прикладних напрямів.

Важливий клас задач теорії наближення утворюють задачі одночасного наближення кількох елементів. До задач одночасного наближення кількох елементів відноситься задача відшукування чебишовського центра кількох елементів лінійного нормованого простору відносно опуклої множини цього простору.

З єдиних позицій задачі найкращої одночасної апроксимації кількох елементів лінійного нормованого простору опуклими множинами цього простору розглядалися у працях [1–3].

Однією з центральних проблем дослідження цих задач є встановлення критеріїв їх екстремальних елементів. Проте часто екстремальний елемент для відповідних величин не існує, тоді коли існування їх екстремальних послідовностей гарантовано.

Тому актуальною є проблема встановлення не лише критеріїв екстремального елемента для величини (1), а й критеріїв екстремальної послідовності для цієї величини.

Мета роботи. Встановити критерії узагальненого чебишовського у розумінні зважених відстаней центра кількох точок лінійного нормованого простору відносно опуклої множини цього простору, отримати з цих критеріїв, як наслідки, критерії екстремального елемента для величини (1).

Допоміжні твердження. Позначимо через $X^n = X \times \dots \times X$ — n -ий декартовий степінь X .

Для $x = (x_1, \dots, x_n) \in X^n$, $y = (y_1, \dots, y_n) \in X^n$, $\alpha \in R$ покладемо

$$x + y = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n), \quad \alpha x = (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n).$$

Легко переконатися, що введені в такий спосіб операції додавання елементів X^n та множення їх на дійсні числа задовольняють

всім аксіомам лінійного простору. Тому X^n є лінійним над полем дійсних чисел простором.

Для елементів $x = (x_1, \dots, x_n)$ простору X^n покладемо

$$\|x\| = \|(x_1, \dots, x_n)\| = \max_{1 \leq i \leq n} (m_i \|x_i\|). \quad (3)$$

Легко переконатися, що функція $x \in X^n \rightarrow \|x\|$, задана співвідношенням (3), є нормою на X^n . Тоді X^n є лінійним над полем дійсних чисел нормованим простором. Позначимо через $(X^n)^*$ — простір, спряжений з X^n .

Твердження 1. Для кожного елемента $f \in (X^n)^*$ існують однозначно визначені елементи $f_i \in X^*$, $i = \overline{1, n}$, такі, що

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n f_i(x_i), \quad (x_1, \dots, x_n) \in X^n.$$

Якщо $f_i \in X^*$, $i = \overline{1, n}$, то

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n f_i(x_i), \quad (x_1, \dots, x_n) \in X^n,$$

є лінійним неперервним функціоналом, заданим на X^n .

Якщо $f \in (X^n)^*$, $f_i \in X^*$, $i = \overline{1, n}$, та $f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n f_i(x_i)$,

$(x_1, \dots, x_n) \in X^n$, то $\|f\| = \sum_{i=1}^n \frac{\|f_i\|}{m_i}$.

Твердження 2. Має місце таке співвідношення двоїстості

$$\begin{aligned} & \inf_{x \in V} \max_{1 \leq i \leq n} (m_i \|a_i - x\|) = \\ & = \max \left\{ \sum_{i=1}^n m_i f_i(a_i) - \sup_{x \in V} \sum_{i=1}^n m_i f_i(x) : f_i \in X^*, i = \overline{1, n}, \sum_{i=1}^n \|f_i\| \leq 1 \right\} = (4) \\ & = \sum_{i=1}^n m_i f_i^*(a_i) - \sup_{x \in V} \sum_{i=1}^n m_i f_i^*(x), \end{aligned}$$

де $f_i^* \in X^*$, $i = \overline{1, n}$, $\sum_{i=1}^n \|f_i^*\| = 1$.

Справедливість твердження випливає з твердження 1, рівності

$$\inf_{x \in V} \max_{1 \leq i \leq n} (m_i \|a_i - x\|) = \inf_{x \in V} \|(a_1, \dots, a_n) - (x, \dots, x)\| = \inf_{y \in M} \|a - y\|,$$

де $M = \{y = (x, \dots, x) : x \in V\}$, $a = (a_1, \dots, a_n)$, та теореми 2.3.1 [4, с. 28].

Теорема 1. Нехай $\{t_i^k\}_{k=1}^{\infty}$, $i = \overline{1, n}$, — послідовності дійсних чисел, існує $\lim_{k \rightarrow \infty} \max_{1 \leq i \leq n} t_i^k$, $I = \{i \in \{1, \dots, n\} : \lim_{k \rightarrow \infty} t_i^k = \lim_{k \rightarrow \infty} \max_{1 \leq i \leq n} t_i^k\}$.

Для того щоб $I \neq \emptyset$, необхідно і достатньо, щоб існували числа $\alpha_i \geq 0$, $i = \overline{1, n}$, $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$, такі, що

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (\alpha_1 t_1^k + \dots + \alpha_n t_n^k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \max_{1 \leq i \leq n} t_i^k, \quad (5)$$

причому $\{i \in \{1, \dots, n\} : \alpha_i > 0\} \subset I$.

Доведення. Необхідність. Нехай $I \neq \emptyset$. Покладемо $\alpha_i = 0$ для всіх $i \in \{1, \dots, n\} \setminus I$ та $\alpha_i \geq 0$, $i \in I$, $\sum_{i \in I} \alpha_i = 1$. Тоді $\alpha_i \geq 0$, $i = \overline{1, n}$,

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1,$$

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} (\alpha_1 t_1^k + \dots + \alpha_n t_n^k) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i \in I} \alpha_i t_i^k = \sum_{i \in I} \alpha_i \lim_{k \rightarrow \infty} t_i^k = \\ &= \sum_{i \in I} \alpha_i \lim_{k \rightarrow \infty} \max_{1 \leq i \leq n} t_i^k = \lim_{k \rightarrow \infty} \max_{1 \leq i \leq n} t_i^k \sum_{i \in I} \alpha_i = \lim_{k \rightarrow \infty} \max_{1 \leq i \leq n} t_i^k, \end{aligned}$$

причому $\{i \in \{1, \dots, n\} : \alpha_i > 0\} \subset I$.

Необхідність доведено.

Достатність. Нехай існують числа $\alpha_i \geq 0$, $i = \overline{1, n}$, $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$, для яких виконується (5). Переконаємося, що $I \neq \emptyset$, причому $\{i \in \{1, \dots, n\} : \alpha_i > 0\} \subset I$.

Оскільки $\alpha_i \geq 0$, $i = \overline{1, n}$, $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$, то $\{i \in \{1, \dots, n\} : \alpha_i > 0\} \neq \emptyset$.

Для $i \in \{i \in \{1, \dots, n\} : \alpha_i > 0\}$ та $k = 1, 2, \dots$ маємо, що

$$\begin{aligned} 0 \leq \alpha_i \left(\max_{1 \leq i \leq n} t_i^k - t_i^k \right) &\leq \sum_{i=1}^n \alpha_i \left(\max_{1 \leq i \leq n} t_i^k - t_i^k \right) = \max_{1 \leq i \leq n} t_i^k - \sum_{i=1}^n \alpha_i t_i^k, \\ 0 \leq \max_{1 \leq i \leq n} t_i^k - t_i^k &\leq \frac{1}{\alpha_i} \left(\max_{1 \leq i \leq n} t_i^k - \sum_{i=1}^n \alpha_i t_i^k \right). \end{aligned} \quad (6)$$

Оскільки має місце (5), то

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\alpha_i} \left(\max_{1 \leq i \leq n} t_i^k - \sum_{i=1}^n \alpha_i t_i^k \right) = 0. \quad (7)$$

Зі співвідношень (6), (7) отримуємо, що

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\max_{1 \leq i \leq n} t_i^k - t_i^k \right) = 0.$$

Оскільки за умовою теореми існує $\lim_{k \rightarrow \infty} \max_{1 \leq i \leq n} t_i^k$, то звідси випливає, що

$$\lim_{k \rightarrow \infty} t_i^k = \lim_{k \rightarrow \infty} \max_{1 \leq i \leq n} t_i^k.$$

Це означає, що $i \in I$. Отже, для будь-якого $i \in \{i \in \{1, \dots, n\} : \alpha_i > 0\}$ $i \in I$. Тому $i \in \{i \in \{1, \dots, n\} : \alpha_i > 0\} \subset I$.

Звідси та з співвідношення $\{i \in \{1, \dots, n\} : \alpha_i > 0\} \neq \emptyset$ випливає, що $I \neq \emptyset$.

Достатність доведено.

Теорему доведено.

Зауважимо, що справедливість цієї теореми випливає також з леми 2.1 [1, с. 249].

Критерії екстремальної послідовності для величини (1), основані на співвідношенні двоїстості (4). Встановимо критерії екстремальної послідовності для величини (1), доведення яких базуються на твердженнях 1, 2 та теоремі 1.

Теорема 2. Нехай послідовність $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ є узагальненим чебишовським у розумінні зважених відстаней центром системи точок a_i , $i = \overline{1, n}$, відносно множини V (екстремальною послідовністю для величини (1)), тобто для неї виконується співвідношення (2).

Тоді

$$I = \left\{ i \in \{1, \dots, n\} : \lim_{k \rightarrow \infty} (m_i \|a_i - x_k\|) = \lim_{k \rightarrow \infty} \max_{1 \leq i \leq n} (m_i \|a_i - x_k\|) \right\} \neq \emptyset$$

та існують функціонали $f_i^* \in X^*$, $i \in I$, які задовольняють умови:

- 1) $\sum_{i \in I} \|f_i^*\| = 1$;
- 2) $\lim_{k \rightarrow \infty} f_i^*(a_i - x_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\|f_i^*\| \|a_i - x_k\| \right)$, $i \in I$;
- 3) $\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i \in I} m_i f_i^*(x_k) = \sup_{x \in V} \sum_{i \in I} m_i f_i^*(x)$.

Доведення. Нехай $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ є екстремальною послідовністю для величини (1). Згідно з твердженням 2 існують такі функціонали

$$f_i^* \in X^*, \quad i = \overline{1, n}, \quad \sum_{i=1}^n \|f_i^*\| = 1, \quad (8)$$

для яких має місце співвідношення двоїстості (4). З урахуванням цього співвідношення та включення $x_k \in V$, $k = 1, 2, \dots$, отримаємо, що

$$\begin{aligned} & \inf_{x \in V} \max_{1 \leq i \leq n} (m_i \|a_i - x\|) = \sum_{i=1}^n m_i f_i^*(a_i) - \sup_{x \in V} \sum_{i=1}^n m_i f_i^*(x) = \\ & = \inf_{x \in V} \sum_{i=1}^n m_i f_i^*(a_i - x) \leq \sum_{i=1}^n m_i f_i^*(a_i - x_k) = \sum_{i=1}^n m_i f_i^*(a_i) - \sum_{i=1}^n m_i f_i^*(x_k) \leq \\ & \leq \sum_{i=1}^n m_i \|f_i^*\| \|a_i - x_k\| \leq \max_{1 \leq i \leq n} (m_i \|a_i - x_k\|) \sum_{i=1}^n \|f_i^*\| = \max_{1 \leq i \leq n} (m_i \|a_i - x_k\|). \end{aligned}$$

Оскільки має місце співвідношення (2), то звідси випливає, що

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n m_i f_i^*(x_k) = \sup_{x \in V} \sum_{i=1}^n m_i f_i^*(x), \quad (9)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n m_i f_i^*(a_i - x_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \|f_i^*\| (m_i \|a_i - x_k\|) = \lim_{k \rightarrow \infty} \max_{1 \leq i \leq n} (m_i \|a_i - x_k\|). \quad (10)$$

З рівності (10) та теореми 1 випливає, що $I \neq \emptyset$ та

$$\{i \in \{1, \dots, n\} : \|f_i^*\| > 0\} = \{i \in \{1, \dots, n\} : f_i^* \neq 0\} \subset I.$$

Звідси одержуємо, що $f_i^* = 0$, $i \in \{1, \dots, n\} \setminus I$. Внаслідок цього та співвідношення (8)–(10) отримуємо, що мають місце рівності 1), 3) та

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i \in I} m_i f_i^*(a_i - x_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i \in I} m_i \|f_i^*\| \|a_i - x_k\|. \quad (11)$$

Очевидно, що співвідношення 2) має місце для

$$i \in I \setminus \{i \in \{1, \dots, n\} : f_i^* \neq 0\},$$

оскільки для цих індексів i $f_i^* = 0$.

Нехай тепер $i \in \{i \in \{1, \dots, n\} : f_i^* \neq 0\}$. Маємо, що

$$0 \geq m_i f_i^*(a_i - x_k) - m_i \|f_i^*\| \|a_i - x_k\| \geq \sum_{i \in I} m_i f_i^*(a_i - x_k) - \sum_{i \in I} m_i \|f_i^*\| \|a_i - x_k\|.$$

Звідси та співвідношення (11) одержуємо, що для

$$i \in \{i \in \{1, \dots, n\} : f_i^* \neq 0\} \subset I \quad \lim_{k \rightarrow \infty} (m_i f_i^*(a_i - x_k) - m_i \|f_i^*\| \|a_i - x_k\|) = 0.$$

Оскільки для цих індексів i

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(m_i \|f_i^*\| \|a_i - x_k\| \right) = \|f_i^*\| \lim_{k \rightarrow \infty} (m_i \|a_i - x_k\|) = \|f_i^*\| \lim_{k \rightarrow \infty} \max_{1 \leq i \leq n} (m_i \|a_i - x_k\|),$$

то

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(m_i f_i^* (a_i - x_k) \right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(m_i \|f_i^*\| \|a_i - x_k\| \right),$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_i^* (a_i - x_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\|f_i^*\| \|a_i - x_k\| \right).$$

Отже, співвідношення 2) також має місце.

Теорему доведено.

З доведеної теореми випливає, що екстремальними послідовностями для величини (1) можуть бути лише ті послідовності $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$,

$x_k \in V$, $k = 1, 2, \dots$, для яких існує $\lim_{k \rightarrow \infty} \max_{1 \leq i \leq n} (m_i \|a_i - x_k\|)$ та множина

$$I = \left\{ i \in \{1, \dots, n\} : \lim_{k \rightarrow \infty} (m_i \|a_i - x_k\|) = \lim_{k \rightarrow \infty} \max_{1 \leq i \leq n} (m_i \|a_i - x_k\|) \right\} \neq \emptyset.$$

У зв'язку з цим далі будемо розглядати лише такі послідовності.

Теорема 3. Нехай $x_k \in V$, $k = 1, 2, \dots$, існує $\lim_{k \rightarrow \infty} \max_{1 \leq i \leq n} (m_i \|a_i - x_k\|)$,

$$I = \left\{ i \in \{1, \dots, n\} : \lim_{k \rightarrow \infty} (m_i \|a_i - x_k\|) = \lim_{k \rightarrow \infty} \max_{1 \leq i \leq n} (m_i \|a_i - x_k\|) \right\} \neq \emptyset.$$

Для того щоб послідовність $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ була узагальненим чебишовським у розумінні зважених відстаней центром системи точок a_i , $i = \overline{1, n}$, відносно множини V (екстремальною послідовністю для величини (1)), необхідно і достатньо, щоб існували функціонали $f_i^* \in X^*$, $i \in I$, які задовольняють умови 1)–3) теореми 2.

Доведення. Необхідність теореми була доведена в теоремі 2.

Доведемо достатність. Нехай для послідовності $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$, про яку йде мова в теоремі, існують функціонали $f_i^* \in X^*$, $i \in I$, які задовольняють умови 1)–3) теореми 2. Переконаємося, що така послідовність є екстремальною для величини (1).

Згідно з умовами 1)–3) для довільного $x \in V$ маємо:

$$\sum_{i \in I} m_i f_i^* (-x) \geq \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i \in I} m_i f_i^* (-x_k),$$

$$\sum_{i \in I} m_i f_i^* (a_i - x) \geq \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i \in I} m_i f_i^* (a_i - x_k) = \sum_{i \in I} m_i \lim_{k \rightarrow \infty} f_i^* (a_i - x_k) =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i \in I} \|f_i^*\| \lim_{k \rightarrow \infty} (m_i \|a_i - x_k\|) = \sum_{i \in I} \|f_i^*\| \lim_{k \rightarrow \infty} \max_{1 \leq i \leq n} (m_i \|a_i - x_k\|) = \\
&= \lim_{k \rightarrow \infty} \max_{1 \leq i \leq n} (m_i \|a_i - x_k\|).
\end{aligned}$$

Отже,

$$\begin{aligned}
\lim_{k \rightarrow \infty} \max_{1 \leq i \leq n} (m_i \|a_i - x_k\|) &\leq \sum_{i \in I} m_i f_i^*(a_i - x) \leq \sum_{i \in I} m_i \|f_i^*\| (\|a_i - x\|) \leq \\
&\leq \max_{1 \leq i \leq n} (m_i \|a_i - x\|) \sum_{i \in I} \|f_i^*\| = \max_{1 \leq i \leq n} (m_i \|a_i - x\|), \quad x \in V.
\end{aligned}$$

Тому

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \max_{1 \leq i \leq n} (m_i \|a_i - x_k\|) \leq \inf_{x \in V} \max_{1 \leq i \leq n} (m_i \|a_i - x\|) \leq \max_{1 \leq i \leq n} (m_i \|a_i - x_k\|), \quad k = 1, 2, \dots$$

Звідси й випливає, що

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \max_{1 \leq i \leq n} (m_i \|a_i - x_k\|) = \inf_{x \in V} \max_{1 \leq i \leq n} (m_i \|a_i - x\|).$$

Це означає, що послідовність $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ є екстремальною послідовністю для величини (1).

Достатність доведено.

Теорему доведено.

Зауважимо, що з доведеної теореми легко випливає справедливість теореми 2.3 [1, с. 251], яка є критерієм екстремальної послідовності для величини (1) у випадку, коли $m_i = 1$, $i = \overline{1, n}$.

Наслідок 1. Нехай в задачі відшукування величини (1) V є опуклим конусом з вершиною в точці 0 , $x_k \in V$, $k = 1, 2, \dots$, існує

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \max_{1 \leq i \leq n} (m_i \|a_i - x_k\|),$$

$$I = \left\{ i \in \{1, \dots, n\} : \lim_{k \rightarrow \infty} (m_i \|a_i - x_k\|) = \lim_{k \rightarrow \infty} \max_{1 \leq i \leq n} (m_i \|a_i - x_k\|) \right\} \neq \emptyset.$$

Для того щоб послідовність $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ була екстремальною для величини (1), необхідно і достатньо, щоб існували функціонали $f_i^* \in X^*$, $i \in I$, які задовольняють умови:

- 1) $\sum_{i \in I} \|f_i^*\| = 1$;
- 2) $\lim_{k \rightarrow \infty} f_i^*(a_i - x_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} (\|f_i^*\| \|a_i - x_k\|)$, $i \in I$;
- 3) $\sum_{i \in I} m_i f_i^*(x) \leq 0$, $x \in V$;

$$4) \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i \in I} m_i f_i^*(x_k) = 0.$$

Наслідок 2. Нехай в задачі відшукування величини (1) V є підпростором простору X , $x_k \in V$, $k = 1, 2, \dots$, існує $\lim_{k \rightarrow \infty} \max_{1 \leq i \leq n} (m_i \|a_i - x_k\|)$,

$$I = \left\{ i \in \{1, \dots, n\} : \lim_{k \rightarrow \infty} (m_i \|a_i - x_k\|) = \lim_{k \rightarrow \infty} \max_{1 \leq i \leq n} (m_i \|a_i - x_k\|) \right\} \neq \emptyset.$$

Для того щоб послідовність $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ була екстремальною для величини (1), необхідно і достатньо, щоб існували функціонали $f_i^* \in X^*$, $i \in I$, які задовольняють умовам:

- 1) $\sum_{i \in I} \|f_i^*\| = 1$;
- 2) $\lim_{k \rightarrow \infty} f_i^*(a_i - x_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} (\|f_i^*\| \|a_i - x_k\|)$, $i \in I$;
- 3) $\sum_{i \in I} m_i f_i^*(x) = 0$, $x \in V$.

Наслідок 3. Нехай $x^* \in V$,

$$I = \left\{ i \in \{1, \dots, n\} : m_i \|a_i - x^*\| = \max_{1 \leq i \leq n} (m_i \|a_i - x^*\|) \right\}.$$

Для того щоб точка x^* була чебишовським у розумінні зважених відстаней центром системи точок a_i , $i = \overline{1, n}$, відносно множини V (екстремальним елементом для величини (1)), необхідно і достатньо, щоб існували функціонали $f_i^* \in X^*$, $i \in I$, які задовольняють умови:

- 1) $\sum_{i \in I} \|f_i^*\| = 1$;
- 2) $f_i^*(a_i - x^*) = \|f_i^*\| \|a_i - x^*\|$, $i \in I$;
- 3) $\sum_{i \in I} m_i f_i^*(x^*) = \max_{x \in V} \sum_{i \in I} m_i f_i^*(x)$.

Справедливість наслідку безпосередньо випливає з теореми 3, якщо врахувати, що елемент $x^* \in V$ буде екстремальним елементом для величини (1) тоді і тільки тоді, коли стаціонарна послідовність $x_k = x^*$, $k = 1, 2, \dots$, буде екстремальною послідовністю для цієї величини.

Критерії колмогоровського типу екстремальної послідовності для величини (1). Розглянемо деякі критерії колмогоровського типу екстремальної послідовності для величини (1).

Теорема 4. Нехай $x_k \in V$, $k = 1, 2, \dots$, існує $\lim_{k \rightarrow \infty} \max_{1 \leq i \leq n} (m_i \|a_i - x_k\|)$,

$$I = \left\{ i \in \{1, \dots, n\} : \lim_{k \rightarrow \infty} (m_i \|a_i - x_k\|) = \lim_{k \rightarrow \infty} \max_{1 \leq i \leq n} (m_i \|a_i - x_k\|) \right\} \neq \emptyset.$$

Для того щоб послідовність $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ була екстремальною послідовністю для величини (1), необхідно і достатньо, щоб для кожного елемента $x \in V$ існували підпослідовність $\{x_{k_l}\}_{l=1}^{\infty}$ послідовності $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$, послідовності $\{f_i^l\}_{l=1}^{\infty}$, $i \in I$, де для $i \in I$ $f_i^l \in X^*$, $l = 1, 2, \dots$, такі, що

- 1) $\lim_{l \rightarrow \infty} \sum_{i \in I} \|f_i^l\| = 1$;
- 2) $\lim_{l \rightarrow \infty} f_i^l (a_i - x_{k_l}) = \lim_{l \rightarrow \infty} \|f_i^l\| \|a_i - x_{k_l}\|$, $i \in I$;
- 3) $\lim_{l \rightarrow \infty} \sum_{i \in I} m_i f_i^l (x - x_{k_l}) \leq 0$.

Доведення. *Достатність.* Нехай для послідовності $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$, про яку йде мова в теоремі, та елемента $x \in V$ існує підпослідовність $\{x_{k_l}\}_{l=1}^{\infty}$ послідовності $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$, послідовності $\{f_i^l\}_{l=1}^{\infty}$, $i \in I$, функціоналів $f_i^l \in X^*$, $l = 1, 2, \dots$, для яких виконуються умови 1)–3) теореми. Доведемо, що $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ є екстремальною послідовністю для величини (1).

Переконаємося, перш за все, що

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \sum_{i \in I} m_i f_i^l (a_i - x_{k_l}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \max_{1 \leq i \leq n} (m_i \|a_i - x_k\|). \quad (12)$$

Оскільки для $i \in I$ $\lim_{k \rightarrow \infty} (m_i \|a_i - x_k\|) = \lim_{k \rightarrow \infty} \max_{1 \leq i \leq n} (m_i \|a_i - x_k\|)$, то

$$\lim_{l \rightarrow \infty} (m_i \|a_i - x_{k_l}\|) = \lim_{k \rightarrow \infty} \max_{1 \leq i \leq n} (m_i \|a_i - x_k\|), \quad i \in I.$$

Звідси випливає, що існує $\lim_{l \rightarrow \infty} \|a_i - x_{k_l}\| > 0$, $i \in I$.

Внаслідок цього та 2) робимо висновок, що існують $\lim_{l \rightarrow \infty} \|f_i^l\|$, $i \in I$.

З проведених міркувань та співвідношень 1), 2) одержуємо, що

$$\begin{aligned} \lim_{l \rightarrow \infty} \sum_{i \in I} m_i f_i^l (a_i - x_{k_l}) &= \sum_{i \in I} m_i \lim_{l \rightarrow \infty} f_i^l (a_i - x_{k_l}) = \sum_{i \in I} m_i \left(\lim_{l \rightarrow \infty} \|f_i^l\| \|a_i - x_{k_l}\| \right) = \\ &= \sum_{i \in I} \left(\lim_{l \rightarrow \infty} \|f_i^l\| \lim_{l \rightarrow \infty} (m_i \|a_i - x_{k_l}\|) \right) = \sum_{i \in I} \left(\lim_{l \rightarrow \infty} \|f_i^l\| \lim_{k \rightarrow \infty} \max_{1 \leq i \leq n} (m_i \|a_i - x_k\|) \right) = \end{aligned}$$

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} \max_{1 \leq i \leq n} (m_i \|a_i - x_k\|) \lim_{l \rightarrow \infty} \sum_{i \in I} \|f_i^l\| = \lim_{k \rightarrow \infty} \max_{1 \leq i \leq n} (m_i \|a_i - x_k\|).$$

Рівність (12) встановлено.

Для завершення доведення достатності використаємо співвідношення 3).

Маємо для $x \in V$ та $l = 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I} m_i f_i^l(x - x_{k_i}) &= \sum_{i \in I} m_i f_i^l(a_i - x_{k_i}) - \sum_{i \in I} m_i f_i^l(a_i - x) \geq \sum_{i \in I} m_i f_i^l(a_i - x_{k_i}) - \\ &- \sum_{i \in I} m_i \|f_i^l\| \|a_i - x\| \geq \sum_{i \in I} m_i f_i^l(a_i - x_{k_i}) - \sum_{i \in I} \|f_i^l\| \max_{1 \leq i \leq n} (m_i \|a_i - x\|) = \\ &= \sum_{i \in I} m_i f_i^l(a_i - x_{k_i}) - \max_{1 \leq i \leq n} (m_i \|a_i - x\|) \sum_{i \in I} \|f_i^l\|. \end{aligned}$$

Отже, для $x \in V$ та $l = 1, 2, \dots$

$$\sum_{i \in I} m_i f_i^l(x - x_{k_i}) \geq \sum_{i \in I} m_i f_i^l(a_i - x_{k_i}) - \max_{1 \leq i \leq n} (m_i \|a_i - x\|) \sum_{i \in I} \|f_i^l\|.$$

Перейшовши в цій нерівності до границі при $l \rightarrow \infty$ та врахувавши 1), 3), та (12), одержимо, що

$$0 \geq \lim_{k \rightarrow \infty} \max_{1 \leq i \leq n} (m_i \|a_i - x_k\|) - \max_{1 \leq i \leq n} (m_i \|a_i - x\|).$$

Звідси випливає, що

$$\max_{1 \leq i \leq n} (m_i \|a_i - x\|) \geq \lim_{k \rightarrow \infty} \max_{1 \leq i \leq n} (m_i \|a_i - x_k\|), \quad x \in V.$$

Тому для всіх $k = 1, 2, \dots$

$$\max_{1 \leq i \leq n} (m_i \|a_i - x_k\|) \geq \inf_{x \in V} \max_{1 \leq i \leq n} (m_i \|a_i - x\|) \geq \lim_{k \rightarrow \infty} \max_{1 \leq i \leq n} (m_i \|a_i - x_k\|).$$

З отриманої нерівності випливає, що

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \max_{1 \leq i \leq n} (m_i \|a_i - x_k\|) = \inf_{x \in V} \max_{1 \leq i \leq n} (m_i \|a_i - x\|).$$

Це й означає, що послідовність $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ є екстремальною послідовністю для величини (1).

Достатність доведено.

Необхідність. Нехай послідовність $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ є екстремальною послідовністю для величини (1).

Згідно з теоремою 2 існують функціонали $f_i^* \in X^*$, $i \in I$, які задовольняють умовам 1) -3) цієї теореми. Покладемо $f_i^k = f_i^*$, $i \in I$, $k = 1, 2, \dots$. Відповідно до умов 1) -3) теореми 2 одержимо, що

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I} \|f_i^k\| &= 1, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i \in I} \|f_i^k\| = 1; \quad \lim_{k \rightarrow \infty} f_i^k(a_i - x_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} (\|f_i^k\| \|a_i - x_k\|), \quad i \in I; \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i \in I} m_i f_i^k(x_k) &\geq \sum_{i \in I} m_i f_i^k(x), \quad x \in V. \end{aligned}$$

З останнього співвідношення випливає, що для $x \in V$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\sum_{i \in I} m_i f_i^k (x - x_k) \right) \leq 0.$$

Отже, послідовність $\{f_i^k\}_{k=1}^{\infty}$, де $f_i^k = f_i^*$, $k = 1, 2, \dots$, для всіх $i \in I$, задовольняє умовам 1)–3) теореми.

Необхідність доведено.

Теорему доведено.

З теорем 2,4 випливає низка наслідків, які представляють і самостійний інтерес. Наведемо деякі з них.

Наслідок 4. Нехай $x_k \in V$, $k = 1, 2, \dots$, існує $\lim_{k \rightarrow \infty} \max_{1 \leq i \leq n} (m_i \|a_i - x_k\|)$,

$$I = \left\{ i \in \{1, \dots, n\} : \lim_{k \rightarrow \infty} (m_i \|a_i - x_k\|) = \lim_{k \rightarrow \infty} \max_{1 \leq i \leq n} (m_i \|a_i - x_k\|) \right\} \neq \emptyset.$$

Для того щоб послідовність $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ була екстремальною послідовністю для величини (1), необхідно і достатньо, щоб для кожного елемента $x \in V$ існували послідовності $\{f_i^k\}_{k=1}^{\infty}$, $i \in I$, для яких $f_i^k \in X^*$, $i \in I$, $k = 1, 2, \dots$, та

- 1) $\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i \in I} \|f_i^k\| = 1$;
- 2) $\lim_{k \rightarrow \infty} f_i^k (a_i - x_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \|f_i^k\| \|a_i - x_k\|$, $i \in I$;
- 3) $\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i \in I} m_i f_i^k (x - x_k) \leq 0$.

Наслідок 5. Нехай $x_k \in V$, $k = 1, 2, \dots$, існує $\lim_{k \rightarrow \infty} \max_{1 \leq i \leq n} (m_i \|a_i - x_k\|)$,

$$I = \left\{ i \in \{1, \dots, n\} : \lim_{k \rightarrow \infty} (m_i \|a_i - x_k\|) = \lim_{k \rightarrow \infty} \max_{1 \leq i \leq n} (m_i \|a_i - x_k\|) \right\} \neq \emptyset.$$

Для того щоб послідовність $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ була екстремальною послідовністю для величини (1), необхідно і достатньо, щоб для кожного елемента $x \in V$ існували функціонали $f_i^x \in X^*$, $i \in I$, та

- 1) $\sum_{i \in I} \|f_i^x\| = 1$;
- 2) $\lim_{k \rightarrow \infty} f_i^x (a_i - x_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} (\|f_i^x\| \|a_i - x_k\|)$, $i \in I$;
- 3) $\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i \in I} m_i f_i^x (x - x_k) \leq 0$.

Наслідок 6. Нехай $x_k \in V$, $k = 1, 2, \dots$, існує $\lim_{k \rightarrow \infty} \max_{1 \leq i \leq n} (m_i \|a_i - x_k\|)$,

$$I = \left\{ i \in \{1, \dots, n\} : \lim_{k \rightarrow \infty} (m_i \|a_i - x_k\|) = \lim_{k \rightarrow \infty} \max_{1 \leq i \leq n} (m_i \|a_i - x_k\|) \right\} \neq \emptyset.$$

Для того щоб послідовність $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ була екстремальною послідовністю для величини (1), необхідно і достатньо, щоб існували функціонали $f_i^* \in X^*$, $i \in I$, які задовольняють умови

- 1) $\sum_{i \in I} \|f_i^*\| = 1$;
- 2) $\lim_{k \rightarrow \infty} f_i^*(a_i - x_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} (\|f_i^*\| \|a_i - x_k\|)$, $i \in I$;
- 3) $\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i \in I} m_i f_i^*(x - x_k) \leq 0$, $x \in V$.

Наслідок 7. Нехай $x^* \in V$,

$$I = \left\{ i \in \{1, \dots, n\} : m_i \|a_i - x^*\| = \max_{1 \leq i \leq n} m_i \|a_i - x^*\| \right\}.$$

Для того щоб елемент x^* був екстремальним елементом для величини (1), необхідно і достатньо, щоб для кожного $x \in V$ існували функціонали $f_i^x \in X^*$, $i \in I$, які задовольняють умовам

- 1) $\sum_{i \in I} \|f_i^x\| = 1$;
- 2) $f_i^x(a_i - x^*) = \|f_i^x\| \|a_i - x^*\|$, $i \in I$;
- 3) $\sum_{i \in I} m_i f_i^x(x - x^*) \leq 0$.

Переконаємося у справедливості цього наслідку безпосередньо.

Необхідність. Нехай x^* є екстремальним елементом для величини (1). Згідно з наслідком 3 існують функціонали $f_i^* \in X^*$, $i \in I$, які задовольняють умови 1)–3) цього наслідку. Для $x \in V$ покладемо $f_i^x = f_i^*$, $i \in I$. Тоді для функціоналів $f_i^x \in X^*$, $i \in I$, виконуються умови 1), 2) наслідку 7 та має місце рівність

$$\sum_{i \in I} m_i f_i^x(x^*) = \max_{x \in V} \sum_{i \in I} m_i f_i^x(x).$$

З цієї рівності випливає справедливість умови 3) наслідку 7.

Необхідність доведено.

Достатність. Нехай для кожного $x \in V$ існують функціонали $f_i^x \in X^*$, $i \in I$, які задовольняють умовам 1)–3).

Переконаємося, що x^* є екстремальним елементом для величини (1). Для $x \in V$ зі співвідношень 1)–3) випливає, що

$$\begin{aligned}
0 &\geq \sum_{i \in I} m_i f_i^x(x - x^*) \geq \sum_{i \in I} m_i f_i^x(a_i - x^*) - \sum_{i \in I} m_i f_i^x(a_i - x) \geq \\
&\geq \sum_{i \in I} m_i \|f_i^x\| \|a_i - x^*\| - \sum_{i \in I} m_i \|f_i^x\| \|a_i - x\| \geq \sum_{i \in I} \|f_i^x\| \max_{1 \leq i \leq n} (m_i \|a_i - x^*\|) - \\
&- \sum_{i \in I} \|f_i^x\| \max_{i \in I} (m_i \|a_i - x\|) = \max_{1 \leq i \leq n} (m_i \|a_i - x^*\|) - \max_{1 \leq i \leq n} (m_i \|a_i - x\|).
\end{aligned}$$

Звідси й випливає, що x^* є екстремальним елементом для величини (1).

Достатність доведено.

Наслідок доведено.

Висновки. Для задачі відшукування величини (1) встановлено критерії її екстремальної послідовності, основані на співвідношенні двоїстості, а також критерії цієї послідовності колмогоровського типу, отримано з цих критеріїв, як наслідки, критерії екстремального елемента для величини (1).

Список використаних джерел:

1. Гольштейн Е. Г. Теория двойственности в математическом программировании и ее приложения / Е. Г. Гольштейн. — М. : Наука, 1971. — 352 с.
2. Гнатюк Ю. В. Двоїсті співвідношення для задачі найкращого за дробово-опуклою функцією наближення кількох елементів та критерії елемента найкращого наближення / Ю. В. Гнатюк // Доп. НАН України. — 1995. — № 6. — С. 23–26.
3. Гнатюк Ю. В. Основні властивості задачі найкращого одночасного наближення кількох елементів / Ю. В. Гнатюк // Укр. мат. журн. — 1996. — Вип. 48, № 97. — С. 1183–1193.
4. Корнейчук Н. П. Экстремальные задачи теории приближения / Н. П. Корнейчук. — М. : Наука, 1976. — 320 с.

THE CRITERIAS AT THE SENSE OF THE WEIGHTED DISTANCES OF THE GENERALIZED CENTER OF CHEBYSHEV OF SEVERAL POINTS OF A LINEAR NORMED SPACE RELATIVELY TO THE CONVEX SET OF THIS SPACE

The idea of a relationship of mathematics with practice is the idea of approximation.

One of the directions is the theory of approximation of function. Its founder is considered the P. L. Chebyshev. He started the conception of the best approximation of a continuous function on a segment using algebraic polynomials of some order at the 50 years of the 19th century.

Over time, it became clear that a many tasks of best approximation are partial consequence of the problem of the best approximation of an element of a linear normed space by a convex set.

An important aspect of studying this problem is the establishment of criteria for its extremal element.

M. P. Korniiichuk and V. M. Tikhomirov established the general criterion for an extremal element for the problem of the best approximation of an element of a linear normed space by a convex set based on the dual interrelation. The Kolmogorov's criterion of the extremal element for the problem of approximation of a complex-valued function by a finite-dimensional subspace of generalized complex-valued polynomials is somewhat different from this criterion.

An important class of problems of the theory of the approximation is problems of simultaneous approximation of several elements of linear normed space by set of this space.

In the article one of these tasks is considered. This is a problem to research in the sense of the weighted distances Chebyshev's center of several points of the linear normed space relatively to the convex set of this space.

For this problem we found the dual relation. These duality relations became the basis for obtaining the criterion of the extremal sequence and the criterion of the extremal element. We generalized Kolmogorov's criterion on the problem that is considered in the work.

These results clarified for some cases of the studied problem.

Key words: *the linear normed space, the weighted distances, the convex set, the generalized point of Chebyshev, the extreme sequence, the criteria of the generalized center of Chebyshev.*

Отримано: 23.05.2018

УДК 517.9

К. С. Зайцева*,

В. Г. Самойленко**, д-р фіз.-мат. наук, професор,

Ю. І. Самойленко**, д-р фіз.-мат. наук,

Л. В. Вовк***, канд. фіз.-мат. наук

*Київський університет імені Бориса Грінченка м. Київ,

**Київський національний університет імені Тараса Шевченка, м. Київ,

***Київський національний університет культури і мистецтв, м. Київ

ПОБУДОВА АСИМПТОТИЧНОГО СОЛІТОНОПОДІБНОГО РОЗВ'ЯЗКУ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНОГО РІВНЯННЯ КОРТЕВЕГА-ДЕ ФРІЗА ЗІ СПЕЦІАЛЬНО ЗАДАНИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Рівняння Кортевега-де Фріза є одним з важливих об'єктів дослідження сучасної теоретичної фізики і прикладної математики. Це рівняння описує хвильові процеси в середовищах з нелінійної дисперсією і стало широко відомим у середині минулого століття завдяки наявності у нього так званих солітонних розв'язків, що мають властивість нелінійної суперпозиції. За допомогою різних аналітичних і якісних методів (метод оберненої задачі теорії розсіювання, метод Хіроті, методи Беклунд перетворення і Дарбу перетворення, метод скінченно-

зонного інтегрування, методи групового аналізу та інші) для рівняння Кортевега-де Фріза вивчено широкий клас задач і встановлено існування для нього розв'язків різної фізичної природи, зокрема, солітонних, періодичних і майже періодичних, розв'язків типу ударної хвилі (типу сходинки), тощо. У випадку середовищ зі змінними характеристиками і малою дисперсією в якості математичних моделей певних процесів і явищ виникає рівняння Кортевега-де Фріза зі змінними коефіцієнтами та сингулярним збуренням.

При вивченні рівняння Кортевега-де Фріза зі змінними коефіцієнтами та малим параметром ефективним методом його дослідження є асимптотичний аналіз, який дозволяє знайти його наближені розв'язки та проаналізувати їх якісні властивості.

Однією з актуальних задач сучасної прикладної математики є вивчення рівнянь інтегровного типу з сингулярним збуренням, зокрема, задача про побудову асимптотичних розв'язків, які за своєю структурою і властивостями є близькими до солітонних розв'язків. Саме побудові таких асимптотичних розв'язків для рівняння Кортевега-де Фріза із сингулярним збуренням і змінними коефіцієнтами спеціального вигляду і присвячено дану статтю, у якій для цього рівняння побудовано головний доданок його асимптотичного солітоноподібного розв'язку. Показано, що отриманий асимптотичний розв'язок належить простору швидко спадаючих функцій і, на відміну від загального випадку, він визначений для всіх значень незалежних змінних. Доведено твердження про точність, з якою побудований асимптотичний розв'язок задовольняє досліджуване рівняння.

Ключові слова: *рівняння Кортевега-де Фріза, солітонний розв'язок, сингулярне збурення, асимптотичний розв'язок.*

Вступ. Рівняння Кортевега-де Фріза є одним з важливих об'єктів сучасної математичної фізики. Для побудови і вивчення його розв'язків використовувалися різноманітні аналітичні і якісні методи, серед яких методи теорії звичайних диференціальних рівнянь, чисельні методи, метод оберненої задачі теорії розсіювання, метод Хіроті, перетворення Беклунда і Дарбу перетворення, методи групового аналізу, асимптотичні методи та інші [1–11]. При цьому було встановлено, що це рівняння володіє розв'язками з різноманітними властивостями. Надзвичайний інтерес до даного рівняння пов'язаний з наявністю у нього так званих солітонних розв'язків, які описують принцип нелінійної суперпозиції розв'язків хвильової природи. Крім фізично змістовної сутності дане рівняння володіє низкою цікавих математичних властивостей, серед яких згадаємо лише про існування у нього так званих сингулярних розв'язків, тобто розв'язків, які можуть «руйнуватися» або грубо, або згідно сценарію градієнтної катастрофи [12].

Проте переважна більшість згаданих вище методів і підходів може ефективно використовуватися лише для випадку рівняння Кортевега-де

Фріза зі сталими коефіцієнтами, в той час, як при моделюванні хвильових процесів у середовищах зі змінними характеристиками в якості математичних моделей виникають рівняння Кортевега-де Фріза зі змінними коефіцієнтами і, зокрема, з малим параметром при старшій похідній, який характеризує малу дисперсію середовища. Зауважимо, що при наявності малого параметра чи не єдиним методом дослідження таких рівнянь є асимптотичний аналіз, який дозволяє знайти їх наближені розв'язки. Саме побудові асимптотичних розв'язків спеціального вигляду для рівняння Кортевега-де Фріза з сингулярним збуренням і змінними коефіцієнтами спеціального вигляду і присвячено дану статтю.

Постановка задачі. Для сингулярно збуреного рівняння Кортевега-де Фріза зі змінними коефіцієнтами вигляду

$$\varepsilon^2 u_{xxx} = a(x, t, \varepsilon) u_t + b(x, t, \varepsilon) u u_x, \quad (1)$$

де ε — малий параметр, функції $a(x, t, \varepsilon)$, $b(x, t, \varepsilon)$ записуються у вигляді асимптотичних (за Пуанкаре) рядів

$$a(x, t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x, t) \varepsilon^k, \quad b(x, t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(x, t) \varepsilon^k,$$

коефіцієнти яких є нескінченно диференційованими за x, t функціями, розглядається задача про знаходження його асимптотичного солітоноподібного розв'язку для випадку, коли коефіцієнти мають вигляд

$$a(x, t, \varepsilon) = t^2 + x^2 + 1, \quad b(x, t, \varepsilon) = 1. \quad (2)$$

Значимо, що рівняння Кортевега-де Фріза зі змінними коефіцієнтами вивчалось у низці статей, зокрема, у [10].

Алгоритм побудови розв'язку. Асимптотичний солітоноподібний розв'язок рівняння (1), (2) шукається за допомогою алгоритму, який розроблено і обґрунтовано в [13, 14]. Відповідно до властивостей солітонних розв'язків шуканий асимптотичний розв'язок має спеціальну поведінку при великих значеннях аргументів, а тому його доданки належать певним функціональним просторам. Розглянемо [13, 15] простір $G_1 = G_1(R \times [0; T] \times R)$ — лінійний простір таких нескінченно диференційованих функцій $f = f(x, t, \tau)$, $(x, t, \tau) \in R \times [0; T] \times R$, що для довільних невід'ємних цілих чисел n, p, q, r рівномірно щодо (x, t) на кожній компактній множині $K \subset R \times [0; T]$ виконуються умови:

1⁰. справджується співвідношення:

$$\lim_{\tau \rightarrow +\infty} \tau^n \frac{\partial^p}{\partial x^p} \frac{\partial^q}{\partial t^q} \frac{\partial^r}{\partial \tau^r} f(x, t, \tau) = 0, \quad (x, t) \in K;$$

2⁰. існує така нескінченно диференційовна функція $f^-(x, t)$, що

$$\lim_{\tau \rightarrow -\infty} \tau^n \frac{\partial^p}{\partial x^p} \frac{\partial^q}{\partial t^q} \frac{\partial^r}{\partial \tau^r} (f(x, t, \tau) - f^-(x, t)) = 0, \quad (x, t) \in K.$$

Нехай $G_1^0 = G_1^0(R \times [0; T] \times R) \subset G_1$ — простір функцій $f = f(x, t, \tau) \in G_1$, $(x, t, \tau) \in R \times [0; T] \times R$, для яких рівномірно щодо змінних (x, t) на кожному компакт $K \subset R \times [0; T]$ виконується умова

$$\lim_{\tau \rightarrow -\infty} f(x, t, \tau) = 0.$$

Означення 1 [13–15]. Функція $u = u(x, t, \varepsilon)$, де ε — малий параметр, називається солітоноподібною, якщо ця функція для довільного цілого $N \geq 0$ зображується асимптотичним розкладом вигляду:

$$u(x, t, \varepsilon) = \sum_{j=0}^N \varepsilon^j [u_j(x, t) + V_j(x, t, \tau)] + O(\varepsilon^{N+1}), \quad \tau = \frac{x - \varphi(t)}{\varepsilon}, \quad (3)$$

де $\varphi(t) \in C^\infty([0; T])$ — скалярна функція, функції $u_j(x, t)$, $j = \overline{0, N}$, — нескінченно диференційовні; $V_0(x, t, \tau) \in G_1^0$, $V_j(x, t, \tau) \in G_1$, $j = \overline{1, N}$. Вираз $x - \varphi(t)$ називається фазою солітоноподібної функції $u(x, t, \varepsilon)$.

Асимптотичний солітоноподібний розв'язок рівняння (1) записується у вигляді

$$u(x, t, \varepsilon) = Y_N(x, t, \tau, \varepsilon) + O(\varepsilon^{N+1}),$$

$$Y_N(x, t, \tau, \varepsilon) = \sum_{j=0}^N \varepsilon^j [u_j(x, t) + V_j(x, t, \tau)], \quad \tau = \frac{x - \varphi(t)}{\varepsilon}$$

Оскільки солітонні властивості розв'язку визначаються його сингулярною частиною, то у подальшому вважаємо, що регулярна частина асимптотичного розв'язку рівна нулеві, тобто розглядається випадок нульового фону. Стандартними методами показується, що доданки сингулярної частини асимптотики — функції $V_j(x, t, \tau)$,

$j = \overline{0, N}$, задовольняють систему диференціальних рівнянь вигляду:

$$\frac{\partial^3 V_0}{\partial \tau^3} + a_0(x, t) \frac{\partial V_0}{\partial \tau} \varphi'(t) - b_0(x, t) \left(u_0 \frac{\partial V_0}{\partial \tau} + V_0 \frac{\partial V_0}{\partial \tau} \right) = 0, \quad (4)$$

$$\frac{\partial^3 V_j}{\partial \tau^3} + a_0(x, t) \frac{\partial V_j}{\partial \tau} \varphi'(t) - b_0(x, t) \left(u_0 \frac{\partial V_j}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial \tau} (V_0 V_j) \right) = F_j(x, t, \tau), \quad (5)$$

де функції $F_j(x, t, \tau)$, $j = \overline{1, N}$ знаходяться рекурентно.

У [13] описано загальну процедуру побудови розв'язків системи (4), (5), яка дає алгоритм знаходження функції $\varphi(t)$, за допомогою

якої визначається фаза солітоноподібного розв'язку. Оскільки у цій статті ми обмежуємося побудовою лише головного доданку асимптотичного розв'язку рівняння (1), (2), то для даного випадку фазу шуканого розв'язку можна визначити [13] за допомогою рівності $x - \varphi(t) = x + 2t$, тобто покласти $\varphi(t) = -2t$.

Шукаючи розв'язок рівняння (4) у просторі G_0 , знаходимо, що головний доданок сингулярної частини асимптотичного солітоноподібного розв'язку рівняння (1), (2) має вигляд

$$Y_0(x, t, \varepsilon) = -3(10t^2 + 2) ch^{-2} \left(\frac{\sqrt{10t^2 + 2}}{2} \left(\frac{x + 2t}{2\varepsilon} \right) \right).$$

Встановлено твердження.

Теорема. Для рівняння вигляду

$$\varepsilon^2 u_{xxx} = (x^2 + t^2 + 1) u_t + uu_x$$

функція

$$u(x, t, \varepsilon) = -3(10t^2 + 2) ch^{-2} \left(\frac{\sqrt{10t^2 + 2}}{2} \left(\frac{x + 2t}{2\varepsilon} \right) \right)$$

є головним доданком асимптотичного солітоноподібного розв'язку і задовольняє це рівняння з точністю $O(1)$.

Доведення даного твердження проводиться аналогічно доведенню теореми 1 [13], а тому тут не подається.

Зауваження. Побудований розв'язок, на відміну від загального випадку, «гарантовано» визначено для всіх значень незалежних аргументів x, t . Очевидно також, що цей розв'язок має «солітонні» властивості і становить певний фізичний інтерес.

Висновки. Побудовано асимптотичний солітоноподібний розв'язок сингулярно збуреного рівняння Кортевега-де Фріза зі змінними коефіцієнтами для випадку, коли коефіцієнти рівняння мають спеціальний вигляд. Встановлено точність, з якою побудований асимптотичний розв'язок задовольняє дане рівняння. Показано, що отриманий розв'язок є розв'язком солітонного типу.

Список використаних джерел:

1. Ньюелл А. Солитоны в математике и физике / А. Ньюелл ; пер. с англ. И. Р. Габитов, А. Ю. Орлов, Е. И. Шульман. — М. : Мир, 1989. — 324 с.
2. Солитоны / под ред. Р. Буллафа, Ф. Кодри. — М. : Мир, 1983. — 408 с.
3. Солитоны и нелинейные волновые уравнения / Р. Додд, Дж. Эйлбек, Дж. Гиббон, Х. Моррис. — М. : Мир, 1988. — 696 с.
4. Стокер Дж. Волны на воде / Дж. Стокер. — М. : ИЛ, 1959.

5. Теория солитонов: метод обратной задачи / В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский. — М. : Наука, 1980. — 320 с.
6. Филиппов А. Т. Многоликий солитон / А. Т. Филиппов. — М. : Наука, 1986. — 223 с.
7. Ablowitz M. J. Nonlinear dispersive waves. Asymptotic analysis and solitons / M. J. Ablowitz. — Cambridge : Cambridge University Press, 2011. — 348 p.
8. Gardner C. S. Method for solving the Korteweg-de Vries equation / C. S. Gardner, J. M. Green, M. D. Kruskal, R. M. Miura // *Physical Review Lett.* — 1967. — Vol. 19. — P. 1095–1097.
9. Hirota R. Exact solutions of the Korteweg-de Vries equation for multiple collisions of solutions / R. Hirota // *Physical Review Letters.* — 1971. — Vol. 27. — P. 1192–1194.
10. Vaneeva O. Group classification of variable coefficient KdV-like equations / O. Vaneeva // arXiv: 1204.4875v3. — 8 p.
11. Blacmore D. Nonlinear dynamical systems of mathematical physics. Spectral and integrability analysis / D. Blacmore, A. K. Prykarpatsky, V. H. Samoylenko. — Singapore : World Scientific, 2011. — 564 p.
12. Похожаев С. И. О сингулярных решениях уравнения Кортевега-де Фриза / С. И. Похожаев // *Матем. заметки.* — 2010. — Т. 88, вып. 5. — С. 770–777.
13. Самойленко В. Г. Асимптотичні розвинення для однофазових солітоноподібних розв'язків рівняння Кортевега-де Фріза зі змінними коефіцієнтами / В. Г. Самойленко, Ю. І. Самойленко // *Укр. мат. журн.* — 2005. — Т. 57, №1. — С. 111–124.
14. Самойленко В. Г. Асимптотичні розв'язки задачі Коші для сингулярно збуреного рівняння Кортевега-де Фріза зі змінними коефіцієнтами / В. Г. Самойленко, Ю. І. Самойленко // *Укр. мат. журн.* — 2007. — Т. 59, № 1. — С. 122–132.
15. Maslov V. P. Geometric asymptotics for PDE. I / V. P. Maslov, G. A. Ome'lyanov. — Providence : American Math. Society, 2001. — 243 p.

CONSTRUCTING ASYMPTOTIC SOLITON-LIKE SOLUTION TO THE SINGULAR PERTURBED KORTEWEG-DE VRIES EQUATION WITH SPECIAL COEFFICIENTS

The Korteweg-de Vries equation is known as one of important object for researching in modern theoretical physics and applied mathematics. The equation describes wave processes in nonlinear dispersion media. It became widely known in the middle of the past century.

The equation attracted much attention in connection with discovery of soliton solutions possessing interesting property of non-linear superposition. By means of different analytical, qualitative and numerical methods and approaches, namely, inverse scattering transform, Hirota method, Backlund transform, Darboux transform, method of finite zone integration, group analysis and others, for the Korteweg-de Vries equation there were studied a lot of different mathematical problems. In particular, there were found solutions with different physical treatment as well as there were proved existence of periodic and almost periodic solutions, shock wave solutions (or step like solution) and others.

While studying certain physical processes and phenomena in media with variable characteristics and small dispersion the Korteweg-de Vries equation with singular perturbation is appeared as a mathematical model. Methods of asymptotic analysis are effective instruments for studying the Korteweg-de Vries equation with variable coefficients and a small parameter because they allow us to construct approximate solutions to the equation as well as to analyze its different properties. Consideration of singular perturbed equations of integrable type is current problem of modern applied mathematics that includes a problem of constructing asymptotic soliton like solutions.

The paper deals with constructing the asymptotic soliton like solutions to the singular perturbed Korteweg-de Vries equation with variable coefficients of special form. There is constructed a main term of the asymptotic solution. The solution is shown to belong to the space of quickly decreasing functions and the solution is demonstrated to define for any values of independent variables in contradistinction to the general case. The theorem on accuracy with which the asymptotic solution satisfies the equation is proved.

Key words: *the Korteweg-de Vries equation, soliton solution, singular perturbation, asymptotic solution.*

Отримано: 26.05.2018

УДК 517.5

І. Б. Ковальська, канд. фіз.-мат. наук

Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

НАБЛИЖЕННЯ НЕСКІНЧЕННО-ДИФЕРЕНЦІЙОВНИХ ФУНКЦІЙ В ІНТЕГРАЛЬНІЙ МЕТРИЦІ

Оскільки будь-яка сумовна 2π -періодична функція розвивається в ряд Фур'є, то найбільш зручним апаратом наближення таких функцій є послідовності частинних сум цього ряду і послідовності лінійних операторів, що визначаються деякою трикутною матрицею Λ . Ця матриця задає метод побудови поліномів і визначає конкретний метод підсумовування рядів Фур'є. Одним з них є регулярний метод, який називається сумами Зігмунда.

Суми Зігмунда були введені А. Зігмундом в 1945 році. Він же довів деякі твердження, які встановлювали точні порядкові оцінки верхніх граней відхилень цих сум на класах r -диференційовних функцій для дробових r .

Дослідження Зігмунда були продовжені Б. Надем, С. А. Теляковським, А. В. Єфимовим, О. І. Степанцем, Д. М. Бушевим та ін.

У статті отримано точні порядкові оцінки верхніх граней відхилень сум Зігмунда від нескінченно-диференційовних функцій в інтегральній метриці.

Нехай N — деякий клас сумовних 2π -періодичних функцій. Тоді, якщо для $f(x)$ існує $(\psi; \beta)$ -похідна (в розумінні Степанця) і ця похідна належить класу N , то такі функції $f(x)$ об'єднують в окремий клас $L(\psi; \beta)N$, що характеризується $(\psi; \beta)$ диференціальними властивостями самої функції і умовами, накладеними на її $(\psi; \beta)$ похідну.

У статті класи $L(\psi; \beta)N$ складаються з функцій, ряди Фур'є яких збігаються до нескінченно-диференційовних функцій, а їх $(\psi; \beta)$ -похідні в інтегральній метриці належать одиничній кулі.

Основним результатом роботи є наступне твердження.

Теорема. Якщо дана функція $f(t, n, r)$ — рівномірно обмежена, а функції $f(x)$ належать згаданому класу $L(\psi; \beta)N$, то для довільних $n \in N$, для верхніх граней відхилень сум Зігмунда від функцій з класу $L(\psi; \beta)N$ справедливі точні порядкові оцінки, де порядок визначається степенем — r методу Зігмунда.

Із допоміжних тверджень доводиться 2 леми і для того, щоб показати непокрашуваність порядкової оцінки будується екстремальна функція $g(x) \in L(\psi; \beta)N$.

Ключові слова: порядкові оцінки, суми Зігмунда, нескінченно-диференційовні функції, простір L_p .

Вступ. Теорія наближення функцій виникла як в результаті внутрішнього розвитку математики так і з потреб практики. В ній відображена одна з фундаментальних ідей математики — моделювання складних об'єктів і явищ з допомогою більш простих і зручних.

Оскільки будь-яка сумовна 2π -періодична функція розвивається в ряд Фур'є, то найбільш зручним апаратом наближення таких функцій є послідовності частинних сум цього ряду і послідовності $U_n(f, \Lambda)$ лінійних операторів, що визначаються матрицею

$$\Lambda = \left\| \lambda_k^{(n)} \right\|, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad k = 0, 1, 2, \dots :$$

$$U_n(f, x, \Lambda) = \frac{a_0}{2} \lambda_0^{(n)} + \sum_{k=1}^n \lambda_k^{(n)} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

де $a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt \, dt$, $b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt \, dt$ — коефіцієнти

Фур'є функції $f(x)$. Тригонометричний поліном

$$U_n(f, \Lambda) = \frac{\lambda_0^{(n)}}{2} + \sum_{k=1}^n \lambda_k^{(n)} \cos kt$$

називають ядром оператора (методу) $U_n(f, \Lambda)$. У випадку, коли

$\lambda_k^{(n)} = 1 - \left(\frac{k}{n}\right)^r$, $r > 0$, $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ виходить поліном, що відповідає методу Зігмунда. Поліноми

$$Z_n^{(r)}(f, x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 - \left(\frac{k}{n} \right)^r \right) (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

називають сумами Зігмунда.

Суми Зігмунда для $\forall r > 0$ були введені А. Зігмундом в [3]. Там же були доведені деякі твердження, які встановлювали точні порядки відхилень цих сум на класах W_r^r , $W_r^r H_\omega$.

Дослідження А. Зігмунда були продовжені Б. Надем [6] і С. А. Теляковським [5], а також А. В. Єфимовим [4], О. І. Степанцем і Д. М. Бушевим [2].

Постановка задачі. Нехай $f(x)$ — сумовна, 2π -періодична функція, і

$$S[f] = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k(f) \cos kx + b_k(f) \sin kx) = \sum_{k=0}^n A_k(f, x)$$

— її ряд Фур'є.

Нехай далі $\psi(k)$ — довільна функція натурального аргументу і β — фіксоване дійсне число, $\beta \in R$. Припустимо, що ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\psi(k)} \left(a_k(f) \cos \left(kx + \frac{\beta\pi}{2} \right) + b_k(f) \sin \left(kx + \frac{\beta\pi}{2} \right) \right)$ є рядом Фур'є деякої функції з $L(0; 2\pi)$.

Цю функцію позначимо через $f_\beta^\psi(\cdot)$ і назвемо, згідно [1], $(\psi; \beta)$ -похідною функції $f(\cdot)$, а множину функцій $f(\cdot)$, що задовольняють таку умову, позначимо L_β^ψ .

Нехай N — деякий клас сумовних 2π -періодичних функцій. Тоді, якщо $f \in L_\beta^\psi$ і крім того $f_\beta^\psi \in N$, то будемо вважати, що функція $f(x)$ належить до класу $L_\beta^\psi N$.

Розглянемо величини відхилень сум Зігмунда

$$Z_n^{(r)}(f, x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 - \left(\frac{k}{n} \right)^r \right) A_k(f, x)$$

порядку $n-1$ від функцій з класів $L_\beta^\psi N$, коли N — деяка підмножина в просторі L_p : $N = S_p = \left\{ \varphi : \|\varphi\|_p \leq 1 \right\}$ і верхні грані цих відхилень на класах $L_\beta^\psi N$:

$$\varepsilon_n(L_\beta^\psi N)_s = \sup_{f \in L_\beta^\psi N} \|\delta_n(f; x)\|_s = \sup_{f \in L_\beta^\psi N} \|f(x) - Z_n^{(r)}(f, x)\|_s.$$

При цьому покладемо $L_\beta^\psi S_p = L_{\beta, p}^\psi$, $p \in (1; +\infty)$.

Нехай множини L_β^ψ складаються з функцій, ряди Фур'є яких збігаються до нескінченно-диференційовних функцій

$$\left(\mathfrak{M}_\infty = \left\{ \psi(t) : \frac{t}{\eta(t)-t} \uparrow \infty \right\}, \eta(t) = \psi^{-1} \left(\frac{1}{2} \psi(t) \right) \right).$$

Згідно з [1] позначимо через \mathfrak{M}_∞' множину функцій $\psi \in \mathfrak{M}_\infty$, для яких величина $\eta(t)-t$ обмежена зверху

$$\mathfrak{M}_\infty' = \{ \psi \in \mathfrak{M}_\infty : \eta(t)-t \leq K, \quad \forall t \geq 1 \}.$$

У роботі отримаємо точні порядкові оцінки величини $\varepsilon_n(L_{\beta, p}^\psi)_s$ для $f(x) \in L_{\beta, p}^\psi$ в метриці простору L_s , де $\|f\|_s = \left(\int_0^{2\pi} |f(t)|^s dt \right)^{1/s}$, якщо наближення здійснюється регулярним лінійним методом підсумовування рядів Фур'є — методом Зігмунда.

Основним результатом роботи є наступне твердження:

Теорема. Нехай $\psi \in \mathfrak{M}_\infty'$ і функція $\Phi_n = \sum_{k=1}^{\infty} \tau_k^{(n)} \cos \left(kt + \frac{\beta\pi}{2} \right)$,

$$\tau_k^{(n)} = \begin{cases} \psi(k) \left(\frac{k}{n} \right)^r, & 1 \leq k \leq n-1; \\ \psi(k), & k \geq n; \end{cases} \quad \text{така, що } f_n(t) = \Phi_n(t) n^r \text{ є рівномірно}$$

рвно обмежена. Тоді, якщо $1 < p$, $s < \infty$ і $f \in L_{\beta, p}^\psi$, то $\forall n \in N$

$$\frac{1}{n^r} \cdot C_{p, s}^{(2)} \leq \varepsilon_n(L_{\beta, p}^\psi)_s \leq C_{p, s}^{(1)} \cdot \frac{1}{n^r},$$

де $C_{p, s}^{(1)}$ і $C_{p, s}^{(2)}$ — сталі, що залежать лише від p і s .

Допоміжні твердження.

Лема 1. Якщо функція $\psi(k)$ така, що ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \psi(k) \cdot k^r$, $r > 0$ збіжний, то функція $f_n(t) = \Phi_n(t) n^r$, де

$$\Phi_n(t) = \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^r \psi(k) \cos\left(kt + \frac{\beta\pi}{2}\right) + \sum_{k=n}^{\infty} \psi(k) \cos\left(kt + \frac{\beta\pi}{2}\right), \quad r > 0, \quad \beta \in R$$

є рівномірно обмеженою при всіх $n \in N$ і $t \in R$.

Доведення. Покажемо, що $\forall n \in N$ функція $f_n(t)$ обмежена.

$$\begin{aligned} |\Phi_n(t)| &\leq \left| \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^r \psi(k) \cos\left(kt + \frac{\beta\pi}{2}\right) \right| + \left| \sum_{k=n}^{\infty} \psi(k) \cos\left(kt + \frac{\beta\pi}{2}\right) \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{n^r} \sum_{k=1}^{n-1} \psi(k) \cdot k^r \left| \cos\left(kt + \frac{\beta\pi}{2}\right) \right| + \sum_{k=n}^{\infty} \psi(k) \left| \cos\left(kt + \frac{\beta\pi}{2}\right) \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{n^r} \sum_{k=1}^{n-1} \psi(k) \cdot k^r + \sum_{k=n}^{\infty} \psi(k). \end{aligned}$$

Відомо, що $\forall \psi(n) \in \mathfrak{M}_\infty$ і $\forall n \in N$ (див. наприклад, [1])

$$\sum_{k=n}^{\infty} \psi(k) \leq K_1 \psi(n) \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j} = K_2 \psi(n).$$

Оскільки ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \psi(k) \cdot k^r$ збіжний, то $S_n = \sum_{k=1}^n \psi(k) \cdot k^r$ обмежена

$$\text{і } \sum_{k=1}^n \psi(k) \cdot k^r \leq S \quad \forall n \in N.$$

Із цих співвідношень отримаємо:

$$\begin{aligned} |f_n(\psi; t)| &= |\Phi_n(t) n^r| \leq \\ &\leq n^r \left(\frac{1}{n^r} \sum_{k=1}^{n-1} \psi(k) \cdot k^r + \sum_{k=n}^{\infty} \psi(k) \right) \leq S + K_2 \psi(n) \cdot n^r \leq S(1 + K_2) = K. \end{aligned}$$

Лема доведена.

Лема 2. Нехай $\psi(k) \in \mathfrak{M}'_\infty$, $1 < p, s < \infty$. Тоді $\forall f \in L^{\psi}_{\beta, p}$ і $\forall n \in N$: $\mathcal{E}_n \left(L^{\psi}_{\beta, p} \right)_s \leq C_{p, s} \cdot \frac{1}{n^r}$, де $C_{p, s}$ — стала, що залежить лише від p і s .

Доведення. Оскільки $\psi \in \mathfrak{M}'_\infty \subset \mathfrak{M}_\infty$, то для таких функцій виконується нерівність $\sum_{k=1}^n \frac{\psi(k)}{k} < \infty$ і ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \psi(k) \cos\left(kt + \frac{\beta\pi}{2}\right)$ є рядом Фур'є деякої сумовної функції.

Тому $\forall f \in L_{\beta,p}^{\psi}$ майже скрізь на періоді має місце рівність

$$\delta_n(f, x) = f(x) - Z_n^{(r)}(f, x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_{\beta}^{\psi}(x+t) \sum_{k=1}^{\infty} \tau_k^{(n)} \cos\left(kt + \frac{\beta\pi}{2}\right) dt,$$

$$\text{де } \tau_k^{(n)} = \begin{cases} \psi(k) \left(\frac{k}{n}\right)^r, & 1 \leq k \leq n-1; \\ \psi(k), & k \geq n. \end{cases}$$

Використовуючи нерівність Юнга для згорток періодичних функцій $\left(2\pi \|y * z\|_s \leq \|y\|_p \cdot \|z\|_q, \frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{s}, 1 \leq p \leq s < \infty\right)$, знаходимо:

$$\begin{aligned} 2\pi \|\delta_n(f, x)\|_s &= 2\pi \left\| \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_{\beta}^{\psi}(x+t) \sum_{k=1}^{\infty} \tau_k^{(n)} \cos\left(kt + \frac{\beta\pi}{2}\right) dt \right\|_s \leq \\ &\leq 2 \left\| f_{\beta}^{\psi}(x+t) \right\|_p \cdot \left\| \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^r \psi(k) \cos\left(kt + \frac{\beta\pi}{2}\right) + \sum_{k=n}^{\infty} \psi(k) \cos\left(kt + \frac{\beta\pi}{2}\right) \right\|_q = \\ &= 2 \left\| f_{\beta}^{\psi}(x+t) \right\|_p \cdot \|\Phi_n(t)\|_q = 2 \left\| f_{\beta}^{\psi}(x+t) \right\|_p \cdot \frac{1}{n^r} \|f_n(t)\|_q \leq \frac{2}{n^r} \|f_n(t)\|_q. \end{aligned}$$

Згідно леми 1 функція $f_n(t)$ обмежена. Тому

$$\|\delta_n(f, x)\|_s \leq \frac{2}{n^r} \cdot K \cdot \frac{1}{2\pi} = \frac{C}{n^r}.$$

З нерівності Гельдера для $f \in L_p$, $1 < p, s < \infty$ слідує, що

$$\|f\|_s = \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^p dt \right)^{1/p} \leq (2\pi)^{\frac{p-s}{ps}} \cdot \|f\|_p. \text{ Тоді оцінку можна записати}$$

для $1 < p, s < \infty$ у вигляді $\mathcal{E}_n(L_{\beta,p}^{\psi})_s = \sup_{f \in L_{\beta,p}^{\psi}} \|\delta_n(f; x)\|_s \leq C_{p,s} \cdot \frac{1}{n^r}$, де $C_{p,s}$ — стала, що залежить лише від p і s .

Лема доведена.

Щоб показати непокрашуваність по порядку отриманої оцінки, розглянемо функцію $g(x) = \psi(1) a^{-1} \cos\left(x - \frac{\beta\pi}{2}\right)$, де $a = \|\cos x\|_p$.

Легко бачити, що

$$\left\| g(x)_{\beta}^{\psi} \right\|_p = a^{-1} \psi(1) \left\| \frac{1}{\psi(1)} \cos\left(x - \frac{\beta\pi}{2} + \frac{\beta\pi}{2}\right) \right\|_p = 1,$$

тобто

$$\begin{aligned}
 & g(x) \in L_{\beta,p}^{\psi} \text{ і} \\
 & \tilde{\varepsilon}_n(L_{\beta,p}^{\psi})_s = \sup_{f \in L_{\beta,p}^{\psi}} \|f(x) - Z_n^{(r)}(f, x)\|_s \geq \|g(x) - Z_n^{(r)}(g, x)\|_s = \\
 & = \left\| \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g_{\beta}^{\psi}(x+t) \cdot \frac{1}{n^r} \cdot \cos\left(t + \frac{\beta\pi}{2}\right) dt \right\|_s = \frac{1}{\pi} \left\| \int_{-\pi}^{\pi} a^{-1} \cdot \psi(1) \cdot \frac{1}{\psi(1)} \times \right. \\
 & \quad \times \cos\left(x - \frac{\beta\pi}{2} + \frac{\beta\pi}{2} + t\right) \cdot \frac{2}{n^r} \cos\left(t + \frac{\beta\pi}{2}\right) dt \Big\|_s = \\
 & = \frac{a^{-1}}{\pi n^r} \left\| \int_{-\pi}^{\pi} \cos(x+t) \cdot \cos\left(t + \frac{\beta\pi}{2}\right) dt \right\|_s = \frac{a^{-1}}{\pi n^r} \left\| \pi \cos\left(x - \frac{\beta\pi}{2}\right) \right\|_s = \frac{C_{p,s}^{(r)}}{n^r},
 \end{aligned}$$

де $C_{p,s}$ — стала, що залежить лише від p і s .

Із отриманого співвідношення, а також лем 1 і 2 слідує теорема.

Висновки. В статті отримані точні порядкові оцінки величини $\tilde{\varepsilon}_n(L_{\beta,p}^{\psi})_s$ для $f(x) \in L_{\beta,p}^{\psi}$ в метриці простору L_s у випадку, коли наближення здійснюється регулярним лінійним методом підсумовування рядів Фур'є-методом Зігмунда.

Список використаних джерел:

1. Степанец А. И. Классификация и приближение периодических функций / А. И. Степанец. — К. : Наук. думка, 1987. — 268 с.
2. Бушев Д. Н. О приближении слабо дифференцируемых периодических функций / Д. Н. Бушев, А. И. Степанец // Укр. мат. журн. — 1990. — Вип. 42. — № 3. — С. 405–412.
3. Zygmund A. Smooth Functions / A. Zygmund // Duke Math. J. — 1945. — Vol. 12. — P. 47–76.
4. Ефимов А. В. О линейных методах суммирования рядов Фурье / А. В. Ефимов // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1960. — Вип. 24. — № 5. — С. 743–756.
5. Теляковский С. А. О приближении дифференцируемых функций линейными средними их рядов Фурье / С. А. Теляковский // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1960. — Вип. 24. — № 2. — С. 213–242.
6. Nagy B. Sur une generale procedes de summation pour les series de Fourier / B. Nagy // Hung. Acta Math. — 1948. — № 3. — P. 14–62.

APPROXIMATION OF THE INFINITELY-DIFFERENTIABLE FUNCTIONS IN AN INTEGRAL METRIC

Since every summable 2π -periodic function is expanded in the Fourier series, the most convenient way to approximate it is to use the sequences of the partial sums of this series and sequences of linear operators, that are defined by some triangular matrix Λ . This matrix defines the way of con-

structing polynomials and a particular method of summing the Fourier series. One of them is a regular method, called the Zygmund sums.

Zygmund's sums were defined by A. Zygmund in 1945. He proved some statements, that established exact order estimates of the upper bounds of the deviations of these sums on classes of r -differentiable functions for fractional r .

The research of Zygmund was continued by B. Nagy, S. A. Telyakovskiy, A. V. Efimov, A. I. Stepanets, D. N. Bushev and other.

In this paper we obtain exact order estimates for the upper bounds of deviations of Zygmund sums from infinitely-differentiable functions in the integral metric.

Let N — be a class of summable 2π -functions. If for function $f(x)$ periodic there exists a derivative (in the sense of Stepanets) and it belongs to the class N , then such functions $f(x)$ are united in a separate class $L(\psi; \beta)N$. This class is characterized by the $(\psi; \beta)$ -differential properties of the functions themselves and the conditions imposed on their derivatives.

In this article the classes $L(\psi; \beta)N$ consist of functions for which the Fourier series are converged to infinitely-differentiable functions and their $(\psi; \beta)$ -derivatives in the integral metric belong to the unit ball.

The main result of the paper is the theorem: if the given function $f(t, n, r)$ — uniformly bounded and the functions $f(x)$ belong to the class $L(\psi; \beta)N$, then for any $n \in N$ and for upper bounds of deviations of Zygmund sums from functions of the class $L(\psi; \beta)N$, the exact order estimates are valid, where the order is determined by the number — r of Zygmund sums.

From auxiliary assertions, 2 lemmas are proved and an extremal function $g(x) \in L(\psi; \beta)N$ is constructed in order to show that the order estimates are unimprovable.

Key words: *order estimates, Zygmund sums, infinitely-differentiable functions, integral metric.*

Отримано: 14.05.2018

УДК 539.3

Р. С. Мусій, д-р фіз.-мат. наук, професор,
Х. Т. Дрогомирецька, канд. фіз.-мат. наук,
Б. Й. Бандирський, канд. фіз.-мат. наук,
О. В. Веселовська, канд. фіз.-мат. наук,
О. Г. Оришин, канд. фіз.-мат. наук

Національний університет «Львівська політехніка», м. Львів

ЗВ'ЯЗАНА ДИНАМІЧНА ЗАДАЧА ТЕРМОПРУЖНОСТІ ДЛЯ ДОВГОГО ПОРОЖНИСТОГО ЦИЛІНДРА ЗА НЕСТАЦІОНАРНИХ ТЕПЛОВОЇ ТА СИЛОВОЇ ДІЙ

Сформульовано плоску осесиметричну зв'язану динамічну задачу термопружності для довгого порожнистого циліндра. Фізико-механічні характеристики матеріалу даного циліндра приймаються сталими. Для визначення термопружного стану циліндра за визначальні функції вибрано температуру і радіальну компоненту вектора переміщень. Для знаходження розв'язку взаємозв'язаної системи двох рівнянь, що описують плоску осесиметричну зв'язану динамічну задачу термопружності для циліндра, запропоновано методику побудови її наближеного розв'язку. Методика полягає у використанні апроксимації розподілів температури і радіальних переміщень за радіальною змінною кубічними поліномами. Коефіцієнти цих поліномів подаються лінійною комбінацією інтегральних за радіальною змінною характеристик визначальних функцій та функцій, що описують граничні значення визначальних функцій на внутрішній і зовнішній поверхнях циліндра. В результаті вихідна початково-крайова задача термопружності на визначальні функції зведена до задачі Коші за часовою змінною на їх інтегральні характеристики. Загальні розв'язки задачі Коші знайдено з використанням інтегрального перетворення Лапласа і отримано у вигляді згорток функцій, що описують нестационарні об'ємні джерела тепла і об'ємні сили та функцій, що відповідають загальним розв'язкам відповідних однорідних рівнянь вихідної системи взаємопов'язаних рівнянь на всьому числовому інтервалі зміни нестационарних теплових і силових дій. Записані вирази інтегральних характеристик дають змогу знайти їх вирази за конкретних характерних типів нестационарних об'ємних джерел тепла і об'ємних сил, що відповідають фізичним процесам, які впливають на термопружний стан циліндра. Зокрема такими процесами можуть бути теплові удари, лазерне випромінювання видимого та інфрачервоного діапазонів, електромагнітне випромінювання радіочастотного діапазону, електромагнітні імпульсні поля різних типів. На основі запропонованої методики

отримано також алгебраїчне рівняння шостого степеня для визначення перших двох власних частот коливань радіальних переміщень за врахування процесу термопружного розсіювання енергії у даному циліндрі.

Ключові слова: зв'язана динамічна задача термопружності, довгий порожнистий циліндр, нестационарні теплові і силові дії, апроксимація, кубічні поліноми, радіальна змінна.

Вступ. Порожністі циліндри часто використовують як елементи конструкцій сучасних приладів і пристроїв. У процесі роботи і експлуатації пристроїв порожністі циліндри зазнають нестационарних теплових і силових дій, які створюють в них взаємопов'язані поля температури і деформацій. Внаслідок цього відбувається процес термопружного розсіювання енергії, який необхідно враховувати при проектуванні циліндричних елементів конструкцій і прогнозуванні їх роботоздатності. Тому є актуальною побудова загального розв'язку зв'язаної задачі термопружності для порожнистого циліндра за однорідних нестационарних теплових і силових дій. На основі отриманого загального розв'язку можна аналізувати термомеханічну поведінку порожнистого циліндра, яким моделюють трубчаті елементи конструкцій, за конкретних типів нестационарних теплових і силових дій.

В літературі [1, с. 46–84; 2, с. 173–197] відомі розв'язки зв'язаних задач термопружності для циліндрів за дії теплового удару та за врахування скінченної швидкості поширення тепла. Ці розв'язки знайдені з допомогою інтегрального перетворення Лапласа. Обернення трансформант кінцевих розв'язків є складним, а самі розв'язки подаються виразами, що містять функціональні ряди зі спеціальними функціями. Такі розв'язки досить складні для числового аналізу і не завжди придатні для практичного використання, особливо в інженерних розрахунках.

У даній роботі з використанням апроксимації розподілів температури і переміщень по радіальній змінній кубічними поліномами [3, с. 109–121] отримано в замкнутій формі загальний розв'язок зв'язаної динамічної задачі термопружності для порожнистого циліндра на всьому часовому проміжку нестационарних теплової і силової дій.

Математична постановка задачі. Розглядається довгий порожнистий циліндр, віднесений до циліндричної системи координат (r, φ, z) , вісь Oz якої співпадає з віссю симетрії циліндра. Матеріал циліндра однорідний та ізотропний, а його фізико-механічні характеристики є сталими. Циліндр знаходиться за умов теплоізоляції його внутрішньої $r = r_0$ і зовнішньої $r = r_1$ поверхонь, які теплоізолювані і вільні від силового поверхневого навантаження.

Термонапружений стан циліндра визначається об'ємно розподіленими нестационарними джерелами тепла Q і об'ємними силами \vec{F} . Ці

два фізичні чинники зумовлюють нестационарні температурне поле T і радіальну компоненту $U_r(r, t)$ вектора переміщень $\vec{U} = \{U_r(r, t); 0; 0\}$ та відповідні компоненти σ_{jj} ($j = r, \varphi, z$) тензора напружень $\hat{\sigma}$.

За вказаних умов температуру $T(r, t)$ і радіальну компоненту $U_r(r, t)$ вектора переміщень визначаємо із системи рівнянь плоскої осесиметричної зв'язаної динамічної задачі термопружності для циліндра

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} - \frac{1 + \varepsilon_*}{\kappa} \frac{\partial T}{\partial t} - \varepsilon_* \frac{1 + 2\nu}{\kappa \alpha E} \cdot \frac{\partial^2 U_r}{\partial t \partial r} = -\frac{1}{\lambda} Q, \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 U_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_r}{\partial r} - \frac{U_r}{r^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 U_r}{\partial t^2} = \alpha \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \frac{\partial T}{\partial r} - \frac{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}{E(1 - \nu)} F_r.$$

Тут κ , λ , ν , α — коефіцієнти температуро- і теплопровідності, Пуассона, лінійного теплового розширення, E — модуль Юнга, ρ — густина матеріалу циліндра; $c = \sqrt{E(1 - \nu) / (\rho(1 + \nu)(1 - 2\nu))}$ — швидкість пружної хвилі розширення; ε_* — параметр, що характеризує зв'язаність полів деформації та температури.

Систему (1) розв'язуємо за граничних умов

$$\frac{\partial T(r_0, t)}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial T(r_1, t)}{\partial r} = 0, \quad (2)$$

теплоізоляції поверхонь $r = r_0$ і $r = r_1$ та умов

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_r(r_0, t)}{\partial r} + \frac{\nu}{1 - \nu} \frac{U_r(r_0, t)}{r_0} &= \alpha \frac{1 + \nu}{1 - \nu} T(r_0, t), \\ \frac{\partial U_r(r_1, t)}{\partial r} + \frac{\nu}{1 - \nu} \frac{U_r(r_1, t)}{r_1} &= \alpha \frac{1 + \nu}{1 - \nu} T(r_1, t) \end{aligned} \quad (3)$$

відсутності силового навантаження на цих поверхнях, а також нульових початкових умов

$$T(r, 0) = 0, \quad U_r(r, 0) = 0, \quad \frac{\partial U_r(r, 0)}{\partial r} = 0. \quad (4)$$

За знайденими із системи рівнянь і співвідношень (1)–(4) функціями $T(r, t)$, $U_r(r, t)$ радіальну σ_{rr} , колову $\sigma_{\varphi\varphi}$ та осьову σ_{zz} компоненти тензора напружень знаходимо за формулами

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{2E}{1 - 2\nu} \left[(1 - \nu) \frac{\partial U_r}{\partial r} + \nu \frac{U_r}{r} - \alpha(1 + \nu)T \right], \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= \frac{2E_n}{1 - 2\nu} \left[(1 - \nu) \frac{U_r}{r} + \nu \frac{\partial U_r}{\partial r} - \alpha(1 + \nu)T \right], \end{aligned}$$

$$\sigma_{zz} = \nu(\sigma_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi}) - \alpha E(1 + \nu)T. \quad (5)$$

Методика розв'язування задачі. Для побудови розв'язків сформульованої зв'язаної задачі термопружності (1)–(4) використовуємо апроксимацію визначальних функцій $\Phi(r, t) = \{T(r, t), U_r(r, t)\}$ за радіальною змінною r кубічними поліномами [3, с. 109–121]:

$$T(r, t) = \sum_{i=0}^3 b_i(t)r^i, \quad U_r(r, t) = \sum_{i=0}^3 c_i(t)r^i. \quad (6)$$

Коефіцієнти $b_i(t)$, $c_i(t)$ апроксимаційних поліномів (6) подаємо у вигляді лінійних комбінацій

$$b_i(t) = b_{i1}T_1(t) + b_{i2}T_2(t), \quad (7)$$

$c_i(t) = c_{i1}(t)U_{r1}(t) + c_{i2}(t)U_{r2}(t) + c_{i3}(t)T(r_0, t) + c_{i4}(t)T(r_1, t)$ (8) та інтегральних характеристик:

$$T_s(t) = \int_{r_0}^{r_1} T(r, t)r^{s+1}dr, \quad U_{rs}(t) = \int_{r_0}^{r_1} U_r(r, t)r^{s+1}dr, \quad s = 1, 2, \quad (9)$$

температури $T(r, t)$ і радіальної компоненти $U_r(r, t)$ вектора \vec{U} та функцій $T(r_0, t)$ і $T(r_1, t)$, що описують граничні значення температури на поверхнях $r = r_0$ і $r = r_1$ циліндра.

Підставляючи подання (6) з врахуванням (7) і (8) у вихідну систему рівнянь (1) після перетворень отримуємо її вигляд у наближенні визначальних функцій $T(r, t)$ і $U_r(r, t)$ кубічними поліномами (6).

$$\begin{aligned} & T_1(t) \sum_{i=2}^3 i^2 r^{i-2} b_{i1} + T_2(t) \sum_{i=2}^3 b_{i2} i^2 r^{i-2} - \frac{dT_1(t)}{dt} \left\{ \beta_1 \sum_{i=0}^3 b_{i1} r^i + \right. \\ & \left. + \beta_2 \sum_{m=1}^3 m r^{m-1} \left[c_{m3} \sum_{i=0}^3 b_{i1} r_0^i + c_{m4} \sum_{i=0}^3 b_{i1} r_1^i + \right] \right\} - \\ & - \frac{dT_2(t)}{dt} \left\{ \beta_1 \sum_{i=0}^3 b_{i2} r^i + \beta_2 \sum_{m=1}^3 m r^{m-1} \left[c_{m3} \sum_{i=0}^3 b_{i2} r_0^i + c_{m4} \sum_{i=0}^3 b_{i2} r_1^i \right] \right\} - \\ & - \frac{du_{r1}}{dt} \beta_2 \sum_{m=1}^3 c_{m1} m r^{m-1} - \frac{du_{r2}}{dt} \beta_2 \sum_{m=1}^3 c_{m2} m r^{m-1} = -\frac{1}{\lambda} Q, \\ & T_1(t) \left\{ \sum_{m=2}^3 (m^2 - 1) r^{m-2} \left[c_{m3} \sum_{i=0}^3 b_{i1} r_0^i + c_{m4} \sum_{i=0}^3 b_{i1} r_1^i \right] - \beta_3 \sum_{i=1}^3 i r^{i-1} b_{i1} \right\} + \\ & + T_2(t) \left\{ \sum_{m=2}^3 (m^2 - 1) r^{m-2} \left[c_{m3} \sum_{i=0}^3 b_{i2} r_0^i + c_{m4} \sum_{i=0}^3 b_{i2} r_1^i \right] - \beta_3 \sum_{i=1}^3 i r^{i-1} b_{i2} \right\} - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{c^2} \frac{d^2 T_1(t)}{dt^2} \sum_{m=0}^3 r^m \left[c_{m3} \sum_{i=0}^3 b_{i1} r_0^i + c_{m4} \sum_{i=0}^3 b_{i1} r_1^i \right] - \frac{1}{c^2} \frac{d^2 T_2(t)}{dt^2} \times \\
 & \times \sum_{m=0}^3 r^m \left[c_{m3} \sum_{i=0}^3 b_{i2} r_0^i + c_{m4} \sum_{i=0}^3 b_{i2} r_1^i \right] + u_{r1}(t) \sum_{m=2}^3 (m^2 - 1) c_{m1} r^{m-2} + \\
 & + u_{r2}(t) \sum_{m=2}^3 (m^2 - 1) c_{m2} r^{m-2} - \frac{1}{c^2} \frac{d^2 u_{r1}}{dt^2} \sum_{m=0}^3 c_{m1} m r^m - \\
 & - \frac{1}{c^2} \frac{d^2 u_{r2}}{dt^2} \sum_{m=0}^3 c_{m2} m r^m = -\beta_4 F_r(r, t) \quad (10)
 \end{aligned}$$

$$\text{Тут: } \beta_1 = \frac{1 + \varepsilon_*}{\kappa}, \quad \beta_2 = \varepsilon_* \frac{1 + 2\nu}{\kappa \alpha E}, \quad \beta_3 = \alpha \frac{1 + \nu}{1 - \nu}, \quad \beta_4 = \frac{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}{(1 - \nu)E}.$$

Інтегруємо систему рівнянь (10) відповідно до подань (9). Після перетворень для визначення інтегральних характеристик $T_s(t)$ і $U_{rs}(t)$ ($s = 1, 2$) температури $T(r, t)$ та радіальних переміщень $U_r(r, t)$ отримуємо наступну систему чотирьох взаємозв'язаних рівнянь.

$$\begin{aligned}
 & d_1 T_1 + d_2 T_2 - d_3 \frac{dT_1}{dt} - d_4 \frac{dT_2}{dt} - d_5 \frac{du_{r1}}{dt} - d_6 \frac{du_{r2}}{dt} = -Q_1(t) \\
 & d_7 T_1 + d_8 T_2 - d_9 \frac{dT_1}{dt} - d_{10} \frac{dT_2}{dt} - d_{11} \frac{du_{r1}}{dt} - d_{12} \frac{du_{r2}}{dt} = -Q_2(t) \\
 & d_{13} T_1 + d_{14} T_2 - \frac{1}{c^2} d_{15} \frac{d^2 T_1}{dt^2} - \frac{1}{c^2} d_{16} \frac{d^2 T_2}{dt^2} + \\
 & + d_{17} u_{r1} + d_{18} u_{r2} - \frac{1}{c^2} d_{19} \frac{d^2 u_{r1}}{dt^2} - \frac{1}{c^2} d_{20} \frac{d^2 u_{r2}}{dt^2} = -\beta_4 \int_{r_0}^{r_1} F_r(r, t) r^2 dr \\
 & d_{21} T_1 + d_{22} T_2 - \frac{1}{c^2} d_{23} \frac{d^2 T_1}{dt^2} - \frac{1}{c^2} d_{24} \frac{d^2 T_2}{dt^2} + d_{25} u_{r1} + \\
 & + d_{26} u_{r2} - \frac{1}{c^2} d_{27} \frac{d^2 u_{r1}}{dt^2} - \frac{1}{c^2} d_{28} \frac{d^2 u_{r2}}{dt^2} = -\beta_4 \int_{r_0}^{r_1} F_r(r, t) r^3 dr. \quad (11)
 \end{aligned}$$

Тут коефіцієнти $d_1 \div d_{28}$ мають вигляд

$$\begin{aligned}
 & d_1 = \sum_{i=2}^3 \frac{i^2}{i+1} (r_1^{i+1} - r_0^{i+1}) b_{i1}, \quad d_2 = \sum_{i=2}^3 \frac{i^2}{i+1} (r_1^{i+1} - r_0^{i+1}) b_{i2} \\
 & d_3 = \beta_1 \sum_{i=0}^3 b_{i1} \frac{r_1^{i+3} - r_0^{i+3}}{i+3} + \beta_2 \sum_{m=1}^3 \frac{m}{m+2} (r_1^{m+2} - r_0^{m+2}) \left[c_{m3} \sum_{i=0}^3 b_{i1} r_0^i + c_{m4} \sum_{i=0}^3 b_{i1} r_1^i \right],
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 d_4 &= \beta_1 \sum_{i=0}^3 b_{i2} \frac{r_1^{i+3} - r_0^{i+3}}{i+3} + \beta_2 \sum_{m=1}^3 \frac{m}{m+2} (r_1^{m+2} - r_0^{m+2}) \left[c_{m3} \sum_{i=0}^3 b_{i2} r_0^i + c_{m4} \sum_{i=0}^3 b_{i2} r_1^i \right], \\
 d_5 &= \beta_2 \sum_{m=1}^3 c_{m1} \frac{m}{m+2} (r_1^{m+2} - r_0^{m+2}), \quad d_6 = \beta_2 \sum_{m=1}^3 c_{m2} \frac{m}{m+2} (r_1^{m+2} - r_0^{m+2}) \\
 d_7 &= \sum_{i=2}^3 \frac{i^2}{i+2} (r_1^{i+2} - r_0^{i+2}) b_{i1}, \quad d_8 = \sum_{i=2}^3 \frac{i^2}{i+2} (r_1^{i+2} - r_0^{i+2}) b_{i2} \\
 d_9 &= \beta_1 \sum_{i=0}^3 b_{i1} \frac{r_1^{i+4} - r_0^{i+4}}{i+4} + \beta_2 \sum_{m=1}^3 \frac{m}{m+3} (r_1^{m+3} - r_0^{m+3}) \left[c_{m3} \sum_{i=0}^3 b_{i1} r_0^i + c_{m4} \sum_{i=0}^3 b_{i1} r_1^i \right], \\
 d_{10} &= \beta_1 \sum_{i=0}^3 b_{i2} \frac{r_1^{i+4} - r_0^{i+4}}{i+4} + \beta_2 \sum_{m=1}^3 \frac{m}{m+3} (r_1^{m+3} - r_0^{m+3}) \left[c_{m3} \sum_{i=0}^3 b_{i2} r_0^i + c_{m4} \sum_{i=0}^3 b_{i2} r_1^i \right], \\
 d_{11} &= \beta_2 \sum_{m=1}^3 c_{m1} \frac{m}{m+3} (r_1^{m+3} - r_0^{m+3}), \\
 d_{12} &= \beta_2 \sum_{m=1}^3 c_{m2} \frac{m}{m+3} (r_1^{m+3} - r_0^{m+3}), \\
 d_{13} &= \sum_{m=2}^3 \frac{m^2 - 1}{m+1} (r_1^{m+1} - r_0^{m+1}) \left[c_{m3} \sum_{i=0}^3 b_{i1} r_0^i + c_{m4} \sum_{i=0}^3 b_{i1} r_1^i \right] - \\
 &\quad - \beta_3 \sum_{i=1}^3 \frac{i}{i+2} (r_1^{i+2} - r_0^{i+2}) b_{i1}, \\
 d_{14} &= \sum_{m=2}^3 (m-1) (r_1^{m+1} - r_0^{m+1}) \left[c_{m3} \sum_{i=0}^3 b_{i2} r_0^i + c_{m4} \sum_{i=0}^3 b_{i2} r_1^i + \right] - \\
 &\quad - \beta_3 \sum_{i=1}^3 \frac{i}{i+2} (r_1^{i+2} - r_0^{i+2}) b_{i2} \\
 d_{15} &= \sum_{m=0}^3 \frac{r_1^{m+3} - r_0^{m+3}}{m+3} \left[c_{m3} \sum_{i=0}^3 b_{i1} r_0^i + c_{m4} \sum_{i=0}^3 b_{i1} r_1^i \right] \\
 d_{16} &= \sum_{m=0}^3 \frac{r_1^{m+3} - r_0^{m+3}}{m+3} \left[c_{m3} \sum_{i=0}^3 b_{i2} r_0^i + c_{m4} \sum_{i=0}^3 b_{i2} r_1^i \right] \\
 d_{17} &= \sum_{m=2}^3 (m-1) c_{m1} (r_1^{m+1} - r_0^{m+1}), \quad d_{18} = \sum_{m=2}^3 (m-1) c_{m2} (r_1^{m+1} - r_0^{m+1}), \\
 d_{19} &= \sum_{m=0}^3 c_{m1} \frac{r_1^{m+3} - r_0^{m+3}}{m+3}, \quad d_{20} = \sum_{m=0}^3 c_{m2} \frac{r_1^{m+3} - r_0^{m+3}}{m+3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 d_{21} &= \sum_{m=2}^3 \frac{m^2-1}{m+2} (r_1^{m+2} - r_0^{m+2}) \left[c_{m3} \sum_{i=0}^3 b_{i1} r_0^i + c_{m4} \sum_{i=0}^3 b_{i1} r_1^i \right] - \\
 &\quad - \beta_3 \sum_{i=1}^3 \frac{i}{i+3} (r_1^{i+3} - r_0^{i+3}) b_{i1}, \\
 d_{22} &= \sum_{m=2}^3 \frac{m^2-1}{m+2} (r_1^{m+2} - r_0^{m+2}) \left[c_{m3} \sum_{i=0}^3 b_{i2} r_0^i + c_{m4} \sum_{i=0}^3 b_{i2} r_1^i \right] - \\
 &\quad - \beta_3 \sum_{i=1}^3 \frac{i}{i+3} (r_1^{i+3} - r_0^{i+3}) b_{i2}, \\
 d_{23} &= \sum_{m=0}^3 \frac{r_1^{m+4} - r_0^{m+4}}{m+4} \left[c_{m3} \sum_{i=0}^3 b_{i1} r_0^i + c_{m4} \sum_{i=0}^3 b_{i1} r_1^i \right], \\
 d_{24} &= \sum_{m=0}^3 \frac{r_1^{m+4} - r_0^{m+4}}{m+4} \left[c_{m3} \sum_{i=0}^3 b_{i2} r_0^i + c_{m4} \sum_{i=0}^3 b_{i2} r_1^i \right], \\
 d_{25} &= \sum_{m=2}^3 \frac{m^2-1}{m+2} c_{m1} (r_1^{m+2} - r_0^{m+2}), \quad d_{26} = \sum_{m=2}^3 \frac{m^2-1}{m+2} c_{m2} (r_1^{m+2} - r_0^{m+2}), \\
 d_{27} &= d_{19}, \quad d_{28} = d_{20}.
 \end{aligned}$$

Для знаходження розв'язку системи рівнянь (11) застосуємо інтегральне перетворення Лапласа за часовою змінною t з використанням нульових початкових умов на функції $T_s(t)$ і $U_{rs}(t)$ ($s = 1, 2$) (отриманих інтегруванням згідно (9) початкових умов (4)). В трансформантах Лапласа $\tilde{T}(p)$ і $\tilde{U}_{rs}(p)$ будемо мати систему чотирьох алгебраїчних рівнянь

$$\begin{aligned}
 (d_1 - pd_3) \tilde{T}_1 + (d_2 - pd_4) \tilde{T}_2 - pd_5 \tilde{u}_{r1} - pd_6 \tilde{u}_{r2} &= -\tilde{Q}_1, \\
 (d_7 - pd_9) \tilde{T}_1 + (d_8 - pd_{10}) \tilde{T}_2 - pd_{11} \tilde{u}_{r1} - pd_{12} \tilde{u}_{r2} &= -\tilde{Q}_2, \\
 \left(d_{13} - d_{15} \frac{1}{c^2} p^2 \right) \tilde{T}_1 + \left(d_{14} - d_{16} \frac{1}{c^2} p^2 \right) \tilde{T}_2 + \left(d_{17} - d_{19} \frac{1}{c^2} p^2 \right) \tilde{u}_{r1} + \\
 + \left(d_{18} - d_{20} \frac{1}{c^2} p^2 \right) \tilde{u}_{r2} &= -\beta_4 \int_{r_0}^{r_1} \tilde{F}_r(r, p) r^2 dr, \\
 \left(d_{21} - d_{23} \frac{1}{c^2} p^2 \right) \tilde{T}_1 + \left(d_{22} - d_{24} \frac{1}{c^2} p^2 \right) \tilde{T}_2 + \left(d_{25} - d_{27} \frac{1}{c^2} p^2 \right) \tilde{u}_{r1} + \\
 \left(d_{26} - d_{28} \frac{1}{c^2} p^2 \right) \tilde{u}_{r2} &= -\beta_4 \int_{r_0}^{r_1} \tilde{F}_r(r, t) r^3 dr. \quad (12)
 \end{aligned}$$

Систему рівнянь (12) розв'язуємо методом Крамера. За знайденими трансформантами Лапласа $\tilde{T}(p)$ і $\tilde{U}_{rs}(p)$, застосовуючи другу

теорему розкладу і теорему про згортку функцій отримаємо оригінали функцій $T_s(t)$ і $U_{rs}(t)$ ($s = 1, 2$) у вигляді

$$T_1(t) = \sum_{k=1}^6 \int_0^t [-Q_1(\tau)A_1(p_k) + Q_2(\tau)A_2(p_k) - \beta_4 F_{r1}(\tau)A_3(p_k) + \beta_4 F_{r2}(\tau)A_4(p_k)] \frac{e^{p_k(t-\tau)}}{\Delta'(p_k)} d\tau, \quad (13)$$

$$T_2(t) = \sum_{n=1}^6 \int_0^t [Q_1(\tau)A_5(p_k) - Q_2(\tau)A_6(p_k) + \beta_4 F_{r1}(\tau)A_7(p_k) - \beta_4 F_{r2}(\tau)A_8(p_k)] \frac{e^{p_k(t-\tau)}}{\Delta'(p_k)} d\tau, \quad (14)$$

$$u_{r1}(t) = \sum_{n=1}^6 \int_0^t [-Q_1(\tau)A_9(p_k) + Q_2(\tau)A_{10}(p_k) - \beta_4 F_{r1}(\tau)A_{11}(p_k) + \beta_4 F_{r2}(\tau)A_{12}(p_k)] \frac{e^{p_k(t-\tau)}}{\Delta'(p_k)} d\tau, \quad (15)$$

$$u_{r2}(t) = \sum_{n=1}^6 \int_0^t [Q_1(\tau)A_{13}(p_k) - Q_2(\tau)A_{14}(p_k) + \beta_4 F_{r1}(\tau)A_{15}(p_k) - \beta_4 F_{r2}(\tau)A_{16}(p_k)] \frac{e^{p_k(t-\tau)}}{\Delta'(p_k)} d\tau. \quad (16)$$

Тут вирази $A_1(p) \div A_{16}(p)$ будуть

$$A_1(p) = \begin{vmatrix} \alpha_{22} & -\alpha_{23} & -\alpha_{24} \\ \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} \end{vmatrix}, \quad A_2(p) = \begin{vmatrix} \alpha_{12} & -\alpha_{13} & -\alpha_{14} \\ \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} \end{vmatrix},$$

$$A_3(p) = \begin{vmatrix} \alpha_{12} & -\alpha_{13} & -\alpha_{14} \\ \alpha_{22} & -\alpha_{23} & -\alpha_{24} \\ \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} \end{vmatrix}, \quad A_4(p) = \begin{vmatrix} \alpha_{12} & -\alpha_{13} & -\alpha_{14} \\ \alpha_{22} & -\alpha_{23} & -\alpha_{24} \\ \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \end{vmatrix},$$

$$A_5(p) = \begin{vmatrix} \alpha_{21} & -\alpha_{23} & -\alpha_{24} \\ \alpha_{31} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ \alpha_{41} & \alpha_{43} & \alpha_{44} \end{vmatrix}, \quad A_6(p) = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & -\alpha_{13} & -\alpha_{14} \\ \alpha_{31} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ \alpha_{41} & \alpha_{43} & \alpha_{44} \end{vmatrix},$$

$$A_7(p) = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & -\alpha_{13} & -\alpha_{14} \\ \alpha_{21} & -\alpha_{23} & -\alpha_{24} \\ \alpha_{41} & \alpha_{43} & \alpha_{44} \end{vmatrix}, \quad A_8(p) = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & -\alpha_{13} & -\alpha_{14} \\ \alpha_{21} & -\alpha_{23} & -\alpha_{24} \\ \alpha_{31} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \end{vmatrix},$$

$$\begin{aligned}
 A_9(p) &= \begin{vmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{22} & -\alpha_{24} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{34} \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{44} \end{vmatrix}, & A_{10}(p) &= \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & -\alpha_{14} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{34} \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{44} \end{vmatrix}, \\
 A_{11}(p) &= \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & -\alpha_{14} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & -\alpha_{24} \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{44} \end{vmatrix}, & A_{12}(p) &= \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & -\alpha_{14} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & -\alpha_{24} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{34} \end{vmatrix}, \\
 A_{13}(p) &= \begin{vmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{22} & -\alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} \end{vmatrix}, & A_{14}(p) &= \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & -\alpha_{13} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} \end{vmatrix}, \\
 A_{15}(p) &= \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & -\alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & -\alpha_{23} \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} \end{vmatrix}, & A_{16}(p) &= \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & -\alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & -\alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix},
 \end{aligned}$$

де

$$\alpha_{11} = d_1 - pd_3, \alpha_{12} = d_2 - pd_4, \alpha_{13} = pd_5, \alpha_{14} = pd_6, \alpha_{21} = d_7 - pd_9,$$

$$\alpha_{22} = d_8 - pd_{10}, \alpha_{23} = pd_{11}, \alpha_{24} = pd_{12}, \alpha_{31} = d_{13} - \frac{p^2}{c^2} d_{15},$$

$$\alpha_{32} = d_{14} - \frac{p^2}{c^2} d_{16}, \alpha_{33} = d_{17} - \frac{p^2}{c^2} d_{19}, \alpha_{34} = d_{18} - \frac{p^2}{c^2} d_{20},$$

$$\alpha_{41} = d_{21} - \frac{p^2}{c^2} d_{23}, \alpha_{42} = d_{22} - \frac{p^2}{c^2} d_{24}, \alpha_{43} = d_{25} - \frac{p^2}{c^2} d_{27},$$

$$\alpha_{44} = d_{26} - \frac{p^2}{c^2} d_{28}$$

p_k — корені характеристичного рівняння 6-го степеня відносно параметра p перетворення Лапласа:

$$\begin{aligned}
 \Delta(p) &= \frac{p^6}{c^4} [(d_3 + d_{10})(d_{19}d_{28} - d_{20}d_{27}) + d_3d_{16}(d_{27}d_{12} - d_{11}d_{23}) + \\
 &\quad + d_3d_{24}(d_{12}d_{19} - d_{11}d_{24}) - d_4d_{19}(d_9d_{28} - d_{12}(d_{21} - d_{23})) - \\
 &\quad - d_4d_{20}(d_{11}d_{23} - d_9d_{27}) + d_9d_{16}(d_9d_{16} - d_{13}d_{10}) + d_5d_{20}(d_{10}d_{23} - d_9d_{24}) - \\
 &\quad - c^2d_5d_{12}(d_{16}d_{23} - d_{13}d_{24}) + d_6d_{11}(d_{16}d_{25} - d_{15}d_{24}) - \\
 &\quad d_6d_9d_{16}d_{27} + d_6d_{10}d_{15}d_{22}] - \frac{p^5}{c^4} [(d_3 + d_{10})(d_{19}d_{28} - d_{20}d_{27}) + \\
 &\quad + d_1d_{16}(d_{27}d_{12} - d_{11}d_{28}) - d_1d_{21}(d_{11}d_{24} - d_{12}d_{19}) - d_4d_{19}d_7d_{28} +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +d_2d_{19}(d_9d_{28}-d_{12}(d_{21}-d_{23}))-d_2d_{20}(d_{11}d_{23}-d_3d_{27})-d_4d_{20}d_7d_{27}- \\
& \quad -d_2d_{15}(d_{11}d_{28}-d_{12}d_{27})+d_9d_{16}(d_7d_{16}-d_{15}d_8)+ \\
& +d_5d_{20}(d_8d_{25}-d_7d_{24})-c^2d_6d_{11}(d_{16}d_{21}+d_{14}d_{13}-d_{13}d_{24}-d_{15}d_{24})]- \\
& \quad -\frac{p^4}{c^2}\left[(d_{19}+d_{28}-d_{20}-d_{27})\left(d_3+d_{10}+\frac{1}{c^2}d_1d_8(d_{19}d_{28}-d_{20}d_{27})+\right.\right. \\
& \quad \left.+d_3d_{14}(d_{12}d_{27}-d_{11}d_{28})+d_{12}d_{25}d_3d_{16})-d_3d_{22}(d_{11}d_{24}-d_{12}d_{19})- \right. \\
& \quad \left.-d_3d_{24}(d_{11}d_{22}-d_{12}d_7)-d_4d_{17}(d_9d_{28}-d_{12}(d_{21}-d_{23}))-d_4d_{19}d_9d_{26}\right]+ \\
& \quad +\frac{1}{c^2}(d_2d_{19}d_7d_{28}+d_2d_{20}d_7d_{17})-d_1d_{13}(d_{11}d_{28}-d_{12}d_{27})- \\
& -d_1d_5(d_1d_{26}-d_{21}d_{25})+d_9d_{16}(d_9d_{14}-d_{13}d_{10})+d_5d_{26}(d_9d_{15}-d_5d_{10})+ \\
& \quad +d_5d_{20}(d_9d_{22}-d_{10}d_{21})-d_5d_{18}(d_{10}d_{23}-d_9d_{24})+ \\
& \quad +d_9d_{16}(d_9d_{14}-d_{13}d_{10})+(d_{16}d_{21}+d_{14}d_{23}-d_5d_{22}-d_{13}d_{23})d_5d_{12}+ \\
& \quad +d_9d_{16}(d_9d_{14}-d_{13}d_{10})+d_5d_{26}(d_9d_{15}-d_{10}d_5)+ \\
& \quad +d_5d_{20}(d_9d_{22}-d_{10}d_{21})-d_5d_{18}(d_{10}d_{23}-d_9d_{24})+(d_{16}d_{21}+d_{14}d_{23}- \\
& -d_5d_{12}-d_{13}d_{23})d_5d_{13}-d_6d_9(d_{16}d_{25}+d_{14}d_{27})-d_6d_{10}(d_{19}d_{21}+d_{17}d_{23}- \\
& \quad -d_{13}d_{27}-d_{15}d_{25})+d_6d_{11}(d_{16}d_{21}+d_{14}d_{13}-d_{13}d_{24}-d_{15}d_{24})]- \\
& \quad -\frac{p^3}{c^2}\left[(d_3+d_{10})(d_{19}+d_{28}-d_{20}-d_{27})-d_1d_{14}(d_{12}d_{27}-d_{11}d_{28})- \right. \\
& \quad \left.-d_1d_{12}d_{16}d_{25}+(d_{11}d_{24}-d_{12}d_{19})d_3d_{22}+ \right. \\
& \quad \left.+ (d_{11}d_{22}-d_{12}d_{19})d_1d_{22}+d_1d_7d_{17}d_{25}-d_2d_9d_{19}d_{26}+ \right. \\
& \quad \left.+d_1d_{24}(d_{11}d_{22}-d_{12}d_{17})+d_4d_7d_{20}d_{25}+d_2d_{20}(d_{11}d_{23}-d_9d_{25})+ \right. \\
& \quad \left.+d_4d_{20}d_7d_{27}+d_2d_{18}(d_{11}d_{23}-d_9d_{25})+d_2d_{15}(d_{11}d_{26}-d_{21}d_{25})+ \right. \\
& \quad \left.+d_2d_{13}(d_{11}d_{28}-d_{12}d_{27})-d_9d_{16}(d_7d_{14}-d_8d_{13})- \right. \\
& \quad \left.-d_5d_{26}(d_7d_{16}-d_8d_{15})-d_5d_{20}(d_8d_{21}-d_{22}d_7)-d_5d_{18}(d_8d_{23}-d_{24}d_7)- \right. \\
& \quad \left.-d_6d_8(d_{19}d_{21}+d_{17}d_{23}-d_{13}d_{27}-d_{15}d_{23})-d_6d_9(d_{16}d_{25}+d_{14}d_{27})\right]- \\
& \quad -p^2\left[\frac{1}{c^2}d_1d_8(d_{19}+d_{28}-d_{20}-d_{27})-(d_3+d_{10})(d_{17}d_{26}-d_{18}d_{25})- \right. \\
& \quad \left.-d_3d_{11}d_{12}d_{27}+d_3d_{22}(d_{11}d_{22}-d_{12}d_{17})+\right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{c^2} (d_2 d_7 d_{19} d_{26} - d_2 d_7 d_{17} d_{25}) + d_4 d_9 d_{17} d_{26} - \\
 & - \frac{1}{c^2} (d_2 d_7 d_{18} d_{27} - d_2 d_7 d_{20} d_{25}) + d_4 d_{18} (d_{11} d_{21} + d_9 d_{25}) + \\
 & + d_4 d_{13} (d_1 d_{26} - d_{21} d_{25}) - d_5 d_{26} (d_9 d_{14} - d_{13} d_{10}) + \\
 & + d_5 d_{18} (d_9 d_{22} - d_{10} d_{21}) + d_5 d_{12} (d_{14} d_{21} - d_{13} d_{22}) + d_6 d_9 d_{25} d_{14} + \\
 & + d_{14} d_{21} - d_{13} d_{22}] - p[(d_3 - d_{10})(d_{17} d_{24} - d_{18} d_{25}) + d_6 d_{10} (d_{17} d_{21} - d_{13} d_{25}) + \\
 & + d_1 d_{14} d_{12} d_{25} - d_1 d_{22} (d_{11} d_{22} - d_{12} d_{17}) - d_4 d_7 d_{17} d_{26} - d_2 d_9 d_{17} d_{26} - \\
 & - d_1 d_7 d_{18} d_{25} - d_2 d_{18} (d_{11} d_{21} - d_9 d_{25}) + d_2 d_{13} (d_1 d_{26} - d_{21} d_{23}) + \\
 & + d_5 d_{26} (d_7 d_{14} - d_8 d_{13}) + d_5 d_{18} (d_8 d_{21} - d_{22} d_7) - \\
 & - d_6 d_7 d_{14} d_{25} - d_6 d_8 (d_{17} d_{21} - d_{13} d_{25})] + d_1 d_8 (d_{17} d_{26} - d_{18} d_{25}) - \\
 & - d_2 d_7 (d_{17} d_{26} + d_{18} d_{25}). \quad (17)
 \end{aligned}$$

Зауважимо, що дві пари коренів рівняння (17) є комплексно-спряженими з від'ємними дійсними частинами, а два корені – дійсні від'ємні. Уявні частини комплексно-спряжених коренів відповідають власним частотам радіальних коливань розглядуваного циліндра у випадку зв'язаних полів температури і переміщень.

Отримані вирази (13)–(16) функцій $T_s(t)$ і $U_{rs}(t)$ ($s=1,2$) підставляємо у подання (6)–(8) та у формули (5) і записуємо таким чином загальний розв'язок зв'язаної задачі термопружності (1)–(4) для розглядуваного порожнистого циліндра за однорідної теплової і силової дій.

Висновок. Знайдений розв'язок дає змогу проаналізувати термомеханічну поведінку довгого порожнистого циліндра, зумовлену заданими нестационарними об'ємними джерелами тепла Q і об'ємними силами \bar{F} з урахуванням процесу термопружного розсіювання енергії. Цей розв'язок є теоретичною основою для комп'ютерного аналізу термонапруженого стану порожнистого циліндра за нестационарних теплових і силових дій, в тому числі зумовлених дією зовнішнього нестационарного електромагнітного поля [4, с. 16–35].

Список використаних джерел:

1. Грибанов В. Ф. Связанные и динамические задачи термоупругости / В. Ф. Грибанов, Н. Г. Паничкин. — М. : Машиностроение, 1984. — 184 с.
2. Подстригач Я. С. Обобщенная термомеханика / Я. С. Подстригач, Ю. Н. Коляно. — К. : Наукова думка, 1976. — 310 с.
3. Мусій Р. С. Динамічні задачі термомеханіки електропровідних тіл канонічної форми / Р. С. Мусій. — Львів : РАСТР-7, 2010. — 211 с.

4. Термоупругость электропроводных тел / Я. С. Подстригач, Я. И. Бурак, А. Р. Гачкевич, Л. В. Чернявская. — К. : Наук. думка, 1977. — 247 с.

CONNECTED DYNAMIC PROBLEM OF THERMOELASTICITY FOR A LONG HOLLOW CYLINDER UNDER NON-STATIONARY HEAT AND POWER ACTIONS

A planar axisymmetric connected dynamic problem of thermoelasticity for a long hollow cylinder is formulated. Constant physical and mechanical characteristics of the material of the cylinder are accepted. To determine the thermoelastic state of the cylinder, the temperature and the radial component of the displacement vector are chosen as determining functions. To obtain the solution of the interconnected system of two equations describing a planar axisymmetric connected dynamic problem of thermoelasticity for a cylinder, a method for constructing its approximate solution is proposed. The method is to use the approximation of temperature distributions and radial displacements in radial variable by cubic polynomials. The coefficients of these polynomials are given by a linear combination of integral in radial variables characteristics of the determining functions and functions that describe the boundary values of the determining functions on the inner and outer surfaces of the cylinder. As a result, the initial initial-boundary value problem of thermoelasticity for the determining functions is reduced to the Cauchy problem in a time variable on their integral characteristics. General solutions of the Cauchy problem are obtained using the integral Laplace transform and got as a convolution of functions describing non-stationary volumetric heat sources and forces, and functions corresponding to the general solutions of the homogeneous equations of the initial system of interconnected equations on the whole numerical interval of non-stationary thermal and force actions changes. The expressions of the integral characteristics give an opportunity to obtain their expressions for specific characteristic types of non-stationary volumetric heat sources and forces corresponding to the physical processes that affect the thermoelastic state of the cylinder. Specifically, such processes may include thermal shock, laser radiation of visible and infrared frequencies, electromagnetic radiation of the radio frequency band, and various types of electromagnetic pulsed fields. On the basis of the proposed methodology, an algebraic equation of the sixth degree was also obtained for the determination of the first two natural frequencies of oscillations of radial displacements taking into account the process of thermoelastic energy dissipation in this cylinder.

Keywords: *connected dynamic problem of thermoelasticity, long hollow cylinder, non-stationary heat and force actions, approximation, cubic polynomials, radial variable.*

Отримано: 30.05.2018

УДК 517.912

О. М. Омелян, канд. фіз.-мат. наукПолтавський національний технічний університет
імені Юрія Кондратюка, м. Полтава**НЕЛОКАЛЬНІ АНЗАЦИ ТА РЕДУКЦІЯ СИСТЕМИ НЕЛІНІЙНИХ
РІВНЯНЬ КОНВЕКЦІЇ-ДИFUЗІЇ З ХЕМОТАКСИСНОЮ
ДИFUЗИВНОЮ МАТРИЦЕЮ**

Сучасні наукові дослідження в самих різноманітних галузях науки неможливі без побудови математичних моделей фізичних, хімічних, біологічних та ін. процесів та явищ, що вивчаються. Одним з видів математичних моделей є диференціальні рівняння та їх системи. Серед диференціальних рівнянь для опису процесів проходження рідини з домішками через багатшарові фільтри, процесів забруднення атмосферного повітря вихлопними газами використовуються системи рівнянь конвекції-дифузії. До цього часу актуальною залишається розробка нових методів знаходження точних розв'язків диференціальних рівнянь з частинними похідними. Одним з таких методів є метод С. Лі. Дана робота присвячена пошуку засобів узагальнення методу С. Лі для знаходження нових класів точних розв'язків диференціальних рівнянь з частинними похідними.

У статті об'єктом дослідження є система нелінійних рівнянь конвекції-дифузії з дифузивною матрицею, що притаманна системі рівнянь хемотаксису. У статті показано, що наведені в ній нелокальні перетворення є перетвореннями еквівалентності системи нелінійних рівнянь конвекції-дифузії. Для даної системи та системи-образу, пов'язаної з нею нелокальними перетвореннями, досліджено їх симетрійні властивості. Для знайденої системи-образу в роботі побудовані нееквівалентні ліівські анзаці. Подіявши на ліівські анзаці системи-образу нелокальними перетвореннями, одержані нелокальні анзаці системи конвекції-дифузії з хемотаксисною матрицею дифузії. Подіявши нелокальними анзацами на дану систему, знайдені редуковані рівняння, розв'язавши які, можна одержати точні розв'язки даної системи. Знайдені нелокальні анзаці не можна отримати в рамках класичного методу С. Лі., але вони дозволяють побудувати нові, неліівські розв'язки даної системи диференціальних рівнянь. Зокрема, в статті, розв'язавши одну з редукованих систем, в якості прикладу застосування нелокальних анзаців, побудовано розв'язок системи конвекції-дифузії з хемотаксисною дифузивною матрицею.

Ключові слова: *система рівнянь конвекції-дифузії, нелокальні перетворення еквівалентності, нелокальні анзаці, нелокальна редукція.*

Вступ. Рівняння дифузії, конвекції-дифузії та їх системи мають важливе значення для моделювання реальних процесів навколишнього

світу (див. [9, 10]). Зокрема, у роботі [6] досліджуються процеси масоперенесення частинок домішкової речовини з урахуванням конвективної складової перенесення та сорбційних процесів у двошаровому фільтрі.

Для побудови аналітичних точних розв'язків рівнянь математичної фізики використовується метод С. Лі (див. [2, 8, 14]). В кінці ХХ століття в роботах [7, 12] запропоновано знаходити додаткові нелінійські розв'язки рівнянь за допомогою нелокальних перетворень.

У роботах [15, 16] нелокальні перетворення еквівалентності застосовані для розширення класів розв'язків нелінійних рівнянь конвекції-дифузії вигляду

$$u_t = \partial_x [f(u)u_x + g(u)], \quad (1)$$

де $g(u)$ — довільна гладка функція.

У роботі поставимо задачу застосувати нелокальні перетворення еквівалентності методом, запропонованим у роботах [4, 5], для знаходження нелокальних анзаців та редукції нелінійної системи з класу систем рівнянь конвекції-дифузії:

$$U_t = \partial_x [F(U)U_x + G(U)], \quad (2)$$

$$\text{де } U = \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix}, \quad F(U) = \begin{pmatrix} f^{11} & f^{12} \\ f^{21} & f^{22} \end{pmatrix}, \quad G(U) = \begin{pmatrix} g^1 \\ g^2 \end{pmatrix}, \quad u^a = u^a(t, x),$$

$$f^{ab} = f^{ab}(U), \quad g^a = g^a(U) \text{ — довільні гладкі функції, } a, b = \overline{1, 2}.$$

1. Нелокальні перетворення системи (2)

Розглянемо нелокальні перетворення системи рівнянь конвекції-дифузії (2) вигляду:

$$t = t, \quad x = x, \quad u^a = v_x^a, \quad (3)$$

$$t = x_0, \quad x = w^2, \quad v^1 = w^1, \quad v^2 = x_1, \quad (4)$$

$$x_0 = x_0, \quad x_1 = x_1, \quad w_1^1 = z^1, \quad w_1^2 = z^2, \quad (5)$$

де t, x, x_0, x_1 — нові незалежні змінні, $v^a = v^a(t, x)$,

$w^a = w^a(x_0, x_1)$, $z^a = z^a(x_0, x_1)$ — нові залежні змінні.

Теорема 1. Нелокальні перетворення (3), (4), (5) є перетвореннями еквівалентності системи рівнянь конвекції-дифузії (2).

Доведення. Застосувавши до системи (2) нелокальну заміну вигляду (3), де $v^a = v^a(t, x)$ — нові невідомі функції змінних t, x , після інтегрування одержаної системи за змінною x , отримаємо:

$$V_t = F(V_x)V_{xx} + G(V_x), \quad (6)$$

$$\text{де } V = \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix}, \quad G(V_x) = \begin{pmatrix} g^1(V_x) \\ g^2(V_x) \end{pmatrix}.$$

Якщо до системи (6) застосувати перетворення годографа (4) де x_0, x_1 — нові незалежні змінні, $w^a = w^a(x_0, x_1)$ — нові залежні змінні, то дана система зведеться до вигляду

$$\begin{cases} w_0^1 = \frac{1}{(w_1^2)^2} [(f^{11} - w_1^1 f^{21}) w_{11}^1 + (-w_1^1 f^{11} + f^{12}) + \\ + w_1^1 (w_1^1 f^{21} + f^{22}) \frac{w_{11}^2}{w_1^2}] + g^1 - w_1^1 g^2, \\ w_0^2 = -\frac{1}{w_1^2} f^{21} w_{11}^1 + \frac{1}{(w_1^2)^2} (w_1^1 f^{21} + f^{22}) w_{11}^2 - w_1^2 g^2, \end{cases} \quad (7)$$

де $w_\mu^a = \frac{\partial w^a}{\partial x_\mu}$, $w_{11}^a = \frac{\partial^2 w^a}{\partial x_1^2}$, $\mu = 0, 1$, причому:

$$f^{ab} = f^{ab} \left(\frac{w_1^1}{w_1^2}, \frac{1}{w_1^2} \right), \quad g^a = g^a \left(\frac{w_1^1}{w_1^2}, \frac{1}{w_1^2} \right); \quad a, b = \overline{1, 2}. \quad (8)$$

Продиференціювавши систему (7) за змінною x_1 , та виконавши заміни (5), де $z^a = z^a(x_0, x_1)$ — нові залежні змінні, одержимо наступну систему

$$Z_0 = \partial_1 [\Phi(Z) Z_1 + \Psi(Z)], \quad (9)$$

$$\text{де } Z = \begin{pmatrix} z^1 \\ z^2 \end{pmatrix}, \quad Z_\mu = \frac{\partial Z}{\partial x_\mu}, \quad \partial_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad \Phi(Z) = \begin{pmatrix} \varphi^{11} & \varphi^{12} \\ \varphi^{21} & \varphi^{22} \end{pmatrix},$$

$$\Psi(Z) = \begin{pmatrix} \psi^1 \\ \psi^2 \end{pmatrix}, \quad \varphi^{ab} = \varphi^{ab}(Z), \quad \psi^a = \psi^a(Z), \quad \mu = 0, 1,$$

причому функції $f^{ab}(Z)$ та $g^a(Z)$ пов'язані із функціями $\varphi^{ab}(Z)$ та $\psi^a(Z)$ наступними співвідношеннями

$$\begin{cases} \varphi^{11} = (z^2)^{-2} [f^{11} - z^1 f^{21}], \\ \varphi^{12} = (z^2)^{-3} [-(z^1 f^{11} + f^{12}) + z^1 (z^1 f^{21} + f^{22})], \\ \varphi^{21} = -(z^2)^{-1} f^{21}, \\ \varphi^{22} = (z^2)^{-2} [z^1 f^{21} + f^{22}], \end{cases} \quad (10)$$

де $f^{ab} = f^{ab} \left(\frac{z^1}{z^2}, \frac{1}{z^2} \right)$, $\varphi^{ab} = \varphi^{ab}(z^1, z^2)$.

$$\begin{cases} \psi^1 = g^1 - z^1 g^2, \\ \psi^2 = -z^2 g^2, \end{cases} \quad (11)$$

де $g^a = g^a\left(\frac{z^1}{z^2}, \frac{1}{z^2}\right)$, $\psi^a = \psi^a(Z)$.

Таким чином, ми встановили, що ланцюжок замінів (3), (4), (5) зводить систему (2) до системи рівнянь того ж класу вигляду (9) і навпаки, — не важко перекоонатися, що система (9) за допомогою вказаних замінів зводиться до системи (2).

Теорему доведено.

2. Система нелінійних рівнянь конвекції-дифузії з хемотаксисною дифузною матрицею та її алгебра інваріантності.

Лема. Перетворення вигляду

$$U = AW + B, \quad (12)$$

де $W = \begin{pmatrix} w^1 \\ w^2 \end{pmatrix}$ — нові невідомі функції, $A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$, — довільні сталі матриці, матриця A невинроджена, $\alpha_{ab}, \beta_a \in R$, є перетвореннями локальної еквівалентності системи (2).

Зауваження 1. Наступні твердження про симетрійні властивості систем рівнянь конвекції-дифузії з класу (2) формулюватимемо з точністю до перетворень еквівалентності (12).

Розглянемо систему нелінійних рівнянь конвекції-дифузії вигляду

$$\begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix}_t = \partial_x \left[\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 2\lambda_1 \frac{u^2}{u^1} & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix}_x + \begin{pmatrix} 0 \\ \mu(u^2)^2 \end{pmatrix} \right], \quad (13)$$

де $u^a = u^a(x_0, x_1)$, $a = \overline{1, 2}$, $\lambda_1 + \lambda_2 \neq 0$, t — часова змінна, x — просторова змінна, нижній індекс означає диференціювання за відповідною змінною. Система рівнянь (13) належить до систем класу (2). Система рівнянь вигляду (13) застосовується в природничих науках для моделювання хемотаксису мікроорганізмів внаслідок впливу фізичних або хімічних факторів (див. [1, 11, 13]).

Теорема 2. Максимальною алгеброю інваріантності системи (13) є узагальнена алгебра Галілея $AG_2(1;1)$:

1) при $\lambda_1 + \lambda_2 \neq 0$, $\mu \neq 0$ $A_1 = \langle \partial_t, \partial_x, G_1 = t\partial_x + xQ_1$,

$$A_1 = \langle \partial_t, \partial_x, G_1 = t\partial_x + xQ_1,$$

$$Q_1 = -\frac{1}{2\lambda_1} u^1 \partial_{u^1}, \quad D = 2t\partial_t + x\partial_x + \lambda_1 Q_1 - Q_2, \quad (14)$$

$$P = t^2 \partial_t + tx \partial_x + \frac{1}{2}(x^2 + 2\lambda_1 t) Q_1 - t Q_2 \rangle,$$

$$2) \quad \text{при } \lambda_1 + \lambda_2 \neq 0, \mu = 0, A_2 = \langle A_1, Q_2 \rangle, \quad (15)$$

де $Q_2 = u^2 \partial_u$.

Дана теорема була доведена стандартним методом С. Лі (див. [2, 8, 14]).

3. Симетрійні властивості образу системи (13). Подіями на систему (13) суперпозицією перетворень (3), (4), (5) отримуємо наступну систему рівнянь конвекції-дифузії, яку назовемо системою-образом системи (13).

$$\begin{pmatrix} z^1 \\ z^2 \end{pmatrix}_0 = \partial_1 \left[\begin{pmatrix} -\frac{\lambda_1}{(z^2)^2} & \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)z^1}{(z^2)^3} \\ -\frac{2\lambda_1}{z^1 z^2} & \frac{2\lambda_1 + \lambda_2}{(z^2)^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z^1 \\ z^2 \end{pmatrix}_1 - \begin{pmatrix} \frac{\mu z^1}{(z^2)^2} \\ \frac{\mu}{z^2} \end{pmatrix} \right]. \quad (16)$$

Дослідивши симетрійні властивості системи (16), доведено теорему.

Теорема 3. Максимальними алгебрами інваріантності системи (16) є наступні:

1. При $\mu \neq 0, \lambda_2 \neq \lambda_1$

$$A_5 = \left\langle A_0, Q_2 = e^{-\frac{\mu}{\lambda_2} x_1} \left[\partial_1 + \frac{\mu}{\lambda_2} (z^1 \partial_{z^1} + z^2 \partial_{z^2}) \right] \right\rangle. \quad (17)$$

2. При $\mu \neq 0, \lambda_2 = \lambda_1$

$$\begin{aligned} A_6 &= \left\langle A_0, Q_2 = e^{-\mu x_1} [\partial_1 + \mu (z^1 \partial_{z^1} + z^2 \partial_{z^2})], \right. \\ &\quad \left. Q_3 = e^{\mu x_1} [\partial_1 - 2\mu z^1 \partial_{z^1} - \mu z^2 \partial_{z^2}] \right\rangle. \end{aligned} \quad (18)$$

3. При $\mu = 0, \lambda_2 \neq \lambda_1$

$$A_7 = \left\langle A_0, D_2 = x_1 \partial_1 - \frac{3}{2} z^1 \partial_{z^1} - z^2 \partial_{z^2} \right\rangle. \quad (19)$$

4. При $\mu = 0, \lambda_2 = \lambda_1$.

$$A_8 = \left\langle A_0, D_2, K = x_1^2 \partial_1 - x_1 (3z^1 \partial_{z^1} + 2z^2 \partial_{z^2}) \right\rangle, \quad (20)$$

де $A_0 = \langle \partial_0, \partial_1, D = 2x_0 \partial_0 + z^2 \partial_{z^2}, Q_1 = z^1 \partial_{z^1} \rangle$.

Теорема 3 доводиться стандартним методом Лі (див., наприклад, [2, 8, 14]).

Порівнявши алгебри (14)–(15) і (17)–(20), бачимо, що вони складаються з принципово різних наборів операторів. Використаємо цей факт для знаходження за допомогою нелокальних перетворень (3), (4), (5) додаткових (нелінійських) анзаців системи (13).

4. Ліівські анзаци системи (13). Використаємо Ліівську симетрію системи (13) для побудови її інваріантних анзацив.

Розв'язок системи (13) будемо шукати у вигляді

$$U = A(t, x)\varphi(\omega),$$

де $A(t, x) = (\alpha^{ab})$, $\varphi = \begin{pmatrix} \varphi^1 \\ \varphi^2 \end{pmatrix}$, $\alpha^{ab} = \alpha^{ab}(t, x)$, $\omega = \omega(t, x)$ — деякі гладкі функції, $\varphi^a(\omega)$ — нові невідомі функції, які знаходяться після розв'язування системи звичайних диференціальних рівнянь:

$$\frac{dt}{\xi^0} = \frac{dx}{\xi^1} = \frac{du^1}{\eta^1} = \frac{du^2}{\eta^2} = d\tau. \quad (21)$$

Максимальною алгеброю інваріантності системи (13) при $\mu \neq 0$ є алгебра (14). Координати інфінітезимального оператора скінченновимірного ядра цієї алгебри задаються формулами:

$$\xi^0 = c_1 t^2 + 2c_2 t + c_3; \quad \xi^1 = c_1 t x + c_4 t + c_2 x + c_5;$$

$$\eta^1 = \left[-\frac{1}{2\lambda_1} \left(\frac{c_1}{2} (x^2 + 2\lambda_1 t) + c_4 x \right) - \frac{1}{2} c_2 + c_6 \right] u^1;$$

$$\eta^2 = (-c_1 t - c_2) u^2,$$

де c_1, \dots, c_7 — групові параметри. Враховуючи це, система (21) має вигляд:

$$\dot{t} = c_1 t^2 + 2c_2 t + c_3,$$

$$\dot{x} = c_1 t x + c_4 t + c_2 x + c_5,$$

$$\dot{u}^1 = \left[-\frac{1}{2\lambda_1} \left(\frac{c_1}{2} (x^2 + 2\lambda_1 t) + c_4 x \right) - \frac{1}{2} c_2 + c_6 \right] u^1, \quad (22)$$

$$\dot{u}^2 = (-c_1 t - c_2) u^2.$$

де c_1, \dots, c_7 — довільні числові параметри. Проінтегрувавши систему (22) методом, розглянутим наприклад, у роботах [3, 5], наведемо вигляд нееквівалентних анзацив, які одержуються в результаті

$$u^1 = e^{k_1 t} \varphi^1(\omega), \quad u^2 = e^{k_2 t} \varphi^2(\omega), \quad \omega = k_3 t + x, \quad (23)$$

$$u^1 = t^{k_1} \varphi^1(\omega), \quad \omega = t^{-\frac{1}{2}} x, \quad (24)$$

$$u^2 = t^{k_2} \varphi^2(\omega),$$

$$u^1 = e^{\frac{m}{\lambda_1} t(x + \frac{2}{3} m t^2)} \varphi^1(\omega), \quad \omega = m t^2 + x, \quad (25)$$

$$u^2 = e^{n t} \varphi^2(\omega),$$

$$\begin{aligned}
 u^1 &= e^{-\frac{1}{4\lambda_1} t x^2 (t^2+1)^{-1}} (t^2+1)^{-\frac{1}{4}} \varphi^1(\omega), \\
 u^2 &= (t^2+1)^{-\frac{1}{2}} \varphi^2(\omega), \\
 \omega &= x(t^2+1)^{-\frac{1}{2}},
 \end{aligned} \tag{26}$$

де k, k_1, \dots, k_4 — сталі, які певним чином виражаються через сталі c_1, \dots, c_7 .

5. Ліівські анзаци системи (16). Використаємо Ліівську симетрію системи (16) для побудови інваріантних анзаци цієї системи.

Максимальними алгебрами інваріантності системи (16) залежно від значення параметрів системи μ та λ_1, λ_2 є алгебри (21–20).

5.1. $\mu \neq 0, \lambda_2 \neq \lambda_1$.

Координати інфінітезимального оператора алгебри (17) задаються формулами:

$$\begin{aligned}
 \xi^0 &= c_0 + 2c_2 x_0; & \xi^1 &= c_1 + c_4 e^{-\frac{\mu}{\lambda_2} x_1}; \\
 \eta^1 &= \left(\frac{\mu}{\lambda_2} c_4 e^{-\frac{\mu}{\lambda_2} x_1} + c_3\right) z^1; & \eta^2 &= \left(\frac{\mu}{\lambda_2} c_4 e^{-\frac{\mu}{\lambda_2} x_1} + c_2\right) z^2,
 \end{aligned}$$

де c_0, \dots, c_5 — групові параметри. Система (21) матиме вигляд:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_0 &= c_0 + 2c_2 x_0, & \dot{x}_1 &= c_1 + c_4 e^{-\frac{\mu}{\lambda_2} x_1}, \\
 \dot{z}^1 &= \left(\frac{\mu}{\lambda_2} c_4 e^{-\frac{\mu}{\lambda_2} x_1} + c_3\right) z^1, & \dot{z}^2 &= \left(\frac{\mu}{\lambda_2} c_4 e^{-\frac{\mu}{\lambda_2} x_1} + c_2\right) z^2.
 \end{aligned} \tag{27}$$

Не вдаючись у деталі інтегрування системи (27), наведемо вигляд нееквівалентних анзаци, які одержуються в результаті

$$1) \quad z^1 = e^{mx_0 + \frac{\mu}{\lambda_2} x_1} \varphi^1(\omega), \quad z^2 = e^{\frac{\mu}{\lambda_2} x_1} \varphi^2(\omega), \quad \omega = x_0 + p e^{\frac{\mu}{\lambda_2} x_1}. \tag{28}$$

$$2) \quad z^1 = \frac{e^{mx_0 + \frac{\mu}{\lambda_2} x_1}}{e^{\frac{\mu}{\lambda_2} x_1} + k} \varphi^1(\omega), \quad z^2 = \frac{e^{\frac{\mu}{\lambda_2} x_1}}{e^{\frac{\mu}{\lambda_2} x_1} + k} \varphi^2(\omega), \tag{29}$$

$$\omega = x_0 + p \ln(e^{\frac{\mu}{\lambda_2} x_1} + k);$$

$$3) \quad z^1 = x_0^m e^{\frac{\mu}{\lambda_2} x_1} \varphi^1(\omega), \quad z^2 = x_0^{\frac{1}{2}} e^{\frac{\mu}{\lambda_2} x_1} \varphi^2(\omega), \tag{30}$$

$$\omega = \ln x_0 + p e^{\frac{\mu}{\lambda_2} x_1};$$

$$4) \quad z^1 = x_0^m \frac{e^{\frac{\mu}{\lambda_2} x_1}}{e^{\frac{\mu}{\lambda_2} x_1} + k} \varphi^1(\omega), \quad z^2 = x_0^{\frac{1}{2}} \frac{e^{\frac{\mu}{\lambda_2} x_1}}{e^{\frac{\mu}{\lambda_2} x_1} + k} \varphi^2(\omega), \quad (31)$$

$$\omega = \ln x_0 + p \ln(e^{\frac{\mu}{\lambda_2} x_1} + k),$$

5.2. $\mu \neq 0$, $\lambda_2 = \lambda_1 = 1$.

Координати інфінітезимального оператора алгебри (18) задаються формулами:

$$\xi^0 = c_0 + 2c_2 x_0; \quad \xi^1 = c_1 + c_4 e^{-\mu x_1} + c_5 e^{\mu x_1};$$

$$\eta^1 = (\mu c_4 e^{-\mu x_1} - 2\mu c_5 e^{\mu x_1} + c_3) z^1; \quad \eta^2 = (\mu c_4 e^{-\mu x_1} - \mu c_5 e^{\mu x_1} + c_2) z^2,$$

де c_0, \dots, c_5 — групові параметри. Тоді система (21) матиме вигляд:

$$\dot{x}_0 = c_0 + 2c_2 x_0, \quad \dot{x}_1 = c_1 + c_4 e^{-\mu x_1} + c_5 e^{\mu x_1}, \quad (32)$$

$$\dot{z}^1 = (\mu c_4 e^{-\mu x_1} - 2\mu c_5 e^{\mu x_1} + c_3) z^1, \quad \dot{z}^2 = (\mu c_4 e^{-\mu x_1} - \mu c_5 e^{\mu x_1} + c_2) z^2.$$

Проінтегрувавши систему (32), в результаті одержуємо наступні нееквівалентні анзаци

$$1) \quad z^1 = e^{kx_0 - 2\mu x_1} \varphi^1(\omega), \quad z^2 = e^{-\mu x_1} \varphi^2(\omega), \quad \omega = x_0 + p e^{-\mu x_1}. \quad (33)$$

$$2) \quad z^1 = e^{kx_0 + \mu x_1} \varphi^1(\omega), \quad z^2 = e^{\mu x_1} \varphi^2(\omega), \quad \omega = x_0 + p e^{\mu x_1}; \quad (34)$$

$$3) \quad z^1 = e^{kx_0} \frac{e^{\mu x_1}}{(e^{2\mu x_1} + \frac{1}{m^2})^{\frac{3}{2}}} \varphi^1(\omega), \quad z^2 = \frac{\varphi^2(\omega)}{c_1 e^{-\mu x_1} + c_2 e^{\mu x_1}}, \quad (35)$$

$$\omega = x_0 + \text{parctg}(m e^{\mu x_1}),$$

$$4) \quad z^1 = e^{kx_0} \frac{e^{\mu x_1}}{(e^{2\mu x_1} - \frac{1}{n^2})^{\frac{3}{2}}} \varphi^1(\omega), \quad z^2 = \frac{\varphi^2(\omega)}{c_1 e^{-\mu x_1} + c_2 e^{\mu x_1}}, \quad (36)$$

$$\omega = x_0 + \text{parcth}(n e^{\mu x_1}),$$

$$5) \quad z^1 = e^{-2\mu x_1} x_0^p \varphi^1(\omega), \quad z^2 = e^{-\mu x_1} x_0^{\frac{1}{2}} \varphi^2(\omega), \quad (37)$$

$$\omega = \ln x_0 + k e^{-\mu x_1}.$$

$$6) \quad z^1 = e^{\mu x_1} x_0^p \varphi^1(\omega), \quad z^2 = e^{\mu x_1} x_0^{\frac{1}{2}} \varphi^2(\omega), \quad (38)$$

$$\omega = \ln x_0 + k e^{\mu x_1}.$$

$$7) \quad z^1 = \frac{e^{\mu x_1} x_0^p}{(e^{2\mu x_1} + \frac{1}{m^2})^{\frac{3}{2}}} \varphi^1(\omega), \quad z^2 = \frac{x_0^p}{c_1 e^{-\mu x_1} + c_1 m^2 e^{\mu x_1}} \varphi^2(\omega), \quad (39)$$

$$\omega = \ln x_0 + k \text{arctg}(m e^{2\mu x_1}),$$

$$8) \quad z^1 = \frac{e^{\mu x_1} x_0^p}{(e^{2\mu x_1} - \frac{1}{n^2})^{\frac{3}{2}}} \varphi^1(\omega), \quad z^2 = \frac{x_0^{\frac{1}{2}}}{c_1 e^{-\mu x_1} - c_1 n^2 e^{\mu x_1}} \varphi^2(\omega), \quad (40)$$

$$\omega = \ln x_0 + \operatorname{karcth}(n e^{\mu x_1}).$$

5.3. $\mu = 0$, $\lambda_2 \neq \lambda_1$.

Координати інфінітезимального оператора алгебри (19) задаються формулами:

$$\begin{aligned} \xi^0 &= 2c_2 x_0 + c_0; \quad \xi^1 = c_4 x_1 + c_1; \\ \eta^1 &= c_3 z^1; \quad \eta^2 = (c_2 - c_4) z^2, \end{aligned}$$

де c_0, \dots, c_4 — групові параметри. Система (21) матиме вигляд:

$$\begin{aligned} \dot{x}_0 &= 2c_2 x_0 + c_0; \quad \dot{x}_1 = c_4 x_1 + c_1, \\ \dot{z}^1 &= c_3 z^1, \quad \dot{z}^2 = (c_2 - c_4) z^2. \end{aligned} \quad (41)$$

Не вдаючись у деталі інтегрування системи (41), наведемо вигляд нееквівалентних анзаців, які одержуються в результаті

$$1) \quad z^1 = x_0^p \varphi^1(\omega), \quad z^2 = x_0^{\frac{k+1}{2}} \varphi^2(\omega), \quad \omega = x_0^k x_1, \quad (42)$$

$$2) \quad z^1 = e^{p x_0} \varphi^1(\omega), \quad z^2 = e^{k x_0} \varphi^2(\omega), \quad \omega = e^{k x_0} x_1, \quad (43)$$

$$3) \quad z^1 = x_0^p \varphi^1(\omega), \quad z^2 = x_0^{\frac{1}{2}} \varphi^2(\omega), \quad \omega = x_1 + k \ln x_0, \quad (44)$$

$$4) \quad z^1 = e^{p x_0} \varphi^1(\omega), \quad z^2 = \varphi^2(\omega), \quad \omega = x_1 + k x_0, \quad (45)$$

$$5) \quad z^1 = x_1^k \varphi^1(\omega), \quad z^2 = x_1^{-1} \varphi^2(\omega), \quad \omega = x_0, \quad (46)$$

$$6) \quad z^1 = e^{p x_1} \varphi^1(\omega), \quad z^2 = \varphi^2(\omega), \quad \omega = x_0, \quad (47)$$

Зауважимо, що дією ланцюжків перетворень (3), (4), (5), на анзаці (42)–(47), одержуємо Ліївські анзаці системи (13), які можна одержати, використовуючи оператори алгебр (14), (15), а тому їх не наводимо.

5.4. $\mu = 0$, $\lambda_2 = \lambda_1 = 1$.

Координати інфінітезимального оператора алгебри (20) задаються формулами:

$$\begin{aligned} \xi^0 &= 2c_2 x_0 + c_0; \quad \xi^1 = c_5 x_1^2 + c_3 x_1 + c_1; \\ \eta^1 &= (-3c_5 x_1 + c_4) z^1; \quad \eta^2 = (-2c_5 x_1 + c_2 - c_3) z^2, \end{aligned}$$

де c_0, \dots, c_5 — групові параметри. Система (21) матиме вигляд:

$$\begin{aligned} \dot{x}_0 &= 2c_2 x_0 + c_0; \quad \dot{x}_1 = c_5 x_1^2 + c_3 x_1 + c_1, \\ \dot{z}^1 &= (-3c_5 x_1 + c_4) z^1, \quad \dot{z}^2 = (-2c_5 x_1 + c_2 - c_3) z^2; \end{aligned} \quad (48)$$

Не вдаючись у деталі інтегрування системи (48), наведемо вигляд нееквівалентних анзаців, які одержуються в результаті

$$1) \quad z^1 = (x_1^2 + 1)^{-\frac{3}{2}} \varphi^1(\omega), \quad z^2 = (x_1^2 + 1)^{-1} \varphi^2(\omega), \quad (49)$$

$$\omega = x_0 + \operatorname{parctg} x_1,$$

$$2) \quad z^1 = (x_1^2 + 1)^{-\frac{3}{2}} \varphi^1(\omega), \quad z^2 = x_0^{-\frac{1}{2}} (x_1^2 + 1)^{-1} \varphi^2(\omega), \quad (50)$$

$$\omega = \ln x_0 + \operatorname{parctg} x_1,$$

6. Нелокальні анзаці системи (13). В пункті 2, 3 було встановлено, що система (13), інваріантна відносно алгебри $AG_2(1;1)$, під дією композиції нелокальних перетворень (3), (4), (5) переходить в систему (16), яка має алгебру інваріантності, що містить принципово інші оператори ніж оператори алгебр (14), (15). Цей факт використовуємо для одержання додаткових анзаців системи (13).

Для відшукування додаткових нелінійських анзаців системи (13) подіємо композицією нелокальних перетворень (3)–(5) на уже знайдені анзаці системи (13). Зауважимо, що дією композиції нелокальних перетворень (3)–(5) на анзаці (42)–(47), отримуємо лінійські анзаці системи (13), які можна одержати, використовуючи оператори алгебр (14), (15).

Подівавши композицією нелокальних перетворень (3)–(5) на анзаці (28)–(31), (33)–(40), (49)–(50), отримуємо нелокальні анзаці системи (16), які не можна одержати, використовуючи оператори алгебр (14), (15).

Не вдаючись у деталі їх знаходження, наведемо остаточні результати.

Нелокальні анзаці для системи (13).

Зокрема, із лінійських анзаців (28)–(31) отримуємо наступні нелокальні анзаці

$$u^1 = e^{mt} \varphi^1(\omega),$$

$$u^2 = \frac{\lambda_2}{\mu} \frac{\dot{\varphi}^2(\omega)}{\varphi^2(\omega) + pt}, \quad (51)$$

$$\omega = x;$$

$$u^1 = e^{mt} \varphi^1(\omega),$$

$$u^2 = \frac{\lambda_2}{\mu} \frac{\dot{\varphi}^2(\omega)}{\varphi^2(\omega) + pe^{st}}, \quad (52)$$

$$\omega = x;$$

$$u^1 = t^m \varphi^1(\omega),$$

$$u^2 = \frac{\lambda_2}{\mu} t^{-\frac{1}{2}} \frac{\dot{\varphi}^2(\omega)}{\varphi^2(\omega) + p \ln t}, \quad (53)$$

$$\omega = \frac{x}{\sqrt{t}};$$

$$u^1 = t^m \varphi^1(\omega),$$

$$u^2 = \frac{\lambda_2}{\mu} t^{-\frac{1}{2}} \frac{\dot{\varphi}^2(\omega)}{\varphi^2(\omega) + p t^n}, \quad (54)$$

$$\omega = \frac{x}{\sqrt{t}}.$$

З лівських анзаців (51)–(54) отримуємо наступні нелокальні анзаці

$$u^1 = e^{kt} \varphi^1(\omega)(\varphi^2(\omega) + t),$$

$$u^2 = -\frac{1}{\mu} \frac{\dot{\varphi}^2(\omega)}{\varphi^2(\omega) + t}, \quad (55)$$

$$\omega = x;$$

$$u^1 = e^{kt} \varphi^1(\omega),$$

$$u^2 = \frac{1}{\mu} \frac{\dot{\varphi}^2(\omega)}{\varphi^2(\omega) + t}, \quad (56)$$

$$\omega = x;$$

$$u^1 = e^{kt} \cos \alpha \varphi^1(\omega),$$

$$u^2 = \frac{2}{\mu} \frac{\dot{\varphi}^2(\omega)}{\sin 2\alpha}, \quad (57)$$

$$\omega = x, \quad \alpha = \varphi^2(\omega) - \frac{t}{p};$$

$$u^1 = e^{kt} \operatorname{ch} \alpha \varphi^1(\omega),$$

$$u^2 = \frac{2}{\mu} \frac{\dot{\varphi}^2(\omega)}{\operatorname{sh} 2\alpha}, \quad (58)$$

$$\omega = x, \quad \alpha = \varphi^2(\omega) - \frac{t}{p}.$$

$$u^1 = t^p \varphi^1(\omega)(\varphi^2(\omega) - \frac{1}{k} \ln t),$$

$$u^2 = -\frac{1}{\mu} \frac{\dot{\varphi}^2(\omega)}{\varphi^2(\omega) - \frac{1}{k} \ln t}, \quad (59)$$

$$\omega = \frac{x}{\sqrt{t}};$$

$$\begin{aligned} u^1 &= t^p \varphi^1(\omega), \\ u^2 &= \frac{1}{\mu} t^{-\frac{1}{2}} \frac{\dot{\varphi}^2(\omega)}{\varphi^2(\omega) + \ln t}, \end{aligned} \quad (60)$$

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{x}{\sqrt{t}}; \\ u^1 &= t^p \cos \alpha \varphi^1(\omega), \\ u^2 &= \frac{2}{\mu} t^{-\frac{1}{2}} \frac{\dot{\varphi}^2(\omega)}{\sin 2\alpha}, \end{aligned} \quad (61)$$

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{x}{\sqrt{t}}, \quad \alpha = \varphi^2(\omega) + k \ln t; \\ u^1 &= t^p \operatorname{ch} \alpha \varphi^1(\omega), \\ u^2 &= \frac{2}{\mu} t^{-\frac{1}{2}} \frac{\dot{\varphi}^2(\omega)}{\operatorname{sh} 2\alpha}, \end{aligned} \quad (62)$$

$$\omega = \frac{x}{\sqrt{t}}, \quad \alpha = \varphi^2(\omega) + k \ln t.$$

Із лівських анзаців (49)–(50) отримуємо наступні нелокальні анзаці системи (13)

$$\begin{aligned} u^1 &= \varphi^1(\omega) \cos \alpha, \\ u^2 &= \frac{\dot{\varphi}^2(\omega)}{\cos^2 \alpha}, \end{aligned} \quad (63)$$

$$\omega = x, \quad \alpha = \varphi^2(\omega) - \frac{t}{p};$$

$$\begin{aligned} u^1 &= t^{-\frac{1}{2}} \varphi^1(\omega) \cos \alpha, \\ u^2 &= t^{-\frac{1}{2}} \frac{\dot{\varphi}^2(\omega)}{\cos^2 \alpha}, \end{aligned} \quad (64)$$

$$\omega = \frac{x}{\sqrt{t}}, \quad \alpha = \varphi^2(\omega) - \frac{1}{p} \ln t.$$

Нелокальні анзаці (51)–(64) для системи (13) не можливо одержати в рамках теорії С. Лі.

7. Нелокальна редукція системи (13). Для знаходження невідомих функцій φ^1, φ^2 необхідно одержані вище нелокальні анзаці (51)–(64) підставити у систему (13). Анзаці (51)–(64) редукують систему (13) до систем звичайних диференціальних рівнянь відповідно

Зокрема, анзаці (51)–(54) редукують систему (13) до таких редукованих систем

$$\ddot{\varphi}^1 = \frac{m}{\lambda_1} \varphi^1, \quad (65)$$

$$\ddot{\varphi}^2 = \frac{1}{\lambda_2} (-2\lambda_1 \frac{\dot{\varphi}^1}{\varphi^1} \dot{\varphi}^2 + p);$$

$$\dot{\varphi}^1 = \frac{m}{\lambda_1} \varphi^1, \quad (66)$$

$$\ddot{\varphi}^2 = \frac{1}{\lambda_2} (-2\lambda_1 \frac{\dot{\varphi}^1}{\varphi^1} \dot{\varphi}^2 + ps\varphi^2);$$

$$\ddot{\varphi}^1 = \frac{1}{\lambda_1} (-\frac{\omega}{2} \dot{\varphi}^1 + m\varphi^1), \quad (67)$$

$$\ddot{\varphi}^2 = \frac{1}{\lambda_2} (-2\lambda_1 \frac{\dot{\varphi}^1}{\varphi^1} \dot{\varphi}^2 - \frac{\omega}{2} (\dot{\varphi}^2 + p));$$

$$\ddot{\varphi}^1 = \frac{1}{\lambda_1} (-\frac{\omega}{2} \dot{\varphi}^1 + m\varphi^1), \quad (68)$$

$$\ddot{\varphi}^2 = \frac{1}{\lambda_2} (-2\lambda_1 \frac{\dot{\varphi}^1}{\varphi^1} \dot{\varphi}^2 - \frac{\omega}{2} \varphi^2 - n\varphi^2);$$

Анзаци (55)-(62) редукують систему (13) до таких редукованих систем

$$\dot{\varphi}^1 = k\varphi^1, \quad (69)$$

$$\ddot{\varphi}^2 + 2 \frac{\dot{\varphi}^1}{\varphi^1} \dot{\varphi}^2 - 1 = 0;$$

$$\dot{\varphi}^1 - \varphi^1 (\dot{\varphi}^2)^2 - k\varphi^1 = 0, \quad (70)$$

$$\ddot{\varphi}^2 + 2 \frac{\dot{\varphi}^1}{\varphi^1} \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{p} = 0;$$

$$\dot{\varphi}^1 + \varphi^1 (\dot{\varphi}^2)^2 - k\varphi^1 = 0, \quad (71)$$

$$\ddot{\varphi}^2 + 2 \frac{\dot{\varphi}^1}{\varphi^1} \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{p} = 0;$$

$$\dot{\varphi}^1 + \frac{1}{2} \omega \dot{\varphi}^1 - p\varphi^1 = 0, \quad (72)$$

$$\ddot{\varphi}^2 + (\frac{1}{2} \omega + 2 \frac{\dot{\varphi}^1}{\varphi^1}) \dot{\varphi}^2 - 1 = 0;$$

$$\dot{\varphi}^1 + \frac{1}{2} \omega \dot{\varphi}^1 - ((\dot{\varphi}^2)^2 + p)\varphi^1 = 0, \quad (73)$$

$$\ddot{\varphi}^2 + (\frac{1}{2} \omega + 2 \frac{\dot{\varphi}^1}{\varphi^1}) \dot{\varphi}^2 - k = 0;$$

$$\ddot{\varphi}^1 + \frac{1}{2}\omega\dot{\varphi}^1 + ((\dot{\varphi}^2)^2 - p)\varphi^1 = 0, \quad (74)$$

$$\ddot{\varphi}^2 + \left(\frac{1}{2}\omega\dot{\varphi}^2 + 2\frac{\dot{\varphi}^1}{\varphi^1}\right)\dot{\varphi}^2 - k = 0.$$

Анази (63)–(64) редукують систему (13) до таких редукованих систем

$$\ddot{\varphi}^1 = \varphi^1(\dot{\varphi}^2)^2, \quad (75)$$

$$\ddot{\varphi}^2 + 2\frac{\dot{\varphi}^1}{\varphi^1}\dot{\varphi}^2 = \frac{2}{p};$$

$$\ddot{\varphi}^1 = \omega\dot{\varphi}^1 + [(\dot{\varphi}^2)^2 + 1]\varphi^1, \quad (76)$$

$$\ddot{\varphi}^2 = \left(\omega - 2\frac{\dot{\varphi}^1}{\varphi^1}\right)\dot{\varphi}^2 + \frac{2}{p}.$$

8. Розв'язки системи (13). Розв'язавши редуковані системи (65)–(76), можна побудувати розв'язки системи (13).

Так, наприклад, розв'язком системи (69) є наступні функції:

$$\varphi^1 = e^{\sqrt{k}\omega}, \quad \varphi^1 = c_1 e^{-2\sqrt{k}\omega} + \frac{1}{2\sqrt{k}}\omega + c_2, \quad (77)$$

де c_1, c_2 — довільні сталі.

Підставивши функції (77) у аназац (55), отримуємо наступний розв'язок системи (13):

$$u^1 = e^{kt + \sqrt{k}x} \left[c_1 e^{-2\sqrt{k}x} + \frac{1}{2\sqrt{k}}x + t + c_2 \right], \quad (78)$$

$$u^2 = -\frac{1}{\mu} \cdot \frac{-2c_1\sqrt{k}e^{-2\sqrt{k}x} + \frac{1}{2\sqrt{k}}}{c_1 e^{-2\sqrt{k}x} + \frac{1}{2\sqrt{k}}x + t + c_2}.$$

Висновки.

У роботі для системи нелінійних рівнянь хемотаксису, за допомогою нелокальних перетворень одержані нелокальні анази та знайдено відповідні редуковані системи (65)–(76), розв'язавши які, можна одержати точні розв'язки системи (13).

Зокрема, один з розв'язків системи (13) має вигляд (78).

Список використаних джерел:

1. Иваницкий Г. Р. От беспорядка к упорядоченности — на примере движения микроорганизмов / Г. Р. Иваницкий, А. Б. Медвинский, М. А. Цыганов // Успехи физических наук. — 1991. — Т. 161, № 4. — С. 13–71.

2. Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений / Л. В. Овсянников. — М. : Наука, 1978. — 400с.
3. Омелян О. М. Редукція та розв'язки систем нелінійних рівнянь дифузії, інваріантних відносно алгебри Галілея / О. М. Омелян // Вісн. Київ. нац. ун-ту ім. Тараса Шевченка. Сер.: «Математика. Механіка». — 2004. — № 11–12. — С. 95–100.
4. Серов М. І. Лінеаризація систем нелінійних рівнянь дифузії за допомогою нелокальних перетворень / М. І. Серов, О. М. Омелян, Р. М. Черніга // Доп. НАН України. — 2004. — № 10. — С. 39–45.
5. Серов М. І. Симетрійні властивості системи нелінійних рівнянь хемотаксису / М. І. Серов, О. М. Омелян. — Полтава : ПолтНТУ, 2012. — 238 с.
6. Сівак В. Процеси дифузії-конвекції з урахуванням сорбції у двошаровому фільтрі / В. Сівак, Є. Чапля, О. Чернуха // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. — 2006. — Вип. 4. — С. 78–91.
7. Фушич В. І. О нелокальных анзацах одного нелинейного одномерного уравнения теплопроводности / В. И. Фушич, Н. И. Серов, Т. К. Амеров // Доклады Академии наук Украины. — 1992. — № 1. — С. 26–30.
8. Фушич В. І. Симетрийний аналіз і точні рішення нелінійних рівнянь математической фізики / В. І. Фушич, В. М. Штельень, Н. І. Серов. — К. : Наук. думка, 1989. — 335 с.
9. Чапля Є. Математичне моделювання стаціонарних процесів конвективно-дифузійного масопереносу у бінарних періодичних структурах / Є. Чапля, О. Чернуха, В. Дмитрук // Доповіді НАН України. — 2011. — № 7. — С. 46–51.
10. Чернуха О. Математичні моделі стаціонарних процесів конвективної дифузії в регулярних структурах. Задачі термодифузії та методи їх розв'язку : колект. моногр. / О. Чернуха, В. Гончарук, В. Дмитрук ; під ред. д. т. н. В. П. Ляшенка. — Кременчук : Кременчуцький національний університет імені Михайла Остроградського, 2012. — С. 91–109.
11. Adler J. Chemotaxis in bacteria / J. Adler // Science. — 1996. — Vol. 153. — P. 708–716.
12. Fushchich W. I. On nonlocal symmetries of the nonlinear heat equation / W. I. Fushchich, N. I. Serov, V. A. Tychynin, T. K. Amerov // Proc. Acad. of Sci. Ukraine. — 1992. — №11. — P. 27–33.
13. Keller E. F. Model for chemotaxis / E. F. Keller, L.A. Segel // J. Theor. Biol. — 1971. — Vol. 30. — P. 225–234.
14. Olver P. Applications of Lie Groups to Differential Equations / P. Olver. — New York : Springer, 1986. — 497 p.
15. Tychynin V. A. Symmetries and Generation of Solutions for Partial Differential Equations / V. A. Tychynin, O. V. Petrova, O. M. Tertyshnyk // Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications (SIGMA) — 2007. — Vol. 3. — 14 p. — URL: <http://arxiv.org/abs/math-ph/0702033>
16. Tychynin V. A. Nonlocal symmetries and formulae for generation of solutions for a class of diffusion-convection equations / V. A. Tychynin, O. V. Petrova // J. Math. Anal. Appl. — 2011. — № 382. — P. 20–33.

THE NONLOCAL ANSATZE AND REDUCTION OF NONLINEAR SYSTEM OF CONVECTION-DIFFUSION EQUATIONS WITH CHEMOTAXIS MATRIX OF DIFFUSION

Contemporary scientific research in the most diverse fields of science is impossible without the construction of mathematical models of physical, chemical, biological, etc. processes and phenomena being studied. One of the types of mathematical models is the differential equations and their systems. Among the differential equations for describing the processes of passing liquid with impurities through multilayer filters, processes of atmospheric air pollution by exhaust gases, systems of equations of convection-diffusion are used. By this time, the development of new methods for finding exact solutions of differential equations with partial derivatives remains relevant. One such method is the C. Lee method. This paper is devoted to the search for means for generalizing the S. Le method to find new classes of exact solutions of partial differential equations.

In this article, the object of the study is a system of nonlinear equations of convection-diffusion with a diffusion matrix, inherent in the system of equations of chemotaxis. In this paper it is shown that the nonlocal transformations presented in it are transformations of the equivalence of a system of nonlinear convection-diffusion equations. For this system and system-image which is associated with nonlocal transformations, their symmetric properties were investigated. For the system-image which is found in the article, we construct non-equivalent Lie ansatzes. By acting on the Lie ansatzes of the system-image with nonlocal transformations, nonlocal ansatzes of a convection-diffusion system with a chemotaxis diffusion matrix were obtained. We found the reduced equations with applying nonlocal ansatzes to this system. If we will solved reduced equations we can obtain exact solutions of the given system. The nonlocal ansatzes is found can not be obtained within the classical Lie method, but they allow us to construct new, non-Lies solutions of a given system of differential equations. In particular, in the article, having solved one of the reduced systems, as an example of the application of non-local ansatzes, solution of the convection-diffusion system with a chemotaxis diffusion matrix was constructed.

Key words: *nonlocal transformations of equivalence, nonlocal ansatzes, nonlocal reduction, nonlinear system of convection-diffusion equations with chemotaxis matrix of diffusion.*

Отримано: 24.05.2018

УДК 519.85

О. С. Пичугина, канд. физ.-мат. наук

Национальный аэрокосмический университет имени Н. Е. Жуковского «Харьковский авиационный институт», г. Харьков

**ПОЛИЭДРАЛЬНО-СФЕРИЧЕСКИЕ КОНФИГУРАЦИИ:
ОСОБЕННОСТИ И ПРИМЕНЕНИЕ**

В статье рассмотрены конечные точечные конфигурации, расположенные на гиперсфере (полиэдрально-сферические конфигурации, PSCs) и исследованы их алгебро-топологические и тополого-метрические свойства.

Поставлены следующие задачи: определение, является ли конечная точечная конфигурация полиэдрально сферической; определение центра и радиуса сферы, описанной вокруг PSC; определение центра и радиуса PSC, т.е. центра и радиуса описанной сферы минимального радиуса; поиск возможных способов редукции задач, поставленных на PSCs, в частности, их декомпозиции на полиэдрально-сферические подконфигурации. Выделены, исследованы особенности и решены поставленные задачи для трех классов PSCs — симплексных, перестановочных и двухуровневых по координатам, в частности, установлена их связь с базовыми множествами евклидовых комбинаторных конфигураций перестановок и булевых векторов.

Также исследованы свойства PSCs общего вида, в частности, исследован вопрос определения центра и радиуса PSCs, образованных в результате теоретико-множественных операций над точечными конфигурациями, среди которых есть PSCs. Важной отличительной особенностью PSCs является то, что они совпадают со множеством вершин своей выпуклой оболочки, то есть относятся к классу вершинно расположенных. Соответственно, они образуются в пересечении гиперсферы со своей выпуклой оболочкой. Это позволяет при оптимизации на них применять теорию выпуклых продолжений к функциям, заданным на PSCs. В частности, можно считать, что как целевая функция, так и функциональные ограничения задач оптимизации выпуклые и гладкие. А это, в свою очередь, открывает широкие перспективы создания методов типа ветвей и границ, использующие, с одной стороны, при ветвлении - структурные особенности специальных классов PSCs, а с другой - оценки, получаемые в результате решения выпуклых полиэдральных релаксационных задач либо сферических релаксационных задач с выпуклыми целевыми функциями и функциональными ограничениями.

В статье широко освещены вопросы разложений PSCs по выпуклым поверхностям, в частности, по семейству вложенных гиперсфер и параллельным плоскостям. С задачей деком-

позиции тесно связана задача декомпозиции PSCs на полиэдрально-сферические подконфигурации, решение которой также предложено в данной работе.

Полученные результаты имеют самостоятельный теоретический интерес, а также применимы в вычислительных алгоритмах, реализующих полиэдрально-сферические методы решения задач оптимизации на PSCs.

Ключевые слова: *конечная точечная конфигурация, евклидова комбинаторная конфигурация, полиэдрально-сферическое множество, вершинно-расположенное множество, комбинаторная оптимизация, многогранник, гиперсфера.*

Введение. При решении задач комбинаторной оптимизации [1–3] на множествах комбинаторных конфигураций стандартным приемом является их формулировка в виде задач дискретного программирования на конечных множествах точек арифметического евклидова пространства (конечных точечных конфигурациях, finite point configurations FPCs) [4]. В терминологии [5, 6] это означает, что исходная задача формулируется на евклидовых комбинаторных множествах, а переход осуществляется к задачам евклидовой комбинаторной оптимизации, решение которых эквивалентно решению исходной задачи.

При таком погружении в арифметическое евклидово пространство достаточно часто допустимые FPCs, называемые в данном случае множествами евклидовых комбинаторных конфигураций (\mathcal{C} -множествами) [7, 8], вписаны в гиперсферу. Этот факт порождает интересные особенности этих областей, которые находят применение как в дискретных оптимизационных подходах, таких как методы ветвей и границ, отсечений, ветвей и отсечений), так и в непрерывных подходах, таких как непрерывные формулировки и релаксации [9–14].

1. Постановка задачи. Пусть E — конечное множество в R^n :

$$E = \{x^j, j \in J_{n_E}\}, \quad n_E > 1, \quad (1)$$

где $x^j = (x_1^j, \dots, x_n^j)$, $j \in J_{n_E} = \{1, \dots, n_E\}$. Такое множество иногда называют конечной точечной конфигурацией (a finite point configuration, FPC) [4].

Точке x^j поставим в соответствие мультимножество ее координат $G(x^j) = \{x_i^j, i \in J_n\}$ и назовем ее индуцирующим мультимножеством (an x^j -induced multiset, x^j .IM), а его основу обозначим $A(x^j) = S(x^j$.IM) и назовем образующим множеством x^j ($j \in J_{n_E}$). Сформируем мультимножество G как объединение $G(x^j)$, $j \in J_{n_E}$, —

$G = \bigcup_{j=1}^{n_E} G^j$, учитывая, что объединением мультимножеств G, G' назы-

вается мультимножество $G'' = G \cup G'$ с основой $S(G'') = S(G) \cup S(G')$ и кратностями $\eta_{G''}(e) = \max\{\eta_G(e), \eta_{G'}(e)\}$, $e \in S(G'')$. Упорядочим элементы G по неубыванию:

$$G = G_E = \{g_1, \dots, g_\eta\}, \quad g_i \leq g_{i+1}, \quad i \in J_{\eta-1}, \quad (2)$$

а его основу — в форме $A = S(G) = \{e_i, i \in J_k\}$, где $e_i < e_{i+1}$, $i \in J_{k-1}$. Назовем G индуцирующим мультимножеством E (an induced multiset, E .IM), а A — образующим множеством (a generated set, E .GS).

Размерностью d_E FPC E назовем размерность ее выпуклой оболочки — $d_E = \dim P$, где

$$P = \text{conv } E. \quad (3)$$

Определение. FPC E назовем полиэдрально-сферической (a polyhedral-spherical configuration, PSC), если существуют такие $a \in R^n$ и $r > 0$, что для всех точек $x \in E$ выполняется условие

$$\|x - a\|^2 = r^2. \quad (4)$$

Центр и радиус гиперсферы $S(a, r)$ вида (4) назовем параметрами PSC E , а саму ее обозначим

$$E = E(a, r). \quad (5)$$

Параметры PSC определяются однозначно только в случае ее полномерности, т.е. если $d_E = n$, и в этом случае $(a, r) = (\hat{a}, \hat{r})$, где \hat{a}, \hat{r} — центр и радиус гиперсферы минимального радиуса, описанной вокруг E . Если $d_E < n$ представление $E(a, r)$ определено неоднозначно, поэтому, чтобы выделить его будем использовать обозначение $E = \hat{E}(\hat{a}, \hat{r}) = \hat{E}(a^{\min}, r^{\min})$, а параметры \hat{a}, \hat{r} этого представления будем называть центром и радиусом PSC E .

При рассмотрении свойств полиэдрально-сферических конфигураций (PSCs) возникает ряд вопросов, например: а) как определить, является ли FPC $X \subset R^n$ полиэдрально сферической конфигурацией (задача идентификации, Задача 1); б) как определить параметры PSC $E(a, r)$ (задача определения параметров, Задача 2), в том числе параметры представления $\hat{E}(\hat{a}, \hat{r})$ (задача определения центра и радиуса, Задача 3); в) какие существуют способы редукции PSC (задача декомпозиции, Задача 4), т.е. сведения ее к рассмотрению множества полиэдрально-сферических подконфигураций. Исследованию свойств PSCs в этом контексте посвящена данная работа.

2. Изложение основного материала. Приведем несколько классов PSCs, продемонстрировав примеры решения Задачи 1.

Пусть E — FPC в R^n .

Теорема 1. Если

$$card E \leq n+1, \quad (6)$$

то E — PSC.

FPC E , удовлетворяющую условиям теоремы 1, назовем симплексной (а simplex FPC). Если E — полномерная PSC, ее центр и радиус можно найти согласно [15]. Если E — не полномерная, доопределив ее $n+1-card E$ точками до полномерной симплексной конфигурации, можно применить результаты [15].

Теорема 2. Если E .GM таково, что

$$card G = n, \quad (7)$$

то E — PSC.

FPC E , удовлетворяющую условиям теоремы 2, назовем перестановочной (а permutation FPC, PC) [7]. Ее характерной особенностью будет то, что индуцирующие мультимножества всех ее элементов совпадают — $G(x^j) = G, j \in J_{n_e}$. Размерность PC будет удовлетворять условию:

$$d_E \leq n-1, \quad (8)$$

поэтому представление (5) будет определено неоднозначно, в частности, $\forall \alpha \in R \quad a = \alpha e, r = \left(\sum_{i=1}^n (g_i - \alpha)^2 \right)^{1/2}$ будут допустимыми параметрами [5, 7, 8]. Если же (8) выполнено как равенство, т.е.

$$d_E = n-1, \quad (9)$$

центр и радиус PSC E можно определить по формуле [5]:

$$\hat{r} = \left(\sum_{i=1}^n (g_i - \hat{\alpha})^2 \right)^{1/2}, \quad \hat{a} = \hat{\alpha} e, \quad \hat{\alpha} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g_i. \quad (10)$$

Теорема 3. Если E удовлетворяет условию:

$$\max_{i \in J_n} card A(i) = 2, \quad \text{где } A(i) = \{x_i^j\}_{j \in J_m} .IS, \quad i \in J_n, \quad (11)$$

то E — PSC.

FPC E , удовлетворяющую условиям теоремы 3, назовем двухуровневой по координатам (а 2-level FPC, 2LC) [7, 8]. Параметры представления (5) такой конфигурации можно найти по формулам:

$$r = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n (e_{ik_i} - e_{i1}) \right)^{1/2}, \quad a = (a_i)_{i \in J_n}, \quad a_i = \frac{e_{ik_i} + e_{i1}}{2}, \quad i \in J_n, \quad (12)$$

где $A(i) = \{e_{ij}\}_{j \in J_{k_i}}$, $e_{ij} < e_{ij+1}$, $j \in J_{k_i-1}$, $i \in J_n$.

Отметим, что если E — полномерная 2LC, формула (12) задает центр и радиус этой конфигурации. Формулы (6), (7), (11) являются достаточными условиями того, что E является PSC, т.е. они дают решения Задачи 1. В то же время формулы (10), (12) дают решение Задачи 2 для PC E или 2LC E соответственно. Кроме того, для этих PSCs, решение Задачи 3 задается формулой (10), если выполнено (9) и E — PC либо формулой (12), если $d_E = n$ и E — 2LC.

Полиэдрально-сферические конфигурации имеют множество интересных особенностей, которые являются предметом нашего исследования, одна из которых положена в основу термина «PSC». Выбор термина «полиэдрально-сферическая конфигурация» обуславливается возможностью представления PSC E в виде пересечения многогранника (3) и гиперсферы $S(a, r) = S_r(a)$, заданной уравнением (4), в результате чего имеет место представление E :

$$E = P \cap S(a, r), \tag{13}$$

называемое полиэдрально-сферическим (а polyhedral-spherical representation, PSR) [7, 8].

А это, в свою очередь, приводит к тому, что PSC E совпадает с множеством вершин P :

$$E = \text{vert } P, \tag{14}$$

т.е. является вершинно расположенной FPC (а vertex located configuration, VLC) [7,8]. Соответственно, помимо (1) и PSR (13), PSC E позволяет еще одно задание — представление (14) как множество вершин своей выпуклой оболочки.

E .PSR вида $E = P \cap S(\hat{a}, \hat{r})$ будем называть PSR минимального радиуса.

Исследуем свойства PSCs общего вида, такие как разложение по плоскостям и строго выпуклым поверхностям, декомпозиции на PSCs меньшей размерности; свойства PSCs, полученных в результате теоретико-множественных операций над PSCs и FPCs общего вида. Также рассмотрим особенности базовых перестановочных (PC $E_1 = \{x \in R^n : x.GM = G\}$) и двухуровневых по координатам (2LC $E_2 : |E_2.IS| = 2$) множеств. Так $P_1 = \text{conv } E_1$ представляет собой общий многогранник перестановок, $P_2 = \text{conv } E_2$ — специальный многогранник перестановок или размещений [6–8].

2.1. Конечные точечные конфигурации: разложения и декомпозиции. Перейдем к решению Задачи 4. Пусть E — FPC. Рассмотрим ее разложение по поверхностям, заданным одной функцией,

и связанные с ним декомпозиции E на попарно непересекающиеся подконфигурации. Пусть функция $h: R^n \rightarrow R^1$ непрерывна и $\forall x^0 \in R^n \quad h(x) = h(x^0)$ задает поверхность в R^n . Задача разложения ГРС E по семейству поверхностей, заданных функцией $h(x)$, состоит в поиске поверхностей уровня этой функции:

$$S^i = \{x \in R^n : h(x) = h_i\}, i \in J_{m_{h(x)}}, \quad (15)$$

таких что

$$h_i < h_{i+1}, i \in J_{m_{h(x)}-1}, \quad (16)$$

$$\mathcal{E}^i = E \cap S^i \neq \emptyset, i \in J_{m_{h(x)}}, \quad (17)$$

$$E = \bigcup_{i=1}^{m_{h(x)}} \mathcal{E}^i. \quad (18)$$

Заметим, что условием (16) обеспечивается следующее:

$$\forall i \neq i' \quad \mathcal{E}^i \cap \mathcal{E}^{i'} = \emptyset,$$

а это означает, что одновременно с решением задачи разложения по поверхностям построена декомпозиция (18) множества E на попарно непересекающиеся подконфигурации (17) с числом компонент декомпозиции равным $m_{h(x)}$.

В зависимости от того, какая функция $h(x)$ будет взята за основу разложения (15) точечной конфигурации E по поверхностям, формулы (17), (18) будут задавать разложение E по параллельным плоскостям, вложенным сферам, эллипсоидам, кусочно-линейным поверхностям и т.п. Нас будут интересовать, основанные на вышеуказанных разложениях по поверхностям, декомпозиции PSC на сферически расположенные подконфигурации, в т.ч. меньших размерностей, а также декомпозиции PSC на полиэдрально-сферические подконфигурации меньших размерностей.

2.1.1. Разложение ГРС на PSCs. Пусть E — конечная точечная конфигурация в R^n . Выберем точку $a \in R^n$ и построим разложение E по функции $h(x) = (x-a)^2$. Оно будет иметь вид:

$$S^i = S(a, r_i) = \{x \in R^n : (x-a)^2 = r_i^2\}, i \in J_{m_{h(x)}}, \quad (19)$$

$$0 \leq r_i < r_{i+1}, i \in J_{m_{h(x)}-1}. \quad (20)$$

(19), (20) задает разложение E по семейству вложенных гипersфер, первая из которых будет вырождена в точку в случае, если $a \in E$ и соответственно $r_1 = 0$. Это разложение определяет декомпозицию (17) множества E на PSCs:

$$\mathcal{E}^i = E(a, r_i), i \in J_{m_{h(x)}}. \quad (21)$$

В этих обозначениях формула (18) приобретает вид:

$$E = \bigcup_{i=1}^{m_{h(x)}} E(a, r_i) \quad (22)$$

и указывает параметры декомпозиции E на сферически расположенные, следовательно, и вершинно расположенные, подконфигурации.

2.1.2. Разложение PSC на PSCs. Пусть теперь E будет полиэдрально-сферической конфигурацией, т.е. существуют a, r такие, что $E = E(a, r)$. Тогда для произвольной функции $h(x)$, определенной на E , формула (17) будет задавать декомпозицию этого множества на PSCs, задаваемую разложением E по поверхностям вида (15), (16). Теперь формулы (17), (18) можно представить в виде:

$$\mathcal{E}^i = \mathcal{E}^i(a, r) = E(a, r) \cap \mathcal{S}^i \neq \emptyset, i \in J_{m_{h(x)}}, \quad (23)$$

$$E(a, r) = \bigcup_{i=1}^{m_{h(x)}} \mathcal{E}^i(a, r), \quad (24)$$

указывая, тем самым, и параметры полиэдрально-сферических подконфигураций.

Итак, мы показали как PSCs могут применяться для декомпозиции FPCs на вершинно расположенные конфигурации (VLCs). Также показано, что разложения по поверхностям служит инструментом декомпозиции PSC на PSCs меньшей мощности. Заметим, что поскольку компоненты (21), (23) разложений (22), (24) являются собственными подмножествами E , для них справедливо:

$$d_{\mathcal{E}^i} = \dim \mathcal{E}^i \leq d_E, i \in J_{m_{h(x)}}, \quad (25)$$

соответственно, их радиусы $\hat{r}_{\mathcal{E}^i}$, $i \in J_{m_{h(x)}}$, находятся в соотношении

$$\hat{r}_{\mathcal{E}^i} \leq \hat{r}, i \in J_{m_{h(x)}}, \quad (26)$$

причем (26) выполняется как равенство максимум для одной подконфигурации \mathcal{E}^{i_0} , для которой справедливо $\hat{a} \in P^{i_0}$, где $P^i = \text{conv } \mathcal{E}^i$, $i \in J_{m_{h(x)}}$, т.е. в целом, разложение PSC по поверхностям приводит декомпозиции на PSCs не только меньших мощностей, но и меньших радиусов.

При переходе к рассмотрению декомпозиции E вида (16)-(18), редукция задач, поставленных на FPC E , осуществляется по нескольким направлениям: первое — это снижение размерностей составляющих конфигураций, т.е. интерес представляет поиск условий, при которых оценки (25) выполняются как строгие неравенства (далее Редукция 1,

R1); второе — уменьшение радиусов PSCs по сравнению с E и с этим связан поиск условий, при которых (26) выполняются как строгие неравенства (далее Редукция 2, R2); третье — это переход при редукции от FPC заданного вида к FPCs другого вида (далее Редукция 3, R3); четвертое — это переход к подконфигурациям меньшей длины (далее Редукция 4, R4). Под длиной FPC E подразумевается число координат его элементов, принимающих на E более одного значения. R4 позволяет переходить в пространство меньшей размерности.

Возникает также вопрос определения параметров $\mathcal{E}^i(a_i, r_i)$, $i \in J_{m_{h(x)}}$ по параметрам $E(a, r)$, в т.ч. $\hat{\mathcal{E}}^i(\hat{a}_i, \hat{r}_i)$, $i \in J_{m_{h(x)}}$ по параметрам $\hat{E}(\hat{a}, \hat{r})$, т.е. решения Задач 2, 3 для элементов декомпозиции E .

Теперь рассмотрим свойства PSCs, позволяющие формировать их декомпозиции на PSCs меньших размерностей и радиусов.

2.2. Теоретико-множественные операции над PSCs. PSCs могут быть образованы из других PSCs в результате теоретико-множественных операций. Рассмотрим некоторые из них.

Введем в рассмотрение набор из $L \geq 2$ точечных конфигураций, заданных в евклидовом пространстве размерности не выше n :

$$E^l \subset R^{n^l}, \quad n_l \leq n, \quad l \in J_L, \quad (27)$$

среди которых есть полиэдрально-сферические, т.е.

$$\exists L' \in J_L \quad E^l \subseteq S^{l, \min} = S_{r^l, \min} \left(a^{l, \min} \right), \quad l \in J_{L'}, \quad (28)$$

$$\exists L'' \in J_{L'}: |E^l| < \infty, \quad l \in J_{L''}. \quad (29)$$

Пусть также

$$P^l = \text{conv } E^l, \quad l \in J_L. \quad (30)$$

Заметим, что, за счет условия (29), среди множеств вида (30) будут многогранники, но не обязательно все. Будем предполагать, что для многогранников, присутствующих в семействе (30) известны их H -представления: $\forall l \in J_L: |E^l| < \infty$

$$P^l = \left\{ x \in R^{n^l} : A^l x = b^l, \quad A^l x \leq b^l, \quad A^l \in R^{m^l \times n^l}, \quad A^l \in R^{m^l \times n^l} \right\}. \quad (31)$$

Обобщим понятие (2) индуцирующего мультимножества G_E конечной точечной конфигурации на произвольную точечную конфигурацию $E \subseteq R^n$. Назовем мультимножество $G_E \subseteq R^l$ индуцирующим мультимножеством точечной конфигурации $E \subseteq R^n$, если оно образовано в результате объединения индуцирующих мультимножеств всевоз-

можних FPCs, сформированных из $E : G_E = \bigcup_{E' \subseteq E, |E'| < \infty} G_{E'}$. Заметим, что

индуцирующее мультимножество будет конечным для конечных точечных конфигураций, счетным — для счетных и несчетным для несчетных точечных конфигураций.

Будем формировать из них FPC E как результат некоторых теоретико-множественных операций над конфигурациями (27). При этом будем полагать, что образованное в результате множество E не только не пусто, но и не вырождено в точку, т.е. имеет вид (1). А это, в свою очередь, предполагает, что PSCs, участвующие в его формировании, не вырождены в точку, т.е.

$$1 < |E^l| < \infty, l \in J_L, \quad (32)$$

а, следовательно, $r^{l, \min} \in R_{>0}^1, l \in J_L$.

2.2.1 Подмножество. Пусть $l = 1, n_1 = n$, $E^1 = \hat{E}^1(a^{1, \min}, r^{1, \min})$ — PSC размерности d_{E^1} , индуцированная мультимножеством G_{E^1} , а точечная конфигурация E является собственным подмножеством E^1 — $E \subset E^1$. Тогда E является PSC с параметрами $E = E(a^{1, \min}, r^{1, \min})$ и такую, что $n_E < |E^1|$,

$$d_E \leq d_{E^1}, \quad (33)$$

и индуцирована мультимножеством $G_E \subseteq G_{E^1}$. Соответственно E будет VLC. Для многогранника P вида справедливо строгое включение: $P \subset P^1$. При этом центр $a^{1, \min}$ и радиус $r^{1, \min}$ конфигурации E^1 являются центром и радиусом E тогда и только тогда, когда неравенство (33) обращается равенство $S^{\min} = S^{1, \min} \Leftrightarrow d_E = d_{E^1}$.

2.2.2 Пересечение. Пусть E образуется в результате пересечения точечных конфигураций, удовлетворяющих условию (28), (29). Тогда имеем:

$$E = \bigcap_{l=1}^L E^l, \quad (34)$$

$$E^l \subset R^n, l \in J_L. \quad (35)$$

Будем также полагать, что в результате операции (34) формируется собственное подмножество каждой из точечных конфигураций (35), т.е.

$$E \subset E^l, l \in J_L. \quad (36)$$

Перечислим некоторые свойства FPC (34). Она является PSC как подмножество PSCs E^l , $l \in J_{L'}$, в частности, $E \subseteq S^{l, \min}$, $l \in J_{L'}$, где L' определено из (28). Соответственно, E — VLC.

Мощность и размерность E удовлетворяет условиям:

$$n_E \leq \min_{l \in J_{L'}} |E^l|, \quad (37)$$

$$d_E \leq \min_{l \in J_{L'}} d_{E^l} \quad (38)$$

Для индуцирующего E мультимножества справедливо нестрогое включение: $G_E \subseteq \bigcap_{l=1}^L G_{E^l}$, а для многогранника P , за счет выполнения условия (36) и вершинной расположенности входящих в семейство (35) конфигураций, — строгое включение $P \subset \bigcap_{l=1}^L P^l$. Для радиуса PSC E справедлива оценка: $r^{\min} \leq \min_{l \in J_{L'}} r^{l, \min}$.

2.2.3. Сечение PSC плоскостью. Рассмотрим частный случай формирования E вида (34), когда $L = 2$, $L' = 1$, а точечная конфигурация E^2 представляет собой гиперплоскость, т.е. формулы (28), (29), (34) приобретают вид:

$$E = E^1 \cap E^2 \neq \emptyset, \quad (39)$$

где $E^1 \subseteq S^{1, \min} = S_{r^1, \min}(a^1, \min)$, $|E^1| < \infty$, а для конфигурации E^2 верно:

$$\exists c_2 \in R^n, d_2 \in R^1 : |c_2| = 1, E^2 = \{x \in R^n : c_2 x = d_2\}. \quad (40)$$

Таким образом, рассматривается FPC, образованная в сечении PSC E^1 плоскостью E^2 и которая, очевидно, является PSC.

В данном случае справедливы все вышеприведенные свойства конфигурации E как пересечения двух точечных конфигураций, одна из которых — PSC. Однако специфика конфигурации E^2 позволяет конкретизировать эти свойства следующим образом:

- поскольку $d_{E^2} = n - 1$, формула (38) приобретает вид

$$d_E \leq \min\{d_{E^1}, n - 1\}, \quad (41)$$

в частности, если E^1 — полномерная FPC, то выполнено (9);

- учитывая несчетность E^2 , формула (37) приобретает вид:

$$n_E \leq |E^1|. \quad (42)$$

- H -представление многогранника P можно построить добавлением к H -представлению (31) многогранника P^1 уравнения плоскости E^2 , в результате чего имеем:

$$P = \left\{ x \in R^n : c_2 x = d_2, A^1 x = b^1, A^1 x \leq b^1, A^1 \in R^{m^1 \times n}, A^1 \in R^{m^1 \times n} \right\};$$

- в этом случае решение Задачи 3 выписывается в явном виде:

$$r^{\min} = \sqrt{\left(r^{1,\min}\right)^2 + c_2^T a^{1,\min} - d_2}, a^{\min} = a^{1,\min} - c_2 \left(c_2^T a^{1,\min} - d_2\right). \quad (43)$$

Замечание 1. Если для E^1 Задача 3 не решена, т.е. центр и радиус этой конфигурации неизвестны, но при этом известно некоторое решение r^1, a^1 Задачи 2, можно воспользоваться обобщением

$$r = \sqrt{r_1^2 + c_2^T a^1 - d_2}, a = a^1 - c_2 \left(c_2^T a^1 - d_2\right).$$

формулы (43) и решить на E в явном виде Задачу 2.

2.2.4. Пересечение PSC и гиперсферы. Пусть снова формируется конфигурация E вида (34) для $L=2$, при этом $L'=2, L''=1$, т.е. E^1 — PSC, а E^2 - гиперсфера. В этом случае итоговая FPC E будет не только полиэдрально-сферической, поскольку $E \subseteq S^{1,\min}, E \subseteq S^{2,\min}$, но будет лежать в плоскости пересечения гиперсфер $S^{1,\min}, S^{2,\min}$.

В самом деле, выпишем уравнения этих гиперсфер:

$$\left(x - a^{1,\min}\right)^2 = \left(r^{1,\min}\right)^2, \left(x - a^{2,\min}\right)^2 = \left(r^{2,\min}\right)^2$$

и вычтем одно из другого, в результате получаем уравнение гиперплоскости (далее FPC E^3):

$$2\left(a^{1,\min} - a^{2,\min}\right)^T x = r^{1,\min} - r^{2,\min} - \left(a^{1,\min}\right)^2 + \left(a^{1,\min}\right)^2.$$

Перепишем его в форме (40), «нормируя» это уравнение:

$$\frac{\left(a^{1,\min} - a^{2,\min}\right)^T x - r^{1,\min} - r^{2,\min} - \left(a^{1,\min}\right)^2 + \left(a^{1,\min}\right)^2}{\left|a^{1,\min} - a^{2,\min}\right|} = \frac{r^{1,\min} - r^{2,\min} - \left(a^{1,\min}\right)^2 + \left(a^{1,\min}\right)^2}{2\left|a^{1,\min} - a^{2,\min}\right|}.$$

Теперь множество (39) представим в эквивалентной форме

$$E = E^1 \cap E^3 \neq \emptyset, \quad (44)$$

где E^1 — PSC, а E^3 — гиперплоскость $E^3 = \left\{x \in R^n : c_3 x = d_3\right\}$,

$$c_3 = \frac{a^{1,\min} - a^{2,\min}}{\left|a^{1,\min} - a^{2,\min}\right|}, d_3 = \frac{r^{1,\min} - r^{2,\min} - \left(a^{1,\min}\right)^2 + \left(a^{1,\min}\right)^2}{2\left|a^{1,\min} - a^{2,\min}\right|}. \quad (45)$$

Применив формулу (43) для этого случая, получаем, что решение Задачи 3 для E имеет вид:

$$r^{\min} = \sqrt{\left(r^{1,\min}\right)^2 + c_3^T a^{1,\min} - d_3}, \quad a^{\min} = a^{1,\min} - c_3 \left(c_3^T a^{1,\min} - d_3\right),$$

где c_3, d_3 заданы формулой (45).

Замечание 2. Аналогичные рассуждения справедливы и для случая, когда для E^l известно только решение r^l, a^l Задачи 2 ($l = 1, 2$), тогда в пересечении этих двух конфигураций образуется PSC E , параметры которой определяются по формуле:

$$r = \sqrt{r_1^2 + c_3^T a^1 - d_3}, \quad a = a^1 - c_3 \left(c_3^T a^1 - d_3\right),$$

где $c_3 = \frac{a^1 - a^2}{|a^1 - a^2|}$, $d_3 = \frac{r^1 - r^2 - (a^1)^2 + (a^2)^2}{2|a^1 - a^2|}$.

Что касается других свойств E , они будут подобны свойствам PSC (39)–(40). Так будут справедливы оценки (41) и (42) для ее размерности и мощности, формула (32) будет означать, что в пересечении PSC с гиперсферой образуется PSC размерности в точности на единицу меньше размерности исходной FPC.

Обобщая результаты данного пункта, можно сказать, что в непустом пересечении PSC с гиперсферами и плоскостями образуется одноточечное множество либо PSC меньшей размерности, центр и радиус которой могут быть найдены в явном виде последовательным включением в рассмотрение следующей FPC из семейства (35).

2.2.5. Объединение. Пусть E образуется в результате объединения FPCs вида (28), (29), (35), т.е.

$$E = \bigcup_{l=1}^L E^l. \quad (46)$$

Будем также полагать, что $E \supset E^l$, $l \in J_L$, и что описанные сферы минимального радиуса вокруг них различны, т.е.

$$\left[a^{i,\min}, r^{i,\min} \right] \neq \left[a^{j,\min}, r^{j,\min} \right], \quad i, j \in J_L, \quad i < j. \quad (47)$$

Понятно, что в результате объединения таких PSCs, как правило, будет образовываться FPC, не являющаяся PSC. С другой стороны, как было показано выше, возможно разложение PSC по параллельным плоскостям, результате чего осуществляется декомпозиция исходной конфигурации на PSCs меньшей размерности. Укажем условие, достаточное для того, чтоб в результате объединения PSCs снова

образовывалась PSC. Итак, пусть все конфигурации (35) — PSCs, т.е. в представлении (28), (29) $L' = L'' = L$.

Теорема 4. Если существуют $c_l, d_l, t_l \in R^n, l \in J_L$, такие, что

$$c_i x = d_i t_i, i \in J_L; \quad (48)$$

$$a^{i,\min} + c_i t_i = a^{i+1,\min} + c_{i+1} t_{i+1}, i \in J_{L-1}; \quad (49)$$

$$(c_i t_i)^2 + (r^{i,\min})^2 = (c_{i+1} t_{i+1})^2 + (r^{i+1,\min})^2, i \in J_{L-1}. \quad (50)$$

Тогда FPC (46) будет PSC, центр и радиус которой может быть найден по формуле:

$$a^{\min} = a^{1,\min} + c_1 t_1, r^{\min} = \sqrt{(c_1 t_1)^2 + (r^{1,\min})^2}. \quad (51)$$

В самом деле, условие (48) говорит о том, что размерность составляющих FPCs меньше размерности пространства, и задает плоскости, в которых они лежат. В этом случае каждая из составляющих конфигураций лежит на семействе гипербол с центрами на прямой, параллельной нормали к соответствующей плоскости (48), проведенной через центр этой конфигурации. Необходимым условием того, чтобы E была PSC является то, что все эти прямые имели общую точку O' , что и представлено условием (49). Наконец, последнее условие (50) выражает требование, чтобы точки всех составляющих конфигураций были равноудалены от точки O' . Если это условие выполнено и точка O' определена однозначно, она является центром полученной PCS, параметры которой заданы формулой (51).

Также можно сказать, что

$$n_E \geq \max_{l \in J_L} |E^l|, d_E \geq \max_{l \in J_L} d_{E_l}. \quad (52)$$

Если же выполнены условия теоремы 4, а также условие (47), то неравенства (52) будут выполняться строго, т.е. $n_E > \max_{l \in J_L} |E^l|$, $d_E > \max_{l \in J_L} d_{E_l}$.

2.2.6. Декартово произведение. Пусть n разбито на L слагаемых $n^1, \dots, n^L \in J_n, n = \sum_{l=1}^L n^l$, тогда условие (27) представимо в виде:

$$E^l \subset R^{n^l}, n_l \leq n - L + 1, l \in J_L, \quad (53)$$

при этом среди точечных конфигураций (53) есть PSCs.

Пусть E представляет собой декартово произведение (прямое произведение, а direct product) конфигураций (53):

$$E = \bigotimes_{l=1}^L E^l, \quad (54)$$

т.е.

$$E = \{x = (x^1, \dots, x^L) \in R^n : x^l \in E^l, l \in J_L\}, \quad (55)$$

где $x = (x^1, \dots, x^L) = (x_{11}, \dots, x_{n_1 1}, \dots, x_{1L}, \dots, x_{n_L L})^T$.

Исследуем, при каких условиях множество вида (54) будет PSC.

Мощность декартового произведения множеств — $n_E = \prod_{l=1}^L |E^l|$,

откуда следует, что конечность точечных конфигураций (53) является необходимым условием того, чтобы конфигурация (54) была PSC.

Теорема 5. Множество вида (54) является PSC тогда и только тогда, когда множества (53) — PSCs.

Доказательство. *Необходимость.* Зафиксируем $l \in J_L$. Рассмотрим сферу $S_r(a)$, описанную вокруг E , и вместе с множеством E спроектируем ее на подпространство:

$$\{x \in R^n : x_i = 0, i \in \{1, \dots, n_0^{l-1} - 1, n_0^l + 1, \dots, n\}\}, \text{ где } n_0^l = \sum_{i=1}^l n^i, l \in J_L,$$

осуществив таким образом спуск в пространство R^{n^l} . В результате получим $n_l - 1$ -сферу, уравнению которой удовлетворяют все точки E^l , откуда и следует сферическая расположенность E^l . В силу произвольности выбора l получаем, что все конфигурации вида (53) — PSCs.

Достаточность. Предположим, что конфигурации вида (53) — PSCs. Нетрудно заметить, что для каждого $l \in J_L$ уравнению

$$(x^l - a^l)^2 = r^{l2}, \quad (56)$$

будут удовлетворять не только все точки E^l , но и все точки E в представлении (55). Сложив все уравнения вида (56) по $l \in J_L$, получим

$\sum_{l=1}^L (x^l - a^l)^2 = \sum_{l=1}^L r^{l2}$. Это уравнение гиперсферы, которой удовлетворяют все точки множества (55), а ее параметры:

$$a = \bigotimes_{l=1}^L a^l, r = \left(\sum_{l=1}^L r^{l2}\right)^{1/2}. \quad (57)$$

При этом если конфигурации (53) заданы параметрами и $E^l = E^l(a^l, r^l)$, $l \in J_L$, то формула (57) задает параметры PSC. Если

же PSRs (53) представлены в форме $E^l = \hat{E}^l(a^{\min,l}, r^{\min,l})$, $l \in J_L$, то центр и радиус PSC, образованной в результате их декартова произведения, имеют вид $a^{\min} = \bigotimes_{l=1}^L a^{l,\min}$, $r^{\min} = \left(\sum_{l=1}^L (r^{l,\min})^2 \right)^{1/2}$. Также легко определить размерность полученной конфигурации (53):

$$d_E = \sum_{l=1}^L d_{E^l} \quad (58)$$

и записать критерий полномерности: FPC (53) полномерная тогда и только тогда, когда FPCs (53) — полномерные:

$$d_E = n \Leftrightarrow d_{E^l} = n_l, \quad n_l = d_{E^l} \quad d = \sum_{l=1}^L d_l. \quad (59)$$

Для многогранника P будет справедливо

$$P = \bigotimes_{l=1}^L P^l, \quad (60)$$

а его H -представление можно построить, переписав условие (31) в форме:

$$A^l x^l = b^l, \quad A^l x^l \leq b^l, \quad A^l \in R^{m^l \times n^l}, \quad A^l \in R^{m^l \times n^l}, \quad l \in J_L. \quad (61)$$

Система (61) задает H -представление многогранника (60) при условии, что для его точек используется представление $P = \{x = (x^1, \dots, x^L) \in R^n : x^l \in P^l, l \in J_L\}$.

2.2.7. Прямая сумма. Пусть для множеств (27) выполнено условие (53), а также начало координат является точкой многогранников (30): $\forall l \in J_L \quad \mathbf{0} \in P^l$, а E — прямая сумма множеств (27):

$$E = \bigoplus_{l=1}^L E^l. \quad (62)$$

т.е. $E = \bigcup_{l=1}^L E^l$, $E^{l'} = \{x = (x^1, \dots, x^L) \in R^n : x^l \in E^l, x^{l'} = \mathbf{0} \in R^{n^{l'}}, l' \neq l\}$,

$l \in J_L$. Для размерности (62) справедлива формула (58), а условие полномерности задается условием (59). В отличие от декартового произведения, взятие прямой суммы PSCs не всегда приводит к образованию PSC. Имеет место следующее утверждение.

Теорема 6. Множество вида (62) является PSC тогда и только тогда, когда множества (53) — PSCs, а также выполнено условие:

$$(r^{l,\min})^2 - (a^{l,\min})^2 = (r^{l+1,\min})^2 - (a^{l+1,\min})^2, \quad l \in J_{L-1}.$$

Если условия теоремы 6 выполнены, множество (62) — PSC с центром в начале координат и радиуса $r = \sqrt{(r^{1,\min})^2 - (a^{1,\min})^2}$.

Если E — полномерная PSC, ее центр и радиус следующие:

$$\left[a^{\min}, r^{\min} \right] = \left[\mathbf{0}, \sqrt{(r^{1,\min})^2 - (a^{1,\min})^2} \right]. \quad (63)$$

В противном случае формула (63) задает некоторую пару (a, r) .

Выводы. Полученные результаты находят приложения в решении широкого класса практических задач, моделирующийся в виде оптимизационных задач на PSCs, среди которых задачи теории расписаний, графовые модели, задачи балансировки, размещения, упаковки и многие другие задачи оптимального планирования и геометрического проектирования [1, 5, 6, 10, 17]. В частности, они применимы для усовершенствования и развития группы полиэдрально-сферических методов — точных и приближенных [9–11,16], а также в построении выпуклых продолжений с PSCs [16, 18], позволяющие уточнение известных на данный момент оценок.

Список использованной литературы:

1. Pardalos P.M. Handbook of combinatorial optimization / P.M. Pardalos, D-Z. Du, R.L. Graham. — New York : Springer, 2013. — 3409 p.
2. Korte V. Combinatorial Optimization: Theory and Algorithms / V. Korte, J. Vygen. — Heidelberg ; New York : Springer, 2012. — 660 p.
3. Papadimitriou C. H. Combinatorial Optimization: Algorithms and Complexity / C. H. Papadimitriou, K. Steiglitz. — Dover Publications Inc., 2013. — 528 p.
4. Grande F. On k-level matroids: geometry and combinatorics / F. Grande Doctor of Natural Sciences Dissertation. — Berlin : Institut für Mathematik und Informatik, Freie Universität Berlin, 2015. — 122 p.
5. Стоян Ю. Г. Математические модели и оптимизационные методы геометрического проектирования / Ю. Г. Стоян, С. В. Яковлев. — К. : Наук. думка, 1986. — 268 с.
6. Стоян Ю. Г. Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації / Ю. Г. Стоян, О. О. Ємець. — К. : Ін-т системн. дослідж. освіти, 1993. — 188 с.
7. Стоян Ю. Г. Евклидовы комбинаторные конфигурации: монография / Ю. Г. Стоян, С. В. Яковлев, О. С. Пичугина. — Харьков : Константа, 2017. — 404 с.
8. Пичугина О. С. Непрерывные функциональные представления в задачах дискретной оптимизации : монография / О. С. Пичугина, С. В. Яковлев. — Харьков : Коллегиум, 2018. — 312 с.
9. Pichugina O. Optimization on Polyhedral-Spherical Sets: Theory and Applications / O. Pichugina, S. Yakovlev // In 2017 IEEE First Ukraine Conference on Electrical and Computer Engineering (UKRCON). — 2017. — P. 1167–1175.

10. Stoyan Y. G. Quadratic optimization on combinatorial sets in R^n / Y. G. Stoyan, S. V. Yakovlev, O. V. Parshin // *Cybernetics and Systems Analysis*. — 1991. — Vol. 27(4). — P. 562–567.
11. Yakovlev S. V. Properties of Combinatorial Optimization Problems Over Polyhedral-Spherical Sets / S. V. Yakovlev, O. S. Pichugina // *Cybernetics and Systems Analysis*. — 2018. — Vol. 54 (1). — P. 99–109.
12. Пичугина О. С. Поверхностные и комбинаторные отсечения в задачах евклидовой комбинаторной оптимизации / О. С. Пичугина // *Мат. та комп. модел. Сер. Фіз.-мат. науки*. — 2016. — Вип. 13. — С. 144–160.
13. Пичугина О. С. Методы глобальной оптимизации на перестановочном многограннике в комбинаторных задачах на вершинно расположенных множествах / О. С. Пичугина, С. В. Яковлев // *Мат. та комп. модел. Сер. Фіз.-мат. науки*. — 2017. — Вип. 15. — С. 152–158.
14. Яковлев С. В. Задачи оптимизации на евклидовых комбинаторных конфигурациях и их свойства / С. В. Яковлев, О. С. Пичугина // *Пит. прикл. матем. і матем. модел.* — 2017. — Вип. 17. — С. 278–263.
15. Schneider P. *Geometric Tools for Computer Graphics* /. P. Schneider, D. H. Eberly. — Amsterdam: Morgan Kaufmann, 2002. — 1056 p.
16. Pichugina O. Convex extensions and continuous functional representations in optimization, with their applications / O. Pichugina, S. Yakovlev // *J. Coupled Syst. Multiscale Dyn.* — 2016. — Vol. 4 (2). — P. 129–152.
17. Yakovlev S. V. The Method of Artificial Space Dilation in Problems of Optimal Packing of Geometric Objects / S. V. Yakovlev // *Cybernetics and Systems Analysis*. — 2017. — Vol. 53 (5). — P. 825–832.
18. Pichugina O. S. Continuous Representations and Functional Extensions in Combinatorial Optimization / O. S. Pichugina, S. V. Yakovlev // *Cybernetics and Systems Analysis*. — 2016. — Vol. 52 (6). — P. 921–930.

POLYEDRAL-SPHERICAL CONFIGURATIONS: PECULARITIES AND APPLICATIONS

In the paper, finite point configurations inscribed into a hypersphere (polyhedral-spherical configurations, PSCs) are considered, and their algebraic topological and topological metric properties are studied.

The following problems are posed: detecting PCSs among finite point configurations; determining a center and radius of a circumsphere for a PSC; determining a center and a radius of a PSC, i.e., the parameters of the minimum radius circumsphere; a search for possible ways of reducing problems on PSCs, in particular, their decomposition into polyhedral-spherical sub-configurations. Three classes of PSCs — simplex, permutational, and two-level concerning coordinates — are singled out, their features are studied, and the posed problems are solved. Also, their connection with the basic sets of Euclidean combinatorial configurations of permutations and Boolean vectors is established.

Properties of general PSCs are investigated including determining the center and radius of PSCs formed as a result of set-theoretic operations over point configurations, among which PSCs are present. An important PSCs peculiarity

is their coincidence with a vertex set of their convex hull, i.e., they belong to a vertex-located class. Respectively, they are formed as an intersection of the hypersphere with their convex hull. This allows applying the convex extension theory for convexification of functions given on PSCs when optimizing them over the sets. This implies one can assume that both objective function and functional constraints in optimization problems are convex and smooth. This, in turn, opens up broad prospects for developing methods such as Branches and Bound based on: a) in branching — on special classes of PSCs structural features; b) in bounding — on estimates obtained as a result of solving convex polyhedral relaxation problems or spherical relaxation problems with convex objective functions and functional constraints.

In this paper, problems of PSCs decomposition into convex surfaces are discussed extensively, in particular, into families of embedded hyperspheres or parallel planes. With these problems, the problem of decomposition of PSCs into polyhedral-spherical sub-configurations is closely interconnected, which solution is also presented in this work.

The results are of own theoretical interest. Also, they can be incorporated into computational algorithms implemented polyhedral-spherical methods for optimization over PSCs.

Keywords: *finite point configuration, Euclidean combinatorial configuration, polyhedral-spherical set, vertex-located set, combinatorial optimization, polyhedron, hypersphere.*

Отримано: 16.05.2018

UDC 654.165

V. Yu. Semenov, Ph. D.

Scientific and Production Enterprise «Delta SPE», Kiev

METHOD OF ITERATIVE SINGLE-CHANNEL BLIND SEPARATION FOR QPSK SIGNALS

A method for single-channel blind separation of two QPSK (quadrature phase shift keying) signals is proposed. The method is based on the iterative maximization of a posteriori probability for mixture's components. The relations for a posteriori probabilities are derived and on its basis the iterative algorithm for the estimation of mixture's components is developed. The algorithm for the estimation of channel parameters (amplitudes, phases, time delays) is also developed. The effectiveness of method is demonstrated for various noise levels and time diversities between channels. The proposed parameters' estimation procedure provides significant reduction of bit error rate (BER) over the case of unknown parameters.

Key words: *Blind Source Separation, BPSK (Binary Phase Shift Keying), QPSK (Quadrature Phase Shift Keying).*

Introduction. Blind Source Separation is rapidly evolving since 1990s and comprises wide field of problems in telecommunications. There are a lot of existing approaches for the solution of blind source separation problem (see, e.g. [1–6]).

A general statement of blind separation problem is shown at Fig. 1. There are p sources which are mixed by some vector-function at additive noise background. Having m sensors, separation algorithm has to estimate the source signals.

Most of methods imply that the number of sensors is not less than the number of sources. However, the more frequently found case is of one sensor and several sources (underdetermined blind separation problem). When there are less sensors than sources, the problem is known to be underdetermined and turns out to be quite challenging. To remove the indeterminacy, we need to exploit any a priori knowledge induced by the system.

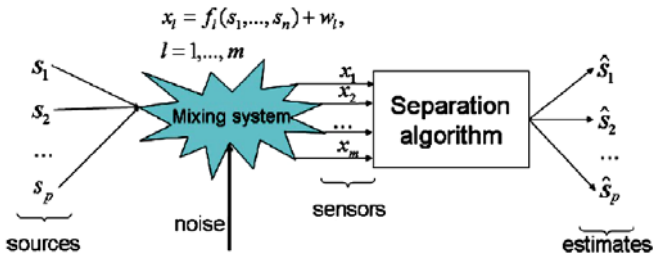


Fig. 1. General statement of blind source separation problem

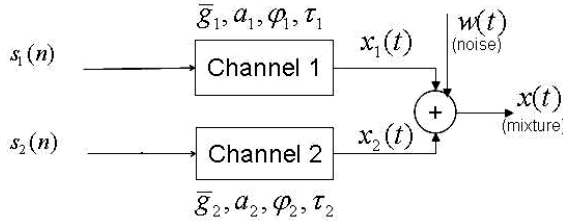


Fig. 2. Statement of considered underdetermined BSS problem

So, consider the problem from radio communications presented at Fig. 2. We have two discrete sequences $s_1(n)$, $s_2(n)$ which are both QPSK, i.e. possess values $\pm 1 \pm j$. They are passed through two independent communication channels. Their mixture $x(t)$ is the observation signal. The goal is to restore original sequences $s_1(n)$, $s_2(n)$.

In this paper the Bayesian approach proposed in [2] for the case of BPSK signals is further developed. We expand this approach for the case of QPSK signals and, besides, add channel parameters estimation procedure, while in work [2] the channel parameters were assumed to be known. Higher order modulations can be handled as well, though computational expenses grow exponentially with the modulation order.

The organization of the paper is as follows. First, the structure of the proposed receiver is described. Then the idea of Bayesian approach to the estimation of original QPSK sequences as well as iterative separation algorithm is explained. The following sections include estimation of channel parameters and the experimental results.

Preliminaries. As is known, in the data communication system, the transmitted QPSK sequences of symbols must be bandlimited using a pulse shaping filter $g(t)$ before transmitting. The received mixture of two digitally modulated signals received by one antenna in single channel can be expressed as:

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) + w(t),$$

where $x_u(t), u = 1, 2$ are the signals from two sources:

$$x_u(t) = a_u e^{j\varphi_u} \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_u(n) g(t - nT_s - \tau_u), u = 1, 2$$

and $s_u(n); u = 1, 2$ are original QPSK sequences to be estimated; T_s is a symbol period; a_u are the amplitudes; φ_u are the phases; τ_u are the time shifts. $g(t)$ is a total channel response (assumed to be raised square-root cosine with known roll-off), $w(t)$ is background noise with variance σ^2 .

The structure of proposed receiver. In this section we derive the separation algorithm, described in [2], but we do not limit ourselves to BPSK modulation and show that this approach can be applied to any kind of modulation. Structure of proposed receiver is presented at Fig. 3. The idea is to produce two discrete sequences: $y_1(n)$ synchronous with the first source and $y_2(n)$ synchronous with second source.

The mixture is passed through filter $g(t)$. Introducing notation $h(t) = g(t) \otimes g(t)$ for the «normal» raised cosine filter with the same roll-off and taking into account that $g(t - \tau_u) \otimes g(t) = h(t - \tau_u), u = 1, 2$, we have the following output of matched filter:

$$y(t) = a_1 e^{j\varphi_1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_1(n) h(t - nT_s - \tau_1) + a_2 e^{j\varphi_2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_2(n) h(t - nT_s - \tau_2). \quad (1)$$

Sampling of the signal (1) at times $(\tau_1 + nT_s)$ and $(\tau_2 + nT_s)$ respectively, produces two sequences:

$$y_u(n) = a_u e^{j\varphi_u} s_u(n) + a_{u'} e^{j\varphi_{u'}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_{u'}(n) h(t + \tau_1 - \tau_2) + w_u(n), u = 1, 2,$$

where $u' = 3 - u$ denotes the channel index, opposite to u .

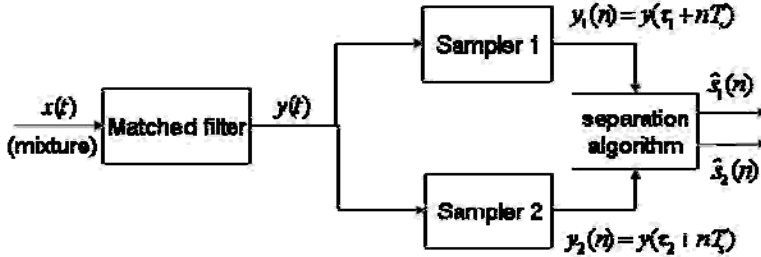


Fig. 3. The structure of the receiver

Let us assume that the impulse response $h(t)$ is essentially non-zero only for $(2l + 1)$ symbols (a common example is $l = 2$). Using this assumption, the model of observations transforms to:

$$\begin{cases} y_1(n) = a_1 e^{j\varphi_1} s_1(n) + a_2 e^{j\varphi_2} h_{2,\tau} s_2^T(n) + w_1(n), \\ y_2(n) = a_2 e^{j\varphi_2} s_2(n) + a_1 e^{j\varphi_1} h_{1,\tau} s_1^T(n) + w_2(n), \end{cases} \quad (2)$$

where

$$\begin{aligned} h_{u,\tau} &= \{h(kT_s + \tau_u - \tau_{u'}), k = -l \dots l, \\ s_u(n) &= \{s_u(n + k)\}, k = -l \dots l. \end{aligned}$$

So, as can be seen from observation model (2), the observed signals $y_1(n)$ and $y_2(n)$ include first signal plus weighted tail of the second and second signal plus weighted tail of the first. We assume that the observation noises w_1, w_2 possess the same variance σ^2 . So, having observations $y_1(n)$ and $y_2(n)$, our goal is to find estimates of $s_1(n)$ and $s_2(n)$.

Bayesian estimation of original QPSK sequences. The main idea of proposed approach is to maximize maximum a posteriori probability of transmitted symbols for each time instant $n = 1, \dots, N$:

$$\max_{m=1..4} P(s_u(n) = S_m / y_u(n)), u = 1, 2; S_m \in \{\pm 1 \pm j\}.$$

Similarly to technique, implemented in [2], one can show that a posteriori probability for u -th signal is connected with that of the opposite signal:

$$\begin{aligned} P(s_u(n) = S_m / y_u(n)) &= \\ &= \sum_{s \in S_l} P(s_u(n) = S_m / y_u(n), s_{u'}(n) = s) P(s_{u'}(n) = s). \end{aligned} \quad (3)$$

Assuming that the observation noise is Gaussian,

$$P(s_u(n) = S_m / y_u(n), s_{u'}(n) = s) = \exp(-0.5\sigma^{-2}d_{u,m,s}^2(n))$$

(we dropped the denominator of Gaussian density for simplicity), where a priori discrepancy is given by

$$d_{u,m,s}(n) = \left| y_u(n) - (S_m a_u \exp(j\varphi_u) + a_{u'} \exp(j\varphi_{u'}) h_{u',\tau} s^T) \right|$$

and

$$P(s_{u'}(n) = s) = \prod_{k=-l..l} P(s_{u'}(n+k) = s_{k+l+1}).$$

Thus, formula (3) turns to

$$\begin{aligned} P(s_u(n) = S_m / y_u(n)) &= \\ &= \sum_{s \in S_l} \exp(-0.5d_{u,m,s}\sigma^{-2}) \prod_{k=-l..l} P(s_{u'}(n+k) = s_{k+l+1}). \end{aligned} \quad (4)$$

As can be seen, relation (4) describes interdependence of a posteriori probabilities for the opposite signals. This gives a hint to construct iterative algorithm:

$$p_{u,i+1}^{(m)}(n) = \sum_{s \in S_l} \exp(-0.5d_{u,m,s}\sigma^{-2}) \prod_{k=-l..l} p_{u',i}(n+k),$$

where i is a number of iteration. So, the iterative algorithm for the estimation of sequences $s_1(n)$ and $s_2(n)$ is as shown at Fig. 4. The iterations stop when average probabilities on adjacent iterations do not differ too much.

- 1: Initialization
- 2: Compute $d_{u,m,s}(n)$
- 3: Initialize $p_{u,i+1}^{(m)}(n) = 1/4$
- 4: Iterative part
- 5: for $i = 1 : maxiter$
- 6: for $n = 1 : N$
- 7: for $m = 1 : 4$
- 8: Estimate $p_{1,i+1}^{(m)}(n)$ (based on $p_{2,i}^{(m)}(\dots)$)
- 9: Estimate $p_{2,i+1}^{(m)}(n)$ (based on $p_{1,i}^{(m)}(\dots)$)
- 10: end
- 11: end
- 12: if $\|p_{mean,i+1}^{(m)} - p_{mean,i}^{(m)}\| < threshold$
- 13: stop
- 14: end
- 15: end

Fig. 4. The algorithm for the restoration of original QPSK sequences

Channel parameters estimation. There is a common practice to insert predefined symbols (unique words) into the transmitted sequences. In our modeling, we use 32-symbol (64-bit) sequences denoted by U . The position of the unique word can be identified by its cross-correlation with received signal (see Fig. 5). Once we have detected the position of the unique word, we analyze its peak value $R_{i_{\max}}^{(u)}$ ($u = 1, 2$). Then the amplitude, phase and time delay can be estimated approximately as follows:

$$\hat{a}_u = R_{i_{\max}}^{(u)} / \|U\|^2, ,$$

$$\hat{\phi}_u = \arg R_{i_{\max}}^{(u)},$$

$$\hat{\tau}_u = \frac{R_{i_{\max}+1}^{(u)} - R_{i_{\max}-1}^{(u)}}{2R_{i_{\max}}^{(u)} - R_{i_{\max}+1}^{(u)} - R_{i_{\max}-1}^{(u)}}$$

The last formula for the delay comes from the parabolic interpolation of correlation function (see Fig. 6).

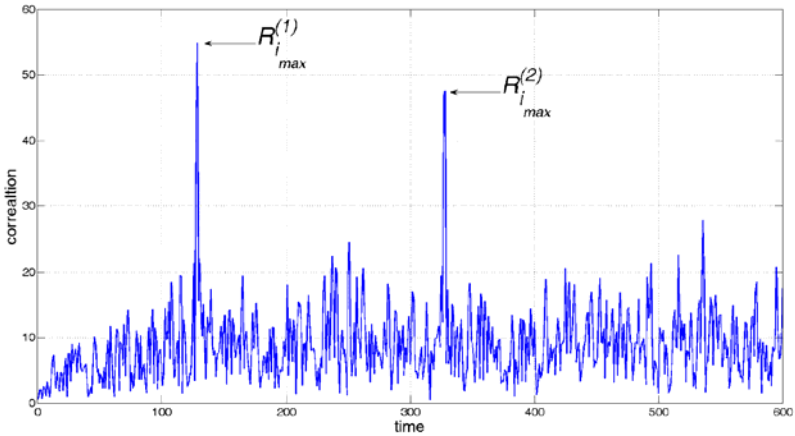


Fig. 5. Detection of unique words in the mixture of two signals

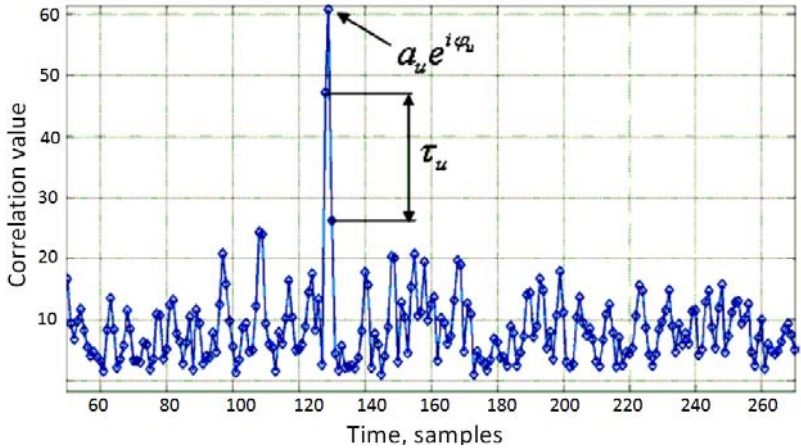


Fig. 6. Determination of channel parameters from cross-correlation peak value

Experimental results. In this section the performance of proposed algorithm at different signal-to-noise ratios is analyzed. We take in these experiments the following values of parameters: $a_1 = a_2 = 1$, $\varphi_1 = \varphi_2 = 0.35$. The value of time diversity $\tau = |\tau_1 - \tau_2|$ was allowed to take different values and we examined algorithm's performance for different τ .

Fig. 7 shows the performance of proposed algorithm when the channel parameters are assumed known and Fig. 8 shows the performance of proposed algorithm when the channel parameters are estimated as was discussed above.

In both cases 15 iterations of the algorithm were used. It can be seen that the case of known parameters has a slight advantage in terms of BER over the case when parameters are estimated by proposed procedure.

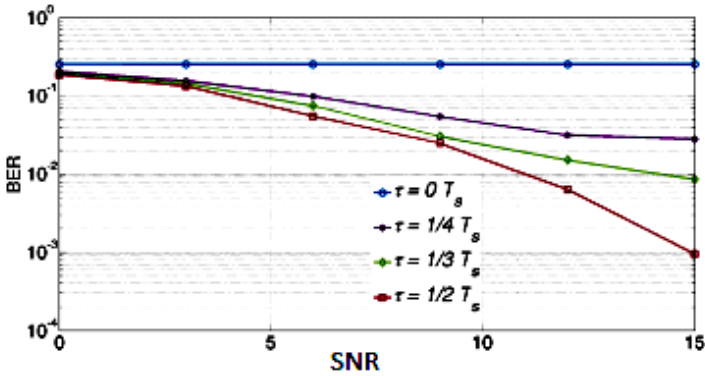


Fig. 7. Performance of proposed algorithm when the channel parameters are assumed known

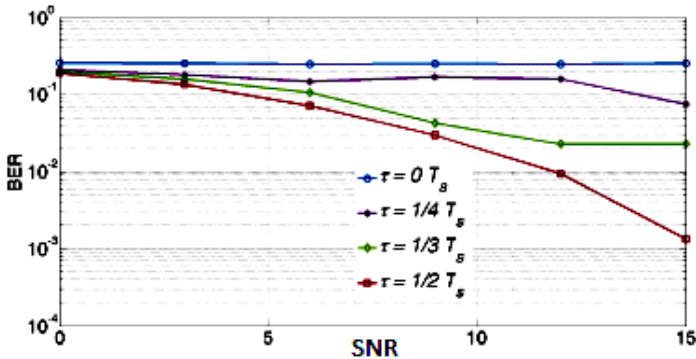


Fig. 8. Performance of proposed algorithm when the channel parameters are estimated by proposed method

As can be seen from the figures 7 and 8, the higher time diversity τ leads to better separation performance of the algorithm. For example, with $\tau = 0$ we have no diversity and the components of the mixture cannot be separated. On the opposite, the best performance is achieved when time diversity takes its maximum value $0.5T_s$. This shows that the algorithm may properly exploit the diversity induced by the delay between channels.

To understand better the effect of parameters estimation procedure, we consider the case $\tau = 1/3 T_s$. Fig. 9 shows the comparison of BER for several cases:

1. Amplitudes a_1, a_2 are assumed to be known, but the phases φ_1, φ_2 and the delays τ_1, τ_2 take random values from their area of definition («partially-known» case).

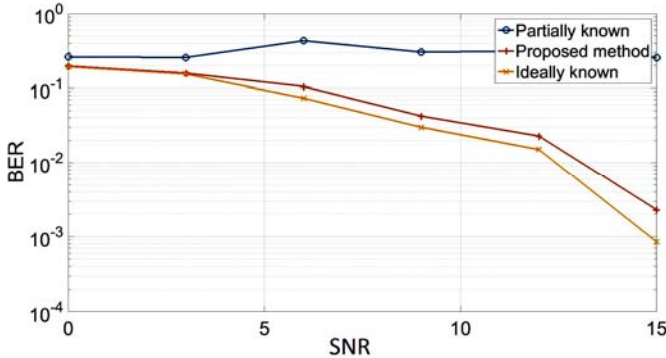


Fig. 9. Performance of proposed parameters' estimation method for the case $\tau = 1/3T_s$

2. All channel parameters are assumed unknown and they are estimated by the proposed procedure.
3. All channel parameters are assumed known beforehand («ideally-known» case).

From the Fig. 9 it can be seen that the proposed estimation procedure crucially improves the BER of the algorithm providing improvement over the case 1 («partially-known» parameters) from 1.3 times for $E_b / N_0 = 0$ dB to 112 times for $SNR = 15$ dB. At the same time, the ratio between proposed method estimation method and case of ideally known parameters is not large: the obtained BERs are always of the same order, the maximum ratio between them is from 1.02 times for $SNR = 0$ dB to 2.7 times for $SNR = 15$ dB. The similar conclusions are confirmed for other values of τ .

Conclusions. In this paper the new method for the single-channel separation of two QPSK signals based on iterative maximization of a posteriori probability for transmitted symbols is presented. The best performance of the method is achieved when time diversity between channels takes its maximum value, namely half of a symbol period. The essential advantage over the previously proposed approach is due to proposed procedure of channel parameters' estimation. For the case $\tau = 1/3 T_s$ it was shown that the BER is improved from 1.3 to 112 times (for different E_b / N_0) in comparison with the case of partially known parameters. At the same time, the BER values for the proposed estimation procedure are of the same order as for the case of ideally known parameters.

References:

1. Wu C. Single-Channel Blind Source Separation of Co-Frequency Overlapped GMSK Signals Under Constant-Modulus Constraints / C. Wu, Z. Liu, X. Wang, W. Jiang, X. Ru // IEEE Communications Letters. — March 2016. — Vol. 20. — № 3. — P. 486–489.
2. Gouldieff V. MISO Estimation of Asynchronously Mixed BPSK Sources / V. Gouldieff, J. Palicot // Proc. IEEE Conf. EUSIPCO. — 2015. — P. 369–373.
3. Arulampalam M. S. Particle-Filtering-Based Approach to Undetermined Blind Separation / M. S. Arulampalam, S. Maskell, N. Gordon, T. Clapp // Advances in information Sciences and Service Sciences. — 2012. — Vol. 4. — P. 305–313.
4. Pan B. Blind Separation of Two QPSK Signals Based on Lattice Reduction / B. Pan and S. Tu // 2017 International Conference on Information Science and Control Engineering (ICISCE). — Changsha, 2017. — P. 1437–1440.
5. Warner E. Single-channel blind signal separation of filtered MPSK signals / E. S. Warner, I. K. Proudler // IEE Proceedings — Radar, Sonar and Navigation. — 2003. — Vol. 150. — № 6. — P. 396–402.
6. Shilong T. Single-channel blind separation of Two QPSK signals using per-survivor processing / Tu Shilong, Zheng Hui, Gu Na // Pro APCCAS. — 2008. — Macao. — P. 473–476.

**МЕТОД ІТЕРАТИВНОГО ОДНОКАНАЛЬНОГО
СЛІПОГО РОЗДІЛЕННЯ QPSK-СИГНАЛІВ**

Запропоновано метод одноканального сліпого розділення двох сигналів з квадратурно-фазовою маніпуляцією (QPSK). Метод базується на ітеративному оцінюванні компонентів суміші за принципом максимізації апостеріорної ймовірності. Отримані формули для відповідних апостеріорних ймовірностей та на їх основі розроблено алгоритм оцінювання компонентів суміші. Також розроблено алгоритм оцінювання параметрів каналу (амплітуд, фаз і часових затримок). Ефективність методу перевірена при різних рівнях шуму та часового рознесення між каналами. Розроблена процедура оцінювання параметрів забезпечує суттєве скорочення бітової похибки (BER) у порівнянні з випадком невідомих параметрів.

Ключові слова: *сліпе розділення, BPSK (двійкова фазова маніпуляція), QPSK (квадратурна фазова маніпуляція).*

Отримано: 24.05.2018

УДК 518.25

Л. М. Семчишин, канд. фіз.-мат. наук

Чортківський навчально-науковий інститут підприємництва і бізнесу
Тернопільський національний економічний університет, м. Чортків

ЗАСТОСУВАННЯ РОЗРІДЖЕНИХ ЧИСЛОВИХ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ В СЕРЕДОВИЩІ MATLAB

У статті запропоновано новий підхід до розв'язування розріджених систем лінійних алгебраїчних рівнянь із блочними елементами. Проведено підрахунок кількостей записів та операцій при чисельній реалізації алгоритму множення матриць. Охарактеризовано складність алгоритму з точки зору комп'ютерної алгебри. Проведено порівняння запропонованого алгоритму та блочного методу прогонки. Обчислено кількість записів для методу прогонки. Протестовано алгоритми розв'язання деяких типів розріджених числових систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Показано ефективність запропонованого алгоритму.

Розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) завжди є одним із актуальних задач обчислювальної математики. При розв'язанні широкого кола прикладних задач більшість сучасних вчених, інженерів і техніків, як правило, використовують пакети комп'ютерної алгебри. Розв'язання математичних задач з допомогою системи MATLAB заслуговує особливої уваги. Зорієнтована на роботу з реальними даними, ця система виконує всі обчислення в арифметиці з плаваючою комою на відміну від конкуруючих систем комп'ютерної алгебри REDUCE, MACSYMA, DERIVE, Maple, Mathematica, Theorist, в яких переважає цілочисельне представлення і символічна обробка даних. Хоча для розв'язання проблем на межі символічних обчислень і обчислень з плаваючою комою до складу інтегрованої системи MATLAB включений пакет прикладних програм Extended Symbolic Mathematics Toolbox, котрий реалізує інтерфейс з системою символічних обчислень Maple.

Одним з важливих інструментів MatLab є набір процедур лінійної алгебри. В обчислювальному плані розділ лінійної алгебри підтриманий пакетами прикладних програм LINPACK, EISPACK, які були створені в 70-ті роки минулого століття провідними фахівцями світу, до яких належить і засновник фірми MathWorks Inc. К. Моулер. Власне вихідною задачею системи MatLab і було створення діалогової оболонки для роботи з пакетами лінійної алгебри.

Система MatLab — відкрите середовище, яке досить динамічно розвивається зусиллями сотень і тисяч дослідників, адже це одночасно і операційна оболонка і досить гнучка мова

програмування. Однією з найбільш сильних сторін є те, що на мові MatLab можуть бути написані програми і функції для багаторазового використання.

Ключові слова: *розріджені системи, ланцюгові дроби, скінченні суми, кількість записів, складність алгоритму, комп'ютерна алгебра, тестування алгоритмів.*

Вступ. Економіко-математичні дослідження, що проводяться в країні, охоплюють важливі проблеми на різних рівнях планування та управління. Успішне розв'язання численних економіко-математичних задач стало можливим лише завдяки широкому використанню математичних моделей, обчислювальних методів і комп'ютерних технологій. Застосування математики в економіці дозволяє виділити й формально описати найголовніші зв'язки між економічними змінними та параметрами об'єктів дослідження, індуктивним шляхом одержати нові відомості про об'єкт, зробити важливі теоретичні висновки і прийняти правильні економічні рішення. Головні переваги математики як засобу наукового пізнання найповніше розкриваються саме у процесі побудови математичних моделей.

Постановка проблеми. Обчислювальний експеримент дозволяє із заданою точністю кількісно та якісно описати досліджувану проблему, інакше кажучи побудувати математичну модель, аналіз якої в свою чергу дозволяє глибше проникнути в суть явища, що вивчається. Розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) завжди є одним із актуальних задач обчислювальної математики. Особливо часто їх доводиться розв'язувати під час дослідження економіко-математичних задач. Обчислювальна математика вивчає чисельні методи розв'язування різних математичних задач, тобто методи, які ґрунтуються на побудові скінченної послідовності дій над скінченною множиною чисел. Обчислювальні методи — одні з базових інструментів математичного моделювання і є важливою частиною програмного забезпечення для комп'ютерів усіх поколінь. За умови використання таких обчислювальних методів застосовують математичне моделювання до розв'язку математичної задачі. Тоді розв'язок одержується у вигляді числового результату. Залежно від того, на який економічний процес звертається основна увага, при побудові й дослідженні моделі використовується відповідний математичний апарат. Його ефективність визначається продуктивністю ЕОМ та якістю обчислювальних алгоритмів і програм, що використовуються. Побудова ефективних методів визначення невідомих для таких систем — потрібна і досить непроста задача.

Аналіз останніх публікацій. Багато відомих вітчизняних і закордонних вчених займалися проблемами розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Серед них: В. Воєvodін [1], Є. Тиртишніков [2],

Дж. Уилкінсон [3] та ін. Розв'язуванню розріджених систем лінійних алгебричних рівнянь із блочними елементами присвячені роботи В. Воеводіна [1], Ф. Гантмахера [4]. Однак деякі проблеми не мають однозначного розв'язання і потребують уточнення. У роботі М. Недашковського і О. Ковальчук [5] розглянуто комп'ютерні алгоритми для систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Особлива увага приділялась методам аналізу обчислювальної стійкості алгоритмів у працях таких вчених як: С. Ашманов [6], Д. Девэнпорт, И. Сирэ, Э. Турнье [7]. У роботі [8, с. 91–99] запропоновано новий підхід до програмної реалізації розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Проаналізовано обчислювальну стійкість запропонованого алгоритму.

Актуальність теми. Застосування розріджених числових систем лінійних алгебраїчних рівнянь вимагає використання ефективних чисельних методів.

Слід зауважити, що питання програмної реалізації розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь розглядалося у праці [8, с. 91–99]. Однак, у роботі М. Недашковського і О. Ковальчук [5] розглянуто комп'ютерні алгоритми для систем лінійних алгебраїчних рівнянь.

Мета роботи. Метою цієї роботи є дослідження нового підходу до розв'язування розріджених систем лінійних алгебраїчних рівнянь із блочними елементами. Проведення підрахунку кількостей записів та операцій при чисельній реалізації алгоритму множення матриць.

Порівняння запропонованого алгоритму та блочного методу прогонки. Обчислення кількості записів для методу прогонки. Тестування алгоритмів розв'язання деяких типів розріджених числових систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Теоретичну та методологічну основу дослідження складають методи оптимізації, математичне моделювання.

Основна частина. У значній кількості прикладних задач виникає необхідність розв'язання розріджених числових систем лінійних алгебричних рівнянь із блочними елементами [1, 2]. Розглянемо метод розв'язування розріджених систем із деякими найхарактернішими способами заповнення.

Розглянемо систему лінійних алгебричних рівнянь

$$\begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{3,2} & A_{3,3} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_{n-1,n-2} & A_{n-1,n-1} & A_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & A_{n,n-1} & A_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{1,n+1} \\ A_{2,n+1} \\ A_{3,n+1} \\ \dots \\ A_{n-1,n+1} \\ A_{n,n+1} \end{pmatrix}, (1)$$

елементи якої A_{ij} — це блоки розмірності $m \times m$. Позначимо через $A \begin{bmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_k \\ j_1 & j_2 & \dots & j_k \end{bmatrix}$ мінор, розміщений на перетині блочних стрічок i_1, i_2, \dots, i_k та блочних стовпців j_1, j_2, \dots, j_k . За узагальненим правилом Крамера [2]

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} A_{1,1} & A_{2,1} & \dots & A_{1,n+1} & 0 & 0 \\ A_{1,2} & A_{2,2} & \ddots & A_{2,n+1} & \ddots & 0 \\ \ddots & A_{3,2} & \ddots & A_{3,n+1} & \ddots & \dots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & A_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \ddots & A_{n,n+1} & \dots & A_{n,n} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & 0 & \dots & 0 \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} & \dots & 0 \\ 0 & A_{3,2} & A_{3,3} & \ddots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \ddots & A_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_{n,n} \end{vmatrix}}$$

Розкладаючи чисельник за мінорами, можна записати

$$x_i = \left(A \begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{bmatrix} \right)^{-1} \times \left(\sum_{k=1}^n (-1)^{i+k} A_{k,n+1} A \begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & i-1 \\ 1 & 2 & \dots & i-1 \end{bmatrix} \cdot \prod_{s=i+1}^{k-1} A_{s,s+1} A \begin{bmatrix} k+1 & \dots & \dots & n \\ k+1 & \dots & \dots & n \end{bmatrix} \right) \quad (2)$$

Введемо позначення

$$\alpha_{ik} = A \begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & i-1 \\ 1 & 2 & \dots & i-1 \end{bmatrix} \cdot \prod_{s=i+1}^{k-1} A_{s,s+1} A \begin{bmatrix} k+1 & \dots & \dots & n \\ k+1 & \dots & \dots & n \end{bmatrix}, \quad i, k = \overline{1, n}.$$

Тоді для визначення невідомої x_1 маємо співвідношення

$$x_i = \left(A \begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{bmatrix} \right)^{-1} \sum_{k=1}^n (-1)^{i+k} A_{k,n+1} \alpha_{i,k}. \quad (3)$$

Для компактності запису надалі будемо позначати результат виконання операції множення на обернену матрицю зліва у вигляді $C^{-1}D = D/C$. Тоді вираз $D_1/(C_1 + D_2/C_2)$ означатиме $(C_1 + C_2^{-1}D_2)^{-1} \cdot D_1$.

Якщо до співвідношення (3) застосувати відому рівність Леонарда Ейлера [5], яка пов'язує ланцюгові дроби з рядами та скінченними сумами, то для x_1 одержимо

$$x_i = \left(A \begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{bmatrix} \right)^{-1} \sum_{k=1}^n (-1)^{1+k} A_{k,n+1} \alpha_{i,k} = \frac{A \begin{bmatrix} 2 & 3 & \dots & n \\ 2 & 3 & \dots & n \end{bmatrix}}{A \begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{bmatrix}} \times \quad (4)$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{A \begin{bmatrix} 2 & 3 & \dots & n \\ 2 & 3 & \dots & n \end{bmatrix}}{A \begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{bmatrix}} = \\
 & = \frac{E}{A_{1,1} - A_{2,1}A_{1,2} \left[A^{-1} \begin{bmatrix} 2 & 3 & \dots & n \\ 2 & 3 & \dots & n \end{bmatrix}^T A \begin{bmatrix} 3 & 4 & \dots & n \\ 3 & 4 & \dots & n \end{bmatrix}^T \right]} = \\
 & = \dots = \frac{E}{A_{1,1} - \frac{A_{2,1}A_{1,2}}{A_{2,2} - \frac{A_{2,3}A_{3,2}}{A_{3,3} - \dots - \frac{A_{n-1,n}A_{n,n-1}}{A_{n,n}}}}}.
 \end{aligned}$$

За аналогічною схемою знаходимо решту невідомих x_i

$$\begin{aligned}
 x_i & = \left(A \begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{bmatrix} \right)^{-1} \times \\
 & \times \left(\frac{A_{i,n+1}}{2} \alpha_{i,i} + \sum_{k=1}^{i-1} (-1)^{i+k} A_{k,n+1} \alpha_{i,k} + \frac{A_{i,n+1}}{2} \alpha_{i,i} + \sum_{k=i+1}^n (-1)^{i+k} A_{k,n+1} \alpha_{i,k} \right) = \\
 & = \left[(-1)^{2i-1} A_{i-1,i} \alpha_{i,i-1} / \alpha_{i,i} + (-1)^{2i} A_{i,i} + (-1)^{2i+1} A_{i+1,i} \alpha_{i,i+1} / \alpha_{i,i} \right]^{-1} \times \\
 & \times \left[\frac{\frac{1}{2} A_{i,n+1}}{E - \frac{2(A_{i,n+1} \alpha_{i,i})^{-1} A_{i-1,n+1} \alpha_{i,i-1}}{E + \frac{2A_{i-1,n+1} \alpha_{i,i-1}}{A_{i,n+1} \alpha_{i,i}}}} \right] = \\
 & \dots = \frac{\frac{A_{1,n+1} \alpha_{i,1}}{E + \frac{A_{1,n+1} \alpha_{i,1}}{A_{2,n+1} \alpha_{i,2}}}}{E + \frac{A_{1,n+1} \alpha_{i,1}}{A_{2,n+1} \alpha_{i,2}}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} A_{i,n+1} \\
 & \left. \begin{aligned} & E - \frac{2(A_{i,n+1} \alpha_{i,i})^{-1} A_{i+1,n+1} \alpha_{i,i+1}}{E + \frac{2A_{i+1,n+1} \alpha_{i,i+1}}{A_{i,n+1} \alpha_{i,i}}} \dots \end{aligned} \right] \\
 & \dots - \frac{A_{n,n+1} \alpha_{i,n}}{A_{n-1,n+1} \alpha_{i,n-1}} \\
 & E + \frac{A_{n,n+1} \alpha_{i,n}}{A_{n-1,n+1} \alpha_{i,n-1}}
 \end{aligned}$$

А для кожного відношення $\alpha_{i,k} / \alpha_{i,k+1}$ в свою чергу можна записати:

$$\begin{aligned}
 \frac{\alpha_{i,k}}{\alpha_{i,k+1}} &= \frac{A \begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & i-1 \\ 1 & 2 & \dots & i-1 \end{bmatrix} \prod_{s=i+1}^{k-1} A_{s,s+1} A \begin{bmatrix} k+1 & \dots & \dots & n \\ k+1 & \dots & \dots & n \end{bmatrix}}{A \begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & i-1 \\ 1 & 2 & \dots & i-1 \end{bmatrix} \prod_{s=i+1}^k A_{s,s+1} A \begin{bmatrix} k+2 & \dots & \dots & n \\ k+2 & \dots & \dots & n \end{bmatrix}} = \\
 &= \frac{A \begin{bmatrix} k+1 & \dots & \dots & n \\ k+1 & \dots & \dots & n \end{bmatrix}}{A_{k,k+1} A \begin{bmatrix} k+1 & \dots & \dots & n \\ k+1 & \dots & \dots & n \end{bmatrix}} = \\
 &= \frac{A_{k+1,k+1}}{A_{k,k+1}} \frac{A_{k+1,k+2} A_{k+2,k+1}}{A_{k,k+1} \left(A^{-1} \begin{bmatrix} k+3 & \dots & n \\ k+3 & \dots & n \end{bmatrix}^T A^T \begin{bmatrix} k+2 & \dots & n \\ k+2 & \dots & n \end{bmatrix} \right)^T} = \\
 &= \dots = \frac{A_{k+1,k+1}}{A_{k,k+1}} \frac{A_{k+1,k+2} A_{k+2,k+1} / A_{k,k+1}}{A_{k+2,k+2} - \frac{A_{k+3,k+2} A_{k+2,k+3}}{A_{k+3,k+3} - \frac{A_{k+4,k+3} A_{k+3,k+4}}{A_{k+4,k+4} \dots}} \dots - \frac{A_{n-1,n} A_{n,n-1}}{A_{n,n}}
 \end{aligned}$$

Отже, одержуємо аналітичне розв'язання невідомих даної розрізної системи лінійних алгебраїчних рівнянь у скінченні матричні ланцюгові дроби.

Обчислювальні характеристики алгоритму. Тепер підрахуємо необхідну кількість записів при символічному розв'язуванні задачі

та кількість операцій під час чисельної реалізації алгоритму множення матриць $A_{ij} \cdot A_{kl}$.

Твердження [5]. Нехай деяка обчислювальна задача з вхідними даними $\{A_i\}$ розв'язується на ЕОМ за алгоритмом $\psi(A_1, A_2, \dots, A_n)$ і складається з k кроків ψ_j ($j = \overline{1, k}$). Якщо на кожному кроці алгоритму $\psi(A)$ реалізується хоча б один запис виду $\psi_{j_1}(A) \cdot \psi_{j_2}(A)$, який використовує результат попереднього кроку, то загальна складність Q_ψ задачі буде не меншою $2^k \cdot m^2$, але не більшою H^k записів, де H — найбільша ширина алгоритму на k кроках.

Використаємо це твердження для оцінки складності алгоритму з точки зору комп'ютерної алгебри [7]. Для чисел x_i ($i = \overline{1, n}$) на одному поверсі реалізація алгоритму вимагає одне блочне множення, одне блочне ділення, одне блочне додавання, а для n поверхів — $3n$ операцій, тобто по n блочних множень, ділень та додавань.

Обчислення показують, що для визначення всіх $A_{i,k}/A_{i,k+1}$ потрібно $5k$ записів, якщо $k < i$, і $5(n-k)$, якщо $k > i$. Таким чином необхідно виконати

$$5 \sum_{k=1}^i k + 5 \sum_{k=i}^n n - k = 5 \left[\frac{(1+i)i}{2} + n(n-i+1) - \frac{(i+n)(n-i+1)}{2} \right] = 5 \left[i^2 + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} - ni \right].$$

Отже, загальна складність методу становить

$$5 \sum_{i=1}^n \left[i^2 + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} - ni \right] = \frac{5}{2} (n^3 + n).$$

Відомо [5], що алгоритм прогонки реалізується співвідношеннями

$$x_i = \alpha_{i+1} x_{i+1} + \beta_{i+1}, \quad \alpha_{i+1} = \frac{a_{i,i+1}}{a_{i,i} - a_{i,i-1}}, \quad \beta_{i+1} = \frac{a_{i,n+1} + a_{i,i-1} \beta_i}{a_{i,i} - a_{i,i-1}}$$

для прямого та зворотного ходу.

Проведемо порівняння запропонованого алгоритму та блочного методу прогонки. Кількість записів для методу прогонки, який реалізується співвідношеннями

$$x_1 = \alpha_2 x_2 + \beta_2, \quad \alpha_2 = a_{1,2}/a_{1,1}, \quad \beta_2 = a_{1,n+1}/a_{1,1},$$

$$x_2 = \alpha_3 x_3 + \beta_3, \quad \alpha_3 = \frac{a_{2,3}}{a_{2,2} - a_{2,1}}, \quad \beta_3 = \frac{a_{2,n+1}}{a_{2,2} - a_{2,1}},$$

$$x_{n-1} = \alpha_n x_n + \beta_n, \quad \alpha_n = \frac{a_{n-1,n}}{a_{n-1,n-1} - a_{n-1,n-2}}, \quad \beta_n = \frac{a_{n-1,n+1}}{a_{n-1,n-1} - a_{n-1,n-2}},$$

буде оцінюватися відповідно до *твердження*. Розрахунки свідчать, що для обчислення α_{i+1} та β_{i+1} необхідно записати по i операцій блочного додавання, блочного множення та блочного ділення.

Тоді для обчислення кожного x_k треба записати $\sum_{k=1}^i k = (1+i)i/2$ записів, а для обчислення всіх x_i $i = \overline{1, n}$ потрібно $(n^3 + n^2 + 2n)/4$ записів.

Таким чином, із точки зору комп'ютерної алгебри запропонований алгоритм суттєво переважає класичний алгоритм прогонки. Він може бути реалізований, як в аналітичному, так і в числовому вигляді. Для реалізації запропонованого алгоритму потрібно по $6n$ блочних додавань і блочних ділень і $4n$ блочних множень, оскільки в цьому випадку результати обчислень проміжних дробів можуть використовуватися багаторазово.

Відзначимо, що описаний алгоритм можна також застосовувати і у випадку систем із прорідженими трьохдіагональними матрицями наступного вигляду

$$\begin{pmatrix} A_{1,1} & 0 & 0 & A_{1,k} & & 0 \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} & \ddots & A_{2,k+1} & 0 \\ 0 & & \ddots & 0 & \ddots & 0 \\ A_{k,1} & \ddots & 0 & \ddots & 0 & \ddots & A_{n-k,n} \\ 0 & A_{k+1,2} & \ddots & & \ddots & 0 & \ddots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{n,n-k} & \ddots & 0 & A_{n,n} \end{pmatrix}$$

Матриці можуть також бути і обрамленими з однієї або двох сторін. Системи з подібним заповненням розпадаються на k систем вигляду (1), кожна з яких матиме порядок n/k .

Тестування алгоритмів розв'язання деяких типів розріджених числових систем лінійних алгебричних рівнянь

Опис тестування функції FC_Three_Diag_Sys. Для перевірки алгоритму розв'язання трьохдіагональних систем лінійних алгебричних рівнянь методом ланцюгових дробів була використана система рівнянь наступного вигляду:

$$\begin{pmatrix} 1.5 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 1.5 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1.5 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 1.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Це несиметрична система рівнянь, без діагонального домінування із середнім значенням спектрального числа обумовленості.

Для розв'язання систем лінійних алгебричних рівнянь з числовими елементами в середовищі MatLab написана і протестована функція `FC_Three_Diag_Sys`. Ця функція реалізує алгоритм розв'язування систем лінійних алгебричних рівнянь методом ланцюгових дробів і написана за допомогою об'єктно-орієнтованої макромови MatLab.

Для спрощення її можливого використання поданий текст разом з блоком формуванням системи лінійних алгебричних рівнянь, яка має описану матрицю.

```
function [] =FC_Three_Diag_Sys( )
% Розв'язування трьохдіагональних систем лінійних алгебричних рівнянь
% Ax=b
% за допомогою матричних ланцюгових дробів
clc
n=25;
% формування тестової системи лінійних рівнянь
for i=1 : n
for j=1: n
A(i,j)=0;
if (i==j) A(i,j)=1.5; end
if(i==j+1) A(i,j)=-1; end
if(j==i+1) A(i,j)=1; end
end
b(i)=0;
end;
b(1)=3;
%, обчислення X(1) і решти невідомих
D(n)=A(n,n);
i=n;
while (i>1);
i = i-1;
D(i)=A(i,i)-A(i+1,i)*A(i,i+1)/D(i+1);
end;
x(1)=b(1)/D(1);
i=1;
while (i<n)
i=i+1;
x(i)=-A(i,i-1)*x(i-1)/D(i);
end
x
end
```

Результати тестування функції FC_Three_Diag_Sys для $n = 25$ скопійовані з вікна MatLab і подані в наступній таблиці

Таблиця 1

Значення n	Значення невідомих x_i
25	1.5000 0.7500 0.3750 0.1875 0.0938 0.0469 0.0234 0.0117 0.0059 0.0029 0.0015 0.0007 0.0004 0.0002 0.0001 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000

Нескладна перевірка показує високу точність запропонованого методу розв'язання трьохдіагональних систем методом ланцюгових дробів.

Опис тестування функції ESSELS. Тут мова піде про розв'язування систем із стрічковим заповненням. Позначимо через L — кількість наддіагоналей, а через M — кількість піддіагоналей конкретної системи лінійних алгебраїчних рівнянь. В такому разі обчислення можна вести, звичайно, і за формулами (2) та (3). Однак з врахуванням характеру заповнення стрічкової матриці їх можна привести до вигляду

$$b_{i,k} = \frac{a_{i,k} - \sum_{j=1}^M a_{i,j} x_j^{(k-1)}}{a_{k,k} - \sum_{j=1}^M a_{k,j} x_j^{(k-1)}}, \quad (i = \overline{k+1, n});$$

$$z_k^{(k)} = b_{k+1,k}, \quad (k = \overline{1, n-1}); \quad z_s^{(k)} = b_{k+1,s} - \sum_{i=s+1}^M b_{i,s} z_i^{(k)}, \quad (s = \overline{k-1, 1}).$$

$$b_{i,k} = \frac{a_{i,k} - \sum_{j=1}^L a_{i,j} x_j^{(k-1)}}{a_{k,k} - \sum_{j=1}^L a_{k,j} x_j^{(k-1)}}, \quad (i = \overline{k+1, n});$$

$$z_k^{(k)} = b_{k+1,k}, \quad (k = \overline{1, n-1}); \quad z_s^{(k)} = b_{k+1,s} - \sum_{i=s+1}^L b_{i,s} z_i^{(k)}, \quad (s = \overline{k-1, 1}).$$

За рекурентними формулами (6) та (7) на деякому k -му кроці обчислюються лише ті b_{ij} і b_{ji} , для яких існує хоча б один ненульовий елемент a_{ij} початкової матриці.

Алгоритм дозволяє розв'язати системи рівнянь як у випадку симетричного заповнення (кількість піддіагоналей дорівнює кількості наддіагоналей), так і тоді, коли кількість піддіагоналей та наддіагоналей матриці різні.

Для перевірки алгоритму розв'язання стрічкового варіанту алгоритму відсічених систем була використана система рівнянь наступного вигляду:

$$\begin{pmatrix} 1+\varepsilon & 1 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1+\varepsilon & 1 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1+\varepsilon & 1 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 1+\varepsilon & 1 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & -1 & 1 & 1+\varepsilon & 1 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & -1 & 1 & 1+\varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_{n-2} \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+\varepsilon \\ 3+\varepsilon \\ 2+\varepsilon \\ \dots \\ 2+\varepsilon \\ 2+\varepsilon \\ 1+\varepsilon \end{pmatrix}$$

Легко бачити, що точним розв'язком системи будуть значення $x_i = 1, (i = 1, 2, \dots, n)$. Це несиметрична система рівнянь, без діагонального домінування із значенням спектрального числа обумовленості $V_A = 6.6837e+010$.

Для розв'язання систем лінійних алгебричних рівнянь з числовими елементами в середовищі MatLab написана і протестована функція ESSELS. Ця функція реалізує алгоритм розв'язування систем лінійних алгебричних рівнянь методом відсічених систем і написана за допомогою об'єктно-орієнтованої макромови MatLab.

З метою її можливого використання поданий текст разом з блоком формування системи лінійних алгебричних рівнянь, яка має описану матрицю.

```
function [] =Essels( Dimension )
% << E S S E L S >> – процедура для розв'язан-
ня стрічкових систем
% лінійних алгебричних рівнянь.
% Написана для MatLab 2010 року за алгоритмом
відсічених систем
% Вхідні параметри:
% A – двовимірний масив розмірності Nx(LN+1)
для зберігання
% вихідних елементів системи Ax=b;
% N – кількість невідомих системи;
% N1- параметр рівний N+1;
% CountOvDiag – параметр рівний кількості над-
діагоналей матриці;
% CountUndDiag – параметр рівний кількості
наддіагоналей матриці;
% B – двохмірний робочий масив розмірності
Nx(N+1);
```



```
% Y – одномірний робочий масив довжини N.
% Формування вхідних даних системи Ax=b
clc
N=70
CountOvDiag=1;
CountUndDiag=2;
N1=N+1;
Np=1;
Epsilon=0.001;
for i=1 : N
    if(i>1) A(i-1,i)=1.0;end
    if(i<N) A(i+1,i)=1.0; end
    if(i>2) A(i,i-2)=-1.0; end
    A(i,i)=1.0+Epsilon;
    A(i,N+1)=2+Epsilon;
end
A(2,N1)=3+Epsilon;
A(N,N1)=1+Epsilon;
% Власне алгоритм програми
N1 =N+1;
Np=1;
for i=1 : N
    for j=1: N
        B(i,j)=0.0;
    end
end
for m=1 : N
    if m>1 M1=m-1;end
    if m>2 M2 =m-2; end
    MP1=m+1;
    NKN=m+CountOvDiag;
    if (NKN>=N+1) NKN=N+1; end
    NKP=m+CountUndDiag;
    if (NKP>=N) NKP=N; end
    for i=m : NKP
        P=A(i,m);
        if (m>1)
            if NKP<M1 NM=M1-NKP;else NM=1;end
            for j=NM : M1 P=P-A(i,j)*X(j); end
        end
        B(i,m)=P;
    end
end
```


Таким чином, запропоновані алгоритми для даної тестової системи середньої розмірності мають суттєві переваги у порівнянні із стандартними функціями пакету MatLab.

Висновки. У статті розглянуто новий підхід до розв'язування розріджених систем лінійних алгебраїчних рівнянь із блочними елементами. Проведено підрахунок кількостей записів та операцій при чисельній реалізації алгоритму множення матриць. Охарактеризовано складність алгоритму з точки зору комп'ютерної алгебри. Проведено порівняння запропонованого алгоритму та блочного методу прогонки. Обчислено кількість записів для методу прогонки. Протестовано алгоритми розв'язання деяких типів розріджених числових систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Показано ефективність запропонованих алгоритмів.

Запропоновані алгоритми можуть використовуватися в системах комп'ютерної алгебри та для аналітично-числового розв'язування інженерних та прикладних задач.

Список використаних джерел:

1. Воеводин В. В. Линейная алгебра / В. В. Воеводин. — СПб. : Лань, 2008. — 416 с.
2. Тыртышников Е. Е. Матричный анализ и линейная алгебра / Е. Е. Тыртышников. — М. : Физматлит, 2007. — 480 с.
3. Уилкинсон Дж. Х. Алгебраическая проблема собственных значений / Дж. Х. Уилкинсон. — М. : Наука, 1970. — 564 с.
4. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц / Ф. Р. Гантмахер. — 5-е вид. — М. : Физматлит, 2004. — 560 с.
5. Недашковський М. О. Обчислення з λ – матрицями / М. О. Недашковський, О. Я. Ковальчук. — К. : Наук. думка, 2007. — 294 с.
6. Ашманов С. А. Методы оптимизации. Линейное программирование : учеб. пособие / С. А. Ашманов. — 2-е изд., перераб. и доп. — М. : Физматлит, 2005. — 255 с.
7. Дэвэнпорт Д. Компьютерная алгебра / Д. Дэвэнпорт, И. Сирэ, Э. Турнье. — М. : Мир, 1991. — 352 с.
8. Семчишин Л. М. Програмна реалізація розв'язання розріджених систем лінійних алгебраїчних рівнянь / Л. М. Семчишин // Вісник Запорізького національного університету. Серія: фізико-математичні науки : зб. наук. праць. — Запоріжжя : Запорізький національний університет, 2013. — № 2 — С. 91–99.

APPLICATION OF RAREFIED NUMERICAL SYSTEMS OF LINEAR ALGEBRAIC EQUATIONS IN MATLAB ENVIRONMENT

New approach to the linear algebraic equations rarefied systems with block elements solution and the method of rarefied systems with the specific ways of filling solution is suggested in the article. Calculation of the records number and operations under the numerical realization of the matrix multiplication al-

gorithm is conducted. The algorithm complication from the computer algebra point of view is characterized. The described algorithm is used in the case of systems with the rarefied three-diagonal matrix.

Efficiency of the suggested algorithm is shown in the article. Theoretical and methodological basis of investigation comprise methods of optimization and mathematic modeling.

Solving systems of linear algebraic equations (SLAR) is always one of the most important tasks of computational mathematics. When solving a wide range of applications, most modern scientists, engineers and technicians, as a rule, use packages of computer algebra. The solution of mathematical problems using the MATLAB system deserves special attention. Real-time data-oriented, this system performs all calculations in float-point arithmetic, as opposed to competing computer algebra systems REDUCE, MACSYMA, DERIVE, Maple, Mathematica, Theorist, which are dominated by integer representations and symbolic data processing. Although for the solution of problems on the boundary of symbolic computing and floating-point computations into the integrated MATLAB system, the extended Symbolic Mathematics Toolbox application package is implemented, which implements the maple symbology system interface.

One of the important MatLab tools is a set of linear algebra procedures. In the calculus, the linear algebra section is supported by the LINPACK, EISPACK application packages that were created in the 1970s by leading experts in the world, including the founder of MathWorks Inc. K. Mooleer. Actually, the original task of the MatLab system was to create a dialog box for working with linear algebra packages.

The MatLab system is an open environment that is developing dynamically by the efforts of hundreds and thousands of researchers, because it is both an operational shell and a fairly flexible programming language. One of the strongest points is that MatLab can be written programs and features for multiple use.

Key words: *rarefied systems, chain fractions, finite sums, quantity of records, algorithm difficulty, computer algebra, algorithm testing.*

Отримано: 14.05.2018

УДК 519.6:519.622.1:519.624.2

П. С. Сеньо, канд. фіз.-мат. наук

Львівський національний університет імені Івана Франка, м. Львів

МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ГРАНИЧНИХ ЗАДАЧ НА ОСНОВІ МАТЕМАТИКИ ФУНКЦІОНАЛЬНИХ ІНТЕРВАЛІВ

У роботі запропоновані алгоритми на основі математики функціональних інтервалів [3] розв'язування граничних задач для звичайних диференціальних рівнянь другого порядку. Ці методи дають двохсторонні апроксимації розв'язків таких задач сплайнами. Так отримані функціональні інтервали гарантовано містять точний розв'язок задачі.

Кожен такий алгоритм складається із кроків, які можна розбити на два блоки. Перший блок реалізує процедуру побудови найпростіших функціональних інтервалів, які містять першу прохідну та функцію, відповідно. Крім цього, одночасно будуються інтервали, в яких гарантовано містяться значення функції і її похідної на кінцях інтервалу інтегрування. Формули (37)–(46), (48)–(58), (66)–(78) відображають зв'язки між функцією і її похідної на протилежних кінцях інтервалу інтегрування. Тому їх використовуємо для побудови інтервалів, які гарантовано містять ці величини.

Другий блок реалізує процедуру побудови на інтервалі інтегрування функціональних інтервалів, які містять першу прохідну функції, та розв'язок задачі, відповідно. Цей блок кроків алгоритму формуємо на основі висновків теорем 3, 4 за наведеними там формулами.

Теореми 3, 4 є узагальненнями теореми 1 та теореми 2 з [5]. Ці теореми дають можливість аналізувати та усувати різноманітні невизначеності, пов'язані з неперервно диференційовними функціями. Висновки цих теорем дають можливість суттєво звузити двохсторонні апроксимації розв'язку задачі Коші (1)–(2) та граничної задачі (3)–(5). Тому ці висновки можна трактувати як конкретизацію і узагальнення теореми про середнє функції і її похідної.

Запропоновані алгоритми будують функціональні інтервали розв'язку задачі з будь-якою бажаною як завгодно малою шириною.

Ключові слова: *задача Коші, гранична задача, інтервал, функціональний інтервал, двохстороння апроксимація, сплайн.*

Вступ. В [1, 2] двохсторонні апроксимації розв'язку граничної задачі будуються за допомогою ермітових сплайнів. Для цього попередньо здійснюється дискретизація задачі за допомогою відповідних різницевих схем. В результаті цього для досягнення бажаної точності потрібно розв'язувати систему різницевих рівнянь великої розмірності.

В [5] побудовані три методи двохсторонніх апроксимацій сплайнами розв'язку задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь на основі математики функціональних інтервалів. Так отримані двохсторонні апроксимації є функціональними інтервалами [3], які гарантовано містять точний розв'язок задачі. Однак, ширина таких функціональних інтервалів збільшується при зростанні ширини інтервалу аргументу, на якому шукається розв'язок задачі. У [5] цей ефект послідовно усувається за допомогою потрібної кількості повторені кроків запропонованих алгоритмів.

У цій роботі запропоновані методи двохсторонніх апроксимацій розв'язку задачі Коші та граничних задач для звичайних диференціальних рівнянь у вигляді функціональних інтервалів. Вони використовують узгодженість між двохсторонніми апроксимаціями функції і її похідної, які є висновками теореми 3 із [5], а також відповідне послідовне зменшення ширини таких функціональних інтервалів, описане нижче.

Формулювання задачі та основні напрямки її розв'язання.

Нехай потрібно побудувати на проміжку $[a, b]$ двохсторонні апроксимації сплайнами розв'язку задачі Коші

$$y' = f(x, y(x)), \tag{1}$$

$$y(a) = y_a, \tag{2}$$

та граничної задачі

$$y'' = u(x, y(x), y'(x)), \tag{3}$$

$$v_1(y_a, y_b, y'_a, y'_b) = 0, \tag{4}$$

$$v_2(y_a, y_b, y'_a, y'_b) = 0, \tag{5}$$

де y_a, y_b, y'_a, y'_b — значення функції $y(x)$ та її першої похідної на кінцях проміжку $[a, b]$, відповідно, які гарантовано містять точні розв'язки цих задач. Такі методи будемо будувати на основі математики функціональних інтервалів. При цьому, так отримані функціональні інтервали повинні мати якомога меншу ширину [3].

В основу побудови покладемо наступні лему 1, теореми 1, 2, та висновки з них. Ці результати отримані в [4, 5].

Лема 1. Нехай функція $y(x)$ один раз неперервно диференційовна у кожній точці x інтервалу $[a, b]$ і функції $\underline{g}(x)$, $\overline{g}(x)$ такі, що на цьому інтервалі виконується подвійна нерівність

$$\underline{g}(x) \leq y'(x) \leq \overline{g}(x). \tag{6}$$

Тоді виконуються наступні нерівності:

$$y_a + \int_a^x \underline{g}(t) dt \leq y(x) \leq y_a + \int_a^x \overline{g}(t) dt, \tag{7}$$

якщо $x \geq a$,

$$y_b - \int_x^b \bar{g}(t) dt \leq y(x) \leq y_b - \int_x^b \underline{g}(t) dt, \quad (8)$$

якщо $x \leq b$,

$$\text{де} \quad y_a = y(a), \quad y_b = y(b). \quad (9)$$

Нехай визначені функції

$$\underline{g}(x) = \underline{k} x + \underline{m}, \quad (10)$$

$$\bar{g}(x) = \bar{k} x + \bar{m}, \quad (11)$$

$$\bar{p}_a(x) = 0.5 \bar{k} x^2 + \bar{m} x - 0.5 \bar{k} a^2 - \bar{m} a + y_a, \quad (12)$$

$$\underline{p}_a(x) = 0.5 \underline{k} x^2 + \underline{m} x - 0.5 \underline{k} a^2 - \underline{m} a + y_a, \quad (13)$$

$$\bar{p}_b(x) = 0.5 \underline{k} x^2 + \underline{m} x - 0.5 \underline{k} b^2 - \underline{m} b + y_b, \quad (14)$$

$$\underline{p}_b(x) = 0.5 \bar{k} x^2 + \bar{m} x - 0.5 \bar{k} b^2 - \bar{m} b + y_b, \quad (15)$$

$$\omega_a(x) = \bar{p}_a(x) - \underline{p}_a(x), \quad (16)$$

$$\omega_b(x) = \bar{p}_b(x) - \underline{p}_b(x), \quad (17)$$

$$\text{де} \quad y_a = y(a), \quad y_b = y(b), \quad (18)$$

\underline{k} , \underline{m} , \bar{k} , \bar{m} — деякі константи. Тоді виконується наступна теорема.

Теорема 1. Нехай в інтервалі $X = [a, b]$ функція $y(x)$ неперервно диференційовна і її похідна $y'(x)$ задовольняє подвійну нерівність

$$\underline{g}(x) \leq y'(x) \leq \bar{g}(x). \quad (19)$$

Тоді:

$$\underline{p}_a(x) \leq y(x) \leq \bar{p}_a(x), \quad (20)$$

$$\underline{p}_b(x) \leq y(x) \leq \bar{p}_b(x); \quad (21)$$

функція $\omega_a(x)$ монотонно зростаюча, а функція $\omega_b(x)$ монотонно спадна, і їх прирости співпадають з точністю до знака; для будь-якого $x \in X = [a, b]$

$$\omega_a(x) + \omega_b(x) = C > 0, \quad (22)$$

де константа

$$C = 0.5 (\bar{k} - \underline{k}) (b^2 - a^2) + (\bar{m} - \underline{m}) (b - a); \quad (23)$$

якщо $\underline{k} \neq \bar{k}$, то в інтервалі $[a, b]$ рівнянь

$$\bar{p}_a(x) = \bar{p}_b(x), \quad (24)$$

$$\underline{p}_a(x) = \underline{p}_b(x) \quad (25)$$

мають розв'язки \bar{x}^* , \underline{x}^* , відповідно, і вони єдині; максимальна віддаль $diam_y$ в інтервалі $[a, b]$ вздовж осі OY між точками множини точок, обмежених параболою $\bar{p}_a(x)$, $\bar{p}_b(x)$, $\underline{p}_a(x)$, $\underline{p}_b(x)$ («параболічного паралелограма»), задовольняє співвідношення

$$diam_y = \min(Y1, Y2) \leq 0.5 C, \quad (26)$$

де

$$Y_2 = 0.5 \bar{k} (b^2 - a^2) + \bar{m} (b - a) + y_a - y_b, \quad (27)$$

$$Y_1 = y_b - y_a - 0.5 \underline{k} (b^2 - a^2) - \underline{m} (b - a). \quad (28)$$

Теорема 2. Нехай на проміжку $[a, b]$ функція $y(x)$ двічі неперервно диференційовна і її друга похідна $y''(x)$ обмежена -

$$\underline{k} \leq y''(x) \leq \bar{k}, \quad (29)$$

де \underline{k} , \bar{k} — деякі константи; відоме значення її похідної $y'_a = y'(a)$, $y'_b = y'(b)$ на кінцях інтервалу $[a, b]$.

Тоді:

$$y'_a + \underline{k} \cdot (b - a) \leq y'_b \leq y'_a + \bar{k} \cdot (b - a), \quad (30)$$

$$l(x) \leq y'(x) \leq \bar{l}(x), \quad (31)$$

де

$$l(x) = \begin{cases} \underline{k} \cdot x + (y'_a - \underline{k} \cdot a), & a \leq x < x_2, \\ \bar{k} \cdot x + (y'_b - \bar{k} \cdot b), & x_2 < x \leq b, \end{cases} \quad (32)$$

$$\bar{l}(x) = \begin{cases} \bar{k} \cdot x + (y'_a - \bar{k} \cdot a), & a \leq x < x_1, \\ \underline{k} \cdot x + (y'_b - \underline{k} \cdot b), & x_1 < x \leq b, \end{cases} \quad (33)$$

$$x_1 = ((y'_b - y'_a) - \underline{k} \cdot b + \bar{k} \cdot a) / (\bar{k} - \underline{k}), \quad (34)$$

$$x_2 = -((y'_b - y'_a) - \bar{k} \cdot b + \underline{k} \cdot a) / (\bar{k} - \underline{k}), \quad (35)$$

$$x_1 + x_2 = a + b. \quad (36)$$

Методи звуження на кінцях інтервалу двохсторонніх апроксимацій розв'язку задачі Коші та граничних задач. Лема 1 та теореми 1, 2 дають можливість аналізувати та усувати різноманітні невизначеності, пов'язані з неперервно диференційовними функціями. Зокрема, застосування їх до задачі Коші (1)–(2) та граничної задачі (3)–(5) породжує наступну теорему 3.

Нехай визначені многочлени

$$\bar{p}1_a(x) = 0.5 \bar{k} x^2 + (y'_a - \bar{k} a) x + 0.5 \bar{k} a^2 - (y'_a - \bar{k} a) a + y_a, \quad (37)$$

$$\underline{p}1_a(x) = 0.5 \underline{k} x^2 + (y'_a - \underline{k} a) x + 0.5 \underline{k} a^2 - (y'_a - \underline{k} a) a + y_a, \quad (38)$$

$$\overline{p2}_a(x) = 0.5 \underline{k} x^2 + (y'_b - \underline{k} b) x - 0.5 \underline{k} a^2 - (y'_b - \underline{k} b) a + y_a, \quad (39)$$

$$\underline{p2}_a(x) = 0.5 \overline{k} x^2 + (y'_b - \overline{k} b) x - 0.5 \overline{k} a^2 - (y'_b - \overline{k} b) a + y_a; \quad (40)$$

$$\overline{p1}_b(x) = 0.5 \underline{k} x^2 + (y'_a - \underline{k} a) x - 0.5 \underline{k} b^2 - (y'_a - \underline{k} a) b + y_b, \quad (41)$$

$$\underline{p1}_b(x) = 0.5 \overline{k} x^2 + (y'_a - \overline{k} a) x - 0.5 \overline{k} b^2 - (y'_a - \overline{k} a) b + y_b, \quad (42)$$

$$\overline{p2}_b(x) = 0.5 \overline{k} x^2 + (y'_b - \overline{k} b) x + 0.5 \overline{k} b^2 - (y'_b - \overline{k} b) b + y_b, \quad (43)$$

$$\underline{p2}_b(x) = 0.5 \underline{k} x^2 + (y'_b - \underline{k} b) x + 0.5 \underline{k} b^2 - (y'_b - \underline{k} b) b + y_b, \quad (44)$$

та сплайни

$$\overline{s}_a(x) = \begin{cases} \overline{p1}_a(x), & a \leq x \leq x_1, \\ \overline{p2}_a(x) - \overline{p2}_a(x_1) + \overline{p1}_a(x_1), & x_1 \leq x \leq b, \end{cases} \quad (45)$$

$$\underline{s}_a(x) = \begin{cases} \underline{p1}_a(x), & a \leq x \leq x_2, \\ \underline{p2}_a(x) - \underline{p2}_a(x_2) + \underline{p1}_a(x_2), & x_2 \leq x \leq b, \end{cases} \quad (46)$$

де точки x_1, x_2 визначаються за формулами (34), (35), відповідно.

Тоді y_a, y_b, y'_a, y'_b — значення функції $y(x)$ та її першої похідної на кінцях проміжку $[a, b]$, відповідно, узгоджуються між собою згідно висновків наступної теореми.

Теорема 3. Нехай функція $y(x)$ двічі неперервно диференційовна на проміжку $[a, b]$ і на цьому проміжку

$$\underline{k} \leq y''(x) \leq \overline{k}, \quad (47)$$

де $\underline{k}, \overline{k}$ деякі константи; відоме її значення $y_a = y(a)$ і значення її похідної $y'_a = y'(a)$, $y'_b = y'(b)$ на кінцях інтервалу $[a, b]$.

Тоді:

$$1) \quad y_b \in [c_1, d_1] \cap [c_2, d_2], \quad (48)$$

$$\text{де} \quad [c_1, d_1] \equiv [\underline{s}_a(b), \overline{s}_a(b)], \quad (49)$$

$$\begin{aligned} \overline{s}_a(b) &= y_a + (2(\overline{k} y'_b - \underline{k} y'_a)(b-a) - \\ &- \overline{k} \underline{k} (b-a)^2 - (y'_b - y'_a)^2) / (2(\overline{k} - \underline{k})), \end{aligned} \quad (50)$$

$$\begin{aligned} \underline{s}_a(b) &= y_a + (-2(\underline{k} y'_b - \overline{k} y'_a)(b-a) + \\ &+ \overline{k} \underline{k} (b-a)^2 + (y'_b - y'_a)^2) / (2(\overline{k} - \underline{k})); \end{aligned} \quad (51)$$

$$[c_2, d_2] \equiv [\underline{p1}_a(b), \overline{p2}_a(b)], \quad (52)$$

якщо $\overline{p2}_a(b) < \underline{p1}_a(b)$, або

$$[c_2, d_2] \equiv [\underline{p}_a(b), \overline{p}_a(b)], \quad (53)$$

якщо $\overline{p}_a(b) \geq \underline{p}_a(b)$;

$$\begin{aligned} 2) \quad & \left| \overline{p}_a(b) - \underline{p}_a(b) \right| = \left| \underline{p}_a(b) - \overline{p}_a(b) \right| = \\ & = \left| \overline{p}_b(a) - \underline{p}_b(a) \right| = \left| \underline{p}_b(a) - \overline{p}_b(a) \right| = \Delta, \end{aligned} \quad (54)$$

$$\text{де} \quad \Delta = 0.5 (\overline{k} + \underline{k}) (b - a)^2 + (y'_a - y'_b) (b - a); \quad (55)$$

$$3) \quad \overline{p}_a(b) - \underline{p}_a(b) = \overline{p}_a(b) - \underline{p}_a(b) = \quad (56)$$

$$= \overline{p}_b(a) - \underline{p}_b(a) = \overline{p}_b(a) - \underline{p}_b(a) \stackrel{df}{=} \omega,$$

$$\text{де} \quad \omega = 0.5 (\overline{k} - \underline{k}) (b - a)^2, \quad (57)$$

$$\begin{aligned} \omega_{ab} & \stackrel{df}{=} \overline{s}_a(b) - \underline{s}_a(b) = ((\overline{k} + \underline{k}) (y'_b - y'_a) (b - a) - \\ & - \overline{k} \underline{k} (b - a)^2 - (y'_b - y'_a)^2) / (\overline{k} - \underline{k}). \end{aligned} \quad (58)$$

Доведення. Виконання умов цієї теореми гарантує виконання умов теореми 2. Тому виконуються всі співвідношення (30)–(36), які відображають узгодженості між константами \overline{k} , \underline{k} та значення y'_a , y'_b першої похідної функції $y(x)$ на кінцях проміжку $[a, b]$. Зокрема,

$$l(x) \leq y'(x) \leq \overline{l}(x), \quad (59)$$

де $l(x)$, $\overline{l}(x)$ лінійні сплайни (32), (33). Очевидно, що

$$\underline{k} \cdot x + (y'_a - \underline{k} \cdot a) \leq l(x) \leq y'(x) \leq \overline{l}(x) \leq \overline{k} \cdot x + (y'_a - \overline{k} \cdot a), \quad (60)$$

$$\overline{k} \cdot x + (y'_b - \overline{k} \cdot b) \leq \overline{l}(x) \leq y'(x) \leq l(x) \leq \underline{k} \cdot x + (y'_b - \underline{k} \cdot b). \quad (61)$$

Нерівність (60) є нерівністю (19), де

$$\underline{m} = y'_a - \underline{k} \cdot a, \quad \overline{m} = y'_a - \overline{k} \cdot a, \quad (62)$$

і нерівність (61) є нерівністю (19), в якій

$$\underline{m} = y'_b - \overline{k} \cdot b, \quad \overline{m} = y'_b - \underline{k} \cdot b. \quad (63)$$

Отже, умови теореми 2 виконуються при двох різних описах (62), (63) поведінки похідної функції $y(x)$ на протилежних кінцях інтервалу $[a, b]$. Тому, згідно теореми 2 та (62), (63), формули (37), (38) є формулами (12), (13) при (62), а формули (39), (40) є формулами (14), (15) при (63), відповідно. Тут враховано те, що згідно (8) леми 1, інтегрування здійснюється від точки b до точки a (у зворотному напрямку). Тепер істинність співвідношень (50), (51), (54)–(58) перевіряється безпосередньо, використовуючи (37)–(46) (див. рис. 1).

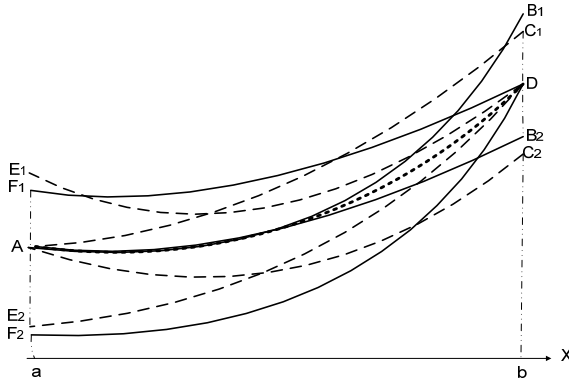


Рис. 1. Параболи узгодження значень функції $y(x)$ на проміжку $[a, b]$ та її значень і значень її похідної y_a, y_b, y'_a, y'_b , відповідно, в точках a, b

На рисунку:

- криві AB_1, AB_2 зображують графіки парабол $\overline{p1}_a(x), \underline{p1}_a(x)$;
- криві AC_1, AC_2 зображують графіки парабол $\overline{p2}_a(x), \underline{p2}_a(x)$;
- криві DF_1, DF_2 зображують графіки парабол $\overline{p1}_b(x), \underline{p1}_b(x)$;
- криві DE_1, DE_2 зображують графіки парабол $\overline{p2}_b(x), \underline{p2}_b(x)$;
- крива AD зображає графік функції $y(x)$.

Всі відрізки $B_1B_2, C_1C_2, E_1E_2, F_1F_2$ мають однакову довжину ω , яка визначається за формулою (56), а всі відрізки $B_1C_1, B_2C_2, E_1F_1, E_2F_2$ мають однакову довжину Δ , яка визначається за формулою (57).

З теореми 1 випливає, що значення $y_b = y(b)$ функції $y(x)$ гарантовано належить інтервалам B_1B_2 і C_1C_2 . Отже це значення належить перетину цих інтервалів, тобто $y_b \in [c_2, d_2]$, де межі цього інтервалу визначаються за формулами (52), або (53).

Нехай

$$\underline{g}(x) = \underline{s}_a(x), \underline{g} = \underline{s}_a(x). \quad (64)$$

Очевидно, що умови леми 1 виконуються. Оскільки значення y_b невідоме, то застосуємо нерівність (7) при $x = b$. Отримаємо нерівність $\underline{s}_a(b) \leq y_b \leq \overline{s}_a(b)$. Отже $y_b \in [c_1, d_1]$. Оскільки $y_b \in [c_1, d_1]$ і $y_b \in [c_2, d_2]$, то $y_b \in [c_1, d_1] \cap [c_2, d_2]$. **Теорема доведена.**

Зауваження 1. Якщо відомі значення y_b , y'_a , y'_b і потрібно знайти межі інтервалу, у якому знаходиться значення y_a , то застосуємо висновки наступної теореми.

Теорема 4. Нехай функція $y(x)$ двічі неперервно диференційовна на проміжку $[a, b]$ і на цьому проміжку

$$\underline{k} \leq y''(x) \leq \bar{k}, \quad (65)$$

де \underline{k}, \bar{k} деякі константи; відоме її значення $y_b = y(b)$ і значення її похідної $y'_a = y'(a)$, $y'_b = y'(b)$ на кінцях інтервалу $[a, b]$.

Тоді:

$$1) \quad y_b \in [c_1, d_1] \cap [c_2, d_2], \quad (66)$$

$$\text{де} \quad [c_1, d_1] \equiv [\underline{s}_b(a), \bar{s}_b(a)], \quad (67)$$

$$\bar{s}_b(a) = y_b + (-2(\bar{k} y'_b - \underline{k} y'_a)(b-a) - \bar{k} \underline{k} (b-a)^2 - (y'_b - y'_a)^2) / (2(\bar{k} - \underline{k})), \quad (68)$$

$$\underline{s}_b(a) = y_b + (2(\underline{k} y'_b - \bar{k} y'_a)(b-a) + \bar{k} \underline{k} (b-a)^2 + (y'_b - y'_a)^2) / (2(\bar{k} - \underline{k})); \quad (69)$$

$$[c_2, d_2] \equiv [\underline{p}_{2_b}(a), \bar{p}_{1_b}(a)], \quad (70)$$

якщо $\bar{p}_{1_b}(a) < \underline{p}_{2_b}(a)$, або

$$[c_2, d_2] \equiv [\underline{p}_{1_b}(a), \bar{p}_{2_b}(a)], \quad (71)$$

якщо $\bar{p}_{1_b}(a) \geq \underline{p}_{2_b}(a)$;

$$2) \quad \begin{aligned} & \left| \bar{p}_{1_a}(b) - \underline{p}_{2_a}(b) \right| = \left| \underline{p}_{1_a}(b) - \bar{p}_{2_a}(b) \right| = \\ & = \left| \bar{p}_{1_b}(a) - \underline{p}_{2_b}(a) \right| = \left| \underline{p}_{1_b}(a) - \bar{p}_{2_b}(a) \right| = \Delta, \end{aligned} \quad (72)$$

$$\text{де} \quad \Delta = 0.5(\bar{k} + \underline{k})(b-a)^2 + (y'_a - y'_b)(b-a); \quad (73)$$

$$3) \quad \begin{aligned} & \bar{p}_{1_a}(b) - \underline{p}_{1_a}(b) = \bar{p}_{2_a}(b) - \underline{p}_{2_a}(b) = \\ & = \bar{p}_{1_b}(a) - \underline{p}_{1_b}(a) = \bar{p}_{2_b}(a) - \underline{p}_{2_b}(a) \stackrel{df}{=} \omega, \end{aligned} \quad (74)$$

$$\text{де} \quad \omega = 0.5(\bar{k} - \underline{k})(b-a)^2, \quad (75)$$

$$\begin{aligned} \omega_{ba} \stackrel{df}{=} & \bar{s}_b(a) - \underline{s}_b(a) = ((\bar{k} + \underline{k})(y'_b - y'_a)(b-a) - \\ & - \bar{k} \underline{k} (b-a)^2 - (y'_b - y'_a)^2) / (\bar{k} - \underline{k}). \end{aligned} \quad (76)$$

Тут

$$\bar{s}_b(x) = \begin{cases} \bar{p}_{2_b}(x) - \underline{p}_{2_b}(x_2) + \bar{p}_{1_b}(x_2), & a \leq x \leq x_2, \\ \bar{p}_{1_b}(x), & x_2 \leq x \leq b, \end{cases} \quad (77)$$

$$\underline{s}_b(x) = \begin{cases} \underline{p}_b^2(x) - \underline{p}_b^2(x_1) + \underline{p}_b^1(x_1), & a \leq x \leq x_1, \\ \underline{p}_b^1(x), & x_1 \leq x \leq b, \end{cases} \quad (78)$$

Доведення теореми 4 аналогічне доведенню теореми 3.

Зауваження 2. Теореми 3, 4 є узагальненнями теореми 1 та теореми 2 з [5]. Висновки цих теорем дають можливість суттєво звузити двохсторонні апроксимації розв'язку задачі Коші (1)–(2) та граничної задачі (3)–(5).

Зауваження 3. Формули (37)–(46), (48)–(58), (66)–(78) відображають зв'язки між функцією $y(x)$ і її похідної на протилежних кінцях інтервалу $[a, b]$. Тому їх використовуємо для побудови інтервалів, які гарантовано містять величини y_a, y_b, y'_a, y'_b .

Приклад 1. Функція $y(x)$ в точці $a = 0$ набуває значення 2, а її перша похідна — 0. Перша похідна в точці $b = 0.0319$ рівна 0.134145, і $2.98724 \leq y''(x) \leq 5.58151$ в інтервалі $[a, b]$. Знайти інтервал, який гарантовано містить невідоме значення $y(b)$.

Згідно (55), (57), $\Delta = 0.00008071$, $\omega = 0.00132005$. За формулами (50), (51), (58) отримуємо: $\bar{s}_a(b) = 2.00246846$, $\underline{s}(b) = 2.0018109$, $\omega_{ab} = 0.000657559$. Отже інтервал $[2.0018109, 2.00246846]$ гарантовано містить значення $y(b)$.

Умови прикладу 1 співпадають із відповідними значеннями функції — розв'язку задачі Коші з [5], значення якої $y(b) = 2.0021036992621526$.

Алгоритм побудови методів розв'язування граничних задач на основі математики функціональних інтервалів. Кожен алгоритм розв'язування таких задач, заснований на математиці функціональних інтервалів, складається із кроків, які можна розбити на два блоки.

Перший блок реалізує процедуру побудови на інтервалі $[a, b]$ функціонального інтервалу, який містить першу похідну $y'(x)$ функції $y(x)$, та функціонального інтервалу, який містить функцію $y(x)$. Верхні і нижні обмежуючі функції цих інтервалів повинні бути двохланковими кусково-лінійними функціями. Крім цього, одночасно будуються інтервали, в яких гарантовано містяться значення y_a, y_b, y'_a, y'_b . Це реалізуємо на основі висновків теореми 2, які по чергово застосовуємо до похідної $y'(x)$, та функції $y(x)$.

Другий блок реалізує процедуру побудови на інтервалі $[a, b]$ функціонального інтервалу, який містить першу похідну $y'(x)$ функції $y(x)$, та функціонального інтервалу, який містить функцію $y(x)$. Обмежуючі функції функціонального інтервалу похідної отримуємо

у вигляді квадратичних сплайнів, а функціонального інтервалу функції — у вигляді кубічних сплайнів. Алгоритм буде обидва функціональні інтервали з будь-якою як завгодно малою шириною.

Приклад 2. Побудувати алгоритм на основі математики функціональних інтервалів розв'язування на інтервалі $[a, b]$ граничної задачі

$$y'' = u(x, y(x), y'(x)), \quad (79)$$

$$y(a) = y_a, \quad (80)$$

$$y(b) = y_b, \quad (81)$$

Будуємо перший блок кроків алгоритму.

1. Визначаємо кутівий коефіцієнт k_0 прямої, яка проходить через точки $(a, y_a), (b, y_b)$.

$$k_0 = (y_b - y_a) / (b - a). \quad (82)$$

2. Вибираємо довільні значення коефіцієнтів $\overline{k}'_0, \underline{k}'_0$, але таких, що $k_0 < \overline{k}'_0, \underline{k}'_0 < k_0$.

3. Знаходимо ординати $\overline{m}_0, \underline{m}_0$ точок перетинів прямих

$$y = \overline{k}'_0 \cdot x + (y_a - \overline{k}'_0 \cdot a), \quad y = \underline{k}'_0 \cdot x + (y_b - \underline{k}'_0 \cdot b), \quad (83)$$

та

$$y = \overline{k}'_0 \cdot x + (y_b - \overline{k}'_0 \cdot b), \quad y = \underline{k}'_0 \cdot x + (y_a - \underline{k}'_0 \cdot a), \quad (84)$$

відповідно.

4. Із теореми 2 слідує, що початковий функціональний інтервал, який містить $y(x)$ має такі обмежуючі функції:

$$y = \overline{m}_0, \quad y = \underline{m}_0, \quad (85)$$

а початковий функціональний інтервал, який містить $y'(x)$ — такі:

$$y = \overline{k}'_0, \quad y = \underline{k}'_0, \quad (86)$$

Отже всі гіпотетичні значення функції $y(x)$ містяться в інтервалі $[\underline{m}_0, \overline{m}_0]$, а всі гіпотетичні значення функції $y'(x)$ — в інтервалі $[\underline{k}'_0, \overline{k}'_0]$.

5. Підставляємо у (79) інтервали $[a, b], [\underline{m}_0, \overline{m}_0], [\underline{k}'_0, \overline{k}'_0]$ замість $x, y(x), y'(x)$, відповідно, знаходимо інтервальне розширення $[\underline{k}''_0, \overline{k}''_0]$ функції $u(x, y(x), y'(x))$. Отже початковий функціональний інтервал, який містить $y''(x)$ має такі обмежуючі функції:

$$y = \overline{k}''_0, \quad y = \underline{k}''_0, \quad (87)$$

Далі узгодження між так отриманими функціональними інтервалами з обмежуючими функціями (85)–(87) здійснюємо повторюючи кроки алгоритму 2–4 декілька разів.

Другий крок блок кроків алгоритму формуємо на основі висновків теорем 3, 4 за наведеними там формулами.

Висновки. В роботі розроблена методика побудови методів знаходження розв'язків граничних задач для звичайних диференціальних рівнянь другого порядку у вигляді двохсторонніх апроксимації розв'язків таких задач сплайнами, які гарантовано містять точний розв'язок задачі; розроблені алгоритми суттєвого звуження таких апроксимацій, що дає можливість будувати функціональні інтервали розв'язку задачі з будь-якою бажаною як завгодно малою шириною.

Список використаних джерел:

1. Добронєц Б. С. Двухсторонние численные методы / Б. С. Добронєц, В. В. Шайдунов — Новосибирск : Наука, Сибирское отделение, 1990. — 208 с.
2. Калмыков С. А. Методы интервального анализа / С. А. Калмыков, Ю. И. Шокин, З. Х. Юлдашев. — Новосибирск : Наука, Сибирское отделение, 1986. — 222 с
3. Сеньо П. С. Арифметика лінійних функціональних інтервалів / П. С. Сеньо // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інформ. — 2014. — Вип. 21. — С. 38–57.
4. Сеньо П. С. Деякі застосування математики функціональних інтервалів / П. С. Сеньо // Матем. та комп. моделювання. Серія: фізико-матем. науки. — 2016. — Вип. 13. — С. 182–193.
5. Сеньо П. С. Двухсторонні методи розв'язування задачі Коші на підставі математики функціональних інтервалів / П. С. Сеньо // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інформ. — 2017. — Вип. 24. — С. 18–37.
6. Senio P. S. The method of solving the Cauchy problem that is based on the adjustment the approximation of the function and its derivative / P. S. Senio, T. I. Stoyko // East European Scientific Journal. — Warsaw, 2017. — No 9. — P. 65–72.

METHODS OF SOLVING BOUNDARY PROBLEMS BASED ON MATHEMATICS OF FUNCTIONAL INTERVALS

In this article, algorithms are proposed based on the mathematics of function intervals [3] for solving boundary value problems for ordinary differential equations of the second order. These methods give two-sided approximations of solutions of such problems with splines. Thus the resulting functional intervals definitely contain the exact solution of the problem.

Each such an algorithm consists of steps that can be divided into two blocks. The first block implements the procedure for constructing the simplest functional intervals that contain the first pass and the function, respectively. In addition, intervals are constructed at the same time, which definitely contain the values of the function and its derivative at the ends of the integration interval. Formulas (37)–(46), (48)–(58), (66)–(78) represent the connections between the function and its derivative at the opposite ends of the integration interval. Therefore, they are used to construct intervals that definitely contain these values.

The second block implements the construction procedure on the integration interval of functional intervals, which contain the first pass function, and the solution of the problem, respectively. This block of steps of

the algorithm is formed on the basis of the conclusions of Theorems 3 and 4 according to the formulas given there.

Theorems 3 and 4 are generalizations of Theorem 1 and Theorem 2 of [5]. These theorems make it possible to analyze and eliminate the various uncertainties connected with continuously differentiable functions. The conclusions of these theorems make it possible to substantially reduce the two-sided approximations of the Cauchy problem solution (1)–(2) and of the boundary problem solution (3)–(5). Therefore, these conclusions can be interpreted as concretization and generalization of the theorem on the average function and its derivative.

The proposed algorithms construct functional intervals of the problem solution with any desired small (as you wish) width.

Key words: *Cauchy problem, boundary value problem, interval, functional interval, two-sided approximation, spline.*

Отримано: 21.05.2018

УДК 517.944

С. Г. Хома-Могильська*, канд. фіз.-мат. наук,

В. З. Чорний**, канд. фіз.-мат. наук

*Тернопільський національний економічний університет,
м. Тернопіль,

**Тернопільський національний педагогічний університет
імені Володимира Гнатюка, м. Тернопіль

ДОСЛІДЖЕННЯ Т-ПЕРІОДИЧНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ РІВНЯНЬ ГІПЕРБОЛІЧНОГО ТИПУ

Як показано в багатьох класичних підручниках з теорії звичайних диференціальних рівнянь, щоб існував T -періодичний розв'язок рівняння $Lu = f(x, t, u)$, потрібно, щоб права частина рівняння $f(x, t, u)$ була T -періодичною по t , тобто $f(x, t+T, u) = f(x, t, u)$. Зауважимо, що не кожне рівняння при такій умові може мати T -періодичний розв'язок. Прикладом такого твердження є звичайне диференціальне рівняння $dx/dt = \sin^2 t$, розв'язок якого не є періодичним. Для дослідження існування T -періодичних розв'язків звичайних диференціальних рівнянь та їх систем А. М. Самойленком був розроблений чисельно-аналітичний метод побудови T -періодичних розв'язків звичайних диференціальних рівнянь і систем. Результати, одержані А. М. Самойленко, були використані для дослідження T -періодичних розв'язків багатьох нових класів звичайних диференціальних рівнянь і навіть захопили задачу Гурса для рівнянь у частинних похідних. Зазначимо, що крайові T -періодичні задачі для більш загального диференціального рівняння у частинних похідних не були досліджені аналітичним методом. Вперше у даній роботі нами показано методику дослідження T -періодичних розв'язків крайової T -періо-

дичної задачі для більш загального диференціального рівняння у частинних похідних $\partial^2 u / \partial t^2 - a^2 \partial^2 u / \partial x^2 = f(x, t, u, u_x)$. Використано таке просте твердження: функція $K(x, t)$, визначена через інтеграл з межами від $t - b$ до $t + b$, для кожної T -періодичної по τ функції $g(x, \tau)$, тобто $g(x, \tau + T) = g(x, \tau)$, є також T -періодична по t . Знайдена формула автоматично задовольняє крайові та T -періодичні умови: $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$, $u(x, t + T) = u(x, t)$, $0 \leq x \leq \pi$, $t \in \mathbf{R}$. Одержані в даній роботі результати можна використовувати для дослідження багатьох класів диференціальних рівнянь у частинних похідних гіперболічного типу.

Ключові слова: *T*-періодичний розв'язок, крайова *T*-періодична задача, оператор, гіперболічне рівняння другого порядку.

Вступ. Розвинутий А. М. Самойленком [1] метод відшукування T -періодичних розв'язків звичайних диференціальних систем першого порядку $\frac{dx}{dt} = f(t, x)$ знайшов широке застосування і обґрунтування для різного класу диференціальних рівнянь як звичайних, так і у частинних похідних. Вказане обґрунтування здійснювалося на доведених властивостях оператора А. М. Самойленка, який переводить T -періодичну функцію $f(t)$ в T -періодичну функцію за формулою

$$x(t) = \int_0^t \left(f(\tau) - \frac{1}{T} \int_0^T f(s) ds \right) d\tau \equiv \int_0^t f(\tau) d\tau - \frac{t}{T} \int_0^T f(s) ds.$$

Саме ця властивість дозволила розширити цей метод на різні класи звичайних диференціальних рівнянь, так і рівнянь у частинних похідних [1].

Однак для рівнянь гіперболічного типу другого порядку вигляду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t, u, u_t, u_x) \quad (1)$$

аналітичного методу відшукування T -періодичних розв'язків по змінній t до даного часу не існує. Крім як використання тригонометричних рядів Фур'є вигляду

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) \sin kx,$$

якщо розглядається така крайова T -періодична задача:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F(x, t, u), \quad 0 < x < \pi, \quad t \in \mathbf{R}, \quad (2)$$

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad t \in \mathbf{R}, \quad (3)$$

$$u(x, t + T) = u(x, t), \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad t \in \mathbf{R}. \quad (4)$$

Слід сказати, що вперше таку задачу при $T = 2\pi$ розглянуто П. Рабіновичем у роботі [3] для рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \varepsilon F(x, t, u), \quad (5)$$

де ε — малий параметр. У даній роботі [3] доведено твердження: якщо права частина достатньо гладка відносно аргументів (x, t, u) , то крайова $T = 2\pi$ -періодична задача (5), (3), (4) для достатньо малого параметра ε ($0 < \varepsilon < 1$) має єдиний класичний розв'язок, який має вигляд $u(x, t) = u^0(x, t) + \varepsilon w(x, t)$, де $u^0(x, t)$ — розв'язок однорідної крайової задачі $\frac{\partial^2 u^0}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u^0}{\partial x^2} = 0$, $u^0(0, t) = u^0(\pi, t) = 0$, $u^0(x, t + T) = u^0(x, t)$, $0 \leq x \leq \pi$, $t \in \mathbf{R}$, а $w(x, t)$ — частинний класичний розв'язок задачі (5), (3), (4).

Нами на основі розроблених операторів S_{a_1} і S_{a_2} [2, с. 26, формули (9.6), (9.8)] доведено один спосіб відшукування T -періодичних по t розв'язків $u(x, t)$ рівняння (1).

Основні позначення. Введемо такі позначення: C_π — простір функцій двох змінних x і t , неперервних і обмежених на $[0, \pi] \times \mathbf{R}$. $C_\pi^{k,l}$ — простір функцій $u \in C_\pi$ таких, що $D_t^k D_x^l u \in C_\pi$. $G_{\pi t}$ — простір функцій двох змінних x і t , неперервних і обмежених на $[0, \pi] \times \mathbf{R}$ разом із похідною по t . Q_T — простір функцій $g(x, t)$, які задовольняють на $[0, \pi] \times \mathbf{R}$ співвідношення $g(x, t + T) = g(x, t)$. $L(X, Y)$ — простір лінійних і обмежених відображень X в Y .

$$A_2 = \{g : g(x, t) = g(\pi - x, t + \pi) = g(x, t + 2\pi)\}.$$

\mathbf{R} — множина дійсних чисел.

$$\alpha(x, t, \xi) = t + \frac{x - \xi}{a}.$$

$$\beta(x, t, \xi) = t - \frac{x - \xi}{a}.$$

$$\gamma(x, \xi) = \frac{x - \xi}{a}.$$

a — число.

Основний результат. Розглянемо ряд таких функцій:

$$u_1^a(x, t) = (S_{a_1} g)(x, t) \equiv -\frac{1}{2a} \int_0^x \int_{t-\gamma(x, \xi)}^{t+\gamma(x, \xi)} g(\xi, \tau) d\tau d\xi; \quad (6)$$

$$u_2^a(x, t) = (S_{a_2} g)(x, t) \equiv -\frac{1}{2a} \int_x^\pi d\xi \int_{t+\gamma(x, \xi)}^{t-\gamma(x, \xi)} g(\xi, \tau) d\tau; \quad (7)$$

або

$$u_2^a(x, t) = -\frac{1}{2a} \int_\pi^x d\xi \int_{t-\gamma(x, \xi)}^{t+\gamma(x, \xi)} g(\xi, \tau) d\tau, \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad t \in \mathbf{R}. \quad (7^*)$$

Справедливими є твердження.

Теорема 1. Якщо $g \in G_\pi \cap Q_T$, то функція $u_1^a(x, t) \in T$ -періодичним по t частинним класичним розв'язком неоднорідного рівняння

$$\frac{\partial^2 u_1^a}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u_1^a}{\partial x^2} = g(x, t), \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad t \in \mathbf{R}. \quad (8)$$

Доведення. Обчислимо частинні похідні першого і другого порядків від функції $u_1^a(x, t)$. На підставі формули (6) одержуємо

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1^a(x, t)}{\partial x} &= -\frac{1}{2a} \int_0^x \left\{ g\left(\xi, t + \frac{x-\xi}{a}\right) \cdot \frac{1}{a} + g\left(\xi, t - \frac{x-\xi}{a}\right) \cdot \frac{1}{a} \right\} d\xi = \\ &= -\frac{1}{2a^2} \int_0^x \left\{ g\left(\xi, t + \frac{x-\xi}{a}\right) + g\left(\xi, t - \frac{x-\xi}{a}\right) \right\} d\xi; \end{aligned}$$

Скористасямося позначеннями

$$\alpha(x, t, \xi) = t + \frac{x-\xi}{a}; \quad \beta(x, t, \xi) = t - \frac{x-\xi}{a}.$$

Тоді

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_1^a(x, t)}{\partial x^2} &= -\frac{1}{a^2} g(x, t) - \frac{1}{2a^2} \int_0^x \left\{ \frac{\partial g}{\partial \alpha} \cdot \frac{1}{a} - \frac{\partial g}{\partial \beta} \cdot \frac{1}{a} \right\} d\xi; \\ \frac{\partial u_1^a(x, t)}{\partial t} &= -\frac{1}{2a} \int_0^x \left\{ g\left(\xi, t + \frac{x-\xi}{a}\right) - g\left(\xi, t - \frac{x-\xi}{a}\right) \right\} d\xi; \\ \frac{\partial^2 u_1^a(x, t)}{\partial t^2} &= -\frac{1}{2a} \int_0^x \left\{ \frac{\partial g}{\partial \alpha} \cdot 1 - \frac{\partial g}{\partial \beta} \cdot 1 \right\} d\xi. \end{aligned}$$

Отже,

$$\frac{\partial^2 u_1^a(x, t)}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u_1^a(x, t)}{\partial x^2} = g(x, t).$$

Далі доведемо, що функція $u_1^a(x, t)$ для кожної функції $g \in C_\pi \cap Q_T$ — періодичної по t , є також T -періодична по t .

Справді, на основі формули $u_1^a(x, t) = -\frac{1}{2a} \int_0^x d\xi \int_{t-\gamma(x, \xi)}^{t+\gamma(x, \xi)} g(\xi, \tau) d\tau$,

де $\gamma(x, \xi) = \frac{x-\xi}{a}$, маємо

$$u_1^a(x, t+T) = -\frac{1}{2a} \int_0^x d\xi \int_{t+T-\gamma(x, \xi)}^{t+T+\gamma(x, \xi)} g(\xi, \tau) d\tau.$$

З останньої рівності після виконання заміни $\tau = \theta + T$, $t - \gamma(x, t) \leq \theta \leq t + \gamma(x, t)$, одержуємо

$$u_1^a(x, t+T) = -\frac{1}{2a} \int_0^x d\xi \int_{t-\gamma(x, \xi)}^{t+\gamma(x, \xi)} g(\xi, \theta+T) d\theta = u_1^a(x, t)$$

що й потрібно було довести.

Теорема 2. Якщо $g \in G_{\pi t} \cap Q_T$, то функція $u_2^a(x, t) \in T$ -періодичним по t частинним класичним розв'язком неоднорідного рівняння

$$\frac{\partial^2 u_2^a}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u_2^a}{\partial x^2} = g(x, t), \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad t \in \mathbf{R}. \quad (9)$$

Доведення. Обчислимо частинні похідні від функції $u_2^a(x, t)$.
Маємо

$$u_2^a(x, t) = -\frac{1}{2a} \int_x^\pi d\xi \int_{t+\frac{x-\xi}{a}}^{t-\frac{x-\xi}{a}} g(\xi, \tau) d\tau;$$

або

$$u_2^a(x, t) = -\frac{1}{2a} \int_\pi^x d\xi \int_{t-\frac{x-\xi}{a}}^{t+\frac{x-\xi}{a}} g(\xi, \tau) d\tau.$$

Отже,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_2^a(x, t)}{\partial x} &= -\frac{1}{2a} \int_\pi^x \left(\int_{t-\frac{x-\xi}{a}}^{t+\frac{x-\xi}{a}} g(\xi, \tau) d\tau \right)'_x d\xi = \\ &= -\frac{1}{2a} \int_\pi^x \left\{ g\left(\xi, t + \frac{x-\xi}{a}\right) \cdot \frac{1}{a} + g\left(\xi, t - \frac{x-\xi}{a}\right) \cdot \frac{1}{a} \right\} d\xi; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_2^a(x, t)}{\partial x^2} &= -\frac{1}{a^2} g(x, t) - \frac{1}{2a^3} \int_{\pi}^x \left\{ \frac{\partial g}{\partial \alpha} - \frac{\partial g}{\partial \beta} \right\} d\xi; \\ \frac{\partial u_2^a(x, t)}{\partial t} &= -\frac{1}{2a} \int_{\pi}^x \left\{ g\left(\xi, t + \frac{x-\xi}{a}\right) \cdot 1 - g\left(\xi, t - \frac{x-\xi}{a}\right) \cdot 1 \right\} d\xi; \\ \frac{\partial^2 u_2^a(x, t)}{\partial t^2} &= -\frac{1}{2a} \int_{\pi}^x \left\{ \frac{\partial g}{\partial \alpha} - \frac{\partial g}{\partial \beta} \right\} d\xi. \end{aligned}$$

Отже,

$$\frac{\partial^2 u_2^a(x, t)}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u_2^a(x, t)}{\partial x^2} = g(x, t).$$

Аналогічно доводимо, що для кожної функції $g \in C_{\pi} \cap Q_T$, функція $u_2^a(x, t)$ — T -періодична по t .

Теорему 2 доведено.

Розглянемо таку функцію:

$$u^a(x, t) = \frac{1}{2} (S_{a_1} g + S_{a_2} g)(x, t) \equiv (S_a g)(x, t), \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad t \in \mathbf{R},$$

або

$$u^a(x, t) = -\frac{1}{4a} \int_0^x d\xi \int_{t-\gamma(x, \xi)}^{t+\gamma(x, \xi)} g(\xi, \tau) d\tau - \frac{1}{4a} \int_x^{\pi} d\xi \int_{t+\gamma(x, \xi)}^{t-\gamma(x, \xi)} g(\xi, \tau) d\tau. \quad (10)$$

Теорема 3. Якщо $g \in G_{\pi t} \cap Q_T$, то функція

$$u^a(x, t) = (S_a g)(x, t),$$

є також T -періодичним по t частинним класичним розв'язком неоднорідного рівняння

$$\frac{\partial^2 u^a}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u^a}{\partial x^2} = g(x, t), \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad t \in \mathbf{R}. \quad (11)$$

Доведення теореми 3 випливає з тверджень теореми 1, 2.

Розглянемо таку функцію:

$$\tilde{u}^a(x, t) = (S_a g)(x, t) + (\tilde{S}_a g)(x, t), \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad t \in \mathbf{R},$$

де

$$(\tilde{S}_a g)(x, t) = \frac{\pi-x}{4\pi a} \int_0^{\pi} d\xi \int_{t+\gamma(0, \xi)}^{t-\gamma(0, \xi)} g(\xi, \tau) d\tau + \frac{x}{4\pi a} \int_0^{\pi} d\xi \int_{t-\gamma(\pi, \xi)}^{t+\gamma(\pi, \xi)} g(\xi, \tau) d\tau.$$

Теорема 4. Для кожної функції $g(x, t)$ T -періодичної по t , функція $\tilde{u}^a(x, t)$ є T -періодичною по t , тобто $\tilde{u}^a(x, t+T) = \tilde{u}^a(x, t)$, $0 \leq x \leq \pi$, $t \in \mathbf{R}$.

Доведення очевидне.

Теорема 5. Функція $\tilde{u}^a(x, t)$ задовольняє крайові умови

$$\tilde{u}^a(0, t) = \tilde{u}^a(\pi, t) = 0, \quad t \in \mathbf{R}.$$

Безпосередньою перевіркою в цьому твердженні переконуємося. На основі теорем 3, 4 випливає таке твердження.

Теорема 6. Функція $\tilde{u}^a(x, t) \in C_\pi \cap Q_T$ задовольняє крайові та періодичні умови такої задачі:

$$\tilde{u}_{tt}^a - a^2 \tilde{u}_{xx}^a = g(x, t), \quad 0 < x < \pi, \quad t \in \mathbf{R}, \quad (12)$$

$$\tilde{u}^a(0, t) = \tilde{u}^a(\pi, t) = 0, \quad t \in \mathbf{R}, \quad (13)$$

$$\tilde{u}^a(x, t+T) = \tilde{u}^a(x, t), \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad t \in \mathbf{R}. \quad (14)$$

Зауваження 1. Взагалі кажучи, функція $\tilde{u}^a(x, t)$ не є класичним розв'язком рівняння (1), бо функція $(\tilde{S}_a g)(x, t)$ не є розв'язком од-

норідного рівняння $\tilde{u}_{tt}^a - a^2 \tilde{u}_{xx}^a = 0$. Хоча $\frac{\partial^2 (\tilde{S}_a g)(x, t)}{\partial x^2} \equiv 0$, але

$\frac{\partial^2 (\tilde{S}_a g)(x, t)}{\partial t^2}$ не для кожної функції $g(x, t)$ дорівнює нулеві. Значить

потрібні нові дослідження, наприклад, на основі роботи А. М. Самойленка, М. І. Ронто [1].

На прикладі покажемо, що функція

$$u(x, t) = (R_2 g)(x, t) \equiv (Sg)(x, t) + (\tilde{S}_a g)(x, t),$$

де при $a = 1$ маємо

$$(Sg)(x, t) = -\frac{1}{4} \int_0^x d\xi \int_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} g(\xi, \tau) d\tau - \frac{1}{4} \int_x^\pi d\xi \int_{t+x-\xi}^{t-x+\xi} g(\xi, \tau) d\tau, \quad (15)$$

$$(\tilde{S}g)(x, t) = \frac{\pi-x}{4\pi} \int_0^\pi d\xi \int_{t-\xi}^{t+\xi} g(\xi, \tau) d\tau + \frac{x}{4\pi} \int_0^\pi d\xi \int_{t-\pi+\xi}^{t+\pi-\xi} g(\xi, \tau) d\tau \quad (16)$$

у класі функцій $A_2 = \{g : g(x, t) = g(\pi-x, t+\pi) = g(x, t+2\pi)\}$ є єдиним розв'язком крайової 2π -періодичної задачі

$$u_{tt} - u_{xx} = g(x, t), \quad 0 < x < \pi, \quad t \in \mathbf{R}, \quad (17)$$

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad t \in \mathbf{R}, \quad (18)$$

$$u(x, t+2\pi) = u(x, t), \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad t \in \mathbf{R}. \quad (19)$$

Справді доведемо, що функція $u^0(x, t) = (\tilde{S}g)(x, t)$ є розв'язком однорідного рівняння $u_{tt}^0 - u_{xx}^0 \equiv 0$, $0 < x < \pi$, $t \in \mathbf{R}$. Оскільки $(\tilde{S}g)''_{xx}(x, t) \equiv 0$, то запишемо $(\tilde{S}g)'_t(x, t)$ у такому вигляді:

$$\begin{aligned} (\tilde{S}g)'_t(x, t) &= \frac{\pi-x}{4\pi} \int_0^\pi (g(\xi, t+\xi) - g(\xi, t-\xi)) d\xi + \\ &+ \frac{x}{4\pi} \int_0^\pi (g(\xi, t+\pi-\xi) - g(\xi, t-\pi+\xi)) d\xi = \frac{\pi-x}{4\pi} \mu(t) + \frac{x}{4\pi} \nu(t). \end{aligned} \quad (20)$$

Доведемо, що при $T = 2\pi$ у класі функцій A_2 $\mu(t) \equiv 0$, $\nu(t) \equiv 0$ $\forall t \in \mathbf{R}$, а отже, на основі формули (20) перша похідна $(\tilde{S}g)'_t(x, t) \equiv 0$. Таким чином,

$$(\tilde{S}g)''_{tt}(x, t) - (\tilde{S}g)''_{xx}(x, t) \equiv 0.$$

Справді, на основі формули (20) маємо

$$\mu(t) = \int_0^\pi (g(\xi, t+\xi) - g(\xi, t-\xi)) d\xi = \int_0^\pi g(\xi, t+\xi) d\xi - \int_0^\pi g(\xi, t-\xi) d\xi. \quad (21)$$

Зробимо заміну $\xi = \pi - \eta$, $d\xi = -d\eta$, $\pi \leq \eta \leq 0$. На основі формули (21) одержуємо

$$\mu(t) = - \int_\pi^0 g(\pi - \eta, t + \pi - \eta) d\eta - \int_0^\pi g(\xi, t - \xi) d\xi. \quad (22)$$

Використовуючи тотожність при визначенні простору

$$A_2 = \{g : g(x, t) = g(\pi - x, t + \pi) = g(x, t + 2\pi)\},$$

тобто рівність $g(\pi - x, t + \pi) = g(x, t)$, маємо з формули (22)

$$\mu(t) = \int_0^\pi g(\eta, t - \eta) d\eta - \int_0^\pi g(\xi, t - \xi) d\xi \equiv 0, \quad \forall t \in \mathbf{R}.$$

На основі означення функції $\nu(t)$ (формула (20)), використовуючи рівність $g(\pi - x, t + \pi) = g(x, t)$, маємо такий результат:

$$\begin{aligned} \nu(t) &= \int_0^\pi (g(\xi, t + \pi - \xi) - g(\xi, t - \pi + \xi)) d\xi = \\ &= \int_0^\pi g(\pi - \eta, \pi + t - \pi + \eta) d\eta - \int_0^\pi g(\xi, t - \pi + \xi) d\xi \equiv 0, \quad \forall t \in \mathbf{R}, \end{aligned}$$

що їй потрібно було довести. Це означає, що перша похідна $(\tilde{S}g)'_t(x, t) \equiv 0, \forall t \in \mathbf{R}$. А отже, і друга похідна

$$(\tilde{S}g)''_{tt}(x, t) \equiv 0, \forall t \in \mathbf{R}. \quad (23)$$

Таким чином, функція $u^0(x, t) = (\tilde{S}g)(x, t)$ у класі функцій A_2 задовольняє однорідне рівняння $u^0_{tt} - u^0_{xx} \equiv 0, 0 < x < \pi, t \in \mathbf{R}$. А отже, функція

$$u^0(x, t) = (\tilde{S}g)(x, t) \quad (24)$$

є розв'язком однорідного рівняння $u^0_{tt} - u^0_{xx} \equiv 0$.

Має місце таке твердження.

Теорема 7. Для кожної функції $g \in G_{\pi t} \cap A_2$ функція $u = R_2 g$ є єдиною із простору $C_{\pi}^{2,2} \cap A_2$, яка задовольняє умови крайової 2π -періодичної задачі (17)–(19). Крім того, $R_2 \in L(C_{\pi} \cap A_2, C_{\pi}^{1,1} \cap A_2)$, $R_2 \in L(G_{\pi t} \cap A_2, C_{\pi}^{2,2} \cap A_2)$.

Зауваження 2. Як доведено у роботі [3] у класі функцій A_2 більше нетривіальних розв'язків, тобто розв'язків відмінних від нуля, однорідного рівняння $u_{tt} - u_{xx} = 0$ не існує. Отже, теорема 7 справедлива, що функція $u = R_2 g$ єдина.

Висновки.

1. На основі результатів роботи [2] розглянуто оператори S_{a_1} та S_{a_2} (с.26, формули (9.6), (9.8), на основі яких будується вказаний результат).

2. Введено нові оператори S_a та R_2^a для дослідження T -періодичних розв'язків гіперболічних рівнянь вигляду $u_{tt} - a^2 u_{xx} = g(x, t)$, $g(x, t+T) = g(x, t)$.

3. Доведено, що введення оператора R_2^a ще не гарантує, що функція

$$\tilde{u}^a(x, t) = (S_a g)(x, t) + (\tilde{S}_a g)(x, t) \equiv (R_2^a g)(x, t),$$

де

$$(\tilde{S}g)(x, t) = \frac{\pi - x}{4\pi} \int_0^\pi d\xi \int_{t-\xi}^{t+\xi} g(\xi, \tau) d\tau + \frac{x}{4\pi} \int_0^\pi d\xi \int_{t-\pi+\xi}^{t+\pi-\xi} g(\xi, \tau) d\tau,$$

буде розв'язком лінійного неоднорідного рівняння $u_{tt}^a - a^2 u_{xx}^a = g(x, t)$, враховуючи властивості оператора S_a .

Список використаних джерел:

1. Самойленко А. М. Чисельно-аналитические методы исследования периодических решений / А. М. Самойленко, Н. И. Ронто. — К. : Вища школа, 1976. — 180 с.
2. Митропольский Ю. А. Асимптотические методы исследования квазиволновых уравнений гиперболического типа / Ю. А. Митропольский, Г. П. Хома, М. И. Громьяк. — К. : Наук. думка, 1991. — 232 с.
3. Вейвода О. Существование классических периодических решений волнового уравнения: Связь теоретико-числового характера периода и геометрических свойств решений / О. Вейвода, М. Штедры // Дифференциальные уравнения. — 1984. — Т. 20, № 10. — С. 1733–1739.
4. Rabinowitz P. Periodic solution of hyperbolic partial differential equations / P. Rabinowitz // Comm. Pure Appl. Math. — 1967. — Vol. 20, № 1. — P. 145–205.
5. Пташник Б. Й. Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними / Б. Й. Пташник, В. С. Ільків, І. Я. Кміть, В. М. Поліщук. — К. : Наук. думка, 2002. — 416 с.
6. Митропольський Ю. О. Умови існування розв'язків крайової періодичної задачі для неоднорідного лінійного гіперболічного рівняння другого порядку / Ю. О. Митропольський, С. Г. Хома-Могильська // Укр. мат. журн. — 2005. — Т. 57, № 7. — С. 912–921.

INVESTIGATION OF T-PERIODIC SOLUTIONS TO HYPERBOLIC TYPE EQUATIONS

As shown in many classical textbooks on ordinary differential equations a T -periodic solution to the equation $Lu = f(x, t, u)$ will exist if the right-hand side of the equation $f(x, t, u)$ is T -periodic in t ($f(x, t+T, u) = f(x, t, u)$). Note that not every equation in such condition can have a T -periodic solution. As an example of such statement is the ordinary differential equation $dx/dt = \sin^2 t$, whose solution is not periodic. To study the existence of T -periodic solutions of ordinary differential equations and their systems, A. M. Samoylenko developed a numerical-analytical method for constructing T -periodic solutions to the ordinary differential equations and their systems. The results obtained by A. M. Samoylenko were used to study T -periodic solutions to many new classes of ordinary differential equations and also the Gours problem for partial differential equations $\partial^2 u / (\partial t \partial x) = F(x, t, u, u_x)$. Note that the boundary-value T -periodic problems for a more general differential equation in partial derivatives were not investigated by the analytical method. For the first time in this

work we have shown a method for studying T -periodic solutions to a boundary-value T -periodic problem for a more general differential equation in partial derivatives $\partial^2 u / \partial t^2 - a^2 \partial^2 u / \partial x^2 = f(x, t, u, u_x)$. The following simple assertion has been used: the function $K(x, t)$ defined by an integral with limits from $t - b$ to $t + b$ for each T -periodic in τ function $g(x, \tau)$, that is $g(x, \tau + T) = g(x, \tau)$, is also T -periodic in t . The found formula automatically satisfies the boundary and T -periodic conditions: $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$, $u(x, t + T) = u(x, t)$, $0 \leq x \leq \pi$, $t \in \mathbf{R}$. The obtained in this paper results can be used to study many classes of differential equations in partial derivatives of hyperbolic type.

Key words: *T-periodic solution, boundary-value T-periodic problem, operator, hyperbolic the second order equation.*

Отримано: 31.05.2018

УДК 534.1

О. Ю. Швець, д-р фіз.-мат. наук,

В. О. Сіренко, канд. техн. наук

Національний технічний університет України

«Київський політехнічний інститут ім. І. Сікорського», м. Київ

СИМЕТРИЧНІ СЦЕНАРІЇ ПЕРЕХОДУ ДО ДЕТЕРМІНОВАНОГО ХАОСУ В СИСТЕМАХ З ОБМЕЖЕНИМ ЗБУДЖЕННЯМ

Розглянуто п'ятивимірну детерміновану динамічну систему, яка використовується для опису динамічної поведінки маятникових систем, баків з рідиною, оболонок, тощо. Принциповою особливістю є неідеальність розглянутої динамічної системи за Зоммерфельдом-Кононенком. У таких динамічних системах завжди враховується взаємодія між деякою коливальною підсистемою та джерелом збудження коливань. Головна увага приділяється пошуку та опису нових сценаріїв переходу від регулярних режимів до хаотичних.

На підставі, розробленої методики для чисельного дослідження явищ детермінованого хаосу в динамічних системах проведений великий обсяг комп'ютерних обчислень з метою виявлення нових сценаріїв переходу до детермінованого хаосу. Був описаний сценарій переходу до хаосу, який починається як симетричний каскад біфуркацій подвоєння періоду граничних циклів та закінчується виникненням симетричного хаотичного атрактора через переміжність. Тобто виявлений сценарій поєднує у собі характерні особливості притаманні класичним сценаріям Фейгенбаума та Помо-Манневілья. Також був описаний сценарій переходу до хаосу через переміжність у якому рух тра-

екторій по хаотичному аттрактору включає у себе не одну, як сценарії Помо-Маннвілля, а дві симетричні ламінарні фази. Причому відбуваються непередбачувані переходи між двома ламінарними фазами руху та турбулентною фазою. Проведений ретельний аналіз різноманітних характеристик регулярних та хаотичних аттракторів розглянутої динамічної системи (проекцій фазових портретів, часових реалізацій фазових змінних, розподілів природних інваріантних мір) на підставі якого було обгрунтоване існування виявлених симетричних сценаріїв.

Ключові слова: *неідеальна система, сценарій переходу до хаосу, хаотичний аттрактор.*

Вступ. При дослідженні детермінованого хаосу в динамічних системах важливим є вивчення сценаріїв переходів від регулярних режимів до хаотичних. Незважаючи на величезну кількість математичних моделей динамічних систем, найчастіше зустрічаються сценарії переходу до хаосу двох типів. До першого типу належить сценарій Фейгенбаума, при реалізації якого відбувається перехід до хаосу через нескінченний каскад біфуркацій подвоєння періодів граничних циклів [1, 2]. До другого типу належить сценарій переходу до хаосу через переміжність за Помо-Маневіллем [3, 4].

Останнім часом були описані сценарії переходів до хаосу, які представляють собою різні узагальнення сценаріїв Помо-Маннвілля [5–7], а також сценарії, яким притаманні як каскади біфуркацій подвоєння періодів, так і різні типи переміжності [8–10]. Однак багато питань, що стосуються сценаріїв переходів до хаосу, залишаються не з'ясованими.

Математична модель коливальної динамічної системи. Розглянемо циліндричний бак, частково заповнений рідиною, платформа якого збуджується деяким джерелом енергії обмеженої потужності. Математична модель такої системи може бути записана у вигляді наступної системи диференціальних рівнянь:

$$\begin{aligned} \frac{dp_1}{d\tau} &= \alpha_1 p_1 - [\beta + \frac{A}{2}(p_1^2 + q_1^2 + p_2^2 + q_2^2)]q_1 + B(p_1 q_2 - p_2 q_1)p_2; \\ \frac{dq_1}{d\tau} &= \alpha_1 q_1 + [\beta + \frac{A}{2}(p_1^2 + q_1^2 + p_2^2 + q_2^2)]p_1 + B(p_1 q_2 - p_2 q_1)q_2 + 1; \\ \frac{d\beta}{d\tau} &= N_3 + N_1 \beta - \mu_1 q_1; \\ \frac{dp_2}{d\tau} &= \alpha_1 p_2 - [\beta + \frac{A}{2}(p_1^2 + q_1^2 + p_2^2 + q_2^2)]q_2 - B(p_1 q_2 - p_2 q_1)p_1; \\ \frac{dq_2}{d\tau} &= \alpha_1 q_2 + [\beta + \frac{A}{2}(p_1^2 + q_1^2 + p_2^2 + q_2^2)]p_2 - B(p_1 q_2 - p_2 q_1)q_1, \end{aligned} \quad (1)$$

де фазові змінні p_1, q_1, p_2, q_2 — амплітуди коливань вільної поверхні рідини по першій та другій доміантним модам, фазова змінна β описує функціонування джерела збудження коливань, τ — час, $A, B, N_1, N_3, \alpha, \mu_1$ — деякі параметри. Система (1) вперше отримана у роботах [11, 12] у яких детально описаний фізичний зміст фазових координат та параметрів. Ця система належить до класу неідеальних за Зоммерфельдом-Кононенком динамічних систем [13]. У системах такого типу принципово враховується нелінійний взаємозв'язок між коливальною підсистемою та джерелом збудження коливань [13]. Зауважимо, що нехтування таким взаємозв'язком може призвести до грубих помилок у описі динамічної поведінки системи. Зокрема, може бути втрачена інформація про реально існуючі усталені хаотичні режими коливань [11, 12].

У великій оглядовій монографії [14] висвітлено, що система рівнянь (1) також використовується для моделювання коливань тонкостінних оболонок, для вивчення різноманітних маятникових систем з віброуючою точкою опори, для моделювання серцево-судинної системи і ряду інших актуальних задач сучасної нелінійної динаміки. В залежності від розглянутої прикладної задачі фазові змінні та параметри мають різний фізичний або геометричний сенс.

Дослідження сценаріїв переходу до хаосу. Метою роботи є опис нових сценаріїв переходу до детермінованого хаосу, які володіють властивостями симетрії та узагальнюють класичні сценарії Фейгенбаума та Помо-Маневілля.

Так як система рівнянь є нелінійною, то в загальному випадку, детальне та всебічне дослідження її динаміки може бути проведено тільки з використанням різних чисельних та комп'ютерних методів. Методика проведення таких досліджень розроблена та описана в [5, 6, 9, 15–17].

Нехай параметри системи приймають наступні значення: $A = 1, 12$; $B = -1, 531$; $N_1 = -1$; $\alpha = -0, 3$; $\mu_1 = 0, 5$. Проаналізуємо сценарії переходів до хаосу при зміні параметра N_3 . При кожному значенні параметра з проміжку $-0, 65269 < N_3 < -0, 6369$ у системі одночасно існують два одноклітних стійких граничних циклів. Проекції фазових портретів таких граничних циклів, побудовані при $N_3 = -0, 64$ зображені на рис. 1 (а)–(б). При збільшенні параметра $N_3 = -0, 6368$ відбувається подвоєння періодів існуючих симетричних граничних циклів з рис. 1 (а)–(б). Проекції фазових портретів циклів подвоєних періодів зображені на рис. 1 (в)–(г).

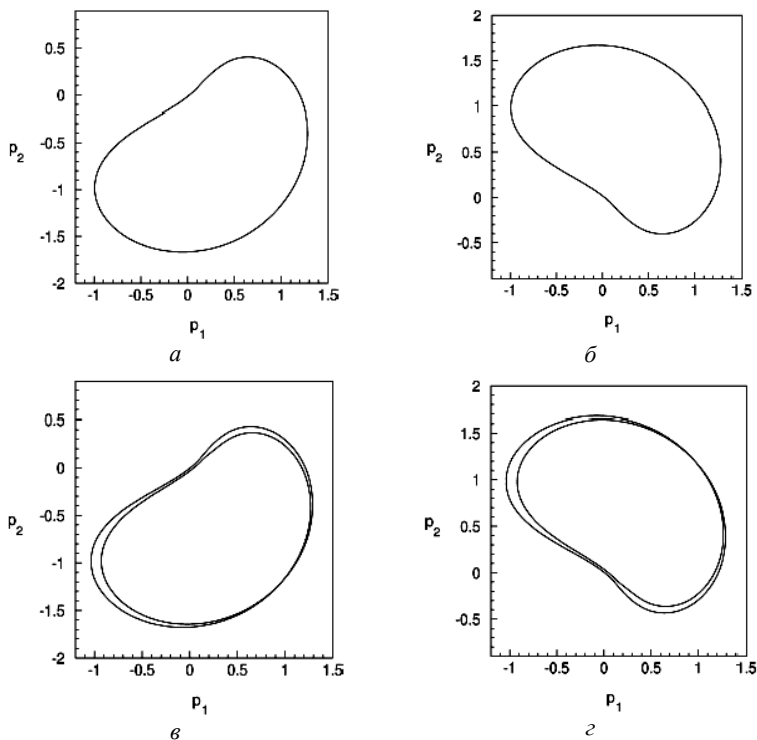


Рис. 1. Проекції фазових портретів граничних циклів при $N_3 = -0,64$ (а)–(б), $N_3 = -0,6368$ (в)–(г)

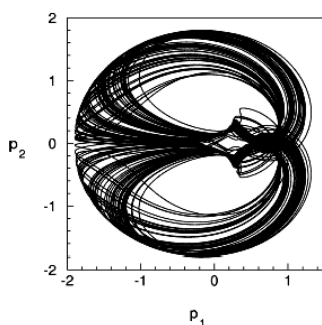


Рис. 2. Проекція фазового портрету хаотичного аттрактора при $N_3 = -0,6295$

Подальше збільшення значення параметра N_3 призводить до виникнення симетричних циклів учетвереного періоду і т.д. Такий нескінченний процес подвоєння періодів кожного з існуючих граничних циклів закінчується виникненням хаотичного аттрактора при $N_3 = -0,6295$

(рис. 2). Виниклий хаотичний атрактор має складну структуру фазового портрета, його проекція складається із двох симетричних щодо горизонтальної осі частин.

Амплітуди часових реалізацій даного хаотичного атрактора більш ніж у два рази перевищують амплітуди часових реалізацій граничних циклів каскаду біфуркацій подвоєння. Рух типової траєкторії по хаотичному атрактору можна умовно розбити на дві фази. У першій із цих фаз траєкторія робить хаотичні блукання вздовж витків верхньої (нижньої) частини атрактора. У непередбачений момент часу траєкторія переходить із верхньої (нижньої) частини атрактора в його нижню (верхню) частину й починає робити хаотичні блукання уздовж витків нижньої (верхньої) частини. Потім, у непередбачений момент часу, знову відбувається перехід траєкторії з нижньої (верхньої) частини атрактора в його верхню (нижню) частину. Такий процес повторюється нескінченно число разів. Таким чином перехід до хаосу має особливості характерні як для сценарію Фейгенбаума (нескінченний каскад біфуркацій подвоєння симетричних граничних циклів), так і для переміжності (непередбачувана переміжність між верхньою та нижньою частинами виниклого хаотичного атрактора).

Розглянемо ще один тип переходу до хаосу. При кожному значенні параметру $-1,2105 < N_3 < -1,1829$ в системі існують, симетричні відносно горизонтальної осі, граничні цикли (рис. 3 (а)–(б)). Зміна параметра N_3 , яка супроводжується виходом його значення, як через ліву, так і через праву границі інтервалу $-1,2105 < N_3 < -1,1829$ призводить до зникнення обох граничних циклів і виникнення хаотичного атрактора. Проекція фазового портрета хаотичного атрактора такого типу зображена на рис. 3 (в).

На рис. 3 (г) наведений розподіл інваріантної міри для фазового портрета хаотичного атрактора при $N_3 = -1,182$. Отриманий розподіл проясняє механізм виникнення даного хаотичного атрактора. Контури чітко прорисованої області на рис. 3 (г) за своєю формою нагадують два «склеєних», симетричних граничних цикла. Виникнення хаосу має багато характерних для переміжності особливостей. Однак у цьому випадку рух траєкторії по атрактору включає три фази, дві ламінарні й турбулентну. У першій ламінарній фазі траєкторія здійснює квазіперіодичні рухи в малому околі одного з «склеєних», циклів, або «верхнього», або «нижнього». У непередбачений момент часу відбувається турбулентний сплеск і траєкторія виходить у віддалені, від околу зниклого циклу, області фазового простору. Такій турбулентній фазі руху відповідають більш світлі ділянки розподілу інваріантної міри на рис. 3 (г). Потім траєкторія знову робить квазіперіодичні рухи в малому околі одного зі зниклих граничних циклів. Причому, після завершення турбулентної фази, траєкторія може як повернутися в першу ламінарну

фазу руху, так і перейти в другу ламінарну фазу, який відповідають квазіперіодичні рухи в малому околі другого зі зниклих граничних циклів. Такий процес руху траєкторії по атрактору типу «одна з ламінарних фаз — турбулентна фаза — одна з ламінарних фаз», повторюється нескінченну кількість разів. Причому, непередбаченими є як моменти часу «зриву», траєкторії в турбулентну фазу, так і «переключення», між двома ламінарними фазами. Таким чином перехід до хаосу нагадує класичний сценарій Помо-Манневілья. Однак, на відміну від класичного сценарію, ми маємо не одну, а дві ламінарні фази.

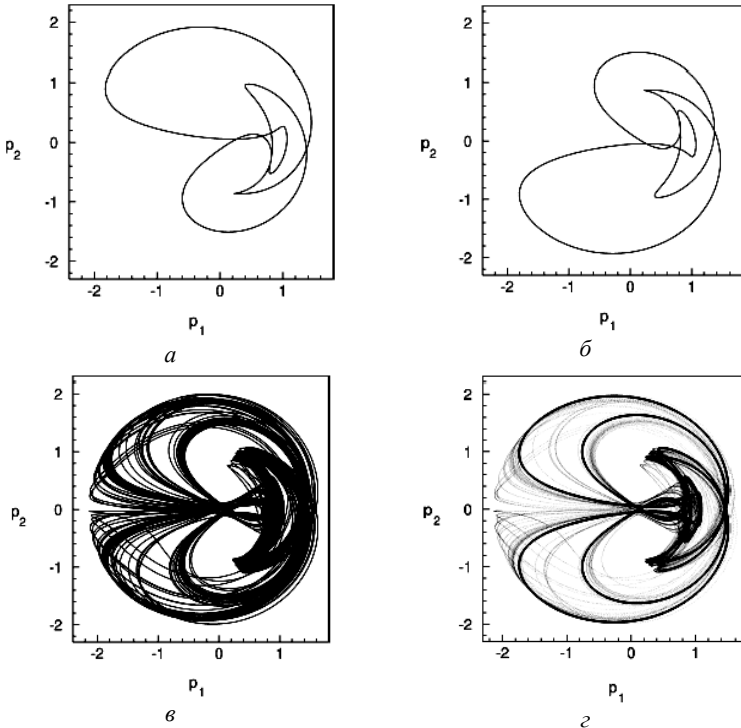


Рис. 3. Проекції фазових портретів граничних циклів при $N_3 = -1,183$ (а)–(б); проекції фазового портрета й розподілу інваріантної міри хаотичного атрактора при $N_3 = -1,182$ (в)–(г)

Зауважимо, що у проведених чисельних дослідженнях вдалося виявити й описати подібні симетричні сценарії переходу не тільки до хаотичних, а також і до гіперхаотичних атракторів. Гіперхаотичний атрактор відрізняється від хаотичного наявністю у спектрі ляпуновських хаотичних показників щонайменше двох додатних показників, у той час як хаотичний атрактор має лише один додатний ляпуновський показник. Але не дивлячись на появу у гіперхаотичних атракто-

рів системи додаткового напрямку розбігання близьких фазових траєкторій описані вище симетричні сценарії переходу до хаосу залишаються незмінними й при переходах до гіперхаосу.

Висновки. Таким чином у роботі вдалося виявити та описати два нових сценарії переходу від регулярних усталених режимів до хаотичних. Описаним сценаріям притаманна явно виражена симетрія біфуркацій фазових портретів. В першому з цих сценаріїв спостерігається симетричне поєднання каскаду біфуркацій подвоєння періоду та переміжності. У другому описаних сценаріїв спостерігається нетиповий для класичної переміжності перехід до хаосу не з одною, а з двома ламінарними фазами. Такі сценарії являють собою узагальнені класичних сценаріїв Фейгенбаума та Помо-Маневілія.

Список використаних джерел:

1. Feigenbaum M. J. Quantative universality for a class of nonlinear transformations / M. J. Feigenbaum // *J. Stat. Phys.* — 1978 — Vol. 19, № 1. — P. 25–52.
2. Feigenbaum M. J. The universal metric properties of nonlinear transformations / M. J. Feigenbaum // *J. Stat. Phys.* — 1979. — Vol. 21, № 6. — P. 669–706.
3. Manneville P. Different ways to turbulence in dissipative dynamical systems / P. Manneville, Y. Pomeau // *Physica D.: Nonlinear Phenomena.* — 1980. — Vol. 1, № 2. — P. 219–226.
4. Pomeau Y. Intermittent transition to turbulence in dissipative dynamical systems / Y. Pomeau, P. Manneville // *Comm. Math. Phys.* — 1980. — Vol. 74, № 2. — P. 189–197.
5. Krasnopolskaya T. S. Dynamical chaos for a limited power supply for fluid oscillations in cylindrical tanks / T. S. Krasnopolskaya, A. Yu. Shvets // *Journal of Sound and Vibration.* — 2009. — Vol. 322 (3). — P. 532–553.
6. Швець А. Ю. Особенности перехода к детерминированному хаосу в неидеальной гидродинамической системе «бак с жидкостью-электродвигатель» / А. Ю. Швець, В. А. Сиренко // *Динамические системы.* — 2011. — Вып. 1 (29). — С. 113–131.
7. Shvets A. Yu. Peculiarities of transition to chaos in nonideal hydrodynamics systems / A. Yu. Shvets, V. O. Sirenko // *Chaotic Modeling and Simulation.* — 2012. — Vol. 2. — P. 303–310.
8. Швець О. Ю. Різноманітність динамічних режимів неідеальних гідродинамічних систем при обмеженому збудженні / О. Ю. Швець, В. О. Сіренко // *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія 1.* — 2010 — Вип. 3. — С. 200–212.
9. Швець А. Ю. Единство и разнообразие сценариев перехода к хаосу при колебаниях жидкости в цилиндрических баках / А. Ю. Швець, В. А. Сиренко // *Збірник праць Інституту математики НАН України «Математичні проблеми механіки та обчислювальної математики».* — 2014. — Вип. 11 (4). — С. 386–398.
10. Shvets A. Yu. Complicated Scenarios of Transitions to Deterministic Chaos in Non-Ideal Dynamic Systems / A. Yu. Shvets, V. Sirenko // *Nonlinear Dynamics-2016 (ND-KhPI2016) : proceedings of 5th International Conference, September 27–30, 2016.* — Kharkov : NTU «KhPI», 2016. — P. 222–229.

11. Krasnopolskaya T. S. Regular and chaotic surface waves in a liquid in a cylindrical tank / T. S. Krasnopolskaya, A. Yu. Shvets // *Soviet Applied Mechanics*. — 1990. — Vol. 26 (8). — P. 787–794.
12. Krasnopolskaya T. S. Chaotic surface waves in limited power-supply cylindrical tank vibrations / T. S. Krasnopolskaya, A. Yu. Shvets // *J. of Fluids & Structures*. — 1994. — Vol. 8 (1). — P. 1–18.
13. Кононенко В. О. Колебательные системы с ограниченным возбуждением / В. О. Кононенко. — М. : Наука, 1964. — 254 с.
14. Ibrahim R. A. *Liquid Sloshing Dynamics: Theory and Applications* / R. A. Ibrahim. — Cambridge University Press, 2005. — 970 p.
15. Анищенко В. С. Сложные колебания в простых системах / В. С. Анищенко. — М. : Наука, 2006. — 312 с.
16. Кузнецов С. П. *Динамический хаос* / С. П. Кузнецов. — М. : Физматлит, 2006. — 356 с.
17. Shvets A. Yu. Deterministic chaos of a spherical pendulum under limited excitation / A. Yu. Shvets // *Ukrainian Mathematical Journal*. — 2007. — Vol. 59 (4). — P. 602–614.

SYMMETRIC SCENARIOS OF TRANSITION TO DETERMINISTIC CHAOS IN SYSTEMS WITH LIMITED EXCITATION

A five-dimensional deterministic dynamic system, which is used to describe the dynamic behavior of the pendulum systems, shells, tanks with liquid, etc is considered. The principal feature is the non-ideality of this dynamic system in Sommerfeld-Kononenko sense. In such dynamic systems, the interaction between the oscillation subsystem and the source of oscillation excitation is always taken into account. The main attention is on finding and describing new scenarios of transitions from regular regimes to chaotic ones.

Based on the developed numerical technics for the study of phenomena of deterministic chaos in dynamic systems a large complex of computer calculations for describing new scenarios of transition to chaos was carry out. Was described the scenario of transition to chaos, which begins as a symmetrical cascade of bifurcations of period-doubling of limit cycles and ends with the appearance symmetric chaotic attractor through the intermittency. That is, the revealed scenario combines the characteristic features inherent in the classic scenarios of Feigenbaum and Pomeau–Manneville. In addition has been described a scenario of transition to chaos through intermittency in which movement of trajectories in a chaotic attractor includes not one laminar phase, as in the scenario Pomeau-Manneville, but two symmetrical laminar phases. Moreover, there are unpredictable transitions between two laminar phases of motion and a turbulent phase. A thorough analysis of various characteristics of regular and chaotic attractors of the considered dynamic system (projections of phase portraits, time realizations of phase variables, distribution of natural invariant measures) was carried out on the basis of which the existence of detected symmetric scenarios was substantiated.

Key words: *nonideal system, scenario of transition to chaos, chaotic attractor.*

Отримано: 18.05.2018

ВІДОМОСТІ ПРО АВТОРІВ

Бандирський Богдан Йосипович — кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент Національного університету «Львівська політехніка», м. Львів, bohdan.y.bandyrskyi@lpnu.ua

Веселовська Ольга Володимирівна — кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент Національного університету «Львівська політехніка», м. Львів, veselovskaov@gmail.com

Вовк Людмила Василівна — кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент Київського національного університету культури і мистецтв, м. Київ, ludmulavera@gmail.com

Герасименко Віктор Іванович — доктор фізико-математичних наук, професор, провідний науковий співробітник Інституту математики НАН України, м. Київ, gerasym@imath.kiev.ua

Геселева Катерина Григорівна — аспірант Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський, geseleval702@gmail.com

Гнатюк Василь Олексійович — кандидат фізико-математичних наук, доцент, професор кафедри математики Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

Громик Андрій Петрович — кандидат технічних наук, доцент, завідувач кафедри математичних дисциплін і моделювання Подільського державного аграрно-технічного університету, м. Кам'янець-Подільський

Гудима Уляна Василівна — кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри математики Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

Дрогомирецька Христина Теофілівна — кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент Національного університету «Львівська політехніка», м. Львів, christdr@mail.lviv.ua

Зайцева Катерина Сергіївна — студентка Київського університету імені Бориса Грінченка, м. Київ, katusia1995@gmail.com

Ковальська Ірина Борисівна — кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри математики Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

Конет Іван Михайлович — доктор фізико-математичних наук, професор, професор кафедри математики, проректор з наукової роботи Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський, konet51@ukr.net

Кречко Вікторія Валеріївна — аспірант Інституту математики НАН України, м. Київ, vi.kre4ko@gmail.com

Мусій Роман Степанович — доктор фізико-математичних наук, професор, професор Національного університету «Львівська політехніка», м. Львів, musiy@lp.edu.ua

Омелян Олександр Миколайович — кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри вищої та прикладної математики Полтавського національного технічного університету імені Юрія Кондратюка, м. Полтава, aomelyan@ukr.net

Орищин Оксана Григорівна — кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент Національного університету «Львівська політехніка», м. Львів, oksana.orushchun@lpnu.ua

Пилипюк Тетяна Михайлівна — кандидат фізико-математичних наук, старший викладач кафедри інформатики Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

Пічугіна Оксана Сергіївна — кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри інформатики Національного аерокосмічного університету імені М. Є. Жуковського «Харківський авіаційний інститут», м. Харків, oksanapichugina1@gmail.com

Самойленко Валерій Григорович — доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри математичної фізики Київського національного університету імені Тараса Шевченка, м. Київ, valsamyul@gmail.com

Самойленко Юлія Іванівна — доктор фізико-математичних наук, старший науковий співробітник, старший науковий співробітник механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка, м. Київ, valsamyul@gmail.com

Семенов Василь Юрійович — кандидат фізико-математичних наук, завідувач науково-дослідного відділу алгоритмів ТОВ «Дельта СПЕ», м. Київ, vasyul.delta@gmail.com

Семчишин Ліда Михайлівна — кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри економіко-математичних методів Тернопільського національного економічного університету, м. Тернопіль

Сеньо Петро Степанович — кандидат фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри математичного моделювання соціально-економічних процесів Львівського національного університету імені Івана Франка, м. Львів, petrosny@ukr.net

Сіренко Василь Олександрович — кандидат технічних наук, доцент Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», м. Київ, sir_vasiliy@ukr.net

Хома-Могильська Світлана Григорівна — кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри економіко-математичних методів Тернопільського національного економічного університету, м. Тернопіль, sv_khoma@ukr.net

Чорний Віктор Зіновійович — кандидат фізико-математичних наук, доцент, завідувач кафедри математики та методики її навчання Тернопільського національного педагогічного університету, м. Тернопіль, vzch@ukr.net

Швець Олександр Юрійович — доктор фізико-математичних наук, професор, професор Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», м. Київ, alex.shvets@bigmir.net

АЛФАВІТНИЙ ПОКАЖЧИК АВТОРІВ

Б		О	
Бандирський Б. Й.	62	Омелян О. М.	74
		Орищин О. Г.	62
В		П	
Веселовська О. В.	62	Пилипюк Т. М.	22
Вовк Л. В.	48	Пічугіна О. С.	90
Г		С	
Герасименко В. І.	5	Самойленко В. Г.	48
Геселева К. Г.	13	Самойленко Ю. І.	48
Гнатюк В. О.	33	Семенов В. Ю.	108
Громик А. П.	22	Семчишин Л. М.	117
Гудима У. В.	33	Сеньо П. С.	133
		Сіренко В. О.	154
Д		Х	
Дрогомирецька Х. Т.	62	Хома-Могильська С. Г.	144
З		Ч	
Зайцева К. С.	48	Чорний В. З.	144
К		Ш	
Ковальська І. Б.	54	Швець О. Ю.	154
Конет І. М.	22		
Кречко В. В.	5		
М			
Мусій Р. С.	62		

МІЖНАРОДНА НАУКОВА КОНФЕРЕНЦІЯ «СУЧАСНІ ПРОБЛЕМИ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ, ПРОГНОЗУВАННЯ ТА ОПТИМІЗАЦІЇ»

З 18 по 20 квітня 2018 року на базі кафедри інформатики фізико-математичного факультету Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка проведено VIII Міжнародну наукову конференцію «Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації», присвячену 100-річчю Національної академії наук України та 100-річчю Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка.

Організатори наукового форуму – Міністерство освіти і науки України, Національна академія наук України, Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова НАН України, Інститут проблем моделювання в енергетиці імені Г. Є. Пухова НАН України, Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», OKAN University (Istanbul, Turkey), Norwegian University of Science and Technology (Gjøvik, Norway), Lublin University of Technology (Lublin, Poland), Tashkent State Technical University named after Islam Karimov (Tashkent, Uzbekistan).

Інформаційним спонсором конференції виступила компанія «ЕС ЕНД ТІ УКРАЇНА», яка займає провідні позиції в Україні у галузі проєктування та впровадження корпоративних інтегрованих інформаційних систем, складних мережевих і телекомунікаційних рішень.

Програмний комітет конференції очолювали — Копилов Сергій Анатолійович, ректор Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка, доктор історичних наук, професор; Бейко Іван Васильович, доктор технічних наук, професор (Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»); Верлань Анатолій Федорович, доктор технічних наук, професор, член-кореспондент НАПН України (Інститут проблем моделювання в енергетиці ім. Г. Є. Пухова НАН України). Організаційний комітет працював під керівництвом Щирби Віктора Самуїловича, кандидата фізико-математичних наук, доцента, професора кафедри інформатики, декана фізико-математичного факультету Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка.

18 квітня об 11:30 конференція розпочала свою роботу в конференц-залі головного корпусу університету. Конференцію відкрив Федорчук Володимир Анатолійович, доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри інформатики.

Доповідь «Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка: історія та наукова діяльність» виголосив Ко-

нет Іван Михайлович, доктор фізико-математичних наук, професор, проректор з наукової роботи.

З вітальним словом від Національної академії наук України до учасників конференції звернувся Задірака Валерій Костянтинович, доктор фізико-математичних наук, професор, академік НАН України (Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова НАН України).

Далі конференція продовжила роботу в режимі пленарних засідань.

Цікавими та змістовними, інколи дискусійними, були пленарні доповіді:

- **Принципи організації керованих натурних моделюючих систем** (А. Ф. Верлань, Інститут проблем моделювання в енергетиці ім. Г. Є. Пухова НАН України);
- **Сучасні інформаційні технології у підвищенні якості навчання** (І. В. Бейко, Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»);
- **Теорія обчислень. Резерви оптимізації алгоритмів** (В. К. Задірака, Інститут кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України);
- **Розвиток методів комплексного аналізу і теорії збурень для моделювання нелінійних процесів з керуванням, ідентифікацією та оптимізацією параметрів** (А. Я. Бомба, Рівненський державний гуманітарний університет);
- **Формування базисів в задачах математичного моделювання** (В. С. Абрамчук, Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського).

Тематика пленарних доповідей була присвячена проблемам розвитку сучасного математично-комп'ютерного інструментарію для створення математичних моделей динамічних систем, теорії обчислень, побудови оптимального керування, ідентифікації та оптимізації параметрів математичних моделей. Актуальність цих проблем пов'язана із зростанням запитів сучасного комп'ютеризованого виробництва для формування конкурентоспроможності з використанням новітніх інформаційних технологій.

19-20 квітня конференція продовжила роботу в корпусі фізико-математичного факультету в режимі секційних засідань. Працювали 4 секції:

1. **Математичне та комп'ютерне моделювання у прикладних задачах. Системний аналіз і прийняття рішень** (керівники – А.Ф. Верлань, доктор технічних наук, професор, член-кореспондент НАПН України; О.Є. Коваленко, кандидат технічних наук, доцент);
2. **Питання оптимізації обчислень. Моделювання і оптимізація керованих процесів. Методи моделювання та прогнозування**

- динамічних процесів** (керівники – В. К. Задірака, доктор фізико-математичних наук, професор, академік НАН України; І. В. Бейко, доктор технічних наук, професор);
3. **Проблеми моделювання і прогнозування процесів із розподіленими параметрами** (керівники – А. Я. Бомба, доктор технічних наук, професор; І. М. Конет, доктор фізико-математичних наук, професор);
4. **Інформаційні технології в освіті** (керівники – А. М. Кух, доктор педагогічних наук, доцент; А. Б. Андруховський, старший викладач кафедри інформатики).

Учасники конференції активно і творчо обговорювали актуальні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації, їхню роль і значення для розвитку сучасної освіти, науки і техніки.

У роботі конференції брали участь науковці з багатьох регіонів України, а також з Норвегії, Польщі, Туреччини, Узбекистану. Вони представляли провідні наукові установи та заклади вищої освіти, у яких проводяться інтенсивні наукові дослідження за тематикою конференції. Зпоміж них 33 доктори наук і понад 70 кандидатів наук, докторанти, аспіранти, магістранти та студенти закладів вищої освіти України.

Регламент роботи (доповідь на пленарному засіданні — до 30 хв., на секційному — до 10 хв.) дозволив оприлюднити основні результати своїх досліджень доповідачеві й надав можливість для дискусії та обговорення доповіді учасникам конференції.

На секційних засіданнях кращими було визнано доповіді кандидатів технічних наук, доцентів Іванюка В. А., Коваленка О. Є., Ночвая В. І., аспірантки Геселевої К. Г. (науковий керівник — доктор фізико-математичних наук, професор Конет І. М.). Їм було вручено монографії доктора технічних наук, професора, члена-кореспондента НАПН України Верлани А. Ф.

За результатами роботи конференції опубліковано збірник «Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації: тези доповідей 8-ї Міжнародної наукової конференції, присвяченої 100-річчю Національної академії наук України та 100-річчю Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка. — Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2018. — 160 с.».

Статті учасників конференції будуть опубліковані у фахових збірниках наукових праць «Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки», «Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки», які видаються Кам'янець-Подільським національним університетом імені Івана Огієнка спільно з Інститутом кібернетики імені В. М. Глушкова НАН України.

Для учасників конференції було проведено екскурсію до Національного історико-архітектурного заповідника «Кам'янець-Подільський» — одного з 7 чудес України.

20 квітня о 14:00 відбулося підведення підсумків роботи та закриття конференції. Наступну конференцію «Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації» заплановано провести в 2020 році.

І. В. Бейко, доктор технічних наук, професор;

А. Ф. Верлань, доктор технічних наук, професор, член-кореспондент НАПН України;

В. К. Задірака, доктор фізико-математичних наук, професор, академік НАН України;

І. М. Конет, доктор фізико-математичних наук, професор;

В. А. Федорчук, доктор технічних наук, професор.

ЗМІСТ

Герасименко В. І., Кречко В. В.
 Про поширення кореляцій в квантових системах
 в наближенні самоузгодженого поля 5

Геселева К. Г.
 Дослідження на сумісність та відшукування
 наближених розв'язків інтегро-функціональних рівнянь
 з малою нелінійністю та обмеженнями..... 13

Gromyk A., Konet I., Pylypiuk T.
 Hyperbolic Boundary Value Problem for Semibounded
 Piecewise-Homogeneous Hollow Cylinder 22

Гудима У. В., Гнатюк В. О.
 Критерії узагальненого чебишовського у розумінні
 зважених відстаней центра кількох точок лінійного нормованого
 простору відносно опуклої множини цього простору 33

Зайцева К. С., Самойленко В. Г., Самойленко Ю. І., Вовк Л. В.
 Побудова асимптотичного солітоноподібного
 розв'язку сингулярно збуреного рівняння
 Кортевега-де Фріза зі спеціально заданими коефіцієнтами..... 48

Ковальська І. Б.
 Наближення нескінченно-диференційовних
 функцій в інтегральній метриці 54

**Мусій Р. С., Дрогомирецька Х. Т., Бандирський Б. Й.,
 Веселовська О. В., Орищин О. Г.**
 Зв'язана динамічна задача термопружності для довгого
 порожнистого циліндра за нестационарних теплової та силової дій62

Омелян О. М.
 Нелокальні анзаци та редукція системи нелінійних рівнянь
 конвекції-дифузії з хемотаксисною дифузивною матрицею 74

Пичугина О. С.
 Полиэдрально-сферические конфигурации:
 особенности и применение 90

Semenov V. Yu.
 Method of Iterative Single-Channel Blind Separation for Qpsk Signals..... 108

Семчишин Л. М.
 Застосування розріджених числових
 систем лінійних алгебраїчних рівнянь в середовищі MatLab 117

Сеньо П. С.

Методи розв'язування граничних задач
на основі математики функціональних інтервалів..... 133

Хома-Могильська С. Г., Чорний В. З.

Дослідження Т-періодичних розв'язків
рівнянь гіперболічного типу 144

Швець О. Ю., Сіренко В. О.

Симетричні сценарії переходу до детермінованого хаосу
в системах з обмеженим збудженням 154

Відомості про авторів 162

Алфавітний покажчик авторів 165

Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова
Національної академії наук України
Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка

НАУКОВЕ ВИДАННЯ

МАТЕМАТИЧНЕ ТА КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ

Серія: Фізико-математичні науки

Збірник наукових праць

Випуск 17

Підписано до друку 27.06.2018 р. Гарнітура «Таймс».
Папір офісний. Друк різнографічний.
Формат 60x84/16. Умовн. друк. арк. 10. Обл.-вид. арк. 10,8.
Тираж 100. Зам. № 814.

Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка,
вул. Огієнка, 61, м. Кам'янець-Подільський, 32300.
Свідоцтво серії ДК № 3382 від 05.02.2009 р.

Надруковано в Кам'янець-Подільському національному
університеті імені Івана Огієнка,
вул. Огієнка, 61, м. Кам'янець-Подільський, 32300.