Міністерство освіти і науки України

Кам’янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка

**Катерина ГЕСЕЛЕВА**

# НАБЛИЖЕНІ МЕТОДИ РОЗВ’ЯЗУВАННЯ ІНТЕГРО-ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

**Монографія**

Кам’янець-Подільський

2022

УДК 517.96
Г22

*Рекомендовано до друку вченою радою Кам’янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка (протокол №3 від 15.03.2022)*

**Рецензенти:**
***І. М. Конет***, доктор фізико-математичних наук, професор;
***Ю. В. Теплінський***, доктор фізико-математичних наук, професор;
***І. М. Черевко***, доктор фізико-математичних наук, професор.

**Геселева Катерина**
Г22 Наближені методи розв’язування інтегро-функціональних рівнянь : монографія. Кам’янець-Подільський : К-ПНУ ім. І. Огієнка; Кам’янець-Подільський : ФОП Панькова А. С., 2022. 144 с.
ISBN 978-617-7773-32-9

Монографія присвячена дослідженню різних типів інтегро-функціональних рівнянь щодо існування їхніх розв’язків та наближених методів їхнього знаходження. Подано обґрунтування методів колокації, колокаційно-ітеративного, як стаціонарного, так і нестаціонарного щодо розв’язування лінійних інтегро-функціональних рівнянь, деяких типів нелінійних інтегро-функціональних рівнянь, також досліджено випадки, коли ці рівняння розглядаються з додатковими умовами. Отримано умови сумісності розглянутих задач. Установлено достатні умови збіжності методів і вказано оцінки похибок наближень цих методів.

Для наукових працівників, аспірантів і студентів, які спеціалізуються в галузях наближених методів, диференціальних та інтегральних рівнянь, обчислювальної математики.

УДК 517.96



ISBN 978-617-7773-32-9

**ЗМІСТ**

# ВСТУП

Математичними моделями багатьох задач природознавства й техніки є різні типи диференціальних, інтегральних, інтегро-диференціальних, диференціально-функціональних, інтегро-функціональних рівнянь та їхніх систем.

При дослідженні математичних моделей широко використовуються якісні й аналітичні методи теорії диференціальних рівнянь і методи обчислювальної математики. Зокрема, чисельно-аналітичний метод А. М. Самойленка і метод осереднення функціональних поправок Ю. Д. Соколова, удосконалюються існуючі, у тому числі й проекційно-ітеративні методи та їхні модифікації. Дослідженню проекційно-ітеративного методу та його узагальнень присвячені роботи М. С. Курпеля, А. Ю. Лучки та багатьох інших математиків.

Зараз існує чимало різноманітних методів дослідження та відшукання розв'язків (як точних, так і наближених) таких рівнянь, але їхня наявність не виключає можливостей розвитку нових, більш ефективних методів побудови розв'язків і покращення вже існуючих.

Упродовж останніх десятиліть розроблено методику дослідження диференціальних, інтегральних, інтегро-диференціальних рівнянь та їхніх систем з обмеженнями та запропоновано наближені методи знаходження їхніх розв'язків. У цьому напрямі варто відзначити праці А. Ю. Лучки, О. Б. Поліщук, Т. А. Кучерук, В. А. Ферука.

Тому актуальним є дослідження інтегро-функціональних рівнянь щодо існування розв'язків та методів їхнього знаходження. До таких рівнянь зводяться, зокрема, крайові задачі для диференціальних рівнянь з відхиленням аргументу нейтрального типу в загальному випадку, коли відхилення аргументу може бути змінною величиною.

Знайти точні розв’язки згаданих рівнянь можна лише в окремих простих випадках, тому важливим є дослідження методів побудови наближених розв’язків цих рівнянь. Одним із ефективних методів є колокаційно-ітеративний метод, який можна трактувати як окремий випадок проекційно-ітеративного методу. Дослідженню та теоретичному обґрунтуванню колокаційно-ітеративного методу, вивченню швидкості збіжності методу залежно від гладкості вихідних даних присвячені роботи А. Ю. Лучки та Є. М. Луцева, В. Б. Поселюжної та інших.

Незважаючи на значну кількість праць у цьому напрямі, не дослідженим залишається питання застосування колокаційно-ітеративного методу розв’язування інтегро-функціональних рівнянь. Такі задачі мають теоретичний і прикладний інтерес.

У монографії запропоновано обґрунтування колокаційного та колокаційно-ітеративного методів щодо розв’язування різних типів інтегро-функціональних рівнянь, як лінійних, так і з малою нелінійністю, також досліджено випадки, коли ці рівняння розглядаються з додатковими умовами; отримано умови сумісності розглянутих задач; установлено умови збіжності методів; вказано оцінки похибок наближень.

Монографія має, в основному, теоретичний характер. Отримані в ній результати розширюють область застосування колокаційно-ітеративного методу та збагачують теорію інтегро-функціональних рівнянь. Розроблені обчислювальні алгоритми можуть бути використані для знаходження розв’язків конкретних математичних моделей, які зустрічаються у фізиці, біології, економіці, медицині й інших галузях людської діяльності.

Автор висловлює вдячність доктору фізико математичних наук, професору І. М. Конету за цінні зауваження та пропозиції, які були враховані при підготовці рукопису.

# РОЗДІЛ 1

# РОЗВИТОК НАБЛИЖЕНИХ МЕТОДІВ

Розв'язування багатьох задач природознавства сьогодні неможливо уявити без побудови та дослідження різних математичних моделей. Економіка, біологія, медицина, техніка та багато інших галузей наук усе частіше у своїх дослідженнях спираються на результати, отримані в теорії різних типів операторних рівнянь. Так, багато задач прикладного й теоретичного характеру зводиться до різних класів диференціальних, інтегральних, інтегро-функціональних і функціонально-диференціальних рівнянь та їхніх систем.

Останнім часом увагу дослідників привертають задачі з параметрами, з імпульсним впливом, задачі з обмеженнями. Різні аспекти теорії таких задач розглядаються у працях А. М. Самойленка [124-129], М. О. Перестюка [107, 108], А. Ю. Лучки [77-100], О. А. Бойчука [7, 8], М. Й. Ронто [119-121], М. В. Азбелева [1] та інших.

Точний розв'язок таких рівнянь і задач, як правило, не вдається виразити через елементарні функції. Тому виникає завдання створення й обґрунтування наближених методів розв'язання цих задач, а також розробка та дослідження обчислювальних алгоритмів, які можна легко реалізувати за допомогою сучасних комп'ютерних програм.

Серед великої кількості наближених методів найбільш часто застосовуються ітераційні та прямі методи.

Ітераційні методи наближеного розв'язування задач ґрунтуються на побудові послідовних наближень до шуканого розв'язку шляхом багаторазового застосування деяких однотипних числових або аналітичних процедур рекурентного характеру.

Класичним представником ітераційних методів є метод послідовних наближень, який є досить простим та ефективним методом дослідження питання розв'язування широкого класу задач математичної фізики. Метод послідовних наближень, як відомо, у рамках функціонального аналізу включається в загальну схему принципу стислих відображень, який сформулювали С. Банах [141] і Р. Каччіполлі [144].

Ідея методу щодо рівняння

$$u = f + Tu, \tag{1.1}$$

де $T$ – лінійний обмежений оператор, який діє в гільбертовому просторі $H$, полягає в тому, що наближені розв'язки рівняння (1.1) шукаються за формулою

$$u_k = f + Tu_{k-1}, k = 1, 2, 3, ..., \tag{1.2}$$

причому за початкове наближення $u_0$ можна взяти будь-який елемент з $H$. Однією із достатніх умов збіжності методу (1.2) є нерівність

$$\rho(T) = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\left\| T^k \right\|} < 1.$$

Зауважимо, що метод буде збіжним, якщо $q = \|T\| < 1$. При виконанні цієї умови швидкість збіжності характеризується оцінкою

$$\left\| u^* - u_k \right\| \le q^k \left\| u^* - u_0 \right\|,$$

де $u^*$ – точний розв'язок рівняння (1.1).

Метод послідовних наближень успішно застосовується до нелінійних рівнянь $u = Tu$, де $T$ – оператор стиску. У випадку, коли остання умова не виконується, часто застосовується принцип К. Шаудера [149] про нерухому точку.

Завдяки роботам багатьох математиків ці принципи стали фундаментальним засобом дослідження різних задач математичної фізики. Серед робіт, що присвячені розробці відповідних методів, відзначимо праці В. В. Немицького [106], Ю. Шаудера [149], М. А. Красносельського [63, 118], М. М. Вайнберга [10] та інших.

Крім того, метод послідовних наближень є засобом для доведення теорем існування та єдиності розв'язку, для нього є характерними такі переваги, як простота обчислювальної схеми, показникова швидкість збіжності, згасання похибок заокруглень.

До ітераційних методів належить також метод Ньютона-Канторовича, метод мінімальних нев'язок, метод найшвидшого спуску та багато інших методів. Але ітераційні методи мають обмежену область застосування, не завжди збігаються до шуканого розв'язку даної задачі або ж збігаються так повільно, що їхнє застосування приводить до громіздких обчислень, тобто не є ефективним. Крім того, швидкість збіжності методу не залежить від гладкості вихідних даних.

Прямі методи, що виникли дещо пізніше за ітераційні, поділяються на варіаційні та проекційні. Суть цих методів полягає у зведенні вихідної задачі до систем алгебраїчних рівнянь, що є найбільш поширеними на сучасному етапі побудови розв'язків різних класів рівнянь. До них належать різницеві, варіаційні та проекційні методи, зокрема метод найменших квадратів, метод Рітца, метод Бубнова-Гальоркіна, метод моментів, метод колокації, метод підобластей, метод скінченних елементів.

Різницеві методи відрізняються простотою обчислювальної схеми та зручністю реалізації за допомогою сучасних комп'ютерних програм, що зумовило їхнє широке застосування в обчислювальній математиці. Їм присвячені фундаментальні роботи О. О. Самарського [122], О. О. Самарського, О. В. Гулина [123], Г. М. Марчука [101], М. С. Бахвалова, М. П. Кобелькова, Н. П. Житкого [3] та інших.

Варіаційні та проекційні методи виникли й розвивалися у зв'язку з потребою знаходження екстремуму функціоналу й розв'язування крайових задач для диференціальних рівнянь. Варіаційний метод, частковими випадками якого є метод Рітца та метод найменших квадратів, уперше був запропонований В. Рітцем [147, 148].

Подальший розвиток теорія цих методів отримала в роботах М. М. Боголюбова [5, 6], М. М. Крилова [65-67], М. П. Кравчука [62], С. Г. Міхліна [103, 104] та інших математиків.

Суть варіаційних методів полягає в тому, що спочатку задача відшукання розв’язку вихідного рівняння замінюється рівносильною задачею знаходження мінімуму деякого функціоналу, а потім будується наближення до елемента, на якому реалізується цей мінімум.

Щодо проекційних методів, до яких належать методи Бубнова-Гальоркіна, Гальоркіна-Петрова, метод моментів і деякі їхні модифікації, варто зауважити, що вони розвивалися у зв’язку з потребою розв’язання несамоспряжених задач математичної фізики.

Основна ідея цих методів, яка закладена у дослідженнях І. Г. Бубнова [9], Б. Г. Гальоркіна [18], полягає в попередній «апроксимації» рівняння та подальшому точному розв’язуванні «апроксимованого» рівняння. «Апроксимоване» рівняння, як правило, конструюється так, що його розв’язання зводиться до розгляду скінченної системи скалярних рівнянь.

Істотний внесок у розвиток та обґрунтування проекційних методів зробили М. М. Крилов [65-67], М. М. Боголюбов [5], М. П. Кравчук [62], М. В. Келдиш [51]. Встановленню критеріїв збіжності, дослідженню швидкості збіжності, отриманню оцінок похибок, вивченню стійкості обчислювальних схем присвячені роботи Г. М. Вайнікко [12, 13], Л. В. Канторовича [46-48], М.О. Красносельського [63], Н. Й. Польського [112, 113].

Суть проекційних методів полягає в тому, що наближений розв’язок рівняння (1.1) шукається у вигляді

$$u_n = \sum_{j=1}^{n} a_j \varphi_j ,$$

де елементи $\varphi_1(x), \varphi_2(x), ..., \varphi_n(x)$ належать гільбертовому простору $H$, є лінійно-незалежними й утворюють повну систему в просторі $H$, а сталі $a_j$ визначаються з системи рівнянь

$$\left\langle \sum_{j=1}^{n} a_j(\varphi_j - T\varphi_j); \psi_i \right\rangle = \langle f; \psi_i \rangle, i = \overline{1,n},$$

де $\langle \bullet ; \bullet \rangle$ – скалярний добуток у просторі $H$, а $\{\psi_i\}$, $i = \overline{1,n}$ – деяка система лінійно-незалежних елементів.

Проекційні методи мають широку область застосування при розв’язуванні різних задач природознавства й техніки. Вони часто застосовуються при доведенні теорем існування розв’язку рівняння і на їхній основі створюються обчислювальні алгоритми, які становлять основу обчислювальної математики. Однак ці методи мають і недоліки, їхнього характерною рисою є степенева збіжність та обчислювальна нестійкість. Крім того, знаходження достатньо точних наближень за допомогою проекційних методів часто пов’язане з необхідністю розв’язувати системи рівнянь високих порядків, що виявляється достатньо важкою задачею. Досить складним є питання вибору згаданої вище послідовності лінійно-незалежних елементів.

Прагнення до спрощення обчислювальної схеми проекційних методів привело до появи методу колокації (метод співпадіння, інтерполяційний метод). Цей метод уперше був запропонований Л. В. Канторовичем [47] для побудови розв’язків крайових задач для лінійних диференціальних рівнянь. Л. В. Канторович [48] також подав обґрунтування методу на випадок відшукання наближених періодичних розв’язків інтегральних рівнянь.

Дослідженню збіжності методу колокації для інтегральних рівнянь з неперервним ядром присвячені роботи О. Кіш [54]. Г. М. Вайнікко [11-14], вивчаючи метод колокації засобами функціонального аналізу, запропонував обґрунтування методу алгебраїчної колокації розв’язування крайових задач для нелінійних диференціальних рівнянь вищих порядків.

Обґрунтуванню тригонометричної колокації та дослідженню її швидкості збіжності для рівновіддалених вузлів колокації присвячена робота М. Ф. Касшпицької і А. Ю. Лучки [49]. Спираючись на загальну теорію наближених методів, М. Ф. Касшпицька і Н. І. Тукалевська [50] встановили збіжність методу алгебраїчної колокації для інтегральних рівнянь у просторі неперервних функцій, у яких інтегральний оператор є цілком неперервним, а отже, поширили відомі в той час результати на більш загальні класи інтегральних рівнянь.

Розв'язування диференціальних та інтегральних рівнянь методом колокації, який базується на апроксимації алгебраїчними поліномами, оптимальний вибір вузлів колокації – об'єкти досліджень Б. Г. Габдулхаєва [15-17].

Метод колокації отримав широке застосування щодо різноманітних класів задач математичної фізики. Слід відзначити в цьому напрямі дослідження М. Й. Ронто [119], А.М. Самойленка, М. Й. Ронто [128], у яких розглядається обґрунтування методу стосовно системи диференціальних рівнянь, зокрема при побудові періодичних розв'язків.

Вивченню можливості поширення методу колокації на крайові задачі для диференціальних рівнянь з імпульсним впливом присвячена робота А. М. Самойленка і М. Й. Ронто [129].

Серед прямих методів варто виокремити метод механічних квадратур. Як правило, він застосовується у випадках, коли від результату не вимагається високої точності. Метод характеризується простотою обчислювальної схеми, зручністю його реалізації за допомогою комп'ютерних програм.

Прямі методи мають широку область застосування. Але знаходження достатньо точних наближень за допомогою цих методів часто пов'язане з необхідністю вибору координатного базису великої розмірності, що у свою чергу приводить до розв'язування систем алгебраїчних або трансцендентних рівнянь високих порядків. А це є досить складна задача, особливо у випадку нелінійних рівнянь. Крім того, наближення, отримане при $n = k$, як правило, не використовується для знаходження наближень при $n > k$. Характерною рисою цих методів є також степенева швидкість збіжності, іноді – досить повільна й обчислювальна нестійкість.

Переваги ітераційних і прямих методів сприяли їхньому широкому застосуванню до розв’язування різного типу математичних задач. Однак їхні недоліки зумовили необхідність побудови та дослідження нових методів. З’явились методи, які поєднували в собі ідеї прямих та ітераційних методів. Такий синтез виявився досить плідним. На цій основі виникла ціла низка нових більш ефективних методів. До них належить метод осереднення функціональних поправок, запропонований Ю. Д. Соколовим [131], і КР-метод, розроблений В. І. Лебедєвим [73, 74], метод розщеплення, варіаційно-ітеративний, проекційно-градієнтний метод. Обґрунтуванню методу осереднення функціональних поправок у випадку нелінійних операторних рівнянь присвячено багато робіт М. С. Курпеля, які склали його монографію [69]. Він установив достатні ознаки збіжності методу й відповідні їм оцінки похибок, а також побудував декілька загальних ітераційних процесів.

Подальший розвиток і удосконалення методу осереднення функціональних поправок привели до створення проекційно-ітеративних методів, які були висвітлені в роботах Е. А. Чернишенко [139], А. Ю. Лучки [91], М. С. Курпеля [69], Н. І. Тукалевської [135], В. І. Тивончука [133].

Основна перевага проекційно-ітеративних методів полягає в тому, що в багатьох випадках вони збігаються значно швидше, ніж звичайний ітераційний метод, причому можуть збігатися і тоді, коли ітераційний метод є розбіжним. Важливим також є той факт, що в цих процесах швидкість збіжності залежить від гладкості вихідних даних.

Дослідженню проекційно-ітеративного методу і його узагальненню для лінійних операторних рівнянь у банаховому та гільбертовому просторах, а також застосуванню його до різних класів інтегральних і диференціальних рівнянь присвячені роботи А. Ю. Лучки [89-91]. Основними результатами цих робіт є встановлення необхідних, а також деяких достатніх умов збіжності методу, вивчення швидкості збіжності, встановлення оцінок похибок.

Суть проекційно-ітеративного методу полягає в тому, що наближений розв'язок рівняння (1.1) будується згідно з формулами

$$u_k = f + Tz_k,$$

$$z_k = u_{k-1} + w_k,\ w_k = \sum_{j=1}^{n} a_j^k \varphi_j,$$

де $\{\varphi_j\}, j=\overline{1,n}$ – система лінійно-незалежних елементів із гільбертового простору $H$. Невідомі параметри $a_j^k = a_j^k(n)$ визначаються з умови

$$\langle u_k - z_k; \psi_i \rangle = 0,\ i=\overline{1,n},$$

у якій $\{\psi_i\}$ – деяка система лінійно-незалежних елементів, зокрема $\psi_i = \varphi_i, i = 1,2,3,\ldots$.

Установленню загальних умов збіжності методу, які істотно розширюють його область застосування, присвячені, зокрема, роботи А. Ю. Лучки [84, 97, 98]. Застосування проекційно-ітеративних методів і алгоритмів до розв'язування нелінійної еліптичної крайової задачі наведено у роботі Л. Л. Гарт [18].

У випадку інтегральних рівнянь типу Вольтерри і змішаного типу деякі нові варіанти методу осереднення функціональних поправок були запропоновані В. І. Тивончуком [133]. Н. І. Тукалевська розглянула більш загальний проекційно-ітеративний процес розв'язування інтегральних рівнянь типу Вольтерри [135], згідно з яким для побудови наближення необхідно виконати ітерацію і розв'язати систему диференціальних рівнянь першого порядку.

Наближені методи успішно можна застосовувати і для відшукання розв'язку крайових задач. Зокрема, у монографії А. М. Самойленка і

М. Й. Ронто [127] досліджуються крайові задачі для нелінійних систем диференціальних рівнянь з параметрами за допомогою чисельно-аналітичного методу.

Двоточкові крайові задачі для диференціальних рівнянь з параметрами вивчалися в роботах А. М. Самойленка, М. Й. Ронто, В. А. Ронто [129], А. В. Кібенка [53], І. А. Гоми [38].

Багатоточкові крайові задачі для звичайних диференціальних рівнянь з параметрами детально досліджено в роботах А. Ю. Лучки, В. В. Листопадової [95], М. С. Курпеля, А. Г. Марусяка [70], Ю.Є. Ейдельмана [140]. У цих роботах вивчено властивості розв’язку деяких типів задач, зокрема наведено критерії розв’язності узагальнених крайових задач для диференціальних рівнянь з параметрами, а також запропоновані й обґрунтовані наближені методи побудови розв’язку: проекційні, ітераційні, проекційно-ітеративні.

Наближеному розв’язанню задач оптимального керування в системах із запізненням шляхом заміни рівнянь із запізненням послідовністю звичайних диференціальних рівнянь присвячена робота І. М. Черевка, О. В. Матвія [138].

Останніми роками особлива увага приділяється таким задачам, як задачі з параметрами, з імпульсним впливом, та задачам, на розв’язки яких накладаються певні додаткові умови (обмеження). Серед праць, присвячених вивченню згадуваних задач, варто відзначити роботи А.М. Самойленка, А. Ю. Лучки [124], А. М. Самойленка, М. О. Перестюка [126], А. Ю. Лучки [88, 89], О. А. Бойчука [7], М. Й. Ронто [121].

Проблема вивчення звичайних диференціальних рівнянь з імпульсним впливом сама по собі не є новою. Ще на початку минулого століття фізики намагались описувати процеси в нелінійних коливних системах. Широко відомим прикладом такої задачі є модель годинника. Але, починаючи з другої половини XX століття, простежується зростання інтересу математиків до систем диференціальних рівнянь з розривними траєкторіями.

У монографіях О. А.Бойчука, В. Ф.Журавльова, А. М.Самойленка та О. А.Бойчука, А. М.Самойленка [8, 143] побудована загальна теорія крайових задач для систем функціонально-диференціальних рівнянь. Методом побудови узагальненого оператора Гріна встановлено необхідні й достатні умови існування розв'язків імпульсних крайових задач.

Теорії диференціальних рівнянь з імпульсним впливом присвячена також робота А. М. Самойленка і М. О. Перестюка [126], у якій дана загальна характеристика систем таких рівнянь, вказано на подібність і відмінність розв'язування диференціальних рівнянь з імпульсним впливом від диференціальних рівнянь без імпульсного впливу.

Питанням стійкості розв'язку, вивченню періодичних розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь з імпульсною дією присвячені роботи М. О. Перестюка [107, 108]. Проблемі застосування відомих наближених методів до відшукання розв'язків крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь з імпульсним впливом присвячено низку робіт. Зокрема, у роботі А. М. Самойленка і М. І. Ронто [128] вивчається можливість поширення методу колокації на крайові задачі для диференціальних рівнянь з імпульсним впливом.

А. Ю. Лучка [80, 83, 86] запропонував і обґрунтував застосування проекційного, ітераційного і проекційно-ітеративного методів відшукання наближених розв'язків крайової задачі для диференціальних рівнянь з імпульсною дією. Дослідженню й обґрунтуванню вищезгаданих методів стосовно системи диференціальних рівнянь з імпульсним впливом і параметрами присвячені роботи [93, 94].

Різні задачі з параметрами стали об'єктом вивчення в роботах Ю. О. Митропольського, Д. Г. Коренєвського [102], В. А. Ронто [129], З. Б. Сеідова [130], К. Т. Ахмедова, Н. А. Сваричевської, М. А. Ягубова [2], Т. Янковзкі [145] та інших.

Останнім часом розроблено методику дослідження диференціальних, інтегральних, інтегро-диференціальних рівнянь та їх систем з обмеженнями і запропоновано ефективні наближені методи знаходження їх розв’язків. У цьому напрямку варто відзначити праці А. Ю. Лучки [86], О. Б. Поліщук [110, 111], Т. А. Кучерук [71, 72], Ю. О. Захарійченка [43, 44], В. А. Ферука [136], О. І. Ковтун [55-57].

Задачі зі скінченною кількістю додаткових умов, які накладаються на шукану функцію, відносяться до класу нетерових задач. У працях О. А. Бойчука і А. М. Самойленка [142, 143] розроблено підхід до дослідження нетерових задач, що ґрунтується на використанні теорії узагальнено-обернених чи псевдообернених операторів.

Один із підходів дослідження задач з обмеженнями, базується на тому, що задачу довизначають, вводячи в рівняння додаткові параметри, і потім встановлюють умови сумісності вихідної задачі та розробляють методи побудови її наближених розв’язків. У такий спосіб досліджувались задачі з обмеженнями у низці праць А. Ю. Лучки [87-89, 93-95], О. Б. Поліщук [110, 111], Ю. О. Захарійченка [43, 44], Т. А. Кучерук [71, 72], В. В. Листопадової [95], В. А. Ферука [136], О. І. Ковтун [55-57].

У роботах О. Б. Поліщук [110, 111] розглянуто умови сумісності й досліджено методи розв’язування сингулярних інтегральних рівнянь з параметрами й обмеженнями. Обґрунтовано застосування до поставлених задач ітераційного, проекційно-ітеративного та модифікованого проекційно-ітеративного методів.

Роботи Т. А. Кучерук [71, 72] зосереджені на дослідженні операторних рівнянь з обмеженнями. На основі результатів, які отримані для операторних рівнянь з обмеженнями, встановлено умови сумісності нелінійного інтегрального рівняння з обмеженнями, побудовано ітераційний і модифікований проекційно-ітеративний методи знаходження наближених розв’язків операторних рівнянь та нелінійних інтегральних рівнянь з обмеженнями.

Проблемі дослідження сумісності лінійних і нелінійних інтегральних рівнянь з обмеженнями присвячені роботи О. І. Ковтун [55-57].

У працях В. А. Ферука [100, 136] встановлено умови сумісності систем диференціальних рівнянь із запізненням та обмеженнями, обґрунтовано застосування методів проекційно-ітеративного типу для систем квазілінійних диференціальних рівнянь із запізненням та обмеженнями.

У роботах Ю. О. Захарійченка [43, 44, 92] розглядаються питання дослідження імпульсних крайових задач з параметрами й обмеженнями, у яких параметри входять в імпульсні умови. У цих роботах досліджено умови сумісності лінійних і нелінійних імпульсних систем диференціальних рівнянь з параметрами та обмеженнями, встановлені достатні умови збіжності й оцінки похибок наближень методів проекційно-ітеративного типу.

Значну кількість наведених вище робіт об'єднує одна схема дослідження задач з обмеженнями

$$\frac{d}{dt}x(t)+P(t)x(t)=p(t),\ t\in[a;b], \tag{1.3}$$

$$\int_a^b V(t)x(t)dt=\alpha, \tag{1.4}$$

де $P(t)$ та $V(t)-m\times m$ та $l\times m$ матриці відповідно, елементи яких сумовні з квадратом на відрізку $[a;b]$, $p\in L_2[a;b]$, $\alpha\in R^l$, причому $l\geq m$.

Ставиться задача знаходження в класі $W_2^1[a;b]$ абсолютно неперервних вектор-функцій, похідна яких належить простору $L_2[a;b]$, вектор-функції $x(t)$, яка майже скрізь задовольняє систему рівнянь (1.3) та обмеження (1.4). Якщо така вектор-функція існує, то задача (1.3), (1.4) називається сумісною. Але так буде не завжди й тому постає завдання встановлення умов сумісності такої задачі.

Для отримання умов сумісності задачі (1.3), (1.4) й обґрунтування застосування наближених методів у розгляд вводиться допоміжна задача

$$\frac{d}{dt}x(t)+H(t)x(t)=y(t)+E(t)\lambda, \tag{1.5}$$

$$\int_a^b V(t)x(t)dt = \alpha, \tag{1.6}$$

у якій $t \in [a;b]$, $m \times m$ матриця $H(t)$, $m \times n$ матриця $E(t)$ із сумовними з квадратом на $[a;b]$ елементами та вектор-функція $y \in L_2[a;b]$ – задані, а вектор-функцію $x \in W_2^1[a;b]$ та вектор $\lambda \in R^n, n = l - m$ потрібно знайти. Стовпці матриці $E(t)$ вважаються лінійно незалежними.

За умови існування єдиного розв’язку допоміжної задачі (1.5), (1.6)

$$x(t) = h(t) + \int_0^T G(t;s)y(s)ds, \int_0^T G(t;s)E(s)ds = 0, \tag{1.7}$$

поклавши у рівнянні (1.5)

$$y(t) = p(t) + \left[H(t) - P(t)\right]x(t), \tag{1.8}$$

дослідження задачі (1.3), (1.4) зводиться до дослідження інтегрального рівняння

$$y(t) = g(t) + \int_a^b K(t;s)y(s)ds, \tag{1.9}$$

$$g(t) = p(t) + \left[H(t) - P(t)\right]h(t),\ K(t;s) = \left[H(t) - P(t)\right]G(t;s). \tag{1.10}$$

У статті А. Ю. Лучки [88] для дослідження звичайних диференціальних рівнянь з обмеженнями запропоновано більш загальну, ніж наведена вище, методику. Вона полягає в тому, що замість допоміжної задачі (1.5), (1.6) розглядається задача

$$\frac{d}{dt}x(t) + H(t)x(t) = y(t) + E(t)\lambda, \tag{1.11}$$

$$\int_a^b V(t)x(t)dt = \alpha, \tag{1.12}$$

$$\int_a^b Z(t)\left(\frac{d}{dt}x(t) + P(t)x(t) - p(t)\right)dt = 0, \tag{1.13}$$

у якій $Z(t) - \nu \times m$ матриця, елементи якої сумовні з квадратом на $[a;b]$, і рядки є лінійно незалежними. Зауважимо, що в цьому випадку $n = l + \nu - m$.

Той факт, що умова (1.13) заходиться в нашому розпорядженні й можна досягнути того, щоб $\rho(K) < 1$, сприяла побудові наближених методів розв'язання задачі (1.3), (1.4).

Серед математичних моделей, що описують важливі процеси в економіці, медицині, біології та інших галузях науки і техніки, часто зустрічаються різноманітні задачі для функціонально-диференціальних рівнянь. Теорія цих рівнянь, до яких належить і рівняння (1.3), на сьогодні є досить розробленою, про що свідчить ціла низка фундаментальних монографій Р. Беллмана, К. Кука [4], Н.В. Азбелева, В. П. Максимова, Л. Ф. Рахматуліної [1].

До методів проекційно-ітеративного типу також належить і колокаційно-ітеративний метод, який виник на основі поєднання звичайного методу послідовних наближень і методу колокації.

Дослідженню та теоретичному обґрунтуванню колокаційно-ітеративного методу стосовно одномірних і багатовимірних інтегральних рівнянь Фредгольма, вивченню швидкості збіжності методу залежно від гладкості вихідних даних присвячені роботи А. Ю. Лучки, Є. М. Луцева [96], Є. М. Луцева [75, 76].

Застосування колокаційно-ітеративного методу для відшукання розв'язку крайової задачі для звичайних диференціальних рівнянь з параметрами присвячені роботи В. Б. Поселюжної [114-117]. У цих працях досліджено питання застосування колокаційно-ітеративного методу (як стаціонарного, так і нестаціонарного) для відшукання розв'язку крайової задачі для звичайних диференціальних рівнянь з параметрами, для диференціальних рівнянь з малою нелінійністю, а також для крайової задачі для звичайних диференціальних рівнянь з імпульсним впливом і параметрами. Також обґрунтовано застосування модифікованого колокаційно-ітеративного методу для розв'язування інтегральних рівнянь Фредгольма 2-го роду та диференціальних рівнянь з малою нелінійністю.

Незважаючи на значну кількість робіт, що присвячені різним аспектам теорії наближених методів розв'язання різних типів операторних рівнянь, завдання отримання умов сумісності та побудови нових методів відшукання наближених розв'язків таких рівнянь є ще далекими від свого повного вирішення.

Відсутність робіт, присвячених питанню побудови й обґрунтування колокаційно-ітеративного методу стосовно інтегро-функціональних рівнянь з обмеженнями, стала поштовхом до представлених у монографії досліджень. Широке застосування згаданих вище задач, як математичних моделей у різних галузях природознавства й техніки обумовлює важливість та актуальність цих досліджень.

Застосування розробленої у [88] методики встановлення умов сумісності й обґрунтування застосування наближених методів до крайових задач для диференціальних рівнянь із запізненням, на розв'язки яких накладено додаткові умови, збагачує, розвиває та розширює теорію задач з обмеженнями. Подальше її поширення на різноманітні задачі для функціонально-диференціальних, інтегро-функціональних, різницевих та інших класів рівнянь є актуальною і перспективною задачею.

# РОЗДІЛ 2

# КОЛОКАЦІЙНО-ІТЕРАТИВНИЙ МЕТОД РОЗВ’ЯЗУВАННЯ ЛІНІЙНИХ ІНТЕГРО-ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

## 2.1. Лінійні інтегро-функціональні рівняння

У просторі $L_2(a;b)$ – дійсних і вимірних на проміжку $(a;b)$ функцій, сумовних з квадратом, розглянемо інтегро-функціональне рівняння вигляду

$$y(x) - p(x)y(h(x)) = f(x) + \int_a^b K(x;t)y(t)dt,\ x \in (a;b), \tag{2.1}$$

$$y(x) = 0,\ x \notin (a;b),$$

де $f(x)$ – відома, а $y(x)$ – шукана функції з $L_2(a;b)$. Відносно функцій $h(x), p(x),\ K(x;t)$ припускаємо, що вони, відповідно, на проміжку $[a;b]$ й у квадраті $[a;b]^2 = [a;b]\times[a;b]$ задовольняють умови:

$$|p(x)| \le \bar{p} < \infty, \tag{2.2}$$

$h(x)$ – диференційовна на $[a;b]$ і

$$h'(x) \ge l > 0, x - h(x) \ge \sigma > 0, \tag{2.3}$$

$$\int_a^b\int_a^b K^2(x;t)dxdt = B^2 < +\infty. \tag{2.4}$$

Покажемо, що рівняння (2.1) при виконанні умов (2.2)-(2.4) можна звести до інтегрального рівняння Фредгольма другого роду. Поруч з інтегральним цілком неперервним оператором $K,$ який має вигляд

$$(Kv)(x) = \int_a^b K(x;t)v(t)dt,\ \forall v(x) \in L_2(a;b),$$

будемо розглядати оператор $S$ такий, що

$$(Sv)(x)=\begin{cases} v(x), x\in\lfloor a;h^{-1}(a)\rfloor, \\ v(x)-p(x)v(h(x)),\ x\in\left[h^{-1}(a);b\right], \end{cases} \tag{2.5}$$

де $v(x)$ – довільна функція з $L_2(a;b)$.

Зауважимо, що цей оператор, як і оператор $K$, діє з $L_2(a;b)$ в $L_2(a;b)$. Легко показати, що оператор $S$ лінійний. Умови (2.2), (2.3) гарантують його обмеженість. Дійсно,

$$\|S\|=sup\frac{(Sv)(x)}{v(x)}\le 1+\left|\frac{p^2(x)}{h'(x)}\right|^{\frac{1}{2}}\le 1+\frac{\overline{p}}{\sqrt{l}}<\infty,$$

де $sup$ береться по $v(x)\in L_2(a;b)$, $v(x)\neq 0$.

Ці ж умови говорять про те, що оператор $S$ оборотний. Обернений до нього оператор має вигляд

$$\left(S^{-1}v\right)(x)=\begin{cases} v(x),\ x\in\lfloor a;h^{-1}(a)\rfloor, \\ v(x)+\sum_{i=1}^{s}v\left(h^i(x)\right)\prod_{k=0}^{i-1}p\left(h^k(x)\right), x\in\left[h^{-1}(a);b\right], \end{cases} \tag{2.6}$$

$$x\in\Delta_s,\ s=\overline{1,m}.$$

Тут, як і надалі,

$$\Delta_s=\left[c_{s-1};c_s\right],$$
$$c_0=a,\ c_s=h^{-1}\left(c_{s-1}\right),\ c_m=b,$$
$$h^k(x)=h\left(h^{k-1}(x)\right),\ s=\overline{1,m}.$$

Іншими словами, вираз (2.6) – це розв’язок функціонального рівняння

$$y(x)-p(x)y\left(h(x)\right)=u(x),\ x\in[a;b],$$

$$y(x)=0,\ x\notin[a;b],$$

(де $u(x)$ – відома, $y(x)$ – шукана функції) за допомогою методу кроків. Умова (2.3) гарантує той факт, що кількість кроків $m$ скінченна й

$$m\le\frac{b-a}{\sigma}.$$

Неважко переконатись у тому, що оператор $S^{-1}$, так як і оператор $S$, лінійний і обмежений. Отже, враховуючи вищенаведене міркування, ми можемо розглядати рівняння (2.1) як операторне рівняння

$$(Sy)(x) = f(x) + (Ky)(x), \tag{2.7}$$

де $f(x)$ – задана, $y(x)$ – шукана функції з $L_2(a;b)$.

Нехай $(Sy)(x) = u(x)$, тоді $y(x) = (S^{-1}u)(x)$ і ми від рівняння (2.7) переходимо до рівняння

$$u(x) = f(x) + (Tu)(x). \tag{2.8}$$

Оператор $T = KS^{-1}$ Фредгольмів, як суперпозиція Фредгольмового і лінійного обмеженого операторів. Іншими словами, застосувавши згадану вище заміну, ми перетворюємо інтегро-функціональне рівняння (2.1) в інтегральне рівняння Фредгольма другого роду

$$u(x) = f(x) + \int_a^b T(x;t)u(t)dt \tag{2.9}$$

з цілком неперервним інтегральним оператором $T$, ядро якого

$$T(x;t) = \begin{cases} K(x;t) + \sum_{i=1}^{m-s} K\left(x;\left(h^{-1}\right)^k(t)\right), \ t \in \Delta_s, \\ K(x;t), \ t \in (c_{m-1};b), s = \overline{1, m-1}, \ x \in (a;b), \end{cases} \tag{2.10}$$

де $\left(h^{-1}\right)^k(t) = h^{-1}\left(\left(h^{-1}\right)^{k-1}(t)\right)$.

До задачі (2.1) при виконанні згаданих вище умов можна застосувати метод послідовних наближень, проекційний метод і деякі модифікації проекційно-ітеративного методу [91].

Суттєвим моментом у побудові й обґрунтуванні цих методів є те, що при виконанні умов (2.2), (2.3) функціональне рівняння

$$y(x) - p(x)y(h(x)) = s(x), \ x \in [a;b],$$

$$y(x) = 0, \ x \notin [a;b]$$

може бути розв’язане за допомогою скінченної кількості кроків, завдяки чому інтегро-функціональне рівняння задачі (2.1) зводиться до інтегрального рівняння Фредгольма другого роду. Якщо ж умова (2.3) не виконується і оператор внутрішньої суперпозиції

$$(Sv)(x) = p(x)v(h(x)), \, v(x) \in L_2(a;b)$$

більш складної структури (зокрема, коли рівняння (2.5) не розв'язується за допомогою скінченної кількості кроків), то згадані вище методи не можна застосовувати до задачі (2.1).

Тому виникає необхідність у застосуванні та дослідженні нових варіантів наближених методів розв'язування задачі (2.1). Одним із них є колокаційно-ітеративний метод. Йому присвячені численні й грунтовні дослідження [115-118].

## 2.2. Схема колокаційно-ітеративного методу та його збіжність

Ідея методу полягає в тому, що наближені розв′язки задачі (2.1) знаходимо за формулами

$$y_k(x) = f(x) + p(x)z_k(h(x)) + \int_a^b K(x;t)z_k(t)dt, \;\; x \in [a;b], \tag{2.11}$$

$$y_k(x) = 0, \; x \notin [a;b];$$

$$z_k(x) = y_{k-1}(x) + \sum_{j=1}^{n} a_j^k \varphi_j(x), \tag{2.12}$$

де $\{\varphi_j(x)\}$ – система лінійно-незалежних неперервних на відрізку $[a;b]$ функцій, зокрема система алгебраїчних або тригонометричних поліномів, або ж $B$-сплайнів.

Невідомі параметри знаходимо з умови

$$r_k(x_i) = 0, \, i = \overline{0,n}, \tag{2.13}$$

$$r_k(x) = f(x) + \int_a^b K(x;t)z_k(t)dt - z_k(x) + p(x)z_k(h(x)), \tag{2.14}$$

де $x_i \in [a;b]$ – вузли колокації.

За початкове наближення $y_0(x)$ беремо деяку неперервну функцію.

Для визначення параметрів $a_j^k, j=\overline{0,n}$ отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\sum_{j=0}^{n} \beta_{ij} a_j^k = b_i^k,\ i=\overline{0,n}\ , \tag{2.15}$$

у якій

$$\beta_{ij} = \varphi_j(x_i) - p(x_i)\varphi_j(h(x_i)) - \int_a^b K(x_i;t)\varphi_j(t)dt,\ j,i=\overline{0,n}, \tag{2.16}$$

$$b_i^k = f(x_i) + p(x_i)y_{k-1}(h(x_i)) - y_{k-1}(x_i) + \int_a^b K(x_i;t)y_{k-1}(t)dt,\ \ i=\overline{0,n}. \tag{2.17}$$

Дійсно, на основі формул (2.11) і (2.12) отримаємо, що

$$\begin{gathered} y_k(x) - z_k(x) = f(x) - y_{k-1}(x) + \int_a^b K(x;t)y_{k-1}(t)dt - \\ -\sum_{j=0}^{n} a_j^k \left\{ \varphi_j(x) - \int_a^b K(x_i;t)\varphi_j(t)dt \right\}. \end{gathered} \tag{2.18}$$

Тобто, відповідно до позначень (2.16) та (2.17), прийдемо до системи рівнянь (2.15).

Коли функціональні поправки $w_k(x) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j^k \varphi_j(x)$ – алгебраїчні поліноми, за вузли доцільно брати корені многочленів степеня $n$, ортогональних на відрізку $[a;b]$ з вагою $\rho(x) \geq 0$. У випадку періодичної задачі, коли вільний член $f(x)$ і ядро $K(x;t)$ – періодичні функції по $x$ і $t$, поправку слід брати у вигляді тригонометричного полінома, а вузли – рівновіддаленими.

Нехай система рівнянь (2.15) має єдиний розв’язок. У такому випадку, за допомогою колокаційно-ітеративного методу наближені розв’язки будуються однозначно. Причому за наближення до шуканого розв'язку можна взяти як функцію $y_k(x)$, так і функцію $z_k(x)$.

У першому підрозділі було показано, що інтегро-функціональне рівняння (2.1) при виконанні умов (2.2), (2.3) зводиться до інтегрального рівняння Фредгольма другого роду. Припустимо, що за допомогою деякого методу побудували наближення $u_k(x)$ розв'язку $u^*(x)$ інтегрального рівняння (2.8). Оскільки розв'язки інтегро-функціонального рівняння (2.1) і рівняння (2.8) пов'язані між собою співвідошеннями

$$u(x) = (G^{-1}Sy)(x),$$

$$y(x) = (S^{-1}Gu)(x),$$

то функцію $y_k(x)$, яка визначається формулою

$$y_k(x) = (S^{-1}Gu_k)(x),$$

можна вважати наближеним розв'язком $y^*(x)$.

$$\lim_{k\to\infty}\left\|y_k(x) - y^*(x)\right\|_{L_2(a;b)} = 0.$$

Дійсно, використавши описані вище формули, отримаємо

$$\lim_{k\to\infty}\left\|y_k(x) - y^*(x)\right\| = \lim_{k\to\infty}\left\|(S^{-1}Gu_k)(x) - (S^{-1}Gu^*)(x)\right\| \le$$
$$\le \lim_{k\to\infty}\left\|S^{-1}G\right\| \cdot \left\|u_k(x) - u^*(x)\right\| = C \cdot \lim_{k\to\infty}\left\|u_k(x) - u^*(x)\right\| = 0,$$

де $C = const$, оскільки оператори $S^{-1}$ і $G$ лінійні та обмежені.

Отже, наближення $y_k(x)$ при достатньо великому $k$ задовольняє рівняння (2.1) з достатньо високою точністю. Надалі увага буде зосереджена на вже відомих методах побудови таких наближень.

Далі будемо вважати, що метод збігається, якщо інтегро-функціональне рівняння (2.1) для будь-якої функції $f(x) \in L_2[a;b]$ має єдиний розв'язок $y^*(x)$, послідовність $\{y^*(x)\}$ наближень згідно з методом будується однозначно і виконується співвідношення $\lim\limits_{k\to\infty}\left\|y_k(x) - y^*(x)\right\|_{L_2(a;b)} = 0$.

## 2. 3. Обґрунтування методу. Похибки наближень

Припустимо, що $\{\varphi_j(x)\}$ – фундаментальна система функцій на відрізку $[a;b]$, $\varphi_j(x_i)=\delta_{ij}$, де $\delta_{ij}$ – символ Кронекера. Якщо початкові координати утворюють чебишевську систему, то таку систему завжди можна отримати.

Побудуємо для колокаційно-ітеративного методу оператори переходу, які визначаються формулами:

$$z(x)=\int_a^b Z_n(x;t)g(t)dt=g(x)+u_n(x), \tag{2.19}$$

$$y(x)=\int_a^b M_n(x;t)g(t)dt=\int_a^b K(x;t)z(t)dt, \tag{2.20}$$

$$v(x)=\int_a^b L_n(x;t)g(t)dt=y(x)-y_n(x), \tag{2.21}$$

де $g(x)$ – неперервна на відрізку $[a;b]$ функція і

$$u_n(x)=\sum_{i=0}^{n} c_i\varphi_i(x), \tag{2.22}$$

$$y_n(x)=\sum_{i=0}^{n} y(x_i)\varphi_i(x), \tag{2.23}$$

а невідомі параметри $c_i$, $i=\overline{0,n}$ визначаються з умови

$$y(x_i)-z(x_i)=0,\ \ i=\overline{0,n}. \tag{2.24}$$

На основі формул (2.19), (2.20), (2.22) та наступної рівності

$$g_n(x)=\sum_{i=0}^{n} g_i\varphi_i(x),\ \ g_i=g(x_i), i=\overline{0,n} \tag{2.25}$$

отримаємо:

$$u_n(x)+g_n(x)=\sum_{i=0}^{n} d_i\varphi_i(x),\ \ d_i=c_i+g_i, i=\overline{0,n}; \tag{2.26}$$

$$
\begin{aligned}
&y(x)-z(x)=\int_a^b K(x;t)\left[g(t)+u_n(t)\right]dt-g(x)-u_n(x)=\\
&=\int_a^b K(x;t)\left[g(t)-g_n(t)\right]dt+\int_a^b K(x;t)\left[g_n(t)+u_n(t)\right]dt+\\
&+g_n(x)-g(x)-u_n(x)-g_n(x)=\int_a^b K(x;t)\left[g(t)-g_n(t)\right]dt+\\
&+g_n(x)-g(x)+\sum_{i=0}^{n}d_i\left\{\int_a^b K(x;t)\varphi_i(t)dt-\varphi_i(x)\right\}.
\end{aligned}
\tag{2.27}
$$

Вважаючи, що у (2.27) $x=x_i$ та враховуючи умову (2.24) і рівність $g(x_i)=g_n(x_i)$, що безпосередньо випливає з (2.25), для визначення невідомих параметрів $d_i,\ i=\overline{0,n}$ у формулі (2.26) отримуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$
d_i-\sum_{j=0}^{n}\alpha_{ij}d_j=\int_a^b K(x_i;t)\left[g(t)-g_n(t)\right]dt\ ,\ i=\overline{0,n}, \tag{2.28}
$$

у якій

$$
\alpha_{ij}=\int_a^b K(x_i;t)\varphi_j(t)dt\ ,\ \ i,j=\overline{0,n}. \tag{2.29}
$$

Нехай система рівнянь (2.28) має єдиний розв’язок

$$
d_i=\sum_{j=0}^{n}\gamma_{ij}\int_a^b K(x_j;t)\left[g(t)-g_n(t)\right]dt\ ,\ i=\overline{0,n}, \tag{2.30}
$$

тоді, підставляючи (2.30) у (2.26), знаходимо, що

$$
u_n(x)=-g_n(x)+\int_a^b\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\gamma_{ij}\varphi_j(x)K(x_i;t)\left[g(t)-g_n(t)\right]dt. \tag{2.31}
$$

За допомогою формул (2.19) і (2.31) та перепозначення

$$
B_n(x;t)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\gamma_{ij}K(x_j;t) \tag{2.32}
$$

отримуємо таке співвідношення

$$\int_a^b Z_n(x;t)g(t)dt = g(t) - g_n(t) + \int_a^b B_n(x;t)\left[g(t) - g_n(t)\right]dt \ . \qquad (2.33)$$

Проаналізувавши вирази (2.19)-(2.21), (2.23) і (2.33), можна зробити висновок, що ядра операторів переходу обчислюються за формулами:

$$Z_n(x;t) = \delta(x-t) + B_n(x;t); \qquad (2.34)$$

$$M_n(x;t) = K(x;t) + \int_a^b K(x;\xi)B_n(\xi;t)d\xi \ ; \qquad (2.35)$$

$$L_n(x;t) = \int_a^b \left(K(x;\xi) - H_n(\xi;t)\right)Z_n(\xi;t)d\xi \ , \qquad (2.36)$$

де $\delta(x-t)$ – функція Дірака, $H_n(x;t)$ – узагальнений інтерполяційний многочлен по $x$ ядра $K(x;t)$, тобто

$$H_n(x;t) = \sum_{i=0}^{n} \varphi_i(x)K(x_i;t). \qquad (2.37)$$

Якщо оператори переходу побудовані, то, врахувавши загальну теорію проекційно-ітеративного методу, можна встановити умови збіжності та вказати оцінки похибки колокаційно-ітеративного методу. Тобто підсумком викладеного вище є така теорема.

**Теорема 2.1.** Нехай функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$ і виконується умова

$$\lim_{x\to x_0} \int_a^b \left|K(x;t) - K(x_0;t)\right|dt = 0, \quad \forall x_0 \in [a;b]. \qquad (2.38)$$

Якщо $e_n = p + q_n < 1$, де $p = \max\limits_{a\le x\le b}|p(x)|$ і

$$q_n = \max_{a\le x\le b} \int_a^b \left|L_n(x;t)\right|dt, \qquad (2.39)$$

то інтегро-функціональне рівняння (2.1) має єдиний неперервний на відрізку $[a;b]$ розв’язок $y^*(x)$ і послідовність $\{y_k(x)\}$, побудована за допомогою колокаційно-ітеративного методу (2.11)-(2.14), збігається рівномірно до розв’язку $y^*(x)$.

**Зауваження 2.1.** Якщо $q_n \le 1,$ то справедлива оцінка

$$\left\| y^* - y_k \right\|_c \le p_n \left(1 - q_n\right)^{-1} \left\| y_k - z_k \right\|_C, \tag{2.40}$$

яка характеризує швидкість збіжності методу, та конструктивні оцінки

$$\left\| y^* - y_k \right\|_c \le p_n \left(1 - q_n\right)^{-1} \left\| y_k - z_k \right\|_C, \tag{2.41}$$

$$\left\| y_k - z_k \right\| \le q_n^{k-s} \left\| y_s - z_s \right\|, \quad 1 \le s \le k-1, \tag{2.42}$$

де $\|\cdot\|_C$ – рівномірна норма і

$$p_n = \max_{a \le x \le b} \int_a^b \left| M_n\left(x;t\right) \right| dt \; . \tag{2.43}$$

Для похибки $y^*(x) - z_k(x)$ справедливі аналогічні оцінки, у яких слід замінити $p_n$ на

$$l_n = 1 + \max_{a \le x \le b} \int_a^b \left| B_n\left(x;t\right) \right| dt \; . \tag{2.44}$$

Величини $l_n, p_n, q_n$ можна знайти й оцінити, використовуючи співвідношення (2.34)-(2.36) та позначення (2.32), (2.37).

**Зауваження 2.2.** Якщо виконується умова

$$F\left(\cdot\right) = \int_a^b \left| K\left(\cdot;t\right) \right|^2 dt \in C\left[a;b\right], \tag{2.45}$$

то справедливі оцінки

$$\left\| y^* - y_k \right\|_c \le p_n q_n^{k-1} \left\| y^* - y_0 \right\|, \tag{2.46}$$

$$\left\| y^* - y_k \right\|_c \le p_n \left(1 - q_n\right)^{-1} \left\| y_k - z_k \right\|, \tag{2.47}$$

$$\left\| y_k - z_k \right\| \le q_n^{k-s} \left\| y_s - z_s \right\|, \quad 1 \le s \le k-1, \tag{2.48}$$

у яких $\|\cdot\|$ – норма в $L_2(a;b)$ і

$$p_n^2 = \max_{a \le x \le b} \int_a^b \left| M_n\left(x;t\right) \right|^2 dt \; , \quad q_n^2 = \int_a^b \int_a^b \left| L_n\left(x;t\right) \right|^2 dxdt. \tag{2.49}$$

**Зауваження 2.3.** Ядра операторів переходу можна будувати безпосередньо за формулами (2.34)-(2.36), попередньо побудувавши функцію (2.32).

### 2.4. Обчислювальна схема методу

Спочатку слід задати координатну систему $\{\varphi_i(x)\}$ і вузли $\{x_i\}$. Далі можна знайти

$$\xi_j(x)=\int_a^b K(x;t)\varphi_j(t)dt, \quad i=\overline{0,n},$$

$$\beta_{ij}=\varphi_j(x_i)-\xi_j(x), \quad j,i=\overline{0,n}.$$

Після таких обчислень вважатимемо наближення $y_{k-1}(x)$ побудоване. Виконавши ітерацію

$$v_k(x)=f(x)+p(x)y_{k-1}(h(x))+\int_a^b K(x;t)y_{k-1}(t)dt\ ,$$

знаходимо величину $b_i^k=v_k(x_i)-y_{k-1}(x_i), \quad i=\overline{0,n}.$ Складаємо систему рівнянь

$$\sum_{j=0}^n \beta_{ij}a_j^k=b_i^k,\ \ i=\overline{0,n}\ ,$$

та знаходимо її розв'язок, причому $k$-те наближення обчислюємо за формулою

$$y_k(x)=v_k(x)+\sum_{j=0}^n a_j^k\xi_j(x).$$

### 2.5. Метод колокації

Ідея методу стосовно рівняння (2.1) полягає в тому, що наближений розв'язок $y_m(x)$ шукаємо у вигляді

$$y_m(x) = \sum_{j=1}^{m} a_j \varphi_j(x)$$

і визначаємо з функціонального рівняння

$$y_m(x) - p(x) y_m(h(x)) = f(x) + \int_a^b K(x;t) y_m(t)\,dt,$$

$$y_m(x) = 0, \quad x \notin [a;b],$$

$\{\varphi_j(x)\}$ – система лінійно-незалежних на $[a;b]$ функцій, $j = \overline{1,m}$, а невідомі параметри $a_j = a_j(n)$ знаходимо з умови

$$\gamma_m(x_i) = 0, \quad x_i = a + i\frac{b-a}{n}, \; i = \overline{0,n},$$

$$\gamma_m(x) = y_m(x) - p(x) y_m(h(x)) - f(x) - \int_a^b K(x;t) y_m(t)\,dt.$$

Для знаходження параметрів $a_j$ отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\sum_{j=1}^{n} \beta_{ij} a_j = b_i, \; i = \overline{1,n},$$

де $\beta_{ij}$ обчислюється таким способом:

$$\beta_{ij} = \varphi_j(x_i) - T_j(x_i), \; b_i = f(x_i), i = \overline{1,n}.$$

Систему рівнянь доцільно записати у векторному вигляді $\Lambda a_k = b_k$.

### 2.6. Інший варіант колокаційно-ітеративного методу

Нехай, як і раніше, $\{\varphi_i(x)\}$ – лінійно-незалежна система функцій із $L_2(a;b)$. Припустимо, що, виходячи з початкового наближення $y_0 \in L_2(a;b)$ та функції $s_0(x)$ такої, що

$$y_0(x) - p(x) y_0(h(x)) = s_0(x), \; x \in [a;b],$$
$$y_0(x) = 0, \; x \notin [a;b],$$

ми знайшли наближення $y_{k-1}(x)$ та функцію $s_{k-1}(x)$. Наступне наближення $y_k(x)$ знаходимо із функціонального рівняння

$$\begin{gathered} y_k(x) - p(x)y_k(h(x)) = f(x) + \int_a^b K(x;t)z_k(t)dt,\ x \in [a;b], \\ y_k(x) = 0,\ x \notin [a;b], \end{gathered} \tag{2.50}$$

у якому

$$z_k(x) = y_{k-1}(x) + w_k(x), \quad w_k(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j^k \eta_j(x). \tag{2.51}$$

Невідомі коефіцієнти $a_j^k = a_j^k(n)$ визначаємо з умови

$$r_k(x_i) = 0, i = \overline{1,n}, \tag{2.52}$$

де

$$r_k(x) = f(x) + \int_a^b K(x;t)z_k(t)dt - z_k(x) + p(x)z_k(h(x)), \tag{2.53}$$

$x_i \in [a;b]$ – вузли колокації, $i = \overline{1,n}$.

Система функцій $\{\eta_j(x)\}, j = \overline{1,n}$ визначається з функціональних рівнянь

$$\begin{gathered} \eta_j(x) - p(x)\eta_j(h(x)) = \varphi_j(x),\ x \in [a;b], \\ \eta_j(x) = 0,\ x \notin [a;b]. \end{gathered} \tag{2.54}$$

Наведений алгоритм заміною $u_k(x) = (Sy_k)(x)$, $\alpha_k(x) = (Sw_k)(x)$ зводиться до колокаційно-ітеративного методу розв'язування інтегрального рівняння (2.9) з ядром (2.10).

**Теорема 2.2.** Якщо одиниця не є точкою спектра оператора $T$ рівняння (2.9), а система функцій $\{\varphi_i(x)\}$ є повною у просторі $L_2(a;b)$, то існуватиме такий номер $n$, при якому метод (2.50)-(2.54) буде збіжним, причому швидкість збіжності зростатиме із збільшенням $n$.

Сформулюємо деякі достатні умови збіжності методу (2.50)-(2.54).

Нехай, як було відмічено раніше, функції $p(x), h(x)$ та $K(x;t)$ задовольняють умови (2.2)-(2.4), а система функцій $\{\varphi_i(x)\}$ є повною та ортогональною в $L_2(a;b)$. Відповідь на запитання про те, при якому $n$ наведений вище колокаційно-ітеративний метод буде збіжним, можна отримати, скориставшись алгоритмом, суть якого полягає в такому.

Спочатку будуємо за рекурентною формулою функцію

$$U'_s(x;t) = U_{s-1}(x;t) - \alpha_s E_s(x)\omega_s(t), s = 1,2,..., \tag{2.55}$$

де

$$E_s(x) = \int_a^b U_{s-1}(x;t)\eta_s(t)dt,\ \ \alpha_s^{-1} = \int_a^b \varphi_s^2(t)dt, \tag{2.56}$$

$$\omega_s(t) = \lambda_s(t) - \int_a^b U_{s-1}(x;t)\varphi_s(x)dx, \tag{2.57}$$

$$\lambda_s(t) = \varphi_s(t) - p(h^{-1}(t))\varphi_s(h^{-1}(t)), t \in [a;b], \tag{2.58}$$

$\varphi_s(t) = 0$, коли $t \notin [a;b]$.

Беремо $U_0(x;t) = K(x;t)$, а функції $\eta_s(x)$ знаходимо, розв’язавши функціональне рівняння (2.54).

Після цього будуємо функцію

$$U_s(x;t) = U'_s(x;t) - \varphi_s(x)\beta_s(t),\ s = 1,2,..., \tag{2.59}$$

де

$$\beta_s(t) = \alpha_s \int_a^b U'_s(x;t)\varphi_s(x)dx. \tag{2.60}$$

Далі розв’язуємо функціональне рівняння

$$\begin{gathered} L_s(x;t) - p(h^{-1}(t))L_s(x;h^{-1}(t)) = U_s(x;t), t \in [a;b], \\ L_s(x;t) = 0,\ t \notin [a;b] \end{gathered} \tag{2.61}$$

і знаходимо функцію $L_s(x;t),\ s = 1,2,...$.

Потім обчислюємо

$$q_s^2 = \int_a^b \int_a^b L_s^2(x;t)dxdt. \qquad (2.62)$$

Якщо виявиться, що $q_s < 1$, то доходимо висновку, що метод (2.50)-(2.54) буде збіжним. Якщо ж $q_s \geq 1$, то питання про збіжність методу залишається відкритим. Поетапно збільшуючи число координатних функцій $\varphi_i(x), i = s+1, s+2, \ldots$, відповідно до тих самих рекурентних формул (2.55)-(2.62) продовжуємо обчислення до тих пір, поки не прийдемо до такого $n$, при якому матиме місце нерівність $q_s < 1$.

У такому випадку швидкість збіжності наведеного вище колокаційно-ітеративного методу буде характеризуватися нерівністю

$$\left\| y^*(x) - y_k(x) \right\| \leq C_n \cdot q_n^{k-1} \cdot \left\| y^*(x) - y_0(x) \right\|, \qquad (2.63)$$

де $y^*(x)$ – точний розв’язок інтегро-функціонального рівняння (2.1), $C_n$ – деяка додатна стала.

Цю оцінку можна використовувати для визначення числа ітерацій, достатніх для зменшення початкової похибки у потрібну кількість разів.

Матиме місце також конструктивна оцінка

$$\left\| y^*(x) - y_k(x) \right\| \leq \frac{p_n q_n^{k-s}}{1 - q_n} \cdot \left\| y_s(x) - z_s(x) \right\|, \qquad (2.64)$$

де $p_n$ – деяке додатне число, $1 \leq s \leq k$, а $z_s(x)$ має вигляд (2.51).

Слід зауважити, що наведений вище алгоритм (2.55)-(2.62) перевірки умов збіжності методу (2.50)-(2.54) та оцінки (2.63), (2.64), які характеризують швидкість збіжності, можна у подібний спосіб отримати й для попередньої схеми колокаційно-ітеративного методу стосовно рівняння (2.1).

Безпосередні обрахунки згідно з методом (2.50)-(2.54) доцільно здійснювати таким способом. Спочатку задамо лінійно-незалежну систему функцій $\left\{\varphi_j(x)\right\}$, $j = \overline{1,n}$ і за формулою (2.54) знаходимо систему $\left\{\eta_j(x)\right\}$. Після цього будуємо функції

$$K_j(x)=\int_a^b K(x;t)\eta_j(t)dt,\ j=\overline{1,n}. \qquad (2.65)$$

Далі за формулою

$$\beta_{ij}=\varphi_j(x_i)-K_j(x_i) \qquad (2.66)$$

знаходимо елементи матриці $\Lambda$ (тут $x_i, i=\overline{1,n}$ – вузли колокації). Після цього знаходимо обернену матрицю $\Lambda^{-1}$ і переходимо до основних обчислень.

Так, нехай наближення $y_{k-1}(x)$ та відповідно функція $s_{k-1}(x)$ вже задані. Далі виконуємо ітерацію

$$v_k(x)=f(x)-\int_a^b K(x;t)y_{k-1}(t)dt \qquad (2.67)$$

та знаходимо нев'язку

$$\varepsilon_k(x)=v_k(x)-s_{k-1}(x). \qquad (2.68)$$

За формулою

$$b_i^k=\varepsilon_k(x), i=\overline{1,n} \qquad (2.69)$$

знаходимо координати вектора $b_i^k$.

Записуємо рівняння $\Lambda\overline{a}_k=\overline{b}_k$ і знаходимо його розв'язок

$$\overline{a}_k=\Lambda^{-1}\overline{b}_k=(a_1^k,a_2^k,...,a_n^k). \qquad (2.70)$$

Будуємо функцію

$$s_k(x)=v_k(x)+\sum_{j=1}^n a_j^k K_j(x),\ j=\overline{1,n}. \qquad (2.71)$$

Тоді наближений розв'язок визначається із функціонального рівняння

$$\begin{aligned} y_k(x)-p(x)y_k(h(x))&=s_k(x),\ x\in(a;b),\\ y_k(x)&=0,\ x\notin(a;b). \end{aligned} \qquad (2.72)$$

Проілюструємо наведену обчислювальну схему методу на прикладі інтегро-функціонального рівняння.

***Приклад 2.1.***

Розглянемо інтегро-функціональне рівняння

$$y(x)-p(x)y(h(x))=f(x)+\int_0^4 K(x;t)y(t)dt,\, x\in[0;4],$$

$$y(x)=0,\ x\notin[0;4],$$

де

$$p(x)=\begin{cases} x-2, x\in[0;3], \\ 1, x\in[3;4]; \end{cases} \quad h(x)=\frac{x-1}{2},\ \ K(x;t)=\begin{cases} 0,5x, x\le t, \\ 0,5t, x\ge t; \end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases} -3,3x+0,1x^3,\ x\in[0;1], \\ -1,2-1,5x-0,6x^2+0,1x^3,\ x\in[1;3], \\ 6,9-7,8x+0,9x^2,\ x\in[3;4]. \end{cases}$$

Єдиним розв'язком такого рівняння є функція

$$y^*(x)=\begin{cases} 1,2x, x\in[0;3], \\ 3,6, x\in[3;4]. \end{cases}$$

Неважко переконатись у тому, що метод послідовних наближень до такого рівняння застосовувати не можна.

Нехай $n=4$ і

$$\varphi_m(x)=\begin{cases} 1,\ x\in[m-1;m), \\ 0,\ x\notin[m-1;m). \end{cases} \quad m=\overline{1,4}.$$

За схемою спочатку потрібно розв'язати функціональне рівняння (2.54), далі знаходимо функції

$$\eta_1(x)=\begin{cases} 1, x\in(0;1), \\ x-2, x\in(1;3), \\ 0,5x-2,5, x\in(3;4); \end{cases} \quad \eta_2(x)=\begin{cases} 1, x\in\left(1;2\right)\cup\left(3;4\right), \\ 0,\ x\in\left(0;1\right)\cup\left(2;3\right); \end{cases} \quad \eta_m(x)=\varphi_m(x),\, m=3,4,$$

а потім згідно з формулою (2.65) будуємо функції $K_j(x)$:

$$K_1(x)=\frac{1}{24}\begin{cases} 3x-6x^2, x\in(0;1), \\ -3-9(x-1)+6(x-1)^2-2(x-1)^3, x\in(1;2), \\ -8-3(x-2)-2(x-2)^3, x\in(2;3), \\ -13-9(x-3)+6(x-3)^2-(x-3)^3, x\in(3;4); \end{cases}$$

$$K_2(x)=\frac{1}{24}\begin{cases} 24x, x\in(0;1), \\ 24+24(x-1)-6(x-1)^2, x\in(1;2), \\ 42+12(x-2), x\in(2;3), \\ 54+12(x-3)-6(x-3)^2, x\in(3;4); \end{cases}$$

$$K_3(x)=\frac{1}{24}\begin{cases} 12x, x\in(0;1), \\ 12+12(x-1), x\in(1;2), \\ 24+12(x-2)-6(x-2)^2, x\in(2;3), \\ 30, x\in(3;4); \end{cases}$$

$$K_4(x)=\frac{1}{24}\begin{cases} 12x, x\in(0;1), \\ 12+12(x-1), x\in(1;2), \\ 24+12(x-2), x\in(2;3), \\ 36+12(x-3)-6(x-3)^2, x\in(3;4). \end{cases}$$

Далі обчислюємо елементи матриці $\Lambda$, використовуючи формулу (2.66), узявши $x_i=i-0,5, i=\overline{1,4}$.

У результаті отримаємо

$$\Lambda=\frac{1}{24}\begin{pmatrix} 24 & -12 & -6 & -6 \\ 6,25 & -10,5 & -18 & -18 \\ 9,75 & -48 & -4,5 & -30 \\ 16,125 & -58,5 & -30 & -16,5 \end{pmatrix}.$$

Знаходимо обернену матрицю $\Lambda^{-1}$

$$\Lambda^{-1}\approx\begin{pmatrix} 1,164833 & -0,114336 & -0,080615 & -0,152273 \\ 0,179913 & 0,646368 & -0,207860 & -0,392625 \\ 0,245643 & -0,798509 & 0,690452 & -0,473591 \\ 0,053864 & -0,951572 & -0,597192 & 0,649749 \end{pmatrix}.$$

Задаємо функцію $s_0(x)$, наприклад, $s_0(x)=0$ і з рівняння (2.72) знаходимо початкове наближення $y_0(x)=0$.

Тепер переходимо до обчислення першого наближення. За формулами (2.67), (2.68) маємо

$$\varepsilon_1(x)=v_1(x)=f(x)=\begin{cases} -3,3x+0,1x^3,\ x\in(0;1), \\ -3,2-2,4(x-1)-0,3(x-1)^2+0,1(x-1)^3,\ x\in(1;2), \\ -5,8-2,7(x-2)+0,1(x-2)^3,\ x\in(2;3), \\ -8,4-2,4(x-3)+0,9(x-3)^2,\ x\in(3;4). \end{cases}$$

За формулою (2.69) знаходимо координати вектора $\overline{b}_1$:

$$b_1^1=-1,6375;\ b_2^1=-4,4625;\ b_3^1=-7,1375;\ b_4^1=-9,375.$$

Складаємо рівняння $\Lambda\overline{a}_1=\overline{b}_1$, знаходимо його розв’язок

$$\overline{a}_1=\Lambda^{-1}\overline{b}_1=\{0,76576;1,985436;2,782921;2,329249\}$$

і будуємо функцію $s_1(x)=v_1(x)+\sum_{j=1}^{4}a_j^1K_j(x)=$

$$=\begin{cases} 1,262242x-0,15144x^2+0,1x^3,\ x\in(0;1), \\ 1,210802+1,859362(x-1)-0,644919(x-1)^2+0,04952(x-1)^3,\ x\in(1;2), \\ 2,474763+0,718084(x-2)-0,66823(x-2)^2+0,04952(x-2)^3,\ x\in(2;3), \\ 2,574136-0,469817(x-3)-0,027231(x-3)^2-0,02524(x-3)^3,\ x\in(3;4). \end{cases}$$

Розв’язавши функціональне рівняння

$$y_1(x)-p(x)y_1\left(\frac{x-1}{2}\right)=s_1(x), x\in[0;4],$$

$$y_1(x)=0,\ x\in[-0,5;0),$$

де коефіцієнт $p(x)$ – заданий, отримаємо перше наближення

$$y_1(x)=\begin{cases} 1,262242x-0,15144x^2+0,1x^3,\ x\in(0;1), \\ 1,210802+1,228241(x-1)+0,024062(x-1)^2-0,00084(x-1)^3+0,0125(x-1)^4,\ x\in(1;2), \\ 2,474763+1,321667(x-2)-0,06958(x-2)^2+0,060539(x-2)^3-0,00323(x-2)^4+0,000781(x-2)^5,\ x\in(2;3), \\ 3,593115+0,359821(x-3)-0,096814(x-3)^2-0,015094(x-3)^3-0,000442(x-3)^4+0,000024(x-3)^5,\ x\in(3;4). \end{cases}$$

Продовжуючи цей процес, отримаємо $y_k(x)=y^*(x)+\Delta_k(x)$, де

$$\Delta_2(x)=10^{-3}\begin{cases} -1,08x+3,96x^2-7,01x^3+6,42x^4-2,50x^5, x\in(0;1), \\ -0,21-0,48(x-1)+3,84(x-1)^2+0,35(x-1)^3-3,05(x-1)^4+0,54(x-1)^5-0,29(x-1)^6, x\in(1;2), \\ 0,70-2,99(x-2)+15,13(x-2)^2-12,21(x-2)^3+2,75(x-2)^4-1,18(x-2)^5-0,29(x-2)^6, x\in(2;3), \\ 1,91-5,53(x-3)+19,98(x-3)^2-13,45(x-3)^3+0,94(x-1)^4+0,67(x-1)^5-0,01(x-1)^6, x\in(3;4); \end{cases}$$

$$\Delta_3(x) = 10^{-4}\begin{cases} -0,6x^2+0,9x^3-1,7x^4+1,8x^5-1,1x^6+0,3x^7,\ x\in(0;1), \\ -0,4-0,7(x-1)+1,9(x-1)^2-0,1(x-1)^3-1,4(x-1)^4-0,3(x-1)^5+0,6(x-1)^6,\ x\in(1;2), \\ -0,4-0,8(x-2)+1,6(x-2)^2+2,2(x-2)^3-6,3(x-2)^4+3,1(x-2)^5-0,4(x-2)^6+0,1(x-2)^7,\ x\in(2;3), \\ -0,9-2(x-3)+3,5(x-3)^2+4,5(x-3)^3-8,4(x-1)^4+3,4(x-1)^5-0,2(x-1)^6-0,1(x-3)^7,\ x\in(3;4); \end{cases}$$

Наскільки відрізняється наближення від точного розв'язку рівняння можна побачити у Таблиці 2.1.

Таблиця 2.1

| $x$ | $\Delta_0(x)$ | $\Delta_1(x)$ | $\Delta_2(x)$ | $\Delta_3(x)$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0,5 | 0,6 | 0,005761 | -0,00011 | -0,00001 |
| 1 | 1,2 | 0,010802 | -0,00021 | -0,00004 |
| 1,5 | 1,8 | 0,031615 | 0,00038 | -0,00004 |
| 2 | 2,4 | 0,074765 | 0,00070 | -0,00004 |
| 2,5 | 3 | 0,125591 | 0,00158 | -0,00004 |
| 3 | 3,6 | 0,184940 | 0,00191 | -0,00009 |
| 3,5 | 3,6 | 0,146907 | 0,00254 | -0,00008 |
| 4 | 3,6 | 0,240610 | 0,00451 | -0,00002 |

## 2.7. Нестаціонарний колокаційно-ітеративний метод

Нехай, як і раніше, $\{\varphi_i(x)\}$ – задана ортогональна та повна в $L_2(a;b)$ система, а $\{P_k\}$ – послідовність проектуючих операторів, які визначаються таким способом:

$$(P_k v)(x) = \int_a^b P_k(x;t)v(t)dt,\ \ \forall v(x)\in L_2(a;b), \tag{2.73}$$

у якій

$$P_k(x;t) = \sum_{i=1}^{n_k}\mu_i\varphi_i(x)\varphi_i(t),\ \ \mu_i^{-1} = \int_a^b \varphi_i^2(x)dx, \tag{2.74}$$

де $k=1,2,3,...,\ n_k>n_0=n\geq 1,\ n_{k_1}\leq n_{k_2}$ при $k_1<k_2$.

Очевидно, що проектуючі оператори (2.73) ортогонально проектують простір $L_2\left(a;b\right)$ на його підпростір $L_2^{\,k}\left(a;b\right)$, причому $L_2^{\,k-1}\left(a;b\right)\subset L_2^{\,k}\left(a;b\right),\ k=1,2,3,...$ .

Суть запропонованого вище методу стосовно рівняння (2.1) полягає в такому. Нехай, виходячи з початкового наближення $y_0(x)\in L_2(a;b)$ і функції $s_0(x)$ такої, що

$$y_0(x)-p(x)y_0(h(x))=s_0(x),x\in(a;b), \tag{2.75}$$

$$y_0(x)=0,x\notin(a;b),$$

ми знайшли наближення $y_{k-1}(x)$ і функцію $s_{k-1}(x)$.

Побудуємо функцію

$$\tilde{s}_{k-1}(x)=\int_a^b P_{k-1}(x;t)s_{k-1}(t)dt,$$

де $P_{k-1}(x;t)$ має вигляд (2.74). Розв'яжемо рівняння

$$\begin{gathered}\tilde{y}_{k-1}(x)-p(x)\tilde{y}_{k-1}(h(x))=\tilde{s}_{k-1}(x),x\in(a;b).\\ \tilde{y}_{k-1}(x)=0,x\notin(a;b).\end{gathered} \tag{2.76}$$

Наближення $y_k\left(x\right)$ визначаємо як розв'язок рівняння

$$\begin{gathered}y_k(x)-p(x)y_k(h(x))=f\left(x\right)+\int_a^b K\left(x;t\right)\tilde{z}_k\left(t\right)dt,x\in\left(a;b\right),\\ y_k(x)=0,x\notin(a;b),\end{gathered} \tag{2.77}$$

у якому

$$\tilde{z}_k\left(x\right)=\tilde{y}_{k-1}(x)+w_k\left(x\right),\ \ w_k\left(x\right)=\sum_{j=1}^n a_j^k\eta_j\left(x\right),x\notin(a;b), \tag{2.78}$$

невідомі параметри $a_j^k$ знаходимо з умови

$$\tilde{r}_k(x_i)=0,i=\overline{1,n}, \tag{2.79}$$

де

$$\tilde{r}_k(x) = f(x) + \int_a^b K(x;t)\,\tilde{z}_k(t)\,dt - \tilde{z}_k(x) + p(x)\tilde{z}_k(h(x)), \qquad (2.80)$$

система функцій $\{\eta_i(x)\}$ у формулах (2.78), (2.79) знаходиться з рівнянь, які в нашому випадку мають вигляд

$$\begin{gathered} \eta_i(x) - p(x)\eta_i(h(x)) = \varphi_i(x), x \in (a;b), \\ \eta_i(x) = 0, x \notin (a;b); \end{gathered} \qquad (2.57)$$

де система функцій $\{\varphi_i(x)\}$, як вже зазначалось, ортогональна та повна в просторі $L_2(a;b)$.

Введемо позначення

$$\varepsilon_k(x) = f(x) + \int_a^b K(x;t)\,\tilde{y}_k(t)\,dt - \tilde{y}_{k-1}(x) + p(x)\tilde{y}_{k-1}(h(x))$$

і, підставляючи функцію $\tilde{z}_k(x)$, яка визначається формулою (2.78), у вираз (2.80), а потім отриманий результат – в умову (2.79), для знаходження параметрів $a_j^k$ отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\sum_{j=1}^{n} \beta_{ij} a_j^k = b_i^k, i = \overline{1,n}, \qquad (2.82)$$

де $\beta_{ij}$ обчислюється за формулою

$$\beta_{ij} = \varphi_j(x) - K_j(x), i, j = \overline{1,n} \qquad (2.83)$$

та

$$b_i^k = \varepsilon_k(x), i = \overline{1,n}. \qquad (2.84)$$

Як і раніше, систему рівнянь (2.82) будемо записувати у векторному вигляді $\Lambda a_k = b_k$.

Зауважимо, що за наближення до шуканого розв’язку можна брати будь-яку з функцій $y_k(x), \tilde{y}_k(x), \tilde{z}_k(x)$.

Слід звернути увагу на той факт, що на основі аналізу формул (2.75)-(2.80) при $s_0(x) = 0$ наближення $\tilde{z}_1(x)$ співпадає з наближенням, побудованим за допомогою колокаційного методу, наближення $y_1(x)$ – з наближенням, побудованим за допомогою покращеного колокаційного методу, а при $w_k(x)=0, k=1,2,3,...$ наближення $y_k(x)$ знаходиться за допомогою нестаціонарного методу послідовних наближень [90].

Алгоритм (2.75)-(2.80) можна звести до нестаціонарного колокаційно-ітеративного методу розв'язування для інтегрального рівняння (2.9).

Дійсно, формули (2.75), (2.77), (2.80) можна записати у вигляді

$$\left(S\tilde{y}_{k-1}\right)(x)=\left(P_{k-1}S_{k-1}\right)(x),$$
$$\left(Sy_k\right)(x)=f(x)+\left(K\tilde{y}_{k-1}\right)(x)+\left(Kw_k\right)(x),$$
$$\tilde{r}_k=f(x)+\left(K\tilde{y}_{k-1}\right)(x)+\left(Kw_k\right)(x)-\left(S\tilde{y}_{k-1}\right)(x)-\left(Sw_k\right)(x).$$

За допомогою цих формул умова (2.79) легко перепишеться у вигляді

$$\left(Sy_k-S\tilde{y}_{k-1}-Sw_k\right)(x_i)=0, i=\overline{1,n}.$$

Тепер підставимо

$$u_k(x)=s_k(x)=\left(Sy_k\right)(x), \alpha_k(x)=\left(Sw_k\right)(x), \tag{2.85}$$

звідки випливає

$$y_k(x)=\left(S^{-1}u_k\right)(x), w_k(x)=\left(S^{-1}\alpha_k\right)(x). \tag{2.86}$$

На основі формул (2.85), (2.86) та співвідношення (2.81) отримаємо

$$u_k(x)=f(x)+\left(TP_{k-1}u_{k-1}\right)(x)+\left(T\alpha_k\right)(x), \tag{2.87}$$

$$\alpha_k(x)=\sum_{j=1}^{n}a_j^k\varphi_j(x), k=1,2,3,..., \tag{2.88}$$

$$u_k(x)-\left(P_{k-1}u_{k-1}\right)(x_i)-\alpha_k(x_i)=0, i=\overline{1,n}. \tag{2.89}$$

Отже, співвідношення (2.87)-(2.89) – це нестаціонарний колокаційно-ітеративний метод розв'язування інтегрального рівняння (2.9). У працях [76, 98, 118] встановлені різні достатні умови збіжності й оцінки похибок наближень цього методу для інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду. Тому можна зробити висновок, що справедливим буде таке твердження.

**Теорема 2.3**. Якщо одиниця не є точкою спектра інтегрального оператора $T$ при $k \to \infty$ і система функцій $\{\varphi_i(x)\}$ повна в просторі $L_2^k(a;b)$, то існує такий номер $n$, при якому нестаціонарний колокаційно-ітеративний метод (2.75)-(2.80) збігається, причому швидкість збіжності збільшується з ростом $n$.

## 2.8. Один тип інтегро-функціональних рівнянь

У просторі $L_2(a;b)$ розглянемо інтегро-функціональне рівняння виду

$$y(x) = f(x) + \int_a^b K(x;t)y(t)dt + \int_a^b H(x;t)y(h(t))dt, x \in [a;b] \quad (2.90)$$

та умову

$$y(x) = \psi(x), \ \ x \notin [a;b], \quad (2.91)$$

де $f(x), \psi(x)$ – задані відповідно на $[a;b]$ та за його межами функції, $y(x)$ – шукана функція.

Слід зауважити, що до рівняння (2.90) зводиться крайова задача для диференціального рівняння з відхиленням аргументу із запізненням, причому у випадку, коли $h(x) = x - \Delta$, запізнення аргументу $\Delta$ – стале.

Вважатимемо, що функції $K(x;t)$, $H(x;t)$ у квадраті $[a;b]^2$ задовольняють умови

$$\int_a^b\int_a^b K^2(x;t)dxdt = K^2 < +\infty, \quad (2.92)$$

$$\int_a^b\int_a^b H^2(x;t)dxdt = H^2 < +\infty, \quad (2.93)$$

а функція $h(x)$ є неперервною разом із своєю похідною на $[a;b]$ і задовольняє умови

$$x - h(x) \geq \Delta > 0, \quad h'(x) \geq l > 0. \quad (2.94)$$

Тоді для функції $s=h(x)$ існуватиме на проміжку $\lfloor h^{-1}(a);h^{-1}(b)\rfloor$ обернена функція $x=h^{-1}(s)$, яка також буде диференційовною. З огляду на це, останній інтеграл правої частини рівняння (2.90) перепишемо так:

$$\int_a^b H(x;t)y(h(t))dt=\int_a^{h^{-1}(a)} H(x;t)y(\psi(t))dt+\int_{h^{-1}(a)}^b H(x;t)y(h(t))dt=$$

$$=\tilde{g}(x)+\int_{h^{-1}(a)}^b H(x;t)y(h(t))dt.$$

У цьому інтегралі здійснимо заміну $h(t)=s$, тоді $t=h^{-1}(s)$, і $dt=\left(h'\left(h^{-1}(s)\right)\right)^{-1}ds$. Новими межами інтегрування будуть числа: $t_1=h^{-1}(a)$, $s_1=a$, $t_2=b$, $s_2=h(b)$. Тоді інтеграл матиме вигляд

$$\int_{h^{-1}(a)}^b H(x;t)y(h(t))dt=\int_a^{h(b)}\frac{H\left(x;h^{-1}(s)\right)}{h'\left(h^{-1}(s)\right)}y(s)ds=\int_a^b\tilde{H}(x;s)y(s)ds,$$

де ядро $\tilde{H}(x;s)$, зрозуміло, має вигляд

$$\tilde{H}(x;s)=\begin{cases}\dfrac{H\left(x;h^{-1}(s)\right)}{h'\left(h^{-1}(s)\right)}, & s\in[a;h(b)],\\ 0, & s\in[h(b);b],x\in[a;b].\end{cases}\tag{2.95}$$

З урахуванням таких міркувань та умови (2.91) рівняння (2.90) запишемо так:

$$y(x)=f(x)+\int_a^b K(x;t)y(t)dt+\tilde{g}(x)+\int_a^b\tilde{H}(x;s)y(s)ds$$

або

$$y(x)=g(x)+\int_a^b K(x;t)y(t)dt+\int_a^b\tilde{H}(x;t)y(t)dt,\tag{2.96}$$

де $g(x)=f(x)+\tilde{g}(x)$.

Зазначимо, що оператор $\tilde{H}$, який визначається рівністю

$$\left(\tilde{H}v\right)(x)=\int_a^b \tilde{H}(x;t)v(t)dt,\ \ \forall v(x)\in L_2(a;b), \tag{2.97}$$

з виконанням умов (2.93), (2.94), як і оператор $K$

$$(Kv)(x)=\int_a^b K(x;t)v(t)dt,\ \forall v(x)\in L_2(a;b)$$

буде Фредгольмів. З урахуванням цього рівняння (2.96) можна розглядати як інтегральне рівняння Фредгольма 2-го роду

$$y(x)=g(x)+\int_a^b T(x;t)y(t)dt, \tag{2.98}$$

$$T(x;t)=K(x;t)+\tilde{H}(x;t),\ \ (x;t)\in[a;b]^2$$

з цілком неперервним інтегральним оператором $T$

$$(Tv)(x)=\int_a^b T(x;t)v(t)dt,\ \ v(x)\in L_2(a;b). \tag{2.99}$$

Отже, показано, що рівняння (2.90) з виконанням умови (2.91) та умов (2.92)-(2.94) можна звести до інтегрального рівняння (2.98) з цілком неперервним оператором (2.99) і, зрозуміло, що коли 1 не є точкою спектра цього оператора, то задача (2.90), (2.91) матиме єдиний розв’язок.

Ідея колокаційно-ітеративного методу розв’язання рівняння (2.90) з умовою (2.91) полягає в тому, що, виходячи з деякого початкового наближення $y_0(x)$, наступні наближення $y_k(x)$ знаходимо за формулами

$$y_k(x)=f(x)+\int_a^b K(x;t)z_k(t)dt+\int_a^b H(x;t)z_k(h(t))dt, x\in[a;b], \tag{2.100}$$

$$y_k(x)=\psi(x), x\notin[a;b], \tag{2.101}$$

$$z_k(x)=y_{k-1}(x)+w_k(x), \tag{2.102}$$

$$w_k(x)=\sum_{j=1}^{n} a_j^k\varphi_j(x),\ j=\overline{1,n}, \tag{2.103}$$

де $\left\{\varphi_j(x)\right\}_{j=1}^{n}$ – задана на $[a;b]$ система лінійно-незалежних функцій. Невідомі коефіцієнти $a_j^k$ знаходимо з умови

$$y_k(x)-y_{k-1}(x_i)=0,\ j=\overline{1,n},$$

де $x_i \in [a;b]$ – вузли колокації.

Ураховуючи викладені вище міркування, можна показати, що описаний колокаційно-ітеративний метод буде еквівалентним колокаційно-ітеративному методу для інтегрального рівняння Фредгольма другого роду (2.98). Зокрема, якщо 1 не є точкою спектра оператора $T$, то існуватиме такий номер $n$, при якому метод (2.100)-(2.103) буде збіжним.

# РОЗДІЛ 3

# НЕЛІНІЙНІ ІНТЕГРО-ФУНКЦІОНАЛЬНІ РІВНЯННЯ

## 3.1. Інтегро-функціональні рівняння з малою нелінійністю

Розглянемо у просторі $L_2(a;b)$ інтегро-функціональне рівняння з малою нелінійністю вигляду

$$y(x)-p(x)y(h(x))=f(x)+\int_a^b K(x;t)y(t)dt+$$

$$+\varepsilon\int_a^b G(x;t)\Phi(t;y(t))dt,\ x\in(a;b); \tag{3.1}$$

$$y(x)=0,\ x\notin(a;b),$$

де $\varepsilon$ – малий додатний параметр, $f(x)$ – відома, а $y(x)$ – шукана функції з простору $L_2(a;b)$.

Припустимо, що:

1) $\left|p(x)\right|\le\bar{p}<\infty;$ (3.2)

2) ядра $K(x;t)$, $G(x;t)$, визначені у квадраті $(a;b)^2$, задовольняють умови

$$\int_a^b\int_a^b K^2(x;t)dxdt=B^2<+\infty; \tag{3.3}$$

$$\int_a^b\int_a^b G^2(x;t)dxdt=G^2<+\infty; \tag{3.4}$$

3) функція $\Phi(t;y)$ в області $D=\{a\le t\le b,\ -\infty<y<\infty\}$ вимірна по $t$ при всіх $y$, неперервна по $y$ при всіх $t$ (умова Каратеодорі) і задовольняє умову Ліпшиця

$$\left|\Phi(t;y)-\Phi(t;\bar{y})\right|\le L\left|y-\bar{y}\right| \tag{3.5}$$

та умову

$$\left|\Phi\left(t;y\right)\right|\le\alpha(t)+\beta\left|y\right|,$$

де $L,\beta$ – деякі додатні сталі, $\alpha(t)\in L_2(a;b)$.

При дотриманні умов (3.2)-(3.5), як відомо [67], інтегральні оператори

$$\left(Kv\right)\left(x\right)=\int_a^b K\left(x;t\right)v\left(t\right)dt,$$

$$\left(\Phi v\right)\left(x\right)=\varepsilon\int_a^b G\left(x;t\right)\Phi\left(\mathrm{t};v\left(t\right)\right)dt$$

відображають простір $L_2\left(a;b\right)$ в себе і є цілком неперервними [90].

Обґрунтування наближених методів розв'язання рівняння (3.1) полягає в тому, що це рівняння шляхом заміни

$$u\left(x\right)=\left(Sy\right)\left(x\right)=\begin{cases} y\left(x\right),\ x\in\left\lfloor a;h^{-1}\left(a\right)\right\rfloor, \\ y\left(x\right)-p\left(x\right)y\left(h\left(x\right)\right),\ x\in\left[h^{-1}\left(a\right);b\right], \end{cases} \tag{3.6}$$

зводиться до інтегрального рівняння з малою нелінійністю вигляду

$$u\left(x\right)=f\left(x\right)+\int_a^b T\left(x;t\right)u\left(t\right)dt+\varepsilon\int_a^b G\left(x;t\right)\mathrm{F}\left(t;u\left(t\right)\right)dt,\ x\in\left(a;b\right). \tag{3.7}$$

Зазначимо, що $\mathrm{F}\left(t;u\left(t\right)\right)=\Phi\left(\mathrm{t};\left(S^{-1}u\right)\left(t\right)\right)$.

Рівняння (3.1) при виконанні умов (3.2)-(3.4) можна звести до інтегрального рівняння з малою нелінійністю. Розглядатимемо оператори $S,\Phi$ такі, що

$$\left(Sv\right)\left(x\right)=\begin{cases} v\left(x\right),\ x\in\left[a;c\right],c=h^{-1}\left(a\right), \\ v\left(x\right)-p\left(x\right)v\left(h\left(x\right)\right),\ x\in\left[c;b\right], \end{cases}$$

$$\left(\Phi v\right)\left(x\right)=\varepsilon\int_a^b G\left(x;t\right)\Phi(\mathrm{t};v\left(t\right))dt,$$

де $v(x)$ – довільна функція з $L_2(a;b)$.

Зауважимо, що оператор *S*, як і оператор *K*, діє з $L_2(a;b)$ в $L_2(a;b)$. Крім того, оператор *S* є лінійним, обмеженим та оборотним. Обернений до нього оператор $S^{-1}$ має вигляд

$$\left(S^{-1}v\right)(x)=\begin{cases} v(x),\ x\in[a;c],\ c=h^{-1}(a), \\ v(x)+\sum\limits_{i=1}^{S} v\left(h^{i}(x)\right)\prod\limits_{k=0}^{i-1} p\left(h^{k}(x)\right),\ x\in\Delta_s,\ s=\overline{1,m}, \end{cases} \tag{3.8}$$

$$\Delta_S=\left(c_{s-1},c_s\right),\ c_0=a,\ c_s=h^{-1}\left(c_{s-1}\right),\ c_m=b,$$

$$h^{k}(x)=h\left(h^{k-1}(x)\right),\ s=\overline{1,m}.$$

Зазначимо, що (3.8) – це розв’язок функціонального рівняння

$$y(x)-p(x)y\left(h(x)\right)=u(x),\ x\in[a;b],$$
$$y(x)=0,\ x\notin[a;b]$$

($u(x)$ – відома, $y(x)$ – шукана функції) при застосуванні методу кроків, причому умова (3.2) гарантує, що кількість кроків $m$ скінченна і $m\le\dfrac{b-a}{\sigma}$.

Оператор $S^{-1}$, як і оператор $S$, є лінійним і обмеженим. Тому можна розглядати (3.1) як операторне рівняння

$$(Sy)(x)=f(x)+(Ky)(x)+(\Phi y)(x), \tag{3.9}$$

де $f(x)$ – задана, $y(x)$ – шукана функції з $L_2(a;b)$.

Нехай $(Sy)(x)=u(x)$, тоді $y(x)=(S^{-1}u)(x)$ і можна від рівняння (3.9) перейти до рівняння

$$u(x)=f(x)+(Tu)(x)+\varepsilon(Fu)(x).$$

Оператор $T=KS^{-1}$ є Фредгольмовим, як суперпозиція Фредгольмового та лінійного обмежного операторів. Тобто ми від інтегро-функціонального рівняння з малою нелінійністю (3.1) приходимо до інтегрального рівняння з малою нелінійністю вигляду (3.7) з цілком неперервним інтегральним оператором $T$, ядро якого

$$T(x;t)=\begin{cases} K(x;t)+\sum\limits_{i=1}^{m-s} K\left[x;\left(h^{-1}\right)^{i}(t)\right]\prod\limits_{k=1}^{i} p\left[(h^{-1})^{k}(t)\right],\ t\in\Delta s, \\ K(x;t),\ t\in\left(c_{m-1};b\right),\ s=\overline{1,m-1}, x\in(a;b), \end{cases}$$

де $\left(h^{-1}\right)^{k}(t)=h^{-1}\left\lfloor\left(h^{-1}\right)^{k-1}(t)\right\rfloor$.

### 3.2. Колокаційно-ітеративний метод розв'язування інтегро-функціональних рівнянь з малою нелінійністю

Застосуємо колокаційно-ітеративний метод до рівняння (3.1). Наближений розв'язок $y_k(x)$ визначаємо за формулами

$$y_k(x) - p(x)y_k(h(x)) = \\ = f(x) + \int_a^b K(x;t)z_k(t)dt + \varepsilon\int_a^b G(x;t)\Phi(\mathrm{t}; y_{k-1}(t))dt,\ x \in [a;b], \tag{3.10}$$

$$y_k(x) = 0,\ x \notin [a;b],$$

у якому

$$z_k(x) = y_{k-1}(x) + w_k(x), \tag{3.11}$$

$$w_k(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j^k \eta_j(x),$$

$$\eta_j(x) = \left(S^{-1}\varphi_j\right)(x).$$

Невідомі параметри $a_j^k = a_j^k(n)$ знаходимо з умови

$$r_k(x_i) = 0,$$

де $x_i \in [a;b], i = \overline{1,n}$ – вузли колокації та

$$r_k(x) = f(x) + \int_a^b K(x;t)z_k(t)dt - y_k(x) + p(x)y_k(h(x)) + \\ +\varepsilon\int_a^b G(x;t)\Phi(\mathrm{t}; y_{k-1}(t))dt,\ x \in [a;b]. \tag{3.12}$$

За початкове наближення братимемо розв'язок такого функціонального рівняння

$$y_0(x) - p(x)y_0(h(x)) = s_0(x),\ x \in [a;b],$$

$$y_0(x) = 0,\ x \notin [a;b],$$

у якому $s_0(x)$ – довільна фіксована функція з $L_2(a;b)$, а саме $s_0(x) = 0$ або $s_0(x) = f(x)$.

Система функцій $\{\eta_j(x)\}$ шукається з рівняння

$$\eta_j(x) - p(x)\eta_j(h(x)) = \varphi_i(x),\ x \in [a;b],$$
$$\eta_j(x) = 0,\ x \notin [a;b],\ i = \overline{1,n},$$

де система функцій $\{\varphi_i(x)\} \in L_2(a;b)$ задана і лінійно-незалежна.

Значення функції $\{\eta_j(x)\},\ j = \overline{1,m}$ у точках $c_s = h^{-1}(c_{s-1})$ будемо брати середнє арифметичне односторонніх границь, якщо вони існують, а в точках $c_0 = a$, $c_m = b$ – односторонні границі справа та зліва відповідно.

Ввівши позначення

$$\mathcal{E}_k(x) = f(x) + \int_a^b K(x;t)\,y_{k-1}(t)\,dt - y_{k-1}(x) + p(x)\,y_{k-1}(h(x)) +$$
$$+\varepsilon\int_a^b G(x;t)\,\Phi(\mathrm{t}; y_{k-1}(t))\,dt,\ x \in [a;b]$$

і підставляючи функцію $z_k(x)$, визначену формулою (3.11), у вираз (3.12) для знаходження параметрів $a_j^k$ одержимо систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\sum_{j=1}^{n} \beta_{ij} a_j^k = b_i^k,\ i = \overline{1,n}, \tag{3.13}$$

у якій

$$\beta_{ij} = \varphi_j(x_i) - K_j(x_i), b_i^k = \mathcal{E}_k(x_i),$$

$$K_j(x) = \int_a^b K(x;t)\,\eta_j(t)\,dt,\ j = \overline{1,n},$$

$$\eta_j(x) = (S^{-1}\varphi_j)(x),$$

$$b_i^k = \mathcal{E}_k(x_i).$$

Систему рівнянь (3.13) можна записати у вигляді $\Lambda a_k = b_k$, де $b_k$, $a_k$ – записані у векторному вигляді, тобто $a_k = \{a_1^k, a_2^k, ..., a_n^k,\}, b_k = \{b_1^k, b_2^k, ..., b_n^k,\}$, та $\Lambda$ – матриця, складена з елементів $\beta_{ij}$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \dots & \beta_{1n} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \dots & \beta_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_{n1} & \beta_{n2} & \dots & \beta_{nn} \end{pmatrix}.$$

Зауважимо, що за наближення до шуканого розв'язку можна взяти як функцію $y_k(x)$, так і функцію $z_k(x)$. Слід звернути увагу на той факт, що на основі аналізу формул (3.10)-(3.12) при $w_k(x)=0,\ k=1,2,3,\dots$ наближення $y_k(x)$ знаходиться за допомогою методу послідовних наближень.

Алгоритм (3.10)-(3.12) зводить розглянуту задачу до колокаційно-ітеративного методу розв'язання інтегрального рівняння з малою нелінійністю та з інтегральним оператором Фредгольма.

## 3.3. Достатні умови збіжності методу для інтегро-функціональних рівнянь з малою нелінійністю

Алгоритм (3.10)-(3.12) можна звести до колокаційно-ітеративного методу розв'язання інтегрального рівняння з малою нелінійністю

$$u(x) = f(x) + \int_a^b T(x;t)u(t)dt + \varepsilon\int_a^b G(x;t)F(t;u(t))dt,\ x\in[a,b], \tag{3.14}$$

яке заміною

$$u(x) = (Sy)(x) = \begin{cases} y(x),\ x\in[a;c],\ c=h^{-1}(a), \\ y(x)-p(x)y(h(x)),\ x\in[c;b] \end{cases} \tag{3.15}$$

зводиться до рівняння (3.1). Одразу зауважимо, що

$$F(t;u(t)) = \Phi(t;(S^{-1}u)(t)),$$

де оператор $S^{-1}$ має вигляд (3.8), а ядро інтегрального оператора

$$(Tv)(x) = (KS^{-1})(x) = \int_a^b T(x;t)v(t)dt, \tag{3.16}$$

який є цілком неперервним і відображає $L_2(a;b)$ у себе, має вигляд

$$T(x,t)=\begin{cases} K(x,t),\ x\in[a,h^{-1}(a)), \\ K(x,t)+\sum\limits_{i=1}^{s}K(h^{i}(x))\prod\limits_{k=0}^{i-1}p(h^{k}(x)),\ x\in\Delta_s,\ t\in[a,b]. \end{cases} \tag{3.17}$$

Нагадаємо, що суть модифікованого колокаційно-ітеративного методу стосовно рівняння (3.14) полягає в тому, що. виходячи з початкового наближення $u_0(x)\in L_2(a;b)$, подальші наближення будуються згідно з формулами

$$u_k(x)=f(x)+\int_a^b T(x;t)\left(u_{k-1}(t)+w_k(t)\right)dt+\varepsilon\int_a^b G(x;t)F(t;u_{k-1}(t))dt,\ x\in\left[a;b\right], \tag{3.18}$$

$$w_k(x)=\sum_{j=1}^{n}a_j^k\varphi_j(x), \tag{3.19}$$

а невідомі параметри $a_j^k$ шукаються з умови

$$u_k(x_i)-u_{k-1}(x_i)-w_k(x_i)=0,\ i=\overline{1,n}. \tag{3.20}$$

Отже, якщо $\forall f(x)\in L_2(a;b)$ існує єдиний розв’язок $u^*(x)$ рівняння (3.14) і наближення $u_k(x)$, побудоване методом (3.18)-(3.20), збігається до цього розв’язку, то також існує єдиний розв’язок $y^*(x)=(S^{-1}u^*)(x)$ рівняння (3.1) і наближення $y_k(x)=(S^{-1}u_k)(x),\ k=1,2,3,...,$ побудоване методом (3.10)-(3.12), збігається до розв’язку $y^*(x)$.

Для простоти запису та подальших досліджень рівняння (3.14) розглядатимемо, як операторне рівняння

$$u=f+Tu+Fu, \tag{3.21}$$

де оператор $T$ має вигляд (3.16), а $F$ – оператор, який знаходиться таким способом:

$$(Fu)(x)=\varepsilon\int_a^b G(x;t)F(t;u(t))dt. \tag{3.22}$$

Зауважимо, якщо виконуються умови (3.2), (3.4), (3.5) та оператор $F$ задовольняє умову Ліпшиця з деякою сталою $\mu$, то, дійсно, $\forall u, v \in L_2(a;b)$ отримаємо

$$\|Fu - Fv\| = \left\| \varepsilon \int_a^b G(x;t)\big(F(t;u(t)) - F(t;v(t))\big)dt \right\| \le$$
$$\le \varepsilon \cdot G \cdot \|F(t;u(t)) - F(t;v(t))\| =$$
$$= \varepsilon \cdot G \cdot \left( \int_a^b \Big(\Phi(t;(S^{-1}u)(t)) - \Phi(t;(S^{-1}v)(t))\Big)^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \le \tag{3.23}$$
$$\le \varepsilon \cdot G \cdot \left( \int_a^b \Big( l\left|(S^{-1}u)(t) - (S^{-1}v)(t)\right|\Big)^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} = \varepsilon \cdot G \cdot l \cdot \|S^{-1}u - S^{-1}v\| \le$$
$$\le \varepsilon \cdot G \cdot l \cdot \|S^{-1}\| \cdot \|u - v\| = \mu \cdot \|u - v\|.$$
$$\|S\| = \sup_{\substack{v \in L_2, \\ v \ne 0}} \frac{\|(Sv)(x)\|}{\|v(x)\|} \le 1 + \sqrt{\frac{p^2(x)}{h'(x)}} \le 1 + \frac{\overline{p}}{\sqrt{l}} < \infty.$$

Нехай, як і раніше, $\{\varphi_i(x)\}, i = \overline{1,n},$ – задана система лінійно-незалежних (для простоти пояснення – ортогональних) функцій з $L_2(a;b)$. Розглянемо проектуючий оператор $P_n$ такий, що

$$(P_n v)(x) = \int_a^b P_n(x;t)v(t)dt, \; v(x) \in L_2(a;b),$$

де

$$P_n(x;t) = \sum_{j=1}^{n} \gamma_j \varphi_j(x)\varphi_j(t), \; \gamma_j^{-1} = \int_a^b \varphi_j^2(x)dx, \tag{3.24}$$

тоді алгоритм (3.18)-(3.20) матиме вигляд

$$u_k = f + T(u_{k-1} + w_k) + Fu_{k-1}, \tag{3.25}$$
$$w_k = P_n(u_k - u_{k-1}). \tag{3.26}$$

Якщо підставити значення $u_k$, що визначається формулою (3.25), у вираз (3.26) і здійснити прості перетворення, то для визначення елементів $w_k$ отримаємо рівняння

$$w_k - P_n T w_k = P_n \varepsilon_k,\ k = 1,2,3,..., \tag{3.27}$$

у якому

$$\varepsilon_k = Tu_{k-1} + Fu_{k-1} - u_{k-1}. \tag{3.28}$$

Припустимо, що рівняння

$$v - P_n T v = P_n g, \quad \forall g \in L_2(a;b) \tag{3.29}$$

має єдиний розв’язок

$$v = R_n g \tag{3.30}$$

і введемо оператори переходу

$$M_n = T(I + R_n T - R_n),\ L_n = Q_n M_n, \tag{3.31}$$

де $I$ – тотожний оператор, а $Q_n = I - P_n$. Зауважимо, що виконуються такі співвідношення:

$$M_n Q_n = M_n,\ L_n Q_n = L_n. \tag{3.32}$$

За припущенням рівняння (3.29) розв’язується однозначно, враховуючи формулу (3.30) можемо зробити висновок, що елемент

$$w_k = R_n \varepsilon_k \tag{3.33}$$

єдиний розв’язок рівняння (3.27). З огляду на формули (3.25), (3.33), (3.28) і формули, отриманої з останньої заміни індексу $k$ на $k-1$, маємо

$$\begin{aligned} u_k - u_{k-1} &= T(u_{k-1} - u_{k-2}) + T(w_k - w_{k-1}) + (Fu_{k-1} - Fu_{k-2}) = \\ &= (Fu_{k-1} - Fu_{k-2}) + T(u_{k-1} - u_{k-2}) + \\ &+ TR_n\big((Fu_{k-1} - Fu_{k-2}) + T(u_{k-1} - u_{k-2}) - (u_{k-1} - u_{k-2})\big) = \\ &= (I + TR_n)(Fu_{k-1} - Fu_{k-2}) + T(I + TR_n - R_n)(u_{k-1} - u_{k-2}), \end{aligned} \tag{3.34}$$

або з урахуванням (3.31) отримаємо

$$u_k - u_{k-1} = D_n(Fu_{k-1} - Fu_{k-2}) + M_n(u_{k-1} - u_{k-2}), \tag{3.35}$$

де

$$D_n = I + TR_n. \tag{3.36}$$

Співвідношення (3.35) виконується при всіх $k = 1,2,3,...$, тому отримаємо такий вираз:

$$u_{k-j}-u_{k-j-1}=D_n(Fu_{k-j-1}-Fu_{k-j-2})+M_n(u_{k-j-1}-u_{k-j-2}),$$
$$k=1,2,3,\ldots,\ j=\overline{0,k-2}. \tag{3.37}$$

Тоді з урахуванням формули (3.32) отримаємо

$$\begin{gathered}
u_k-u_{k-1}=D_n(Fu_{k-1}-Fu_{k-2})+M_n(u_{k-1}-u_{k-2})= \\
=D_n(Fu_{k-1}-Fu_{k-2})+M_nD_n(Fu_{k-2}-Fu_{k-3})+M_nL_n(u_{k-2}-u_{k-3})= \\
=D_n(Fu_{k-1}-Fu_{k-2})+M_nD_n(Fu_{k-2}-Fu_{k-3})+ \\
+M_nL_nD_n(Fu_{k-3}-Fu_{k-4})+M_nL_n^2(u_{k-3}-u_{k-4})= \\
=\ldots=D_n(Fu_{k-1}-Fu_{k-2})+M_nD_n(Fu_{k-2}-Fu_{k-3})+ \\
+M_nL_nD_n(Fu_{k-3}-Fu_{k-4})+M_nL_n^2D_n(Fu_{k-4}-Fu_{k-5})+\ldots+ \\
+M_nL_n^{s-2}D_n(Fu_{k-s-1}-Fu_{k-s})+M_nL_n^{s-1}(u_{k-s+1}-u_{k-s}), \\
k=1,2,3,\ldots,\ 0\le s\le k.
\end{gathered} \tag{3.38}$$

Зважаючи на співвідношення (3.23), формулу (3.38) і ввівши позначення

$$\begin{gathered}
\|u_{k-1}-u_{k-2}\|=\Delta_k, \\
p_n=\|M_n\|, q_n=\|L_n\|, d_n=\|D_n\|, \\
\alpha_n=\mu\cdot d_n,
\end{gathered} \tag{3.39}$$

для оцінки величини $\Delta_k$ отримаємо систему нерівностей

$$\begin{cases}
\Delta_k\le(\alpha_n+p_n)\Delta_{k-1}, \\
\Delta_k\le\alpha_n\Delta_{k-1}+p_n(\alpha_n+q_n)\Delta_{k-2}, \\
\Delta_k\le\alpha_n\Delta_{k-1}+\alpha_np_n\Delta_{k-2}+p_nq_n(\alpha_n+q_n)\Delta_{k-3}, \\
\ldots, \\
\Delta_k\le\alpha_n\Delta_{k-1}+\alpha_np_n\Delta_{k-2}+\alpha_np_nq_n\Delta_{k-3}+ \\
+\ldots+\alpha_np_nq_n^{s-3}\Delta_{k-s+1}+p_nq_n^{s-2}(\alpha_n+q_n)\Delta_{k-s}.
\end{cases} \tag{3.40}$$

Проаналізувавши дві перші нерівності системи, можна показати справедливість такого твердження.

**Теорема 3.1.** *Якщо числа* $\alpha_n,\ p_n,\ q_n$ *такі, що*

$$\tau_{2n}=\alpha_n(\alpha_n+p_n)+p_n(\alpha_n+q_n)<1, \tag{3.41}$$

*то рівняння (3.1) при* $\forall f(x)\in L_2(a;b)$ *має єдиний розв’язок та колокаційно-ітеративний метод (3.10)-(3.12) збігається до цього ж розв’язку.*

*Доведення.* Зважаючи на дві перших нерівності системи (3.40), отримаємо оцінку

$$\left\|u_k - u_{k-1}\right\| \le \left(\alpha_n\left(\alpha_n + p_n\right) + p_n\left(\alpha_n + q_n\right)\right) \cdot \left\|u_{k-2} - u_{k-3}\right\|,$$

$$\Delta_k \le \tau_{2n}\Delta_{k-2}, \tau_{2n} < 1.$$

Тому

$$\begin{gathered}
\left\|u_{k+p} - u_k\right\| \le \left\|u_{k+p} - u_{k+p-1}\right\| + \left\|u_{k+p-1} - u_{k+p-2}\right\| + \ldots + \\
+\left\|u_{k+2} - u_{k+1}\right\| + \left\|u_{k+1} - u_k\right\| = \Delta_{k+p} + \Delta_{k+p-1} + \ldots + \Delta_{k+2} + \Delta_{k+1} \le \\
\le \left(\tau_{2n}^{\left[\frac{k}{2}\right]} + \tau_{2n}^{\left[\frac{k}{2}\right]+1} + \ldots + \tau_{2n}^{\left[\frac{k+p}{2}\right]-1} + \tau_{2n}^{\left[\frac{k+p}{2}\right]}\right)\left(\Delta_2 + \Delta_1\right) \le \qquad (3.42) \\
\le \frac{\tau_{2n}^{\left[\frac{k}{2}\right]}}{1-\tau_{2n}}\left(\Delta_2 + \Delta_1\right).
\end{gathered}$$

Оскільки $\tau_{2n}^{\left\lfloor\frac{k}{2}\right\rfloor} \to 0$ при $k \to \infty$, оцінка (3.42) показує, що послідовність $\left\{u_k\right\}$ фундаментальна та враховуючи, що простір $L_2(a;b)$ повний, вона збігається до деякої функції $u^* \in L_2(a;b)$. Очевидно, функція $u^*$ є розв'язком як рівняння (3.21), так і рівняння (3.14).

Єдиність розв'язку випливає з умови (3.41) і доведення цього факту не викликає значних труднощів [65].

Отже, для $\forall f(x) \in L_2(a;b)$ існує єдиний розв'язок $u^*$ рівняння (3.14), і метод (3.18)-(3.20) збігається до цього розв'язку. Це означає, що для $\forall f(x) \in L_2(a;b)$ також існує розв'язок $y^*$ рівняння (3.1) і метод (3.10)-(3.12) збігається до цього розв'язку. *Теорему доведено.*

**Зауваження 3.1.** Перейшовши до границі у (3.42) при $p \to \infty$, отримаємо нерівність

$$\left\|u^* - u_k\right\| \le \frac{\tau_{2n}^{\left\lfloor\frac{k}{2}\right\rfloor}}{1-\tau_{2n}}\left(\Delta_2 + \Delta_1\right),$$

з огляду на яку

$$\left\| y^*(x) - y_k(x) \right\| = \left\| (S^{-1}u^*)(x) - (S^{-1}u_k)(x) \right\| \le$$
$$\le \left\| S^{-1} \right\| \cdot \left\| u^* - u_k \right\| \le \left\| S^{-1} \right\| \cdot \frac{1}{1-\tau_{2n}} \tau_{2n}^{\left[\frac{k}{2}\right]} \cdot \left( \Delta_2 + \Delta_1 \right),$$

матимемо нерівність, яка характеризує швидкість збіжності методу (3.10)-(3.12) при виконанні умови (3.41).

**Зауваження 3.2.** Раніше встановлено [91], що метод (3.18)-(3.20) (аналогічно і метод (3.10)-(3.12)) збігається, якщо виконується нерівність

$$\tau_{2n} = \alpha_n + p_n < 1. \tag{3.43}$$

Очевидно, що при виконанні цієї умови будуть мати місце співвідношення (3.41). Дійсно, використавши те, що $q_n \le p_n$ (це випливає з формули (3.31)) матимемо

$$\tau_{2n} = \alpha_n \left( \alpha_n + p_n \right) + p_n \left( \alpha_n + q_n \right) \le$$
$$\le \alpha_n \left( \alpha_n + p_n \right) + p_n \left( \alpha_n + p_n \right) = \left( \alpha_n + p_n \right)^2 \le \tau_{2n}^2 < 1.$$

При виконанні умови (3.43) швидкість збіжності послідовності $\left\{ y^*(x) \right\}$, побудованої за допомогою методу (3.10)-(3.12) стосовно розв'язку $y^*(x)$ рівняння (3.1), характеризується нерівністю

$$\left\| y^*(x) - y_k(x) \right\| \le \left\| S^{-1} \right\| \cdot \frac{\tau_{2n}^{\left\lfloor\frac{k}{2}\right\rfloor}}{1-\tau_{2n}} \cdot \Delta_1.$$

**Зауваження 3.3.** Провівши більш глибокий аналіз системи (3.40), можна показати, що матимуть місце й такі умови збіжності методу.

Наприклад,

$$\tau_{3n} = \alpha_n \left( \alpha_n + p_n \right)^2 + p_n \left( \alpha_n + q_n \right)^2 < 1, \tag{3.44}$$

$$\begin{aligned} \tau_{4n} = {} & \alpha_n \left( \alpha_n + p_n \right) \left( \alpha_n \left( \alpha_n + p_n \right) + p_n \left( \alpha_n + q_n \right) \right) + \\ & + p_n \left( \alpha_n + q_n \right) \left( \alpha_n \left( \alpha_n + p_n \right) + q_n \left( \alpha_n + q_n \right) \right) < 1, \end{aligned} \tag{3.45}$$

$$\begin{aligned} \tau_{5n} = {} & \alpha_n \left( \alpha_n \left( \alpha_n + p_n \right) + p_n \left( \alpha_n + q_n \right) \right)^2 + \\ & + p_n \left( \alpha_n \left( \alpha_n + p_n \right) + q_n \left( \alpha_n + q_n \right) \right)^2 < 1. \end{aligned} \tag{3.46}$$

**Теорема 3.2.** Нехай одиниця – регулярне значення оператора $T$, виконуються умови (3.2)-(3.5) і справедливі співвідношення

$$\lim_{n\to\infty}\|Q_n v\| = 0, \forall v \in L_2(a;b),\ \ \mu\cdot\|R\|<1,$$

де $\mu = \varepsilon\cdot G\cdot l\cdot\left\|S^{-1}\right\|, R=(I-T)^{-1}$.

Тоді існує такий номер $n$, при якому колокаційно-ітеративний метод (3.10)-(3.12) збігається.

*Доведення*. Інтегральний оператор $T = KS^{-1}$ з огляду на виконання умов (3.2), (3.3) є цілком неперервним як суперпозиція цілком неперервного й обмеженого операторів [49] . У роботі [49] доведено, що якщо одиниця не є точкою спектра цілком неперервного оператора і система функцій $\{\varphi_i(x)\}$ повна в $L_2(a;b)$, тобто $\lim\limits_{n\to\infty}\|Q_n v\| = \lim\limits_{n\to\infty}\|(I-P_n)v\| = 0, \forall v \in L_2(a;b)$, то

$$\lim_{n\to\infty} p_n = 0. \tag{3.47}$$

З іншого боку, маємо

$$\begin{aligned} D_n = I + TR_n = I + TR - T(R-R_n) = \\ = (I-T)^{-1} - T(R-R_n) = R - T(R-R_n). \end{aligned} \tag{3.48}$$

Але $\|R-R_n\|\to 0$ при $n\to\infty$, тому

$$\alpha_n = \|D_n\| = \|R - T(R-R_n)\| \to \|R\| \text{ при } n\to\infty. \tag{3.49}$$

Зважаючи на рівності (3.47), (3.49), можна зробити висновок: якщо $\mu\cdot\|R\|<1,$ то знайдеться таке $n$, при якому

$$p_n + \mu d_n = p_n + \alpha_n < 1,$$

тоді з того, що виконуються умови зауваження 3.2 випливає, що метод (3.18)-(3.20), а отже і метод (3.10)-(3.12), буде збіжним. *Теорему доведено*.

Нагадаємо, що у формулах (3.25)-(3.49) оператори $T, F,$ як уже згадувалося вище, мають вигляд (3.16) і (3.22) відповідно, а оператори $R_n, M_n, L_n$ визначаються формулами

$$\left(R_n v\right)(x)=\int_a^b R_n(x;t)v(t)dt,$$

$$\left(M_n v\right)(x)=\int_a^b M_n(x;t)v(t)dt,$$

$$\left(L_n v\right)(x)=\int_a^b L_n(x;t)v(t)dt, v(x)\in L_2(a;b),$$

причому ядро оператора $R_n$ знаходиться з рівняння

$$R_n(x;t)=P_n(x;t)+\int_a^b H_n(x;\xi)R_n(\xi;t)d\xi,$$

де $P_n(x;t)$ має вигляд (3.24),

$$H_n(x;t)=\int_a^b P_n(x;\xi)\int_a^b T(\xi;\zeta)P_n(\zeta;t)d\zeta d\xi,$$

а ядра операторів $M_n$, $L_n$ будуються так:

$$M_n(x;t)=\int_a^b T(x;\xi)Z_n(\xi;t)d\xi,$$

де

$$Z_n(x;t)=\delta(x-t)-R_n(x;t)+\int_a^b R_n(x;\xi)T(\xi;t)d\xi,$$

$$L_n(x;t)=M_n(x;t)-\int_a^b P_n(x;\xi)M_n(\xi;t)d\xi.$$

**Зауваження 3.4.** Для перевірки виконання будь-якої з умов (3.41), (3.43), (3.44)-(3.46) на місце величин $q_n=\|L_n\|$, $p_n=\|M_n\|$, обчислення яких викликає значні труднощі, можна брати числа

$$p_n=\left(\int_a^b\int_a^b M_n^2(x;t)dxdt\right)^{\frac{1}{2}}, q_n=\left(\int_a^b\int_a^b L_n^2(x;t)dxdt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

## 3.4. Обчислювальна схема методу

Обчислення алгоритму (методу) (3.10)-(3.12) доцільно проводити так. Спочатку задамо систему функцій $\{\varphi_i(x)\}, i=\overline{1,n}$ та знайдемо систему функцій $\{\eta_i(x)\}$. Після цього побудуємо функції

$$K_j(x)=\int_a^b K(x;t)\eta_j(t)dt,\ j=\overline{1,n}, \tag{3.50}$$

далі знайдемо матрицю $\Lambda$, тобто її елементи

$$\beta_{ij}=\varphi_j(x_i)-K_j(x_i), i, j=\overline{1,n}. \tag{3.51}$$

Після цього переходимо до реалізації основної обчислювальної схеми.

Нехай наближення $y_{k-1}(x)$ і функція $s_{k-1}(x)$ побудовані. Тоді виконуємо ітерацію

$$v_k(x)=f(x)+\int_a^b K(x;t)y_{k-1}(t)dt+\varepsilon\int_a^b G(x;t)\Phi(t;y_{k-1}(t))dt, \tag{3.52}$$

знаходимо нев'язку

$$\varepsilon_k(x)=v_k(x)-s_{k-1}(x) \tag{3.53}$$

і обчислюємо координати вектора $b_k$, тобто

$$b_i^k=\varepsilon_k(x_i)\,, i=\overline{1,n}. \tag{3.54}$$

Складемо рівняння

$$\Lambda a_k=b_k, \tag{3.55}$$

знайдемо його розв'язок $a_k=\Lambda^{-1}b_k=\left\{a_1^k, a_2^k, ..., a_n^k\right\}$ і побудуємо функцію

$$s_k(x)=v_k(x)+\sum_{j=1}^n a_j^k K_j(x). \tag{3.56}$$

Провівши усі необхідні операції, наближення $y_k(x)$ знаходимо з функціонального рівняння

$$\begin{gathered} y_k(x) - p(x) y_k(h(x)) = s_k(x),\ x \in [a,b], \\ y_k(x) = 0,\ x \notin [a,b]. \end{gathered} \tag{3.57}$$

Не складе значних труднощів установити рівносильність обчислювальної схеми (3.50)-(3.57) та методу (3.10)-(3.12).

Проілюструємо обчислювальну схему (3.50)-(3.57) на конкретному прикладі.

***Приклад 3.1.***

Розглянемо інтегро-функціональне рівняння з малою нелінійністю

$$\begin{gathered} y(x) - p(x) y(x-1) = f(x) + \int_0^4 K(x;t) y(t) dt + \\ + \varepsilon \int_0^4 xt \left| 0,625 + 3t^2 + y(t) \right| dt,\ x \in [0;4], \\ y(x) = 0,\ x \in [-1;0], \end{gathered} \tag{3.58}$$

у якому $\varepsilon = 0,01, h(x) = x - 1,$

$$p(x) = \begin{cases} x-1,\ x \in [0;2], \\ 1,\ x \in [2;4], \end{cases} K(x;t) = \frac{sign(2-t)}{4} \begin{cases} x,\ x \le t, \\ t,\ x \ge t, \end{cases} \tag{3.59}$$

$$f(x) = \begin{cases} 5,75x + 0,25x^3,\ x \in [0;1], \\ 0,25 + 11x - 5,25x^2,\ x \in [1;2], \\ -5,75 + 5x - 0,75x^2,\ x \in [2;4]. \end{cases} \tag{3.60}$$

Єдиним розв'язком цього рівняння буде функція

$$y^*(x) = \begin{cases} 6x,\ x \in [0;1], \\ 6,\ x \in [1;4]. \end{cases} \tag{3.61}$$

Можна переконатися у тому, що метод послідовних наближень не можна застосовувати до рівняння (3.58).

Нехай $n = 3$,

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} 1,\ x \in (0;2), \\ 0,\ x \in (2;4), \end{cases} \varphi_m(x) = \begin{cases} 1,\ x \in (m;m+1), \\ 0,\ x \notin (m;m+1),\ m = 2;3, \end{cases} \tag{3.62}$$

з урахуванням виразу (3.59) отримаємо

$$
\eta_1(x)=\begin{cases} 1,\ x\in(0;1), \\ x-j+1,\ x\in(j;j+1),\ j=1;2;3, \end{cases}
$$
$$
\eta_m(x)=\begin{cases} 1,\ x\in(m;4), \\ 0,\ x\in(0;m),\ m=2;3. \end{cases} \tag{3.63}
$$

Нехай $x_1=1,5;\ x_2=2,5;\ x_3=3,5$ – точки колокації.

Після цього, згідно з формулами (3.50) і (3.59) будуємо функцію $K_j(x),\ j=\overline{1,3}$,

$$
K_1(x)=\frac{1}{24}\begin{cases} -3x-3x^2,\ x\in(0;1), \\ -6-9(x-1)-3(x-1)^2-(x-1)^3,\ x\in(1;2), \\ -19-18(x-2)+3(x-2)^2+(x-2)^3,\ x\in(2;3), \\ -33-9(x-3)+3(x-3)^2+(x-3)^3,\ x\in(3;4). \end{cases}
$$

Обчислюємо значення цієї функції в точках колокації:

$$
K_1(x_1)=K_1(1,5)=\frac{1}{24}\left(-6-9\cdot\frac{1}{2}-3\cdot\frac{1}{4}-\frac{1}{8}\right)=-\frac{91}{192}=K_{11},
$$

$$
K_1(x_2)=K_1(2,5)=\frac{1}{24}\left(-19-18\cdot\frac{1}{2}+3\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\right)=-\frac{217}{192}=K_{21},
$$

$$
K_1(x_3)=K_1(3,5)=\frac{1}{24}\left(-33-9\cdot\frac{1}{2}+3\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\right)=-\frac{293}{192}=K_{31}.
$$

$$
K_2(x)=\frac{1}{24}\begin{cases} -12x,\ x\in(0;1), \\ -12-12(x-1),\ x\in(1;2), \\ -24-12(x-2)+3(x-2)^2,\ x\in(2;3), \\ -33-6(x-3)+3(x-3)^2,\ x\in(3;4). \end{cases}
$$

Обчислюємо значення $K_2(x)$ у точках колокації:

$$
K_2(x_1)=K_2(1,5)=\frac{1}{24}\left(-12-12\cdot\frac{1}{2}\right)=-\frac{144}{192}=K_{12},
$$

$$
K_2(x_2)=K_2(2,5)=\frac{1}{24}\left(-24-12\cdot\frac{1}{2}+3\cdot\frac{1}{4}\right)=-\frac{234}{192}=K_{22},
$$

$$
K_2(x_3)=K_2(3,5)=\frac{1}{24}\left(-33-6\cdot\frac{1}{2}+3\cdot\frac{1}{4}\right)=-\frac{282}{192}=K_{32}.
$$

$$K_3(x)=\frac{1}{24}\begin{cases}-6x, x\in(0;1),\\ -6-6(x-1), x\in(1;2),\\ -12-6(x-2), x\in(2;3),\\ -18-6(x-3)+3(x-3)^2, x\in(3;4).\end{cases}$$

Аналогічно обчислюємо значення $K_3(x)$ у точках колокації:

$$K_3(x_1)=K_3(1,5)=\frac{1}{24}\left(-6-\frac{6}{2}\right)=-\frac{72}{192}=K_{13},$$

$$K_3(x_2)=K_3(2,5)=\frac{1}{24}\left(-12-6\cdot\frac{1}{2}\right)=-\frac{120}{192}=K_{23},$$

$$K_3(x_3)=K_3(3,5)=\frac{1}{24}\left(-18-6\cdot\frac{1}{2}+3\cdot\frac{1}{4}\right)=-\frac{162}{192}=K_{33}.$$

Задамо функцію $s_0(x)$, наприклад $s_0(x)=6$, і складемо рівняння

$$y_0(x)-p(x)y_0(x-1)=s_0(x), x\in[0;4],$$
$$y_0(x)=0, x\in(-1;0),$$

у якому $p(x)$ має вигляд (3.59), і з нього знаходимо початкове наближення

$$y_0(x)=\begin{cases}6,\\ 6+6(x-1),\\ 12+6(x-2),\\ 18+6(x-3),\end{cases}$$

Тепер перше наближення побудуємо за схемою (3.52)-(3.57). Оскільки, як зазначалось вище,

$$\varphi_1(x)=\begin{cases}1, x\in(0;2),\\ 0, x\in(2;4),\end{cases}\quad \varphi_2(x)=\begin{cases}0, x\in(0;2),\\ 1, x\in(2;3),\\ 0, x\in(3;4),\end{cases}\quad \varphi_3(x)=\begin{cases}0, x\in(0;3),\\ 1, x\in(3;4).\end{cases}$$

Обчислюємо значення цих функцій у вузлах колокації. Отримаємо $\varphi_j(x_i)=\varphi_{ij}, i, j=\overline{1,3}$:

$$\varphi_{11}=1,\quad \varphi_{12}=0,\quad \varphi_{13}=0,$$
$$\varphi_{21}=0,\quad \varphi_{22}=1,\quad \varphi_{23}=0,$$
$$\varphi_{31}=0,\quad \varphi_{32}=0,\quad \varphi_{33}=1.$$

Запишемо всі $K_{ij}$:

$$K_{11} = -\frac{91}{192}, \quad K_{12} = -\frac{144}{192}, \quad K_{13} = -\frac{72}{192},$$
$$K_{21} = -\frac{217}{192}, \quad K_{22} = -\frac{234}{192}, \quad K_{23} = -\frac{120}{192},$$
$$K_{31} = -\frac{293}{192}, \quad K_{32} = -\frac{282}{192}, \quad K_{33} = -\frac{162}{192},$$

та знайдемо $\beta_{ij} = \varphi_j(x_i) - K_j(x_i) = \varphi_{ij} - K_{ij}$:

$$\beta_{11} = \frac{283}{192}, \quad \beta_{12} = \frac{144}{192}, \quad \beta_{13} = \frac{72}{192},$$
$$\beta_{21} = \frac{217}{192}, \quad \beta_{22} = \frac{426}{192}, \quad \beta_{23} = \frac{120}{192},$$
$$\beta_{31} = \frac{293}{192}, \quad \beta_{32} = \frac{282}{192}, \quad \beta_{33} = \frac{354}{192}.$$

Далі за допомогою формули (3.51) обчислимо матрицю $\Lambda$

$$\Lambda = \frac{1}{192} \cdot \begin{pmatrix} 283 & 144 & 72 \\ 217 & 426 & 120 \\ 293 & 282 & 354 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1,473958 & 0,75 & 0,375 \\ 1,130208 & 2,21875 & 0,625 \\ 1,526042 & 1,46875 & 1,84375 \end{pmatrix}$$

і знайдемо обернену до неї

$$\Lambda^{-1} = \begin{pmatrix} 0,997156 & -0,261489 & -0,114171 \\ -0,355148 & 0,674234 & -0,156320 \\ -0,542415 & -0,320671 & 0,761397 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо нев’язку

$$\varepsilon_1(x) = \begin{cases} -6 + 2,32x - 0,75x^2 + 0,25x^3, x \in (0;1), \\ -4,18 - 4,43(x-1) - 6(x-1)^2 - 0,25(x-1)^3, x \in (1;2), \\ -14,86 - 5,18(x-2) + 0,75(x-2)^2 + 0,25(x-2)^3, x \in (2;3), \\ -19,04 - 2,93(x-3) + 1,5(x-3)^2 + 0,25(x-3)^3, x \in (3;4); \end{cases}$$

й обчислюємо координати вектора $b_1$:

$$b_1^1 = \varepsilon_1(x_1) = -4,18 - 4,43 \cdot 0,5 - 6 \cdot 0,25 - 0,25 \cdot 0,125 = -7,92625;$$

$$b_2^1 = \varepsilon_1(x_2) = -14,86 - 5,18 \cdot 0,5 + 0,75 \cdot 0,25 + 0,25 \cdot 0,125 = -17,23125;$$

$$b_3^1 = \varepsilon_1(x_3) = -19,04 - 2,93 \cdot 0,5 + 1,5 \cdot 0,25 + 0,25 \cdot 0,125 = -20,09875.$$

Складемо рівняння $\Lambda \bar{a}_1 = \bar{b}_1$ та знайдемо його розв'язок $\bar{a}_1 = \Lambda^{-1} \bar{b}_1$

$$\bar{a}_1 = \begin{pmatrix} 0,997056 & -0,261489 & -0,114171 \\ -0,355148 & 0,674234 & -0,156320 \\ -0,542415 & -0,320671 & 0,761397 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7,92625 \\ -17,23125 \\ -20,09875 \end{pmatrix} =$$

$$= (-1,103237; -5,661014; -5,478249).$$

Побудуємо функцію

$$s_1(x) = v_1(x) + a_1^1 K_1(x) + a_2^1 K_2(x) + a_3^1 K_3(x),$$

для цього обрахуємо такі величини:

$$a_1^1 K_1(x) = -1,103237 \cdot \frac{1}{24} \begin{cases} -3x - 3x^2, \\ -6 - 9(x-1) - 3(x-1)^2 - (x-1)^3, \\ -19 - 18(x-2) + 3(x-2)^2 + (x-2)^3, \\ -33 - 9(x-3) + 3(x-3)^2 + (x-3)^3 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 0,137904x + 0,137904x^2, \\ 0,275808 + 0,413712(x-1) + 0,137904(x-1)^2 + 0,045968(x-1)^3, \\ 0,873392 + 0,827424(x-2) - 0,137904(x-2)^2 - 0,045968(x-2)^3, \\ 1,516944 + 0,413712(x-3) - 0,137904(x-3)^2 + 0,045968(x-3)^3. \end{cases}$$

$$a_2^1 K_2(x) = -5,661014 \cdot \frac{1}{24} \begin{cases} -12x, \\ -12 - 12(x-1), \\ -24 - 12(x-2) + 3(x-2)^2, \\ -33 - 6(x-3) + 3(x-3)^2 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 2,830512x, \\ 2,830512 + 2,830512(x-1), \\ 5,661024 + 2,830512(x-2) - 0,707628(x-2)^2, \\ 7,783908 + 1,415256(x-3) - 0,707628(x-3)^2. \end{cases}$$

$$a_3^1 K_3(x) = -5,478249 \cdot \frac{1}{24} \begin{cases} -6x, \\ -6 - 6(x-1), \\ -12 - 6(x-2), \\ -18 - 6(x-3) + 3(x-3)^2 \end{cases} =$$

$$
=\begin{cases} 1,369560x, \\ 1,369560+1,369560(x-1), \\ 2,739120+1,369560(x-2), \\ 4,10868+1,369560(x-3)-0,68478(x-3)^2. \end{cases}
$$

$$
s_1(x)=v_1(x)+a_1^1K_1(x)+a_2^1K_2(x)+a_3^1K_3(x)=
$$

$$
=\begin{cases} 6,657976x-0,612096x^2+0,25x^3, \\ 6,29588+0,183784(x-1)-5,862096(x-1)^2-0,204032(x-1)^3, \\ 0,413536-0,152504(x-2)-0,095532(x-2)^2+0,204032(x-2)^3, \\ 0,369532+0,268528(x-3)-0,030312(x-3)^2+0,295968(x-3)^3. \end{cases}
$$

Розв’язавши різницеве рівняння

$$
y_1(x)-p(x)y_1(x-1)=s_1(x), x\in(0;4),
$$

$$
y_1(x)=0, x\in(-1;0),
$$

де коефіцієнт $p(x)$ має вигляд

$$
p(x)=\begin{cases} x-1, x\in[0;2], \\ 1, x\in[2;4], \end{cases}
$$

отримаємо

$x\in(0;1)$: $y_1(x)-(x-1)y_1(x-1)=6,657976x-0,612096x^2+0,25x^3$,

але тут $y_1(x-1)=0$, тому

$$
y_1(x)=6,657976x-0,612096x^2+0,25x^3, x\in(0;1).
$$

Далі $x\in(1;2)$:

$y_1(x)-(x-1)y_1(x-1)=6,29588+0,183784(x-1)-5,862096(x-1)^2-$
$-0,204032(x-1)^3$,

отримуємо

$y_1(x)=6,29588+0,183784(x-1)+0,79588(x-1)^2-0,816128(x-1)^3+$
$+0,25(x-1)^4$.

Далі $x\in(2;3)$:

$y_1(x)-y_1(x-1)=0,413536-0,152504(x-2)-0,095532(x-2)^2-$
$-0,204032(x-2)^3,$

отримуємо

$y_1(x)=6,709416+0,03128(x-2)+0,700348(x-2)^2-0,612096(x-2)^3+$
$+0,25(x-2)^4.$

Далі $x\in(3;4)$:

$y_1(x)-y_1(x-1)=0,413536-0,152504(x-2)-0,095532(x-2)^2-$
$-0,204032(x-2)^3,$

отримуємо

$y_1(x)=7,078948+0,299808(x-3)+0,670036(x-3)^2-0,316128(x-3)^3+$
$+0,25(x-3)^4.$

Отже,

$$y_1(x)=\begin{cases} 6,657976x-0,612096x^2+0,25x^3, \\ 6,29588+0,183784(x-1)+0,79588(x-1)^2-0,816128(x-1)^3+0,25(x-1)^4, \\ 6,709416+0,03128(x-2)+0,700348(x-2)^2-0,612096(x-2)^3+0,25(x-2)^4, \\ 7,078948+0,299808(x-3)+0,670036(x-3)^2-0,316128(x-3)^3+0,25(x-3)^4. \end{cases}$$

Для порівняння точний розв'язок рівняння (3.58):

$$y^*(x)=\begin{cases} 6x, x\in(0;1), \\ 6, x\in(1;4), \end{cases}=\begin{cases} 6x, \\ 6, \\ 6, \\ 6. \end{cases}$$

Похибка матиме вигляд

$$\Delta_1(x)=y_1(x)-y^*(x)=$$

$$=\begin{cases} 0,657976x-0,612096x^2+0,25x^3, x\in(0;1), \\ 0,29588+0,183784(x-1)+0,79588(x-1)^2-0,816128(x-1)^3+0,25(x-1)^4, x\in(1;2), \\ 0,709416+0,03128(x-2)+0,700348(x-2)^2-0,612096(x-2)^3+0,25(x-2)^4, x\in(2;3), \\ 1,078948+0,299808(x-3)+0,670036(x-3)^2-0,316128(x-3)^3+0,25(x-3)^4, x\in(3;4). \end{cases}$$

Продовжуючи цей процес, отримаємо такі значення:

$$\Delta_2(x)=10^{-1}\begin{cases}0,0998x+0,2944x^2-0,1841x^3\\ 0,2769+0,3721(x-1)+0,1175(x-1)^2+0,2880(x-1)^3\\ 0,8444+0,4263(x-2)-0,0079(x-2)^2+0,4359(x-2)^3\\ 1,5662+0,9497(x-3)-0,3071(x-3)^2+0,7655(x-3)^3\end{cases}+$$

$$+10^{-1}\begin{cases}0,0980x^4-0,0312x^5, x\in(0;1),\\ -0,3344(x-1)^4+0,1764(x-1)^5-0,0521(x-1)^6, x\in(1;2),\\ -0,2230(x-2)^4+0,1176(x-2)^5-0,0313(x-2)^6, x\in(2;3),\\ -0,1245(x-3)^4+0,0784(x-3)^5-0,0104(x-3)^6, x\in(3;4).\end{cases}$$

$$\Delta_3(x)=10^{-3}\begin{cases}-0,2x+3,25x^2-0,42x^3\\ 2,19+3,38(x-1)-0,41(x-1)^2+2,78(x-1)^3\\ 6,67+3,29(x-2)-0,07(x-2)^2+3,47(x-2)^3\\ 12,48+7,78(x-3)-1,96(x-3)^2+6,35(x-3)^3\end{cases}+$$

$$+10^{-3}\begin{cases}-0,61x^4-0,23x^5-0,23x^6+0,02x^7, x\in(0;1),\\ -0,66(x-1)^4-0,97(x-1)^5+0,51(x-1)^6-0,19x^7+0,04x^8, x\in(1;2),\\ -0,68(x-2)^4+0,43(x-2)^5+0,32(x-2)^6-0,12x^7+0,03x^8, x\in(2;3),\\ -1,32(x-3)^4+0,53(x-3)^5+0,22(x-3)^6-0,07x^7+0,02x^8, x\in(3;4).\end{cases}$$

$$\Delta_4(x)=10^{-4}\begin{cases}-0,31x+2,53x^2+0,08x^3\\ 1,72+2,79(x-1)-0,51(x-1)^2+1,96(x-1)^3\\ 5,29+2,62(x-2)-0,22(x-2)^2+2,49(x-2)^3\\ 9,85+6,29(x-3)-2,12(x-3)^2+4,92(x-3)^3\end{cases}+$$

$$+10^{-4}\begin{cases}-0,68x^4-0,05x^5+0,05x^6-0,01x^7+0,01x^8, x\in(0;1),\\ 0,17(x-1)^4-1,03(x-1)^5+0,11(x-1)^6+0,11x^7-0,04x^8, x\in(1;2),\\ 0,15(x-2)^4-0,59(x-2)^5+0,05(x-2)^6+0,08x^7-0,02x^8, x\in(2;3),\\ -0,25(x-3)^4+0,2(x-3)^5-0,06(x-3)^6+0,11x^7-0,01x^8, x\in(3;4).\end{cases}$$

У Таблиці 3.1 показані значення функції $\Delta_k(x)$, $k=\overline{0,4}$ у точках $x_m=0,5m$, $m=\overline{0,8}$, які характеризують відхилення наближень $y_k(x)$ від точного розв'язку $y^*(x)$.

Таблиця 3.1

| $x$ | $\Delta_0(x)$ | $\Delta_1(x)$ | $\Delta_2(x)$ | $\Delta_3(x)$ | $\Delta_4(x)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 6 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0,5 | 3 | 0,207214 | 0,01056 | 0,00063 | 0,00004 |
| 1 | 0 | 0,29588 | 0,02769 | 0,00219 | 0,00017 |
| 1,5 | 3 | 0,500351 | 0,04797 | 0,00406 | 0,00032 |
| 2 | 6 | 0,709416 | 0,08444 | 0,00667 | 0,00053 |
| 2,5 | 9 | 0,839256 | 0,10993 | 0,00868 | 0,00068 |
| 3 | 12 | 1,075948 | 0,15620 | 0,01248 | 0,00099 |
| 3,5 | 15 | 1,372470 | 0,20503 | 0,01666 | 0,00131 |
| 4 | 18 | 1,982664 | 0,29136 | 0,02412 | 0,00189 |

Ця таблиця показує, наскільки відрізняються наближені розв’язки $y_1(x), y_2(x), y_3(x)$ та $y_4(x)$ від точного розв’язку $y^*(x)$. Так, уже четверте наближення гарантує точність $10^{-4}$. Варто зазначити той факт, що метод послідовних наближень не є застосовним до рівняння (3.58) навіть і при $\varepsilon = 0$.

## 3.5. Нестаціонарний колокаційно-ітеративний метод

Нехай, як і раніше, $\{\varphi_i(x)\}$ – задана ортогональна та повна в $L_2(a;b)$ система, а $\{P_k\}$ – послідовність проектуючих операторів, які визначаються таким способом:

$$(P_k g)(x) = \int_a^b P_k(x;t) g(t) dt, \;\; \forall g(x) \in L_2(a;b), \tag{3.64}$$

у якій

$$P_k(x;t) = \sum_{i=1}^{n_k} \gamma_i \varphi_i(x) \varphi_i(t), \;\; \gamma_i^{-1} = \int_a^b \varphi_i^2(x) dx, \tag{3.65}$$

де $k=1,2,3,\ldots,\ n_k>n_0=n\geq 1,\quad n_{k_1}\leq n_{k_2}$ при $k_1<k_2$.

Очевидно, проектуючі оператори (3.64) ортогонально проектують простір $L_2(a;b)$ на його підпростір $L_2^{\,k}(a;b)$, причому $L_2^{\,k-1}(a;b)\subset L_2^{\,k}(a;b),\ k=1,2,3,\ldots$.

Суть запропонованого методу стосовно рівняння (3.1) полягає у такому. Нехай, виходячи з початкового наближення $y_0(x)\in L_2(a;b)$ і функції $s_0(x)$, що задовольняють співвідношення

$$y_0(x)-p(x)y_0(h(x))=s_0(x),\ x\in(a;b), \tag{3.66}$$
$$y_0(x)=0,\ x\notin(a;b),$$

ми знайшли наближення $y_{k-1}(x)$ і функцію $s_{k-1}(x)$.

Обчислимо функцію

$$\tilde{s}_{k-1}(x)=\int_a^b P_{k-1}(x;t)s_{k-1}(t)dt, \tag{3.67}$$

де $P_{k-1}(x;t)$ має вигляд (3.65). Розв'яжемо функціональне рівняння

$$\begin{gathered}\tilde{y}_{k-1}(x)-p(x)\tilde{y}_{k-1}(h(x))=\tilde{s}_{k-1}(x),\ x\in(a;b),\\ \tilde{y}_{k-1}(x)=0,\ x\notin(a;b).\end{gathered} \tag{3.68}$$

Наближення $y_k(x)$ визначаємо як розв'язок рівняння

$$\begin{gathered}y_k(x)-p(x)y_k(h(x))=\\ =f(x)+\int_a^b K(x;t)\tilde{z}_k(t)dt+\varepsilon\int_a^b G(x;t)\Phi(t;y_{k-1}(t))dt,\ x\in(a;b),\\ y_k(x)=0,\ x\notin(a;b),\end{gathered} \tag{3.69}$$

у якому

$$\tilde{z}_k(x)=\tilde{y}_{k-1}(x)+w_k(x),\ w_k(x)=\sum_{j=1}^{n}a_j^k\eta_j(x),\ x\notin(a;b), \tag{3.70}$$

невідомі параметри $a_j^k$ знаходимо з умови

$$\tilde{r}_k(x_i)=0,\ i=\overline{1,n}, \tag{3.71}$$

де
$$\tilde{r}_k(x) = f(x) + \int_a^b K\left(x;t\right)\tilde{z}_k\left(t\right)dt - \tilde{z}_k\left(x\right) + p(x)\tilde{z}_k\left(h(x)\right), \tag{3.72}$$
система функцій $\{\eta_i(x)\}$ у формулах (3.70), (3.71) знаходиться з рівнянь, які в нашому випадку мають вигляд
$$\begin{gathered}\eta_i(x) - p(x)\eta_i(h(x)) = \varphi_i(x),\, x \in (a;b),\\ \eta_i(x) = 0,\, x \notin (a;b);\end{gathered} \tag{3.73}$$
де система функцій $\{\varphi_i(x)\}$, як вже зазначалось, ортогональна та повна в просторі $L_2(a;b)$.

Введемо позначення
$$\varepsilon_k(x) = f(x) + \int_a^b K\left(x;t\right)\tilde{y}_k\left(t\right)dt - \tilde{y}_{k-1}\left(x\right) + p(x)\tilde{y}_{k-1}\left(h(x)\right)$$
і, підставляючи функцію $\tilde{z}_k\left(x\right)$, яка визначається формулою (3.70), у вираз (3.72), а потім отриманий результат – в умову (3.71), для знаходження параметрів $a_j^k$ отримаєм систему лінійних алгебраїчних рівнянь
$$\sum_{j=1}^{n}\beta_{ij}a_j^k = b_i^k,\, i = \overline{1,n}, \tag{3.74}$$
де $\beta_{ij}$ обчислюються за формулою
$$\beta_{ij} = \int_a^b\left\{\varphi_j(x) - K_j(x)\right\}\psi_i(x)dx,\, i,j = \overline{1,n} \tag{3.75}$$
та
$$b_i^k = \varepsilon_k(x),\, i = \overline{1,n}. \tag{3.76}$$

Як і раніше, систему рівнянь (3.74) записуватимемо у векторному вигляді $\Lambda a_k = b_k$.

Зауважимо, що за наближення до шуканого розв'язку можна брати будь-яку з функцій $y_k(x),\, \tilde{y}_k(x),\, \tilde{z}_k(x)$.

Слід звернути увагу на той факт, що на основі аналізу формул (3.66)-(3.72) при $s_0(x) = 0$ наближення $\tilde{z}_1(x)$ співпадає з наближенням, побудованим за допомогою колокаційного методу, наближення $y_1(x)$ – з наближенням, побудованим за допомогою покращеного колокаційного методу, а при $w_k\left(x\right)=0,\, k=1,2,3,...$ наближення $y_k(x)$ знаходиться за допомогою нестаціонарного методу послідовних наближень.

Алгоритм (3.66)-(3.72) можна звести до нестаціонарного колокаційно-ітеративного методу розв'язування інтегрального рівняння з малою нелінійністю вигляду (3.21), тобто до рівняння

$$u(x)=f(x)+\int_a^b T(x;t)u(t)dt+\varepsilon\int_a^b G(x;t)F(t;u(t))dt,\ x\in[a;b].$$

Дійсно, формули (3.66), (3.67), (3.68) і (3.72) можна записати у вигляді

$$\left(S\tilde{y}_{k-1}\right)(x)=\left(P_{k-1}S_{k-1}\right)(x),$$
$$\left(Sy_k\right)(x)=f(x)+\left(K\tilde{y}_{k-1}\right)(x)+\left(Kw_k\right)(x),$$
$$\tilde{r}_k=f(x)+\left(K\tilde{y}_{k-1}\right)(x)+\left(Kw_k\right)(x)-\left(S\tilde{y}_{k-1}\right)(x)-\left(Sw_k\right)(x).$$

За допомогою цих формул умова (3.71) легко перепишеться у вигляді

$$\left(Sy_k-S\tilde{y}_{k-1}-Sw_k\right)(x_i)=0,\ i=\overline{1,n}.$$

Тепер підставимо

$$u_k(x)=s_k(x)=\left(Sy_k\right)(x),\ \ \alpha_k(x)=\left(Sw_k\right)(x), \tag{3.77}$$

звідки випливає

$$y_k(x)=\left(S^{-1}u_k\right)(x),\ \ w_k(x)=\left(S^{-1}\alpha_k\right)(x). \tag{3.78}$$

На основі формул (3.77), (3.78) та співвідношення (3.73), отримаємо

$$u_k(x)=f(x)+\left(TP_{k-1}u_{k-1}\right)(x)+\left(T\alpha_k\right)(x), \tag{3.79}$$

$$\alpha_k(x)=\sum_{j=1}^{n}a_j^k\varphi_j(x),\ k=1,2,3,..., \tag{3.80}$$

$$\int_a^b\left\{u_k(x)-\left(P_{k-1}u_{k-1}\right)(x)-\alpha_k(x)\right\}\varphi_i(x)dx=0,\ i=\overline{1,n}. \tag{3.81}$$

Можна побачити, що алгоритм (3.79)-(3.81) – це нестаціонарний колокаційно-ітеративний метод розв'язування інтегрального рівняння з малою нелінійністю (3.21). У працях [70, 90, 117] встановлені різні достатні умови збіжності й оцінки похибки цього методу для інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду.

**Лема 3.1.** Якщо послідовності $\{a_n\}$ та $\{b_n\}$ з додатними членами характеризуються тим, що ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ є збіжним і $b_n \to 0$, при $n \to \infty$, то

$$\lim_{n\to\infty}\left(a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0\right) = 0.$$

**Теорема 3.3.** Якщо виконуються умови

$$\tau_{1n} = p_n + \alpha_n < 1, \tag{3.82}$$

$$\lim_{k\to\infty}\|Q_k v\| = 0,\; Q_k = I - P_k,\; i = \overline{0,n}, \tag{3.83}$$

то для $\forall f(x) \in L_2(a;b)$ рівняння (3.1) матиме єдиний розв'язок $y^*(x)$ і послідовність $\{y_k(x)\}$, побудована методом (3.66)-(3.72), збігається в $L_2(a;b)$ до цього ж розв'язку.

*Доведення.* Оскільки виконується умова (3.82), то рівняння (3.21) матиме єдиний розв'язок $u^*(x)$, тобто

$$u^* = f + Tu^* + Fu^* \tag{3.84}$$

і рівняння

$$w_k - P_0 w_k = P_0\left(f + TP_{k-1}u_{k-1} + FP_{k-1}u_{k-1} - u_{k-1}\right),$$

також має єдиний розв'язок

$$w_k = R_n\left(f + TP_{k-1}u_{k-1} + FP_{k-1}u_{k-1} - u_{k-1}\right). \tag{3.85}$$

З огляду на (3.84), (3.85) і те, що $w_k = P_0(u_k - u_{k-1})$, $k = 1,2,3,\ldots, u_0 \in L_2(a;b)$, матимемо

$$u^* - u_k = (f + Tu^* + Fu^*) - (f + TP_{k-1}u_{k-1} + Tw_k + FP_{k-1}u_{k-1}) =$$
$$= D_n(Fu^* - FP_{k-1}u_{k-1}) + M_n(u^* - P_{k-1}u_{k-1}),$$

де оператори $D_n$ і $M_n$ мають відповідно вигляд (3.36) і (3.31).

Нехай

$$u^* - u_k = \Delta_k^*,\; \|Q_k u^*\| = \delta_k, \tag{3.86}$$

тоді, врахувавши співвідношення (3.23), (3.39), (3.86), отримуємо

$$\left\|u^* - u_k\right\|^2 \le (\alpha_n + p_n)^2 \left\|u^* - P_{k-1}u_{k-1}\right\|^2 =$$
$$= \tau_{1n}^2 \left\|P_{k-1}\left(u^* - u_{k-1}\right) + Q_{k-1}u^*\right\|^2 \le$$
$$\le \tau_{1n}^2 \left(\left\|P_{k-1}\left(u^* - u_{k-1}\right)\right\|^2 + \left\|Q_{k-1}u^*\right\|^2\right) \le$$
$$\le \tau_{1n}^2 \left(\left\|u^* - u_k\right\|^2 + \left\|Q_{k-1}u^*\right\|^2\right),$$

тобто

$$\left(\Delta_k^*\right)^2 \le \tau_{1n}^2 \left(\left(\Delta_{k-1}^*\right)^2 + \delta_{k-1}^2\right). \tag{3.87}$$

Замінимо в нерівності (3.87) індекс $k$ на $k-1$ й отриманий результат підставимо до правої частини тієї ж нерівності (3.87). У результаті матимемо

$$\left(\Delta_k^*\right)^2 \le \tau_{1n}^2 \left(\tau_{1n}^2 \left(\left(\Delta_{k-2}^*\right)^2 + \delta_{k-2}^2\right) + \delta_{k-1}^2\right) =$$
$$= \tau_{1n}^4 \left(\Delta_{k-2}^*\right)^2 + \tau_{1n}^4 \delta_{k-2}^2 + \tau_{1n}^2 \delta_{k-1}^2.$$

Продовжуючи цей процес, отримаємо

$$\left(\Delta_k^*\right)^2 = \tau_{1n}^{2k} \left(\Delta_0^*\right)^2 + \tau_{1n}^{2k} \delta_0^2 + \tau_{1n}^{2(k-1)} \delta_1^2 + \ldots + \tau_{1n}^4 \delta_{k-2}^2 + \tau_{1n}^2 \delta_{k-1}^2. \tag{3.88}$$

Використавши умови (3.82) та (3.83), легко переконатись у тому, що $\delta_k^2 \to 0$ при $k \to \infty$ і ряд $\tau_{1n}^2 + \tau_{1n}^4 + \ldots + \tau_{1n}^{2k} + \ldots$ збігається. З цього випливає, що умови Леми 3.1. виконуються. Отже, перейшовши в нерівності (3.88) до границі, отримаємо співвідношення

$$\lim_{k \to \infty} \left\|u^* - u_k\right\| = 0,$$

тобто такий метод збігається до розв'язку $u^*(x)$ рівняння (3.21). А це означає, що для $\forall f(x) \in L_2(a;b)$ існує єдиний розв'язок $y^*(x)$ рівняння (3.1) і нестаціонарний колокаційно-проекційний метод (3.66)-(3.72) збігається до цього розв'язку. *Теорему доведено*.

### 3.6. Застосування колокаційно-ітеративного методу до нелінійних інтегро-функціональних рівнянь

Розглянемо нелінійне інтегро-функціональне рівняння

$$\begin{aligned} y(x) &= f(x) + p(x)y(h(x)) + \int_a^b K(x;t)y(t)dt + \\ &+\lambda\int_a^b C(x;t)F\left(t;\int_a^b G(t;\xi)y(\xi)d\xi\right)dt,\ x\in[a;b], \end{aligned} \tag{3.89}$$

$$y(x)=0,\ x\notin[a;b], \tag{3.90}$$

де $f(x)$ – задана, $y(x)$ – шукана функції з простору $L_2(a;b)$, $\lambda$ – додатний параметр.

Щодо рівняння (3.89) вважатимемо, що:

1) функції $p(x)$ та $h(x)$ на проміжку $[a;b]$ задовольняють умови

$$|p(x)|\le \bar{p}<\infty, \tag{3.91}$$

$h(x)$ – диференційовна на $[a;b]$ і

$$h'(x)\ge l>0,\ \ x-h(x)\ge\sigma>0; \tag{3.92}$$

2) лінійні інтегральні оператори

$$(Ky)(x)=\int_a^b K(x;t)y(t)dt, \tag{3.93}$$

$$(Cu)(x)=\int_a^b C(x;t)u(t)dt, \tag{3.94}$$

$$(Gy)(x)=\int_a^b G(x;t)y(t)dt \tag{3.95}$$

відображають простір $L_2(a;b)$ у себе і є цілком неперервними;

3) дійсна функція $F(x;z)$ змінних $x\in[a;b]$ та $z\in R$ задовольняє умову Каратеодорі та, крім того, $F(v;0)\in L_2(a;b)$ і

$$|F(x;u)-F(x;z)|\le|u-z|,\ \ \forall u,z\in R,\ x\in[a;b]. \tag{3.96}$$

При таких припущеннях, як відомо [64, 67], інтегральний оператор

$$
\begin{aligned}
&(By)(x) = f(x) + \int_a^b K(x;t)\,y(t)\,dt + \\
&+\lambda\int_a^b C(x;t)\,F\left(t;\int_a^b G(t;\xi)y(\xi)d\xi\right)dt
\end{aligned}
\tag{3.97}
$$

відображає простір $L_2(a;b)$ у себе і є цілком неперервним.

До рівняння (3.89) при виконанні умови (3.90) застосуємо колокаційно-ітеративний метод, згідно з яким наближені розв'язки будуються так:

$$
\begin{aligned}
&y_k(x) - p(x)\,y_k(h(x)) = f(x) + \int_a^b K(x;t)\,z_k(t)\,dt + \\
&+\lambda\int_a^b C(x;t)\,F\left(t;\int_a^b G(t;\xi)z_k(\xi)d\xi\right)dt,\ x\in[a;b],
\end{aligned}
\tag{3.98}
$$

$$
y_k(x) = 0,\ x\notin[a;b],
$$

$$
z_k(x) = y_{k-1}(x) + w_k(x),\ k = 1,2,3,...,
\tag{3.99}
$$

$$
w_k(x) = \int_a^b P_n(x;t)\left(y_k(t) - y_{k-1}(t)\right)dt,
\tag{3.100}
$$

де

$$
P_n(x;t) = \sum_{m=1}^{n}\tau_m^{-1}\eta_m(x)\eta_m(t),\ \ \tau_m = \int_a^b \eta_m^2(x)dx.
\tag{3.101}
$$

Система функцій $\{\eta_m(x)\}_{m=1}^{n}$ знаходиться як розв'язок системи функціональних рівнянь

$$
\begin{aligned}
\eta_m(x) - p(x)\eta_m(h(x)) = \varphi_m(x),\ x\in[a;b],\\
\eta_m(x) = 0,\ x\notin[a;b],
\end{aligned}
\tag{3.102}
$$

причому вихідна система функцій $\{\varphi_m(x)\}$ є лінійно-незалежною та повною у просторі $L_2(a;b)$. Іншими словами, функціональні поправки $w_k(x)$ на кожному кроці ітерації шукаються у вигляді

$$
w_k(x) = \sum_{m=1}^{n} a_m^k \eta_m(x).
$$

Невідомі коефіцієнти $a_m^k$ знаходимо з умови

$$y_k(x_i) - z_k(x_i) = 0, i = \overline{1,n}, \qquad (3.103)$$

(тут $x_i \in [a;b], i = \overline{1,n}$ – вузли колокації).

Здійснивши нескладні елементарні перетворення, доходимо висновку, що для визначення функцій $w_k(x)$ на кожному кроці ітерації з урахуванням формул (3.98)-(3.101) отримується деяке нелінійне інтегральне рівняння, подібне до рівняння (3.89), але з виродженими ядрами. Це у свою чергу дає змогу перейти до системи алгебраїчних чи трансцендентних рівнянь порядку $n$.

Ідея обґрунтування методу (3.98)-(3.103) полягає в тому, що вихідне рівняння (3.89) з урахуванням умови (3.90) можна звести до нелінійного інтегрального рівняння вигляду

$$u(x) = f(x) + \int_a^b T(x;t)u(t)dt + \lambda \int_a^b C(x;t) F\left(t; \int_a^b H(t;\xi)u(\xi)d\xi\right)dt, \qquad (3.104)$$

складові елементи якого задовольняють умови, аналогічні наведеним вище умовам 2), 3).

Дійсно, узявши

$$\begin{gathered} y(x) - p(x)y(h(x)) = u(x), x \in [a;b], \\ y(x) = 0, x \notin [a;b], \end{gathered} \qquad (3.105)$$

отримаємо, що

$$y(x) = \begin{cases} u(x), x \in [a; h^{-1}(a)), \\ u(x) + \sum_{i=1}^{s} y(h^i(x)) \prod_{k=0}^{i-1} p(h^k(x)), x \in \Delta_s, s = \overline{1,m}, \end{cases} \qquad (3.106)$$

де $\Delta_s = [c_{s-1}; c_s)$, $c_0 = a$, $c_s = h^{-1}(c_{s-1})$, $c_m = b$, $h^k(x) = h(h^{k-1}(x))$, $s = \overline{1,m}$.

Тоді, підставивши $y(x)$, що має вигляд (3.106), у підінтегральні вирази рівняння (3.89) і здійснивши ряд перетворень, переконуємось у тому, що ядра $T(x;t)$ та $H(x;t)$ інтегральних операторів рівняння (3.104) набудуть вигляду

$$T(x;t) = \begin{cases} K(x;t) + \sum_{i=1}^{m-s} K(x; (h^{-1})^i(t)) \prod_{k=1}^{i} p((h^{-1})^k(t)), t \in \Delta_s, \\ K(x;t), t \in (c_{m-1}; b), s = \overline{1, m-1}, x \in (a;b), \end{cases} \qquad (3.107)$$

$$H(x;t)=\begin{cases} G(x;t)+\sum\limits_{i=1}^{m-s}G(x;(h^{-1})^{i}(t))\prod\limits_{k=1}^{i}p((h^{-1})^{k}(t)),\, t\in\Delta_s, \\ G(x;t),\, t\in(c_{m-1};b),\, s=\overline{1,m-1},\, x\in(a;b). \end{cases} \tag{3.108}$$

При цьому колокаційно-ітеративний метод (3.98)-(3.103) розв’язування рівняння (3.89) з умовою (3.90) буде рівносильним колокаційно-ітеративному методу розв’язання рівняння (3.104), тобто методу:

$$\begin{gathered} u_k(x)=f(x)+\int\limits_a^b T(x;t)\tilde{z}_k(t)dt+ \\ +\lambda\int\limits_a^b C(x;t)F\left(t;\int\limits_a^b H(t;\xi)\tilde{z}_k(\xi)d\xi\right)dt, \end{gathered} \tag{3.109}$$

$$\tilde{z}_k(x)=u_{k-1}(x)+w_k(x),\, k=1,2,3,..., \tag{3.110}$$

$$w_k(x)=\int\limits_a^b Q_n(x;t)\big(u_k(t)-u_{k-1}(t)\big)dt, \tag{3.111}$$

де

$$Q_n(x;t)=\sum_{m=1}^{n}\alpha_m^{-1}\varphi_m(x)\varphi_m(t),\ \alpha_m=\int\limits_a^b\varphi_m^2(x)dx \tag{3.112}$$

(тут $\{\varphi_m(x)\}$ – лінійно-незалежна та повна в просторі $L_2(a;b)$ система функцій).

У роботі [90] до рівняння (3.104) застосовується проекційно-ітеративний метод та подається схема його обґрунтування. Оскільки колокаційно-ітеративний метод можна розглядати як окремий випадок проекційно-ітеративного, який значною мірою полегшує обчислення на кожному кроці ітерації, то зважаючи на наведені у згаданій роботі міркування, доходимо висновку, що справедливе твердження:

**Теорема 3.4.** Якщо виконуються наведені вище умови 1)-3) і для довільної функції $g(x)\in L_2(a;b)$

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_a^b P_n(x;t)g(t)dt=g(x),$$

то для будь-якої функції $f(x) \in L_2(a;b)$ інтегро-функціональне рівняння (3.89) з умовою (3.90) матиме єдиний розв'язок та буде справедлива нерівність

$$\left\| y^*(x) - y(x) \right\| \le c \cdot \left\| f^*(x) - f(x) \right\|, c > 0,$$

де $y^*(x)$ та $y(x)$ – відповідно розв'язки рівняння (3.89) при $f(x) = f^*(x)$ та при $f(x) = f(x)$. Тоді при достатньо великих $n$ колокаційно-ітеративний метод (3.98)-(3.103) буде збіжним.

Варто зауважити, що як частковий випадок методу (3.98)-(3.103), при $w_k(x) = 0, k = 1,2,3,...$ отримаємо один варіант методу послідовних наближень, а при $y_0(x) \equiv 0$ наближення $z_1(x)$ можна розглядати як наближений розв'язок рівняння (3.89), побудований за допомогою колокаційного методу.

Безпосередні обчислення згідно з колокаційно-ітеративним методом (3.98)-(3.103) доцільно проводити за такою схемою.

Спочатку, задаємо лінійно-незалежну на проміжку $[a;b]$ систему функцій $\left\{\varphi_j(x)\right\}, j = \overline{1,n}$ і згідно з формулою (3.102) знаходимо систему функцій $\left\{\eta_j(x)\right\},\ j = \overline{1,n}$.

Далі будуємо функції

$$K_j(x) = \int_a^b K(x;t)\eta_j(t)dt\,,\ G_j(x) = \int_a^b G(x;t)\eta_j(t)dt\,,\ j = \overline{1,n}\,. \qquad (3.113)$$

Нехай, виходячи з деякого початкового наближення $y_0(x)$, знайдено функцію $y_{k-1}(x)$. Будуємо функцію $u_{k-1}(x) = y_{k-1}(x) + p(x)y_{k-1}(h(x))$.

Після цього виконуємо ітерацію

$$\begin{gathered} v_k(x) = f(x) + \int_a^b K\left(x;t\right) y_{k-1}\left(t\right) dt + \\ +\lambda \int_a^b C\left(x;t\right) F\left(t; \int_a^b G(t;\xi) y_{k-1}(\xi) d\xi\right) dt \end{gathered} \qquad (3.114)$$

і записуємо нев'язку

$$\varepsilon_k(x) = v_k(x) - u_{k-1}(x). \tag{3.115}$$

Обчислюємо числа $b_i^k$

$$b_i^k = \varepsilon_k(x_i),\, i = \overline{1,n} \tag{3.116}$$

(тут, як раніше, $x_i \in [a;b],\, i = \overline{1,n}$ – вузли колокації).

Розв'язавши систему $n$ нелінійних рівнянь

$$\sum_{j=1}^{n} a_j^k \left(\varphi_j(x_i) - K_j(x_i)\right) - \lambda \int_a^b C\left(x_i;t\right) \mathrm{F}\left(t; \sum_{j=1}^{n} a_j^k G_j(t)\right) dt = b_i^k, \tag{3.117}$$

де $i = \overline{1,n},$ знаходимо коефіцієнти $a_j^k$ і будуємо функцію

$$u_k(x) = v_k(x) + \sum_{j=1}^{n} a_j^k K_j(x) + \lambda \int_a^b C\left(x;t\right) F\left(t; \sum_{j=1}^{n} a_j^k G_j(t)\right) dt. \tag{3.118}$$

Наближення $y_k(x)$ знаходимо, розв'язавши покроково функціональне рівняння

$$\begin{gathered} y_k(x) - p(x) y_k(h(x)) = u_k(x),\, x \in [a;b], \\ y_k(x) = 0,\, x \notin [a;b]. \end{gathered} \tag{3.119}$$

Здійснивши нескладні перетворення, можна показати, що наведена обчислювальна схема (3.102), (3.113)-(3.119) є рівносильною колокаційно-ітеративному методу (3.98)-(3.103).

# РОЗДІЛ 4

# КОЛОКАЦІЙНИЙ ТА КОЛОКАЦІЙНО-ІТЕРАТИВНИЙ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

## 4.1. Постановка задачі

Нехай потрібно знайти функцію $y(x)$, що задовольняє рівняння

$$\begin{gathered}(Ly)(x)=y''(x)+c(x)y'(x)+d(x)y(x)+\\+p(x)y''(h(x))+r(x)y'(h(x))+s(x)y(h(x))=f(x),\ x\in[a;b]\end{gathered} \tag{4.1}$$

та крайові умови

$$U_1[y]=\alpha y'(a)+\beta y(a)=0, U_2[y]=\gamma y'(b)+\delta y(b)=0, \tag{4.2}$$

$$y(x)=0,\ x\in(h(a);a). \tag{4.3}$$

До крайової задачі (4.1)-(4.3) заміною

$$f(x)=\begin{cases} g(x)-p(x)\varphi''(h(x)),\ x\in(a;c),\ c=h^{-1}(a),\\ g(x), x\in(c;b)\end{cases}$$

зводиться наступна задача – крайова задача:

$$\begin{gathered}(Ly)(x)=g(x),\ x\in(a;b),\\ U_1[y]=U_2[y]=0,\\ y(x)=\varphi(x),\ x\in(h(a);a).\end{gathered}$$

Вважаємо, що:

1. Коефіцієнти $c(x), d(x), p(x), r(x), s(x)$ – визначені й обмежені на відрізку $[a;b]$, $g(x)\in L_2(a;b)$, $\alpha^2+\beta^2\neq 0$, $\gamma^2+\delta^2\neq 0$, $h(x)$ – диференційовна на $(a;b)$ функція і $h'(x)\geq l,\ x-h(x)\geq\sigma>0$, та $p(x)\neq 0$ при $x\in(a;c),\ c=h^{-1}(a)$;
2. Крайову задачу (4.1)-(4.3) за допомогою заміни

$$y''(x)+a(x)y'(x)+b(x)y(x)=u(x),\ U_1[y]=U_2[y]=0 \tag{4.4}$$

можна звести до інтегро-функціонального рівняння.

Коефіцієнти $a(x)$ і $b(x)$ підбираються так, щоб крайова задача (4.4) мала єдиний розв'язок при кожній функції $u(x)\in L_2(a;b)$ і його можна знайти в явному вигляді порівняно легко, причому виконуватимуться рівності

$$p(x)a(h(x))-r(x)=0,\ \ p(x)b(h(x))-s(x)=0, x\in(a;c). \tag{4.5}$$

Тоді запишемо рівняння (4.1) у вигляді

$$\begin{gathered} y''(x)+a(x)y'(x)+b(x)y(x)+p(x)\{y''(h(x))+a(h(x))y'(h(x))+b(h(x))y(h(x))\}= \\ =f(x)+g(x)y'(x)+k(x)y(x)+l(x)y'(h(x))+m(x)y(h(x)), \end{gathered} \tag{4.6}$$

де

$$\begin{gathered} a(x)-g(x)=c(x), b(x)-k(x)=d(x), \\ l(x)=p(x)a(h(x))-r(x), m(x)=p(x)b(h(x))-s(x). \end{gathered}$$

При вказаному вище виборі коефіцієнтів $a(x)$ і $b(x)$, по-перше, існує функція $G(x;t)$ така, що єдиний розв'язок задачі (4.4) записується у вигляді

$$y(x)=\int_a^b G(x;t)u(t)dt, x\in(a;b), \tag{4.7}$$

і, по-друге, враховуючи умови (4.5), маємо

$$\begin{gathered} (By)(x)=g(x)y'(x)+k(x)y(x)+l(x)y'(h(x))+m(x)y(h(x))= \\ =g(x)y'(x)+k(x)y(x)+\begin{cases} 0, x\in(a;c), \\ l(x)y'(h(x))+m(x)y(h(x)), x\in(c;b). \end{cases} \end{gathered} \tag{4.8}$$

На основі формул (4.4), (4.7), (4.8) рівняння (4.6) легко записати у такому вигляді:

$$u(x)+p(x)u(h(x))=f(x)+\int_a^b K(x;t)u(t)dt, x\in(a;b),$$

де, очевидно

$$\begin{gathered} K(x;t)=(BG)(x;t)=g(x)G'_x(x;t)+k(x)G(x;t)+ \\ +\begin{cases} 0, x\in(a;c), c=h^{-1}(a), \\ l(x)G'_x(h(x);t)+m(x)G(h(x);t), x\in(c;b), t\in(a;b), \end{cases} \end{gathered} \tag{4.9}$$

причому, зважаючи на умови (4.3) і (4.5) при $x \in \left(h(x); a\right)$

$$u(x) = y''(x) + \frac{r(h^{-1}(x))}{p(h^{-1}(x))} y'(x) + \frac{s(h^{-1}(x))}{p(h^{-1}(x))} y(x) = 0. \tag{4.10}$$

Отже, показано, що крайова задача (4.1)-(4.3) рівносильна інтегро-функціональному рівнянню

$$\begin{gathered} u(x) + p(x)u(h(x)) = f(x) + \int_a^b K(x;t)u(t)dt,\ x \in (a;b), \\ u(x) = 0,\ x \in \left(h(a); a\right). \end{gathered} \tag{4.11}$$

Рівносильність розуміється так. Якщо $y(x)$ – розв'язок задачі (4.1)-(4.3), то функція $u(x) = y''(x) + a(x)y'(x) + b(x)y(x)$ – розв'язок рівняння (4.11), і, навпаки, якщо $u(x)$ − розв'язок рівняння (4.11), то функція $y(x)$, знайдена з задачі (4.4), є розв'язком крайової задачі (4.1)-(4.3).

Слід зазначити, що відповідно до припущень 1, 2 та властивостей функції Гріна з формули (4.9) випливає справедливість співвідношення

$$\int_a^b \int_a^b K^2(x;t)dxdt = K^2 < +\infty.$$

Інтегральний оператор $K$, такий що

$$\left(Kv\right)(x) = \int_a^b K(x;t)v(t)dt,\ \forall v(x) \in L_2(a;b),$$

відображає простір $L_2(a;b)$ в себе і є цілком неперервним.

Отже, крайова задача (4.1)-(4.3) є еквівалентною інтегро-функціональному рівнянню (4.11), розв'язок якого можна знайти. Зі сказаного випливає твердження.

**Теорема 4.1.** Крайова задача (4.1)-(4.3) має єдиний розв'язок тоді і тільки тоді, коли рівняння (4.11) має єдиний розв'язок.

*Доведення.* Рівняння (4.11) заміною $v(x) = \left(G^{-1}Su\right)(x)$, де оператори $G, S$ відповідно мають вигляд

$$(Gy)(x)=\begin{cases} y(x),\ x\in(a;c),\ c=h^{-1}(a),\\ y(x)-q(x)y(h(x)), x\in(c;b),\end{cases}$$

$$(Sv)(x)=\begin{cases} v(x),\ x\in(a;c),\ c=h^{-1}(a),\\ v(x)-q(x)v(h(x)),\ x\in(c;b),\end{cases}$$

зводиться до інтегрального рівняння Фредгольма другого роду з цілком неперервним оператором $T=G^{-1}KS^{-1}G$,

$$\left(Tv\right)(x)=\int_a^b T(x;t)v(t)dt.$$

Тоді, якщо одиниця – регулярне значення цього інтегрального оператора, то крайова задача (4.1)-(4.3) має єдиний розв'язок $y^*(x)\in L_2(a;b)$. *Теорему доведено.*

### 4.2. Метод послідовних наближень

Суть методу стосовно задачі (4.1)-(4.3) полягає в тому, що виходячи з деякого початкового наближення, наступні наближення шукаємо з крайової задачі

$$\left(Ay_k\right)(x)=f(x)+\left(Ay_{k-1}\right)(x)-\left(Ly_{k-1}\right)(x), x\in(a;b), \tag{4.12}$$

$$U_1\left[y_k\right]=U_2\left[y_k\right]=0,\ y_k(x)=0,\ x\in\left(h(a);a\right), \tag{4.13}$$

де

$$\begin{gathered}(Ay)(x)=y''(x)+a(x)y'(x)+b(x)y(x)+\\ +p(x)\left\{y''(h(x))+a(h(x))y'(h(x))+b(h(x))y(h(x))\right\},\end{gathered} \tag{4.14}$$

причому коефіцієнти $a(x)$ і $b(x)$, як вже зазначалось раніше, підбираються так, щоб задача (4.4) мала єдиний розв'язок при кожній функції $u(x)\in L_2(a;b)$.

Нехай

$$y_k''(x)+a(x)y_k'(x)+b(x)y_k(x)=u_k(x),\ U_1\left[y_k\right]=U_2\left[y_k\right]=0, \tag{4.15}$$

тоді з того, що задача розв'язується однозначно, випливає

$$y_k(x)=\int_a^b G(x;t)u_k(t)dt,\ \ x\in[a;b], \tag{4.16}$$

$$y_k(h(x))=\int_a^b G(h(x);t)u_k(t)dt,\ \ x\in[c;b]. \tag{4.17}$$

Оскільки співвідношення (4.16), (4.17) справедливі при будь-якому $k$, то, підставляючи їх у (4.12), (4.13) і враховуючи формули (4.15), (4.14), (4.9), отримаємо

$$\begin{gathered} u_k(x)+p(x)u_k(h(x))=f(x)+\int_a^b K(x;t)u_{k-1}(t)dt, x\in(a;b), \\ u_k(x)=0, x\in\left(h(a);a\right). \end{gathered} \tag{4.18}$$

З цього випливає, що метод послідовних наближень (4.12), (4.13) розв'язання крайової задачі зводиться до методу послідовних наближень (4.18) розв'язування інтегро-функціонального рівняння (4.11).

**Теорема 4.2.** Метод послідовних наближень (4.12), (4.13) збігається, тоді і тільки тоді, коли власні значення інтегрального оператора $\left(Tv\right)(x)$ лежать всередині одиничного круга з центром у початку координат.

## 4.3. Колокаційний метод

Згідно з колокаційним методом, наближений розв'язок задачі (4.1)-(4.3) шукатимемо з допоміжної задачі

$$\left(Ly_n\right)\left(x\right)=f(x), U_1\left[y_n\right]=U_2\left[y_n\right]=0,\ x\in\left(a;b\right), \tag{4.19}$$

$$y_n(x)=0,\ x\in\left(h(a);a\right), \tag{4.20}$$

у якій

$$y_n(x)=\sum_{j=1}^{n} a_j\eta_j(x). \tag{4.21}$$

Невідомі коефіцієнти $a_j=a_j(n)$ знаходимо з умови

$$f(x_i)-(Ly)(x_i)=0,\ i=\overline{1,n}, \tag{4.22}$$

де оператор $L$ знаходиться з формули (4.1), а $x_i \in [a,b]$ – вузли колокації.

В описаному алгоритмі система функцій $\{\eta_i(x)\}$ задовольняє рівняння

$$\begin{cases} (A\eta_i)(x) = \xi_i(x),\ x \in (a;b),\ i = \overline{1,n}, \\ U_1[\eta_i] = U_2[\eta_i] = 0,\ \eta_i(x) = 0,\ x \in (h(a);a), \end{cases} \tag{4.23}$$

$$\xi_i(x) = \begin{cases} \varphi_i(x),\ x \in (a;c), i = \overline{1,n}, \\ \varphi_i(x) + q(x)\varphi_i(h(x)),\ x \in (c;b), \end{cases} \tag{4.24}$$

де оператор $A$ має вигляд (4.14), $|q(x)| \le \bar{q} < \infty$, задана система лінійно-незалежних функцій і $c = h^{-1}(a)$.

Підставляючи вираз (4.21) у формулу (4.22) і виконавши нескладні перетворення, для визначення коефіцієнтів $a_j$ отримаємо систему алгебраїчних рівнянь

$$\sum_{j=1}^{n} \beta_{ij} a_j = b_i,\ i = \overline{1,n},$$

у якій

$$\beta_{ij} = (L\eta_j)(x_i),\ i, j = \overline{1,n},$$

$$b_i = f(x_i),\ i = \overline{1,n}. \tag{4.25}$$

Алгоритм (4.19)-(4.22) можна звести до колокаційного методу розв’язування інтегро-функціонального рівняння (4.11). Дійсно, введемо нову систему функцій $\{\xi_i(x)\}$, яку можна знайти за допомогою таких формул

$$\eta_i''(x) + a(x)\eta_i'(x) + b(x)\eta_i(x) = \xi_i(x),\ U_l[\eta_i] = 0,\ i = \overline{1,n},\ l = 1,2. \tag{4.26}$$

На основі даної заміни з урахуванням формули (4.21) неважко переконатися у справедливості співвідношення

$$y_n''(x) + a(x)y_n'(x) + b(x)y_n(x) = u_n(x),\ U_l[y_n] = 0,\ l = 1,2, \tag{4.27}$$

де

$$u_n(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j \xi_j(x). \tag{4.28}$$

З огляду на ці заміни, за допомогою формул (4.21), (4.14) легко переконатись у справедливості такого виразу

$$(Ay_n)(x) = u_n(x) + p(x)u_n(h(x)), x \in \left(a;b\right), \tag{4.29}$$

і вважаючи співвідношення (4.27) крайовими задачами, отримаємо

$$y_n(x) = \int_a^b G(x;t)u_n(t)dt. \tag{4.30}$$

Оскільки з формул (4.1), (4.14), (4.8) випливає рівність

$$(Ay_n)(x) - (Ly_n)(x) = (By_n)(x), \ x \in \left(a;b\right), \tag{4.31}$$

то, підставивши заміни (4.30), (4.27) у співвідношення (4.19), (4.22) і враховуючи при цьому формули (4.14), (4.31), (4.10), (4.29) і (4.28), отримаємо

$$\begin{gathered} u_n(x) + p(x)u_n(h(x)) = f(x) + \int_a^b K(x;t)u_n(t)dt, \ x \in \left(a;b\right), \\ u_n(x) = 0, \ x \in \left(h(a);a\right), \end{gathered} \tag{4.32}$$

$$r_n(x_i) = 0, \ i = \overline{1,n}, \tag{4.33}$$

$$r_n(x) = f(x) + \int_a^b K(x,t)u_n(t)dt - u_n(x) - p(x)u_n(h(x)). \tag{4.34}$$

Зрозуміло, що співвідношення (4.32)-(4.34) − це колокаційний метод розв'язання інтегро-функціонального рівняння (4.11).

## 4.4. Колокаційно-ітеративний метод

Суть методу стосовно задачі (4.1)-(4.3) полягає в тому, що, виходячи з початкового наближення, наступні наближення будемо шукати з допоміжної задачі

$$(Ay_k)(x) = f(x) + (Az_k)(x) - (Lz_k)(x), \ x \in \left(a;b\right), \tag{4.35}$$

$$U_1\left[y_k\right] = U_2\left[y_k\right] = 0, \ \ y_k(x) = 0, \ x \in \left(h(a);a\right), \tag{4.36}$$

у якій

$$z_k(x) = y_{k-1}(x) + w_k(x), \ \ w_k(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j^k \eta_j(x), \tag{4.37}$$

а невідомі параметри $a_j = a_j(n)$ знаходимо з умови

$$f(x_i) - (Lz_k)(x_i) = 0, i = \overline{1,n}. \qquad (4.38)$$

В описаному алгоритмі оператор $A$ має вигляд (4.14), а система функцій $\{\eta_i(x)\}$ знаходиться за допомогою формули (4.23), де, як і раніше, $|q(x)| \le \bar{q} < \infty,$ задана система лінійно-незалежних функцій і $c = h^{-1}(a)$.

На основі формул (4.37) та (4.38) для визначення невідомих параметрів отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\sum_{j=1}^{n} \beta_{ij} a_j^k = b_i^k, i = \overline{1,n}, \qquad (4.39)$$

у якій $\beta_{ij}$ мають вигляд (4.25),

$$b_i^k = f(x_i) - (Ly_{k-1})(x_i) = 0, i = \overline{1,n}. \qquad (4.40)$$

Алгоритм (4.35)-(4.38) можна звести до колокаційно-ітеративного методу розв’язування інтегро-функціонального рівняння (4.11).

Дійсно, якщо здійснити заміну

$$y_k''(x) + a(x)y_k'(x) + b(x)y_k(x) = u_k(x), \; U_l[y_k] = U_2[y_k] = 0 \qquad (4.41)$$

і ввести нову систему функцій $\{\xi_i(x)\}$, визначену за допомогою формули (4.26), неважко переконатися у справедливості такого співвідношення

$$w_k''(x) + a(x)w_k'(x) + b(x)w_k(x) = \alpha_k(x), \; U_l[w_k] = U_2[w_k] = 0, \qquad (4.42)$$

де

$$\alpha_k(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j^k \xi_i(x). \qquad (4.43)$$

Урахувавши ці заміни, за допомогою формул (4.37), (4.14) легко переконатися у справедливості такого виразу

$$(Az_k)(x) = u_{k-1}(x) + p(x)u_{k-1}(h(x)) + \alpha_k(x) + p(x)\alpha_k(x) \qquad (4.44)$$

та зважаючи на (4.41), (4.42) як крайові задачі, отримаємо

$$y_k(x) = \int_a^b G(x;t)u_k(t)dt, \;\; w_k(x) = \int_a^b G(x;t)\alpha_k(t)dt. \qquad (4.45)$$

З цього, випливає, що функцію $z_k(x)$, яка визначається першою формулою (4.36), можна записати у вигляді

$$z_k(x) = \int_a^b G(x;t)\{u_{k-1}(t) + \alpha_k(t)\}dt.$$

Введемо позначення

$$v_k(x) = u_{k-1}(x) + \alpha_k(x) \tag{4.46}$$

і отримаємо

$$z_k(x) = \int_a^b G(x;t) v_k(t)dt. \tag{4.47}$$

Оскільки з формул (4.1), (4.14), (4.8) випливає, що

$$(Az_k)(x) - (Lz_k)(x) = (Bz_k)(x),\ x \in \left(a;b\right) \tag{4.48}$$

і відповідно

$$r_k(x) = f(x) - (Lz_k)(x) = f(x) + (Bz_k)(x) - (Az_k)(x), \tag{4.49}$$

то, підставляючи заміни (4.41), (4.45), (4.47) у співвідношення (4.35), (4.38) і враховуючи при цьому формули (4.14), (4.48), (4.10), (4.45), (4.49) та (4.46), отримаємо

$$u_k(x) + p(x)u_k(h(x)) = f(x) + \int_a^b K(x;t) v_k(t)dt,\ x \in \left(a;b\right), \tag{4.50}$$

$$r_k(x_i) = 0, i = \overline{1,n}, \tag{4.51}$$

$$r_k(x) = f(x) + \int_a^b K(x;t) v_k(t)dt - v_k(x) - p(x)v_k(h(x)). \tag{4.52}$$

Якщо до попередніх міркувань додати початкову умову $u_k(x) = 0$, $x \in \left(h(a);a\right)$, то можна побачити, що алгоритм (4.50)-(4.52), (4.46) та (4.43) – це колокаційно-ітеративний метод розв’язування інтегро-функціонального рівняння (4.11).

## 4.5. Очислювальна схема

Безпосередньо обчислювати за допомогою формул (4.35)-(4.38) дещо незручно, тому пропонується одна із можливих обчислювальних схем, рівносильна початковому алгоритму. Перед тим, як описати схему, зауважимо, що в процесі обчислень за формулами (4.25) і (4.40) слід користуватись очевидними співвідношеннями

$$(L\eta_i)(x) = (A\eta_i)(x) - (B\eta_i)(x), \tag{4.53}$$

$$f(x) - (Ly_{k-1})(x) = f(x) + (By_{k-1})(x) - (Ay_{k-1})(x), \tag{4.54}$$

а систему рівнянь (4.39) доцільно записати у векторному вигляді $\Lambda a_k = b_k$. Обчислення, як завжди, можна розділити на допоміжні й основні.

Допоміжні обчислення: задаємо систему лінійно незалежних функцій $\{\varphi_i(x)\}, i = \overline{1,n},$ розв’язуємо допоміжні рівняння (4.24), (4.23), у результаті чого отримуємо системи функцій $\{\eta_j(x)\}, \{\xi_j(x)\},$ будуємо нову систему функцій

$$K_j(x) = (B\eta_j)(x), j = \overline{1,n}, \tag{4.55}$$

далі знаходимо елементи матриці $\Lambda$ за формулою

$$\beta_{ij} = \xi_j(x_i) - K_j(x_i)i, j = \overline{1,n}. \tag{4.56}$$

Знаходимо обернену матрицю $\Lambda^{-1}$ та початкове наближення визначаємо з рівнянь

$$\begin{gathered} u_0(x) + p(x)u_0(h(x)) = s_0(x), x \in (a;b), \\ u_0(x) = 0, x \in (h(a);a), \end{gathered} \tag{4.57}$$

$$\begin{cases} y_0''(x) + a(x)y_0'(x) + b(x)y_0(x) = u_0(x), x \in (a;b), \\ U_l[y_0] = U_2[y_0] = 0, \end{cases} \tag{4.58}$$

де $s_0$ – деяка задана функція з $L_2(a;b)$.

Основні обчислення: виходячи з відомих функцій $y_{k-1}(x)$ та $s_{k-1}(x)$, знаходимо функцію

$$v_k(x) = f(x) + (By_{k-1})(x) \tag{4.59}$$

та нев'язку

$$\varepsilon_k(x) = v_k(x) - s_{k-1}(x). \tag{4.60}$$

Обчислюємо вектор $b_k = \left\{b_1^k, b_2^k, ..., b_n^k\right\}$, де

$$b_i^k = \varepsilon_k(x_i), i = \overline{1,n}. \tag{4.61}$$

Складаємо рівняння $\Lambda a_k = b_k$ і знаходимо його розв'язок

$$a_k = \Lambda^{-1} b_k = \left\{a_1^k, a_2^k, ..., a_n^k\right\}, \tag{4.62}$$

утворюємо функцію

$$s_k(x) = v_k(x) + \sum_{j=1}^{n} a_j^k K_j(x). \tag{4.63}$$

Наближення $y_k(x)$ знаходимо з рівняння

$$\begin{gathered} u_k(x) + p(x)u_k(h(x)) = s_k(x), \; x \in (a;b), \\ u_k(x) = 0, \; x \in (h(a);a), \end{gathered} \tag{4.64}$$

$$\begin{cases} y_k''(x) + a(x)y_k'(x) + b(x)y_k(x) = u_k(x), \; x \in (a;b), \\ U_l\left[y_k\right] = U_2\left[y_k\right] = 0. \end{cases} \tag{4.65}$$

Зважаючи на формули (4.14), (4.48), (4.53) і (4.54) можна встановити рівносильність обчислювальної схеми (4.56)-(4.65) й алгоритму (4.35)-(4.38).

# РОЗДІЛ 5

# ІНТЕГРО-ФУНКЦІОНАЛЬНІ РІВНЯННЯ З ДОДАТКОВИМИ УМОВАМИ

## 5.1 . Лінійні інтегро-функціональні рівняння з обмеженнями

*5.1.1. Постановка задачі*

Широкий клас крайових задач для диференціальних рівнянь з відхиленням аргументу нейтрального типу зводиться до інтегро-функціональних рівнянь вигляду

$$y(x) = f(x) + p(x)y(h(x)) + \int_a^b K(x;t)y(t)dt,\ x \in [a;b], \tag{5.1}$$

$$y(x) = 0,\ x \notin [a;b]. \tag{5.2}$$

Щодо розв’язку цього рівняння може бути відома додаткова інформація, зокрема

$$\int_a^b \Phi_q(t)y(t)dt = \alpha_q,\ q = \overline{1,m}, \tag{5.3}$$

де $f:[a;b] \Rightarrow R, K:[a;b]^2 \Rightarrow R$ – задані, а $y:[a;b] \Rightarrow R$ – шукана функції, $\Phi_q:[a;b] \Rightarrow R$ і $\alpha_q \in R$ – відомі система лінійно-незалежних функцій та множина дійсних чисел. Щодо функцій $p(x), h(x)$ та $K(x;t)$ вважаємо, що вони, відповідно, на проміжку $[a;b]$ та у квадраті $[a;b]^2$ задовольняють умови

$$|p(x)| \le \overline{p}, \tag{5.4}$$

$h(x)$ – диференційована на $[a;b]$ і

$$h'(x) \ge l > 0,\ x - h(x) \ge \sigma > 0, \tag{5.5}$$

$$\int_a^b \int_a^b K^2(x;t)dxdt = K^2 < +\infty. \tag{5.6}$$

До інтегральних та інтегро-функціональних рівнянь з обмеженнями типу (5.3) зводяться перевизначені задачі для диференціальних, інтегро-диференціальних та диференціально-функціональних рівнянь.

У низці випадків, зокрема, коли шукається наближений розв'язок рівняння (5.1) з умовою (5.2), для спрощення процесу побудови цього розв'язку, бажано отримати додаткову інформацію щодо шуканого розв'язку. Покажемо, як таку інформацію можна отримати в описаному вище випадку.

Перш за все покажемо, що рівняння (5.1) при виконанні умов (5.2), (5.4)-(5.6) можна звести до інтегрального рівняння Фредгольма другого роду. Тобто, справедливе твердження.

**Теорема 5.1.** Задача (5.1)-(5.3) при виконанні умов (5.4)-(5.6) є рівносильною аналогічній задачі для інтегрального рівняння Фредгольма другого роду, тобто задачі

$$y(x) = f(x) + \int_a^b T(x;t)y(t)dt, \; x \in [a;b],$$

$$\int_a^b \Phi_q(x)y(x)dx = \alpha_q, \; q = \overline{1,m}.$$

Так, крім інтегрального, цілком неперервного оператора $K$, який визначається формулою

$$(Kv)(x) = \int_a^b K(x;t)v(t)dt, \; \forall v(x) \in L_2(a;b), \tag{5.7}$$

розглядатимемо оператор $S$ такий, що

$$(Sv)(x) = \begin{cases} v(x), \; x \in [a;h^{-1}(a)), \\ v(x) - p(x)v(h(x)), \; x \in [h^{-1}(a);b], \end{cases} \tag{5.8}$$

$v(x)$ – довільна функція $L_2(a;b)$.

Зауважимо, що оператор $S$, як і оператор $K$, діє із $L_2(a;b)$ в $L_2(a;b)$. Легко перевірити, що цей оператор є лінійним. Умови (5.4), (5.5) гарантують його обмеженість. Дійсно,

$$\|S\| = \sup_{\substack{v \in L_2, \\ v \neq 0}} \frac{\|(Sv)(x)\|}{\|v(x)\|} \le 1 + \sqrt{\frac{p^2(x)}{h'(x)}} \le 1 + \frac{\overline{p}}{\sqrt{l}} < \infty.$$

Крім того, задані умови говорять про те, що оператор $S$ оборотний. Обернений до нього оператор $S^{-1}$ має вигляд

$$(S^{-1}v)(x) = \begin{cases} v(x),\ x \in \left[a; h^{-1}(a)\right), \\ v(x) + \sum_{i=1}^{s} v(h^i(x)) \prod_{k=0}^{i-1} p(h^k(x)),\ x \in \Delta_s,\ s = \overline{1,m}, \end{cases} \tag{5.9}$$

$$\Delta_S = \left[c_{s-1}; c_S\right),\ c_0 = a,\ c_s = h^{-1}(c_{s-1}),\ c_m = b,$$
$$h^k(x) = h\left(h^{k-1}(x)\right),\ s = \overline{1,m}.$$

Іншими словами, співвідношення (5.9) – це розв’язок функціонального рівняння

$$y(x) - p(x)y(h(x)) = u(x),\ x \in [a;b],$$
$$y(x) = 0,\ x \notin [a;b]$$

($u(x)$ – відома, $y(x)$ – шукана функції) за допомогою методу кроків. Причому умова (5.3) гарантує той факт, що кількість кроків $m$ скінченна і

$$m < \frac{b-a}{\sigma}.$$

Неважко переконатися в тому, що оператор $S^{-1}$, як і оператор $S$, є лінійним та обмеженим. Отже, враховуючи вищезазначене, ми можемо розглядати рівняння (5.1) як операторне рівняння

$$(Sy)(x) = f(x) + (Ky)(x), \tag{5.10}$$

де, як і раніше, $f(x)$ – задана, $y(x)$ – шукана функції із $L_2(a;b)$.

Подіємо на рівняння (5.10) оператором $S^{-1}$ зліва, отримаємо

$$(S^{-1}Sy)(x) = (S^{-1}f)(x) + (S^{-1}Ky)(x),$$

тобто прийдемо до рівняння

$$y(x) = g(x) + (Ty)(x), \tag{5.11}$$

де

$$g(x)=\begin{cases} f(x),\ x\in[a;h^{-1}(a)), \\ f(x)+\sum\limits_{i=1}^{s} f(h^{i}(x))\prod\limits_{k=0}^{i-1} p(h^{k}(x)),\ x\in\Delta_s,\ s=\overline{1,m}, \end{cases} \tag{5.12}$$

$$\Delta_s=[c_{s-1};c_s),\ c_0=a,\ c_s=h^{-1}(c_{s-1}),\ c_m=b,$$

$$h^{k}(x)=h(h^{k-1}(x)), s=\overline{1,m}.$$

Оператор $T$ є цілком неперервним, його ядро має вигляд

$$T(x;t)=\begin{cases} K(x;t),\ x\in[a;h^{-1}(a)), \\ K(x;t)+\sum\limits_{i=1}^{s} K(h^{i}(x);t)\prod\limits_{k=0}^{i-1} p(h^{k}(x)),\ x\in\Delta_s,\ t\in[a;b]. \end{cases} \tag{5.13}$$

Тобто рівняння (5.11) – це інтегральне рівняння вигляду

$$y(x)=g(x)+\int_a^b T(x;t)y(t)dt. \tag{5.14}$$

Тепер задамо лінійно-незалежну на $[a;b]$ систему функції $\{\psi_q(x)\}_{q=1}^{m}$ і будемо поетапно домножати складові елементи рівняння (5.14) на ці функції з подальшим інтегруванням.

У результаті отримаємо додаткову інформацію у вигляді умов (5.3), у яких

$$\Phi_q(t)=\psi_q(t)-\int_a^b \psi_q(x)T(x;t)dx,\ \alpha_q=\int_a^b g(x)\psi_q(x)dx. \tag{5.15}$$

Ці умови, з урахуванням (5.12), (5.13), можна переформулювати щодо складових елементів вихідного інтегро-функціонального рівняння (5.1) так:

$$\Phi_q(t)=\psi_q(t)-\int_a^b \psi_q(x)K(x;t)dt-\sum_{s=1}^{m}\int_{c_{s-1}}^{c_s} \psi_q(x)\sum_{i=1}^{s} K(h^{i}(x);t)\prod_{k=0}^{i-1} p(h^{k}(x))dt, \tag{5.16}$$

$$\alpha_q=\int_a^b f(x)\psi_q(x)dx+\sum_{s=1}^{m}\int_{c_{s-1}}^{c_s}\sum_{i=1}^{s} f(h^{i}(x))\prod_{k=0}^{i-1} p(h^{k}(x))\psi_q(x)dx. \tag{5.17}$$

У випадку, коли існує функція $y:[a;b]\Rightarrow R$, яка є розв'язком рівняння (5.1) та задовольняє умови (5.2), (5.3), то вихідну задачу (5.1)-(5.3) вважатимемо сумісною. Якщо ж рівняння (5.1) з умовою (5.2) не має розв’язків, або ж не виконуються умови (5.3), то дана задача не буде сумісною.

У загальному випадку задача (5.1)-(5.3) як некерована перенасичена задача, є несумісною, але при певних вихідних даних вона може бути сумісною і допустима можливість відшукання розв’язку з використанням того чи іншого методу. З огляду на це виникають дві задачі:

1) встановлення умов, при виконанні яких задача (5.1)-(5.3) має єдиний розв’язок;

2) розробка наближених методів розв’язання цієї задачі.

Ці питання і є основним об’єктом досліджень у цьому розділі.

*5.1.2. Допоміжна задача*

Розглянемо задачу

$$y(x) = u(x) + z(x), \quad \int_a^b \Phi_q(t) y(t) dt = \alpha_q, \; q = \overline{1,m}, \tag{5.18}$$

де $z(x) \in L_2(a;b)$ – задана функція, та визначимо керування (корегуючу функцію) $u(x)$ так, щоб функція $y(x) \in L_2(a;b)$ задовольняла умови (5.18). Керування $u(x)$ шукатимемо у вигляді

$$u(x) = \sum_{q=1}^{m} \lambda_q \xi_q(x). \tag{5.19}$$

Варто мати на увазі, що система функцій $\left\{\xi_q(x)\right\}_{q=1}^{m} \subset L_2(a;b)$ є лінійно-незалежною, знаходиться в нашому розпорядженні та підбирається таким способом, що задача (5.18) завжди матиме єдиний розв’язок. Очевидно, що для того, щоб отримати цей розв’язок, достатньо перше рівняння (5.18) з урахуванням (5.19) підставити у другі умови (5.18). У результаті цього отримаємо систему лінійних рівнянь

$$\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\int_a^b \Phi_q(t)\xi_i(t)dt = \alpha_q - \int_a^b \Phi_q(t)z(t)dt,\ q=\overline{1,m}. \qquad (5.20)$$

Розв'язавши цю систему стосовно $\lambda_i,\ i=\overline{1,m}$, отримаємо

$$\lambda_i = \sum_{i=1}^{m}\beta_{iq}\left(\alpha_q - \int_a^b \Phi_q(t)z(t)dt\right),\ i=\overline{1,m}, \qquad (5.21)$$

де $\beta_{iq}$ – елементи матриці, оберненої до матриці системи (5.20). Далі підставляємо величини $\lambda_i$ виразу (5.21) у формулу (5.19). У результаті матимемо

$$u(x) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{q=1}^{m}\xi_i(x)\beta_{iq}\left(\alpha_q - \int_a^b \Phi_q(t)z(t)dt\right). \qquad (5.22)$$

Отже, розв'язок задачі (5.18) визначається формулами

$$u(x) = r(x) - \int_a^b R(x;t)z(t)dt, \qquad (5.23)$$

$$y(x) = r(x) + \int_a^b G(x;t)z(t)dt, \qquad (5.24)$$

де, з урахуванням (5.22)

$$r(x) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{q=1}^{m}\beta_{iq}\alpha_q\xi_i(x), \quad R(x,t) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{q=1}^{m}\beta_{iq}\xi_i(x)\Phi_q(t), \qquad (5.25)$$

$$G(x;t) = \delta(x-t) - R(x;t), \qquad (5.26)$$

($\delta(x-t)$ – функція Дірака).

Проаналізувавши останні формули, доходимо висновку, що матимуть місце співвідношення:

$$\int_a^b R(x;t)\xi_q(x)dt = \xi_q(x), \quad \int_a^b G(x;t)\xi_q(x)dt = 0, \qquad (5.27)$$

$$\int_a^b \Phi_q(x)R(x;t)dt = \Phi_q(x), \ \int_a^b \Phi_q(x)G(x;t)dt = 0, \tag{5.28}$$

$$\int_a^b \Phi_q(x)r(x)dt = \alpha_q, \ q = \overline{1,m}. \tag{5.29}$$

Нехай $U_m(a;b) \subset L_2(a;b)$ – підпростір, породжений системою лінійно-незалежних функцій $\{\xi_q(x)\}_{q=1}^m$, тоді для кожної функції $z(x) \in L_2(a;b)$ матиме місце вираз

$$z(x) = u(x) + v(x), \ u(x) \in U_m(a;b), v(x) \in V_m(a;b). \tag{5.30}$$

Тут $U_m(a;b) \oplus V_m(a;b) = L_2(a;b)$, причому

$$u(x) = \sum_{i=1}^m c_i \xi_q(x), \ \int_a^b v(x)\xi_q(x)dx = 0, \ q = \overline{1,m}. \tag{5.31}$$

Із формул (5.30), (5.31) як логічний висновок випливає істинність співвідношень

$$u(x) = \int_a^b P(x;t)z(t)dt, \ v(x) = \int_a^b Q(x;t)z(t)dt. \tag{5.32}$$

Зрозуміло, що оператори останніх рівностей – це оператори проектування елементів простору $L_2(a;b)$ на згадані вище підпростори. Їхні ядра мають відповідно вигляд

$$P(x;t) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \beta_{ij}\xi_i(x)\xi_i(t), \ Q(x;t) = \delta(x-t) - P(x;t). \tag{5.33}$$

Зважаючи на (5.27), матимемо:

$$\int_a^b R(x;t)u(t)dt = u(x), \ \int_a^b G(x;t)u(t)dt = 0, \ \forall u(x) \in U_m(a;b), \tag{5.34}$$

$$\int_a^b G(x;t)z(t)dt = \int_a^b G(x;t)v(t)dt, \ \forall z(x) \in L_2(a;b). \tag{5.35}$$

Слід зазначити той факт, що для довільної функції $y(x) \in L_2(a;b)$, яка задовольняє умови (5.3), виконуватимуться такі рівності

$$y(x) = r(x) + \int_a^b G(x;t)v(t)dt, \ v(x) = \int_a^b Q(x;t)y(t)dt. \tag{5.36}$$

Оскільки виконується співвідношення $y(x) = w(x) + v(x),$ $w(x) \in U_m(a;b),$ $v(x) \in V_m(a;b)$ і виконуються умови (5.3), то, зрозуміло, що задача (5.23) при $z(x) = v(x)$ матиме єдиний розв'язок $u(x) = w(x),$ а також буде істинною формула (5.24). Узявши в цій формулі $z(x) = v(x),$ отримаємо вираз (5.36).

*5.1.3. Задача, рівносильна початковій*

Початкову задачу (5.1)-(5.3) з урахуванням (5.18), (5.12), (5.13) перепишемо у вигляді задачі (5.18), тобто рівносильної задачі

$$y(x) = u(x) + z(x), \ \int_a^b \Phi_q(t)y(t)dt = \alpha_q, q = \overline{1,m}.$$

узявши в ній функцію $z(x),$ яка є розв'язком функціонального рівняння

$$z(x) - p(x)z(h(x)) = f(x) - u(x) + p(x)u(h(x)) + \int_a^b K(x;t)y(t)dt, \tag{5.37}$$

яке розв'яжеться покроково скінченною кількістю кроків. Зазначимо, що це рівняння є рівносильним рівнянню

$$z(x) = g(x) - u(x) + \int_a^b T(x;t)y(t)dt, \tag{5.38}$$

де $g(x)$ та $T(x;t)$ мають відповідно вигляд (5.12), (5.13).

Оскільки за припущенням допоміжна задача (5.18) має єдиний розв'язок, який виражається формулами (5.23), (5.24), то, підставляючи їх у співвідношення (5.38), отримаємо

$$z(x)=\varphi(x)+\int_a^b R(x;t)z(t)dt+\int_a^b\int_a^b T(x;\xi)G(\xi;t)d\xi dt, \qquad (5.39)$$

$$\varphi(x)=g(x)-r(x)+\int_a^b T(x;t)r(t)dt. \qquad (5.40)$$

Інтегральне рівняння (5.39) можна розглядати як систему рівнянь

$$z(x)=\varphi(x)+\int_a^b R(x;t)z(t)dt+\int_a^b F(x;t)v(t)dt, \qquad (5.41)$$

тут $F(x;t)=\int_a^b T(x;\xi)G(\xi;t)d\xi,$

$$v(x)=h(x)+\int_a^b L(x;t)v(t)dt. \qquad (5.42)$$

Для того, щоб цю систему отримати, достатньо використати властивість (5.35), відповідно до якої рівняння (5.39) набуває вигляду (5.41), далі проектуємо його на підпростір $V_m(a;b)$ та вводимо позначення

$$h(x)=\int_a^b Q(x;t)\varphi(t)dt, \;\; L(x;t)=\int_a^b Q(x;\xi)F(\xi;t)d\xi. \qquad (5.43)$$

Тепер можна показати, що задача побудови розв'язку рівняння (5.42), яка задовольняє умови

$$\int_a^b \Phi_q(x)\left(\varphi(x)+\int_a^b F(x;t)v(t)dt\right)dx=0,\; q=\overline{1,m}, \qquad (5.44)$$

є рівносильною відшуканню розв'язку задачі (5.1)-(5.3).

***Зауваження 5.1.*** Формули (5.39)-(5.41) можна записати в термінах вихідних величин початкового рівняння (5.1), тобто у вигляді відповідних інтегро-функціональних рівнянь, у яких фігурують функції $f(x)$, $p(x)$, $h(x)$. Для цього достатньо від функцій $g(x)$ та $T(x,t)$ шляхом елементарних перетворень, аналогічним наведеним вище, повернутися до згаданих величин

$f(x)$, $p(x)$, $h(x)$. Але якщо перехід від інтегро-функціонального рівняння (5.1) з умовою (5.2) до рівняння (5.14) вже здійснено, то доцільно подальші міркування проводити щодо цього рівняння.

***Теорема 5.2.*** Якщо рівняння (5.42) має єдиний розв'язок $v^*(x) \in V_m(a;b)$, який задовольняє умови (5.44), то функція

$$y^*(x) = r(x) + \int_a^b G(x;t)v^*(t)dt \tag{5.45}$$

буде розв'язком задачі (5.1)-(5.3), тобто задачі (5.14), (5.3).

У цьому випадку функція

$$v^*(x) = \int_a^b Q(x,t)y^*(t)dt \tag{5.46}$$

задовольняє рівняння (5.27) та умови (5.44).

*Доведення.* Дійсно, зважаючи на співвідношення (5.28), (5.29), ходимо висновку, що функція $y^*(x)$, яка визначається згідно з формулою (5.45) буде задовольняти умови (5.3). Покажемо, що вона є розв'язком інтегро-функціонального рівняння (5.1) з умовою (5.2), тобто вона є розв'язком інтегрального рівняння (5.14), оскільки останнє є еквівалентним (5.1), (5.2).

Спочатку переконаємось у тому, що виконується співвідношення

$$\int_a^b R(x;\eta)\left(\varphi(\eta) + \int_a^b F(x;t)v^*(t)dt\right)d\eta = 0, \tag{5.47}$$

яке безпосередньо випливає з умов (5.44) з урахуванням позначень (5.25). Далі, використавши формули (5.47), (5.40), (5.41), (5.46), (5.26), (5.35), (5.43), отримаємо

$$g(x) - y^*(x) + \int_a^b T(x;t)y^*(t)dt =$$

$$= g(x) - r(x) - \int_a^b G(x;t)v^*(t)dt + \int_a^b T(x;t)r(t)dt + \int_a^b T(x;t)\left(r(t) + \int_a^b G(x;\xi)v^*(\xi)d\xi\right)dt -$$

$$-\int_a^b T(x;t)r(t)dt = \varphi(x) + \int_a^b F(x;t)v^*(t)dt - \int_a^b R(x;\eta)\left(\varphi(\eta) + \int_a^b F(\eta;t)v^*(t)dt\right)d\eta -$$

$$-\int_a^b G(x;t)v^*(t)dt = \int_a^b G(x;\eta)\left(h(\eta) + \int_a^b L(\eta;t)v^*(t)dt - v^*(\eta)\right)d\eta = 0.$$

Оскільки функція $y^*(x)$ задовольняє умови (5.3), то на підставі формули (5.36)

$$y^*(x) = r(x) + \int_a^b G(x;t)v^*(t)dt \tag{5.48}$$

й із включення $r(x) \in U_m(a;b)$ та співвідношень (5.46), (5.48) матимемо

$$v^*(x) = \int_a^b Q(x;\eta)\int_a^b G(\eta;t)v^*(t)dtd\eta. \tag{5.49}$$

З огляду на формули (5.38), (5.42) та (5.48) отримаємо

$$\begin{gathered}\varphi(x) - \int_a^b G(x;t)v^*(t)dt + \int_a^b F(x;t)z(t;v^*(t))dt = \\ = g(x) - r(x) - \int_a^b G(x;t)v^*(t)dt + \int_a^b T(x;r(t))dt + \\ +\int_a^b\left(T(x;r(t)) + \int_a^b G(t;\xi)v^*(\xi)d\xi - T(x;r(t))\right)dt = \\ = g(x) - y^*(x) + \int_a^b T(x;y^*(t))dt = 0.\end{gathered} \tag{5.50}$$

Далі з урахуванням формул (5.43), (5.49) та (5.50) матимемо

$$\begin{gathered}h(x) + \int_a^b L(x;v^*(t))dt - v^*(x) = \\ = \int_a^b Q(x;\eta)\left(\varphi(\eta) + \int_a^b F(x;v^*(t))dt - \int_a^b G(\eta;t)v^*(t)dt\right)d\eta = 0,\end{gathered}$$

тобто $v^*(x) \in V_m(a;b)$ – розв'язок рівняння (5.42), який задовольняє умови (5.44). *Теорему доведено.*

***Теорема 5.3.*** Вихідна задача (5.1)-(5.3) та задача (5.42), (5.44) є одночасно розв'язними.

*Доведення.* Так, нехай рівняння (5.42) має єдиний розв'язок $v^*(x) \in V_m(a;b)$, який задовольняє умови (5.44). Тоді відповідно до попередніх міркувань функція $y^*(x) \in L_2(a;b)$, яка має вигляд (5.45), буде розв'язком задачі (5.1)-(5.3). Нехай ця ж задача, крім цього розв'язку, має ще один, інший розв'язок $y(x) \in L_2(a;b)$. Тоді, виходячи з формули (5.36), доходимо висновку, що матиме місце така рівність

$$y(x) = r(x) + \int_a^b G(x;t)\tilde{v}(t)dt, \ \tilde{v}(t) = \int_a^b Q(x;t)y(t)dt. \qquad (5.51)$$

Крім того, $\tilde{v}(x)$ є розв'язком рівняння (5.42), задовольняє умови (5.44) і $\tilde{v}(x) \in V_m(a;b)$. Оскільки задача (5.42), (5.44) має єдиний розв'язок, то, зрозуміло, що $\tilde{v}(x) = v^*(x)$. Отже, доходимо висновку, що й $y(x) = y^*(x)$, тобто задача (5.1)-(5.3) не може мати більше ніж один розв'язок.

Нехай існує єдиний розв'язок $y^*(x) \in L_2(a;b)$ рівняння (5.1), що задовольняє умовам (5.2), (5.3). Тоді, згідно попередніх міркувань, функція $v^*(x)$, яка виражається формулою (5.46), буде розв'язком задачі (5.42), (5.44). Нехай ця задача має ще один розв'язок $\tilde{v}(x) \in V_m(a;b)$, причому $\tilde{v}(x) \neq v^*(x)$. Тоді функція, що визначається співвідношенням (5.45), буде розв'язком задачі (5.1)-(5.3). Але аналіз рівностей

$$y^*(x) = w^*(x) + v^*(x), w^*(x) \in U_m(a;b),$$

$$y(x) = w(x) + \tilde{v}(x), w(x) \in U_m(a;b)$$

говорить про те, що $y^*(x) \neq y(x)$. Отже, вихідна задача (5.1)-(5.3) має два різних розв'язки, що протирічить припущенню.

Отже, з викладених вище міркувань випливає, що $v^*(x) = \tilde{v}(x)$, тобто задача (5.42), (5.44) також має єдиний розв'язок. *Теорему доведено*.

*5.1.4. Метод послідовних наближень*

Застосуємо до задачі (5.1)-(5.3) метод послідовних наближень, згідно з яким наближені розв'язки визначаємо з допоміжної задачі

$$y_k(x) = u_k(x) + z_k(x), \ \int_a^b \Phi_q(t) y_k(t) dt = \alpha_q, \ q = \overline{1,m}, \tag{5.52}$$

у якій $u_k(x) \in U_m(a;b)$ і $z_k(x)$ є розв'язком функціонального рівняння

$$z_k(x) - p(x) z_k\left(h(x)\right) = f(x) + \int_a^b K(x;t) y_{k-1}(t) dt. \tag{5.53}$$

Початкове наближення визначаємо із задачі (5.52) при $k = 0$ та заданої функції $z_0(x) \in L_2(a;b)$.

У випадку, коли у задачі (5.52) керування $u_k(x)$ шукається у вигляді

$$u_k(x) = \sum_{q=1}^{m} \lambda_q^k \xi_q(x), \tag{5.54}$$

для знаходження невідомих множників $\lambda_q^k, q = \overline{1,m}$ отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i^k \int_a^b \Phi_q(t) \xi_q(t) dt = \alpha_q - \int_a^b \Phi_q(t) z_k(t) dt, \ q = \overline{1,m}. \tag{5.55}$$

Ця система, відповідно до зробленого раніше припущення має єдиний розв'язок, тому послідовність наближених розв'язків визначається однозначно.

Можна показати, що коли задача (5.1)-(5.3) є сумісною й інтегральний оператор

$$(Lv)(x) = \int_a^b L(x;t) v(t) dt, \tag{5.56}$$

що відображає простір $V_m(a;b)$ в себе, є оператором стиску, то існуватиме єдиний розв'язок $y^*(x)$ задачі (5.1)-(5.3) і виконуватимуться співвідношення

$$\lim_{k \to \infty} y_k(x) = y^*(x), \ \lim_{k \to \infty} u_k(x) = 0. \tag{5.57}$$

*5.1.5. Колокаційно-ітеративний метод*

Відповідно до цього методу наближені розв'язки задачі (5.1)-(5.3) визначаємо з допоміжної задачі

$$y_k(x) = u_k(x) + z_k(x), \ \int_a^b \Phi_q(t) y_k(t) dt = \alpha_q, \ q = \overline{1,m}, \tag{5.58}$$

у якій керування $u_k(x) \in U_m(a;b)$ має вигляд

$$u_k(x) = \sum_{q=1}^{m} \lambda_q^k \xi_q(x), \tag{5.59}$$

а $z_k(x)$ – це розв'язок функціонального рівняння

$$z_k(x) - p(x) z_k\big(h(x)\big) = f(x) + \int_a^b K(x;t)\big(y_{k-1}(t) + w_k(t)\big) dt, \tag{5.60}$$

причому поправка $w_k(x)$ шукається у вигляді

$$w_k(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j^k \eta_j(x). \tag{5.61}$$

Невідомі коефіцієнти $a_j^k$ знаходимо з умов

$$w_k(x_i) = z_k(x_i) - y_{k-1}(x_i), \tag{5.62}$$

де $\{\eta_j(x)\}_{j=1}^{n}$ – відома система лінійно-незалежних функцій, $x_i, i = \overline{1,n}$ – вузли колокації.

Здійснивши певні перетворення, від формул (5.60)-(5.62) прийдемо до системи лінійних алгебраїчних рівнянь, розв'язавши яку, знайдемо $a_j^k, \ j = \overline{1,n}.$ А від формул (5.58), (5.59) перейдемо до системи рівнянь стосовно параметрів $\lambda_q^k, \ q = \overline{1,m}$.

Нехай система функцій $\{\eta_j(x)\}_{j=1}^{n}$ та $\{\varphi_j(x)\}_{j=1}^{n}, \varphi_j(x) \in V_m(a;b)$ пов'язані між собою співвідношенням

$$\eta_j(x) = \sigma_j(x) + \varphi_j(x), \ \int_a^b \Phi_q(t) \eta_j(t) dt, \ q = \overline{1,m}, \ j = \overline{1,n}, \tag{5.63}$$

де $\sigma_j(x)\in U_m(a;b)$. У цьому випадку розв'язок задачі (5.58) визначається за формулами

$$y_k(x)=r(x)+\int_a^b G(x;t)v_k(t)dt,\ v_k(x)=\int_a^b Q(x;t)z_k(t)dt, \tag{5.64}$$

але функція $v_k(x)\in V_m(a;b)$ знаходиться уже колокаційно-ітерактивним методом для рівняння (5.42), тобто

$$v_k(x)=h(x)+\int_a^b L(x;t)\big(v_{k-1}(t)+\omega_k(t)\big)dt, \tag{5.65}$$

$$\omega_k(x)=\sum_{j=1}^n a_j^k\varphi_j(x),\ v_k(x_i)-v_{k-1}(x_i)-\omega_k(x_i)=0, \tag{5.66}$$

$x_i,\ i=\overline{1,n}$ – вузли колокації.

Так, розв'язуючи задачу (5.63), матимемо

$$\eta_j(x)=\int_a^b G(x;t)\varphi_j(t)dt,\ j=\overline{1,n}. \tag{5.67}$$

Тому з урахуванням формул (5.61), (5.67) та (5.66) отримаємо

$$w_k(x)=\int_a^b G(x;t)\omega_k(t)dt. \tag{5.68}$$

Отже, з огляду на співвідношення (5.68) та той факт, що

$$y_k(x)=r(x)+\int_a^b G(x;t)v_k(t)dt, \tag{5.69}$$

матимемо

$$y_{k-1}(x)+w_k(x)=r(x)+\int_a^b G(x;t)\big(v_{k-1}(t)+w_k(t)\big)dt. \tag{5.70}$$

Здійснивши ряд перетворень, остаточно отримаємо

$$z_k(x)=\varphi(x)+r(x)+\int_a^b F(x;t)\big(v_{k-1}(t)+\omega_k(t)\big)dt. \tag{5.71}$$

Оскільки $w_k(x)=\rho_k(x)+\omega_k(x)$, $\omega_k(x)\in U_m(a;b)$, $\rho_k(x)\in V_m(a;b)$, $z_k(x)-y_{k-1}(x)=\rho_k(x)+v_k(x)-v_{k-1}(x)$, тому умова (5.62) набуде вигляду

(5.66). Слід також зазначити, що для керування $u_k(x)$ виконуватиметься рівність

$$u_k(x) = -\int_a^b R(x;\eta)\left(\varphi(\eta) + \int_a^b F(\eta;t)\big(v_{k-1}(t) + \omega_k(t)\big)dt\right)d\eta. \quad (5.72)$$

Отже, якщо

$$\lim_{k\to\infty} v_k(x) = v^*(x), \ \lim_{k\to\infty} \omega_k(x) = 0, \quad (5.73)$$

то, здійснюючи граничний перехід у формулах (5.64), (5.72) та враховуючи (5.73), матимемо

$$\lim_{k\to\infty} y_k(x) = y^*(x), \ \lim_{k\to\infty} u_k(x) = u^*(x). \quad (5.74)$$

Якщо вихідна задача (5.1)-(5.3) є сумісною, то в останній формулі $u^*(x) = 0$, а функція $y^*(x)$ є розв’язком цієї задачі. Якщо ж задача несумісна, то, додавши до правої частини рівняння (5.1) функцію $(Su^*)(x)$, отримаємо сумісну задачу. Іншими словами, задача

$$y(x) - p(x)y(h(x)) = f_1(x) + \int_a^b K(x;t)y(t)dt, \ x \in [a;b], \quad (5.75)$$

$$y(x) = 0, \ x \notin [a;b], \quad (5.76)$$

$$\int_a^b \Phi_q(x)y(x)dx = \alpha_q, \ q = \overline{1,m}, \quad (5.77)$$

де $f_1(x) = f(x) + u^*(x) - p(x)u^*(h(x))$, буде сумісною.

Якщо задача (5.1)-(5.3) сумісна, то відповідно до загальних положень теорії проекційно-ітеративних методів існуватиме такий номер $n_0$, що для кожного фіксованого $n \ge n_0$ послідовність $\{y_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$, побудована за допомогою методу (5.58)-(5.62), буде збігатися до розв’язку цієї задачі.

## 5.2. Один тип інтегро-функціональних рівнянь з обмеженнями

### *5.2.1. Постановка задачі*

Розглянемо в просторі $L_2\left[a;b\right]$ інтегро-функціональне рівняння

$$y(x)=f(x)+\int_a^b K(x;t)y(t)dt+\int_a^b H(x;t)y(h(t))dt, x\in\left[a;b\right], \qquad (5.78)$$

з умовою

$$y(x)=\psi(x), x\notin\left[a;b\right] \qquad (5.79)$$

та обмеженнями

$$\int_a^b \Phi_i(x)y(x)dx=\gamma_i, i=\overline{1,m}, \qquad (5.80)$$

де $f(x),\psi(x)$ – задані відповідно на $\left[a;b\right]$ та за його межами функції, а $y(x)-$ шукана функція. Лінійно-незалежна система функцій $\left\{\Phi_i(x)\right\}$ та числова множина $\left\{\gamma_i\right\}, i=\overline{1,m}-$ відомі. До рівняння (5.78) зводиться крайова задача для диференціального рівняння з відхиленням аргументу із запізненням, у випадку сталого запізнення $\Delta, h(x)=x-\Delta$.

Задачу (5.78)-(5.80) будемо вважати сумісною, якщо існує така функція $y(x)$, яка є розв'язком рівняння (5.78), що задовольняє умову (5.79) та обмеження (5.80).

Розглянемо випадок, коли функції $K(x;t), H(x;t)$ в квадраті $\left[a;b\right]^2$ задовольняють умови:

$$\int_a^b\int_a^b K^2(x;t)dxdt=K^2<+\infty\ , \qquad (5.81)$$

$$\int_a^b\int_a^b H^2(x;t)dxdt=H^2<+\infty\ , \qquad (5.82)$$

функція $h(x)$ є неперервною разом із своєю похідною на $\left[a;b\right]$ і справджуються нерівності

$$x-h(x)\geq\Delta>0, \quad (5.83)$$

$$h'(x)\geq l>0. \quad (5.84)$$

Покажемо, що рівняння (5.78) з умовою (5.79) при виконанні умов (5.81)-(5.84) зводиться до інтегрального рівняння Фредгольма другого роду. Перепишемо другий інтеграл правої частини рівняння (5.78) з урахуванням умови (5.79) так

$$\int_a^b H(x;t)y(h(t))dt=\int_a^{h^{-1}(a)} H(x;t)y(h(t))dt+\int_{h^{-1}(a)}^b H(x;t)y(h(t))dt=$$

$$=\int_a^{h^{-1}(a)} H(x;t)\psi(h(t))dt+\int_{h^{-1}(a)}^b H(x;t)y(h(t))dt=$$

$$=\varphi(x)+\int_{h^{-1}(a)}^b H(x;t)y(h(t))dt,$$

де $\varphi(x)$ – можна знайти.

З умови (5.58) випливає, що неперервна функція $s=h(t)$ буде зростаючою і для неї існуватиме обернена функція $t=h^{-1}(s), dt=\dfrac{ds}{h'\left(h^{-1}(s)\right)}$.

Тоді останній інтеграл матиме вигляд

$$\int_{h^{-1}(a)}^b H(x;t)y(h(t))dt=\int_a^{h(b)}\frac{H\left(x;h^{-1}(s)\right)}{h'\left(h^{-1}(s)\right)}y(s)ds=\int_a^b\tilde{H}(x;s)y(s)ds,$$

$$\tilde{H}(x;s)=\begin{cases}\dfrac{H\left(x;h^{-1}(s)\right)}{h'\left(h^{-1}(s)\right)}, s\in\left[a;h(b)\right],\\ 0, s\in(h(b);b], x\in[a;b].\end{cases} \quad (5.85)$$

Варто зазначити, що оператор $\tilde{H}$, який визначається рівністю

$$\left(\tilde{H}v\right)(x)=\int_a^b\tilde{H}(x;t)v(t)dt, \forall v(x)\in L_2[a;b] \quad (5.86)$$

з виконанням умов (5.82)-(5.84), як і оператор $K$, який має вигляд

$$(Kv)(x)=\int_a^b K(x;t)v(t)dt,\forall v(x)\in L_2[a;b],$$

буде Фредгольмовим.

Дійсно,

$$\int_a^b\int_a^b \tilde{H}^2(x;s)\,dxds = \int_a^b\int_a^b \frac{H^2\left(x;h^{-1}(s)\right)}{\left(h'\left(h^{-1}(s)\right)\right)^2}dxds \le \int_a^b\int_a^b \frac{H^2\left(x;h^{-1}(s)\right)}{h^2}dxds =$$

$$= \frac{1}{h^2}\int_a^b\int_a^b H^2\left(x;h^{-1}(s)\right)dxds \le \frac{H^2}{h^2} < \infty.$$

З урахуванням наведених міркувань рівняння (5.78) з умовою (5.79) запишемо так:

$$y(x) = f(x) + \int_a^b K(x;t)y(t)dt + \varphi(x) + \int_a^b \tilde{H}(x;s)y(s)ds$$

або

$$y(x) = f_1(x) + \int_a^b T(x;t)y(t)dt, \tag{5.87}$$

де

$$f_1(x) = f(x) + \varphi(t) = f(t) + \int_a^{h^{-1}(a)} H(x;t)\psi(h(t))dt, \tag{5.88}$$

$$T(x;t) = K(x;t) + \tilde{H}(x;t),\ (x;t) \in [a;b]^2. \tag{5.89}$$

**Теорема 5.4.** Рівняння (5.78) з умовою (5.79) при виконанні умов (5.81)-(5.84) зводиться до інтегрального рівняння (5.78) з цілком неперервним оператором $T$.

Це означає, що задача (5.78)-(5.80), у свою чергу, зводиться до аналогічної задачі (5.87), (5.80) для інтегрального рівняння Фредгольма другого роду і з її сумісності випливає сумісність вихідної задачі та навпаки. Дослідженню умов сумісності задачі (5.87), (5.80) присвячена низка наукових праць, зокрема [81, 87, 89]. Встановлений факт еквівалентності задач (5.78)-(5.80) та (5.88), (5.80) щодо їх сумісності дає можливість проводити подальші дослідження стосовно формулювання умов сумісності безпосередньо для задачі (5.78)-(5.80) та розгляду питання застосування до цієї задачі наближених методів.

*5.2.2. Задача з керуванням*

Розглянемо в просторі $L_2[a;b]$ задачу

$$\tilde{y}(x) = f(x) + \int_a^b K(x;t)\tilde{y}(t)dt + \int_a^b H(x;t)\tilde{y}(h(t))dt,\ x \in [a;b], \tag{5.90}$$

$$\tilde{y}(x) = \psi(x), x \notin [a;b], \tag{5.91}$$

$$\int_a^b \Phi_i(x)\tilde{y}(x)dx = \gamma_i + \int_a^b \Phi_i(x)u(x)dx, i = \overline{1,m}, \tag{5.92}$$

де $\tilde{y}(x)$ і $u(x)$ – шукані функції, причому

$$u(x) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \xi_j(x), \tag{5.93}$$

$\{\xi_j(x)\}$, $j = \overline{1,m}$, – деяка лінійно-незалежна система функцій і $\xi_j(x) = 0$, коли $x \notin [a;b]$.

Покажемо, що задача (5.90)-(5.92) еквівалентна деякому рівнянню без обмежень. Введемо заміну

$$\tilde{y}(x) = z(x) + \int_a^b K(x;t)u(t)dt + \int_a^b H(x;t)u(h(t))dt,\ x \in [a;b], \tag{5.94}$$

яку розглядатимемо, як допоміжну задачу, вважаючи в ній функцію $z(x)$ заданою, а функції $\tilde{y}(x)$ та $u(x)$ – шуканими. Підставляючи (5.93) в (5.94), а потім (5.93) та (5.94) у рівність (5.92), отримаємо

$$\int_a^b \Phi_i(x)\left\{ z(x) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \left( \int_a^b K(x;t)\xi_j(t)dt + \int_a^b H(x;t)\xi_j(h(t))dt \right) \right\} dx =$$

$$= \gamma_i + \int_a^b \Phi_i(x) \left( \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \xi_j(x) \right) dx, i = \overline{1,m}.$$

Перепишемо цю рівність так

$$\int_a^b \Phi_i(x)\left\{\sum_{j=1}^m \lambda_j\left(\xi_j(x)-\int_a^b K(x;t)\xi_j(t)dt-\int_a^b H(x;t)\xi_j(h(t))dt\right)\right\}dx=$$

$$=\int_a^b \Phi_i(x)z(x)dx-\gamma_i,\ i=\overline{1,m}.$$

Нехай

$$\eta_i(x)=\xi_j(x)-\int_a^b K(x;t)\xi_j(t)dt-\int_a^b H(x;t)\xi_j(h(t))dt. \tag{5.95}$$

Позначивши

$$\int_a^b \Phi_i(x)\eta_i(x)dx=a_{ij},\ \ b_i=\int_a^b \Phi_i(x)z(x)dx-\gamma_i, i, j=\overline{1,m}. \tag{5.96}$$

Останню рівність запишемо так

$$\sum_{j=1}^m a_{ij}\lambda_j=b_i, i=\overline{1,m}. \tag{5.97}$$

Отримали систему лінійних алгебраїчних рівнянь. Розглянемо випадок, коли матриця цієї системи, яку позначимо через $\Lambda$, невироджена і нехай $\Lambda^{-1}=(c_{ij}),\ i,\ j=\overline{1,m}$ – обернена матриця. Тоді

$$\lambda_j=\sum_{j=1}^m c_{ij}b_j,\ j=\overline{1,m} \tag{5.98}$$

і розв’язки допоміжної задачі (5.94), (5.92) запишемо так:

$$u(x)=\sum_{j=1}^m\sum_{i=1}^m \lambda_i\xi_j(x)=\sum_{j=1}^m\sum_{i=1}^m c_{ji}b_i\xi_j(x)=$$

$$=\sum_{j=1}^m\sum_{i=1}^m c_{ij}\left(\int_a^b \Phi_i(t)z(t)dt-\gamma_i\right)\xi_j(x)=$$

$$=\int_a^b\sum_{j=1}^m\sum_{i=1}^m c_{ji}b_i\xi_j(x)\Phi_i(t)z(t)dt-\sum_{j=1}^m\sum_{i=1}^m c_{ij}\gamma_i\xi_j(x).$$

Тобто

$$u(x)=\int_a^b R(x;t)z(t)dt-w(x), \tag{5.99}$$

$$R(x;t)=\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}c_{ij}\xi_j(x)\Phi_i(t), \tag{5.100}$$

$$w(x)=\sum_{j=1}^{m}\sigma_j\xi_j(x),\ \ \sigma_j=\sum_{j=1}^{m}c_{ji}\gamma_i,\ j=\overline{1,m}, \tag{5.101}$$

$$\tilde{y}(x)=u(x)+z(x)-\sum_{j=1}^{m}\lambda_i\eta_i(x)=u(x)+z(x)-\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}c_{ji}b_i\eta_j(x)=$$

$$=u(x)+z(x)-\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}c_{ji}\left(\int_a^b\Phi_i(t)z(t)dt-\gamma_i\right)\eta_j(x)=$$

$$=u(x)+z(x)-\int_a^b\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}c_{ji}\Phi_i(t)\eta_i(t)dt-\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}c_{ji}\gamma_i\eta_j(x)=$$

$$=u(x)+b(x)+\int_a^b G(x;t)z(t)dt,$$

$$G(x;t)=\delta(x-t)-\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}c_{ji}\eta_j(x)\Phi_i(t), \tag{5.102}$$

$$b(x)=\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}c_{ji}\gamma_i\eta_j(x)=\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}\sigma_i\eta_j(x). \tag{5.103}$$

Отже, справедливою є така теорема.

**Теорема 5.5.** Єдиний розв'язок допоміжної задачі (5.94), (5.92) має вигляд

$$u(x)=\int_a^b R(x;t)z(t)dt-w(x),\ \ y(x)=u(x)+b(x)+\int_a^b G(x;t)z(t)dt.$$

Задача (5.78)-(5.80) сумісна лише тоді, коли розв'язок $z^*(x)$ рівняння

$$z(x)=g(x)+\int_a^b M(x;t)z(t)dt \tag{5.104}$$

задовольняє умову

$$\int_a^b G(x;t)z^*(t)dt = w(x), \tag{5.105}$$

де

$$g(x) = f(x) + \int_a^b K(x;t)z(t)dt + \int_a^b H(x;t)b(h(t))dt, \tag{5.106}$$

$$M(x;t) = \int_a^b K(x;\xi)G(\xi;t)d\xi + \int_a^b H(x;\xi)G(h(\xi);t)dt. \tag{5.107}$$

Можна також показати, що умова (5.105) буде рівносильною умові

$$\int_a^b \Gamma_j(t)z^*(t)dt = \sigma_j,\ j = \overline{1,m}, \tag{5.108}$$

де

$$\Gamma_j(t) = \sum_{i=1}^m c_{ji}\Phi_i(t). \tag{5.109}$$

*5.2.3. Ітераційний метод*

Ідея ітераційного методу стосовно задачі (5.78)-(5.80) полягає в тому, що послідовні наближення до шуканого розв'язку знаходимо на основі формул

$$z_k(x) = f(x) + \int_a^b K(x;t)y_{k-1}(t)dt + \int_a^b H(x;t)y_{k-1}(h(t))dt,\ x \in [a;b], \tag{5.110}$$

$$y_{k-1}(x) = \psi(x),\ x \notin [a;b], \tag{5.111}$$

$$\tilde{y}_k(x) = z_k(x) + \int_a^b K(x;t)u_k(t)dt + \int_a^b H(x;t)u_k(h(t))dt,\ x \in [a;b], \tag{5.112}$$

$$u_k(x) = \sum_{j=1}^m \lambda_j^k \xi_i(x),\ x \in [a;b],\ \ u_k(x) = 0,\ x \notin [a;b], \tag{5.113}$$

$$\int_a^b \Phi_i(x)y_k(x)dx = \gamma_i,\ i = \overline{1,m},\ \ y_k(x) = \tilde{y}_k(x) - u_k(x). \tag{5.114}$$

Для визначення невідомих параметрів $\lambda_j^k,\ j=\overline{1,m}$ отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь. Дійсно, на основі наведених вище формул матимемо

$$y_k(x) = z_k(x) - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^k \eta_i(x). \tag{5.115}$$

Якщо підставити цю функцію в першу із формул (5.114) і скористатись позначенням (5.96), тоді отримаємо

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij}\lambda_j^k = b^k, i=\overline{1,m}, \tag{5.116}$$

де

$$b_i^k = \int_a^b \Phi_i(x) z_k(x) dx - \gamma_i, i=\overline{1,m}. \tag{5.117}$$

Зокрема, доходимо висновку, що є справедлива така теорема.

**Теорема 5.6.** Метод (5.113)-(5.117) буде збіжним, якщо матриця $\Lambda$ невироджена, задача (5.78)-(5.80) сумісна і $\rho(M)<1$, причому послідовність $\{y_k(x)\}$ збігатиметься до єдиного розв'язку $y^*(x)$ задачі (5.78)-(5.80), а послідовність $\{u_k(x)\}$ збігатиметься до нуля.

### *5.2.4. Колокаційно-ітеративний метод*

Послідовні наближення до шуканого розв'язку задачі (5.78)-(5.80) знаходимо на основі формул:

$$\begin{gathered} z_k(x) = f(x) + \int_a^b K(x;t)\big(y_{k-1}(t) + w_k(t)\big)dt + \\ + \int_a^b H(x;t)\big(y_{k-1}(h(t)) + w_k(h(t))\big)dt,\ x\in[a;b], \end{gathered} \tag{5.118}$$

$$y_{k-1}(x) = \psi(x),\ x \notin [a;b], \tag{5.119}$$

$$\tilde{y}_k(x) = z_k(x) + \int_a^b K(x;t)u_k(t)dt + \int_a^b H(x;t)u_k(h(t))dt,\ x\in[a;b], \tag{5.120}$$

$$u_k(x) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^k \xi_i(x),\ x \in [a;b],\ u_k(x) = 0,\ x \notin [a;b], \tag{5.121}$$

$$w_k(x) = \sum_{s=1}^{n} a_s^k \varphi_s(x), \tag{5.122}$$

де $\{\varphi_s(x)\}_{s=1}^{n}$ – деяка задана та лінійно-незалежна на $[a;b]$ система функцій. Для визначення невідомих параметрів $\lambda_j^k$, як і раніше, отримуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь, а невідомі коефіцієнти $a_s^k$ у формулі (5.122) знаходимо з умови

$$w_k(x_i) = z_k(x_i) - z_{k-i}(x_i) = 0, \tag{5.123}$$

де $x_i \in [a;b], i = \overline{1,n}$ – вузли колокації.

Можна показати, що справедливим є таке твердження.

**Теорема 5.7.** У випадку сумісності задачі (5.78)-(5.80) послідовні наближення $\{\tilde{y}_k(x)\}$, побудовані за допомогою методу (5.118)-(5.123), будуть при деякому $n$ збігатися до точного розв'язку цієї задачі, причому швидкість збіжності зростатиме із збільшенням $n$. При $w_k(x) \equiv 0$, як частковий випадок, отримаємо ітеративний метод (5.110)-(5.117).

## 5.3. Інтегро-функціональне рівняння з малою нелінійністю та обмеженнями

*5.3.1. Постановка задачі*

Розглянемо у просторі $L_2[a;b]$ інтегро-функціональне рівняння з малою нелінійністю

$$\begin{gathered} y(x) = f(x) + \int_a^b K(x;t)\, y(t)\, dt + \int_a^b H(x;t)\, y(h(t))\, dt + \\ + \varepsilon \int_a^b G(x;t)\, F(t; y(t))\, dt,\ x \in [a;b] \end{gathered} \tag{5.124}$$

з умовою

$$y(x)=\psi(x), x\notin[a;b] \tag{5.125}$$

та обмеженнями

$$\int_a^b \Phi_i(x)y(x)dx=\gamma_i,\ i=\overline{1,m}, \tag{5.126}$$

де $f(x),\psi(x)$ – задані відповідно на $[a;b]$та за його межами функції, а $y(x)$– шукана функція. Лінійно-незалежна система функцій $\{\Phi_i(x)\}$ та числова множина $\{\gamma_i\}, i=\overline{1,m}$ – відомі. До рівняння (5.124) зводиться крайова задача для диференціального рівняння з відхиленням аргументу із запізненням, у випадку сталого запізнення $\Delta, h(x)=x-\Delta$.

Задачу (5.124)-(5.126) вважатимемо сумісною, якщо існує така функція $y(x)$, яка є розв'язком рівняння (5.124), задовольняє умову (5.125) та обмеження (5.126).

Розглянемо випадок, коли функції $K(x;t), H(x;t), G(x;t)$ у квадраті $[a;b]^2$ задовольняють умови (5.81), (5.83) тобто

$$\int_a^b\int_a^b K^2(x;t)dxdt=K^2<+\infty\ ,$$

$$\int_a^b\int_a^b H^2(x;t)dxdt=H^2<+\infty\ ,$$

$$\int_a^b\int_a^b G^2(x;t)dxdt=G^2<+\infty; \tag{5.127}$$

функція $\Phi(t;y)$ в області $D=\{a\le t\le b, -\infty<y<+\infty\}$ вимірна за $t$ при всіх $y$, неперервна при всіх $t$ (умова Каратеодорі) і задовольняє умову Ліпшиця

$$|\Phi(t;y)-\Phi(t;\bar{y})|\le L|y-\bar{y}|,$$

де $L$ – деяка додатна стала;

функція $h(x)$ є неперервною разом із своєю похідною на $[a;b]$ і справджуються нерівності

$$x-h(x)\ge\Delta>0, \tag{5.128}$$

$$h'(x)\ge l>0. \tag{5.129}$$

На основі аналогічних міркувань, описаних у підпункті *5.2.1.*, можна показати, що рівняння (5.124) з умовою (5.125) при виконанні умов (5.127)-(5.129) зводиться до інтегрального рівняння з малою нелінійністю.

Рівняння (5.124) з умовою (5.125) запишемо так:

$$y(x) = f(x) + \int_a^b K(x;t)y(t)dt + \varphi(x) + \int_a^b \tilde{H}(x;s)y(s)ds +$$
$$+\varepsilon\int_a^b G(x;t)F(t;y(t))dt,\ x \in [a;b]$$

або

$$y(x) = f_1(x) + \int_a^b T(x;t)y(t)dt + \varepsilon\int_a^b G(x;t)F(t;y(t))dt, \tag{5.130}$$

де

$$f_1(x) = f(x) + \varphi(t) = f(t) + \int_a^{h^{-1}(a)} H(x;t)\psi(h(t))dt, \tag{5.131}$$

$$T(x;t) = K(x;t) + \tilde{H}(x;t), (x;t) \in [a;b]^2. \tag{5.132}$$

Отже, доведено, що рівняння (5.124) з умовою (5.125) при виконанні вказаних умов зводиться до інтегрального рівняння з малою нелінійністю (5.130) з цілком неперервним оператором $T$. Це означає, що задача (5.124)-(5.126), у свою чергу, зводиться до аналогічної задачі (5.130), (5.126) для інтегрального рівняння з малою нелінійністю і з сумісності випливає сумісність вихідної задачі і навпаки. Встановлений факт еквівалентності задач (5.124)-(5.126) та (5.130), (5.126) щодо їхньої сумісності дає можливість проводити подальші дослідження стосовно формулювання умов сумісності безпосередньо для задачі (5.130), (5.126) та розгляду питання застосування до цієї задачі наближених методів.

**Зауваження 5.2.** Умова (5.128) у наведених вище міркуваннях не є суттєвою. Вона впливає лише на визначення нових меж при згаданій заміні змінної в другому інтегралі рівняння (5.124) та вказує на те, що умова (5.125) виконується конкретно на проміжку $[h^{-1}(a);a)$. Ааналогічними міркуваннями керуємося і у випадку, коли стосовно функції $h(x)$ виконується лише умова

(5.129). Це говорить про те, що для цієї функції може існувати такий проміжок $\left[x_1;x_2\right]\subseteq\left[a;b\right]$ (чи декілька проміжків), що $h(x)\geq x,\ \forall x\in\left[x_1;x_2\right]$.

*5.3.2. Задача з керуванням*

Розглянемо в просторі $L_2\left[a;b\right]$задачу

$$\tilde{y}\left(x\right)=f\left(x\right)+\int_a^b K\left(x;t\right)\tilde{y}\left(t\right)dt+\int_a^b H\left(x;t\right)\tilde{y}\left(h(t)\right)dt+$$
$$+\varepsilon\int_a^b G\left(x;t\right)F\left(t;\tilde{y}\left(t\right)\right)dt,\ x\in\left[a;b\right], \tag{5.133}$$

$$\tilde{y}\left(x\right)=\psi(x),\ x\notin\left[a;b\right], \tag{5.134}$$

$$\int_a^b \Phi_i(x)\tilde{y}(x)dx=\gamma_i+\int_a^b \Phi_i(x)u(x)dx,\ i=\overline{1,m}, \tag{5.135}$$

де $\tilde{y}(x)$ і $u(x)$ – шукані функції, причому

$$u(x)=\sum_{j=1}^{m}\lambda_j\xi_j(x), \tag{5.136}$$

$\left\{\xi_j(x)\right\},\ j=\overline{1,m},$ – деяка лінійно-незалежна система функцій і $\xi_j(x)=0$, коли $x\notin\left[a;b\right]$.

Покажемо, що задача (5.133)-(5.135) еквівалентна деякому рівнянню без обмежень. Введемо заміну

$$\tilde{y}\left(x\right)=z\left(x\right)+\int_a^b K\left(x;t\right)u\left(t\right)dt+\int_a^b H\left(x;t\right)u\left(h(t)\right)dt+$$
$$+\varepsilon\int_a^b G\left(x;t\right)F\left(t;u\left(h(t)\right)\right)dt,\ x\in\left[a;b\right], \tag{5.137}$$

яку розглядатимемо, як допоміжну задачу, вважаючи в ній функцію $z\left(x\right)$ заданою, а функції $\tilde{y}\left(x\right)$ та $u\left(x\right)$ – шуканими. Підставляючи (5.136) в (5.137), а потім (5.136) та (5.137) у рівність (5.135), отримаємо

$$\int_a^b \Phi_i(x)\{z(x)+\sum_{j=1}^m \lambda_j(\int_a^b K(x;t)\xi_j(t)dt+\int_a^b H(x;t)\xi_j(h(t))dt)\}dx+$$

$$+\varepsilon\int_a^b G(x;t)F\left(t;\xi_j(t)\right)dt=\gamma_i+\int_a^b \Phi_i(x)\left(\sum_{j=1}^m \lambda_j\xi_j(x)\right)dx, i=\overline{1,m},$$

Перепишемо цю рівність так:

$$\int_a^b \Phi_i(x)\{\sum_{j=1}^m \lambda_j(\xi_j(x)-\int_a^b K(x,t)\xi_j(t)dt-\int_a^b H(x,t)\xi_j(h(t))dt)\}dx-$$

$$-\varepsilon\int_a^b G(x;t)F\left(t;\xi_j(t)\right)dt=\int_a^b \Phi_i(x)z(x)dx-\gamma_i,\ i=\overline{1,m}.$$

Нехай

$$\eta_j(x)=\xi_j(x)-\int_a^b K(x;t)\xi_j(t)dt-\int_a^b H(x;t)\xi_j(h(t))dt-$$

$$-\varepsilon\int_a^b G(x;t)F\left(t;\xi_j(t)\right)dt.$$

Позначивши

$$\int_a^b \Phi_i(x)\eta_j(x)dx=a_{ij},\ b_i=\int_a^b \Phi_i(x)z(x)dx-\gamma_i,\ i,j=\overline{1,m}. \qquad (5.138)$$

Останню рівність запишемо так:

$$\sum_{j=1}^m a_{ij}\lambda_j=b_i, i=\overline{1,m}.$$

Отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь. Розглянемо випадок, коли матриця цієї системи, яку позначимо через $\Lambda$, не вироджена і нехай $\Lambda^{-1}=(c_{ij}), i,j=\overline{1,m}$ – обернена матриця. Тоді

$$\lambda_j=\sum_{j=1}^m c_{ij}b_j,\ j=\overline{1,m}$$

і розв’язки допоміжної задачі (5.137), (5.135) запишемо так:

$$u(x)=\sum_{j=1}^m\sum_{i=1}^m \lambda_i\xi_j(x)=\sum_{j=1}^m\sum_{i=1}^m c_{ji}b_i\xi_j(x)=\sum_{j=1}^m\sum_{i=1}^m c_{ij}\left(\int_a^b \Phi_i(t)z(t)dt-\gamma_i\right)\xi_j(x)=$$

$$=\int_a^b \sum_{j=1}^m\sum_{i=1}^m c_{ji}b_i\xi_j(x)\Phi_i(t)z(t)dt-\sum_{j=1}^m\sum_{i=1}^m c_{ij}\gamma_i\xi_j(x).$$

Тобто

$$u(x)=\int_a^b R(x;t)z(t)dt-w(x),$$

$$R(x;t)=\sum_{j=1}^m\sum_{i=1}^m c_{ij}\xi_j(x)\Phi_i(t),$$

$$w(x)=\sum_{j=1}^m \sigma_j\xi_j(x),\;\; \sigma_j=\sum_{j=1}^m c_{ji}\gamma_i,\; j=\overline{1,m},$$

$$\tilde{y}(x)=u(x)+z(x)-\sum_{j=1}^m \lambda_i\eta_i(x)=u(x)+z(x)-\sum_{j=1}^m\sum_{i=1}^m c_{ji}b_i\eta_j(x)=$$

$$=u(x)+z(x)-\sum_{j=1}^m\sum_{i=1}^m c_{ji}\left(\int_a^b \Phi_i(t)z(t)dt-\gamma_i\right)\eta_j(x)=$$

$$=u(x)+z(x)-\int_a^b\sum_{j=1}^m\sum_{i=1}^m c_{ji}\Phi_i(t)\eta_i(t)dt-\sum_{j=1}^m\sum_{i=1}^m c_{ji}\gamma_i\eta_j(x)=$$

$$=u(x)+b(x)+\int_a^b P(x;t)z(t)dt,$$

$$P(x;t)=\delta(x-t)-\sum_{j=1}^m\sum_{i=1}^m c_{ji}\eta_j(x)\Phi_i(t),$$

$$b(x)=\sum_{j=1}^m\sum_{i=1}^m c_{ji}\gamma_i\eta_j(x)=\sum_{j=1}^m\sum_{i=1}^m \sigma_i\eta_j(x).$$

Отже, єдиний розв’язок допоміжної задачі (5.137), (5.135) має вигляд

$$u(x)=\int_a^b R(x;t)z(t)dt-w(x),\;\; y(x)=u(x)+b(x)+\int_a^b P(x;t)z(t)dt\,.$$

Задача (5.124)-(5.126) сумісна лише тоді, коли розв’язок $z^*(x)$ рівняння

$$z(x)=g(x)+\int_a^b M(x;t)z(t)dt,$$

задовольняє умову

$$\int_a^b P(x;t)z^*(t)dt=w(x) \tag{5.139}$$

де
$$g(x) = f(x) + \int_a^b K(x;t)z(t)dt + \int_a^b H(x;t)z(h(t))dt +$$
$$+\varepsilon\int_a^b G\left(x;t\right)F\left(t;z\left(t\right)\right)dt,$$
$$M(x;t) = \int_a^b K(x;\xi)P(\xi;t)d\xi + \int_a^b H(x;\xi)P(h(\xi);t)dt +$$
$$+\varepsilon\int_a^b G\left(x;t\right)F\left(t;z\left(t\right)\right)dt.$$

Можна також показати, що умова (5.139) буде рівносильною умові
$$\int_a^b \Gamma_j(t)z^*(t)dt = \sigma_j,\ j = \overline{1,m},$$
де
$$\Gamma_j(t) = \sum_{i=1}^m c_{ji}\Phi_i(t).$$

*5.3.3. Ітераційний метод*

Ідея ітераційного методу стосовно задачі (5.124)-(5.126) полягає в тому, що послідовні наближення до шуканого розв'язку знаходимо згідно з формулами
$$z_k\left(x\right) = f\left(x\right) + \int_a^b K\left(x;t\right)y_{k-1}\left(t\right)dt + \int_a^b H\left(x;t\right)y_{k-1}\left(h(t)\right)dt,\ x\in\left[a;b\right], \tag{5.140}$$
$$y_{k-1}\left(x\right) = \psi(x),\ x\notin\left[a;b\right], \tag{5.141}$$
$$\tilde{y}_k\left(x\right) = z_k\left(x\right) + \int_a^b K\left(x;t\right)u_k\left(t\right)dt + \int_a^b H\left(x;t\right)u_k\left(h(t)\right)dt,\ x\in\left[a;b\right], \tag{5.142}$$
$$u_k(x) = \sum_{j=1}^m \lambda_j^k \xi_i(x),\ x\in[a;b],\ u_k(x) = 0,\ x\notin[a;b], \tag{5.143}$$
$$\int_a^b \Phi_i(x)y_k(x)dx = \gamma_i,\ i = \overline{1,m},\ \ y_k(x) = \tilde{y}_k(x) - u_k(x). \tag{5.144}$$

Для визначення невідомих параметрів $\lambda_j^k,\ j = \overline{1,m}$ отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь. Дійсно, на основі наведених вище формул матимемо

$$y_k(x) = z_k(x) - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^k \eta_i(x).$$

Якщо підставити цю функцію в першу із формул (5.144) і скористатись позначенням (5.128), отримаємо

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij} \lambda_j^k = b^k, i = \overline{1,m},$$

де

$$b_i^k = \int_a^b \Phi_i(x) z_k(x) dx - \gamma_i, i = \overline{1,m}.$$

Доходимо висновку, що метод (5.140)-(5.144) буде збіжним, якщо матриця $\Lambda$ невироджена, задача (5.124)-(5.126) сумісна і $\rho(M) < 1$, причому послідовність $\{y_k(x)\}$ збігатиметься до єдиного розв'язку $y^*(x)$ задачі (5.124)-(5.126), а послідовність $\{u_k(x)\}$ збігатиметься до нуля.

У проведених дослідженнях розглянуто задачі для трьох типів інтегро-функціональних рівнянь з додатковими умовами. До таких рівнянь зводяться крайові задачі для диференціальних рівнянь зі змінним відхиленням аргументу нейтрального типу та із запізненням. Отримано умови сумісності поставлених задач. Поряд з цим також розглянуто допоміжну задачу з керуванням (корегуючим елементом). До цих задач застосовано ітеративний та колокаційно-ітеративний методи. Наведено умови збіжності цих методів. Вони ґрунтуються на тому, що досліджувані задачі можна звести до аналогічних для інтегрального рівняння Фредгольма другого роду. Окремо розглянуто задачу для інтегро-фнкціонального рівняння з малою нелінійністю та з обмеженнями.

Наведені в цьому розділі міркування можна перенести на крайові задачі для диференціальних рівнянь з відхиленням аргументу та з додатковими умовами.

# ВИСНОВКИ

Велика кількість природних явищ та різних процесів людської діяльності описується різними типами задач для диференціальних, інтегральних та інтегро-функціональних рівнянь. Особлива увага сучасних дослідників приділяється задачам, стосовно розв’язків яких відома додаткова інформація. Існує велика кількість публікацій присвячених розробці методів відшукання наближених розв’язків та встановленню умов сумісності таких задач. Але незважаючи на це, залишається відкритим питання розробки та обґрунтування колокаційно-ітеративного методу та його модифікацій до інтегро-функціональних рівнянь з додатковими умовами.

Моногрфія присвячена дослідженню колокаційно-ітеративного методу розв’язування інтегро-функціональних рівнянь. Одержано такі нові результати:

- побудовано та досліджено колокаційний та колокаційно-ітеративний методи розв’язування різних типів інтегро-функціональних рівнянь, як лінійних так і з малою нелінійністю, також досліджено випадки, коли ці рівняння розглядаються з додатковими умовами;
- обґрунтовано застосування колокаційно-ітеративного методу до нелінійних інтегро-функціональних рівнянь;
- отримано умови сумісності розглянутих задач;
- встановлено умови збіжності методів, у ряді випадків вказано оцінки похибок наближень, які характеризують швидкість збіжності методу;
- побудовано обчислювальні схеми, здійснено практичну реалізацію методів на конкретних прикладах та аналіз отриманих результатів.

Матеріали монографії можна застосовувати у подальших теоретичних дослідженнях наближених методів розв’язання операторних рівнянь, а також при дослідженні конкретних прикладних задач, де виникає необхідність розв’язування інтегро-функціональних рівнянь.

# СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Азбелев Н. В., Максимов В. П., Рахматуллина Л. Ф. Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. Москва : Наука, 1991. 280 с.
2. Ахмедов К. Т., Сваричевская Н. А., Ягубов М. А. Приближенное решение двухточечной краевой задачи с параметром методом осреднения функциональных поправок. *Докл. АН АзССР.* Баку, 1973. Т. 29, № 8. С. 3–7.
3. Бахвалов Н. С., Житков Н. П., Котельников Г. М. Численные методы. Москва : Наука, 1987. 600 с.
4. Беллман Р., Кук К. Л. Дифференциально-разностные уравнения. Москва : Мир, 1967. 548 с.
5. Боголюбов Н. Н. Избранные труды : в 3 т. Киев : Наук. думка, 1969. Т. 1. 648 с.
6. Боголюбов М. М. Нові методи в варіаційному численні. Київ : Техвидав, 1932. 110 с.
7. Бойчук А. А. Конструктивные методы анализа краевых задач. Киев : Наук. думка, 1990. 96 с.
8. Бойчук А. А., Журавлёв В. Ф., Самойленко А. М. Обобщённо-обратные операторы и нетеровы задачи. Киев : Ин-т математики НАН Украины, 1995. 319 с.
9. Бубнов И. Г. Отзыв о сочинениях проф. Тимошенко, удостоенных премии им. Д И. Журавского. *Сб. Ин-та сообщения.* 1913. Вып. 81. С. 1–5.
10. Вайберг М. М. Вариационный метод и метод монотонных операторов. Москва : Наука, 1972. 416 с.
11. Вайникко Г. М. Анализ дискретизационных методов. Тарту : Изд-во Тарт. ун-та, 1976. 161 с.

12. Вайникко Г. М. О сходимости и устойчивости метода коллокации. *Дифференц. уравнения.* 1965. 1, № 2. С. 244–254.
13. Вайникко Г. М. О сходимости метода коллокации для многомерных интегральных уравнений. *Учен. зап. Тарт. ун-та.* 1970. С. 244–257.
14. Вайникко Г. М. О сходимости метода коллокации для нелинейных дифференциальных уравнений. *Журн. вычисл. математики и мат. физики.* 1966. 6, № 1. С. 35–42.
15. Габдулхаев Б. Г. К численному решению интегральных уравнений методом механических квадратур. *Изв. вузов. Математика.* 1972. № 12. С. 23–39.
16. Габдулхаев Б. Г. Оптимальные аппроксимации решений линейных задач. Казань : Изд-во Казан. ун-та, 1980. 232 с.
17. Галеркин Б. Г. Стержни и пластины. Ряды в некоторых вопросах упругого равновесия стержнем и пластинок. *Вестн. инженеров.* 1915. № 19. С. 897–908.
18. Гарт Л.Л. Застосування проекційно-ітеративного методу, основаного на методі прямих, до розв'язування нелінійної еліптичної крайової задачі. *Питання прикладної математики і математичного моделювання*. – Д. : ДНУ, 2005. – С. 68–77.
19. Геселева К. Г. Дослідження на сумісність та відшукання наближених розв'язків інтегро-функціональних рівнянь з малою нелінійністю та обмеженнями. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки* : зб. наук. пр. / Ін-т кібернетики ім. В. М. Глушкова НАН України; Кам'янець-Поділ. нац. ун-т ім. Івана Огієнка. Кам'янець-Подільський, 2018. Вип. 17. С. 13–21.
20. Геселева К. Г. Ітераційний метод розв'язування інтегро-функціональних рівнянь з додатковими умовами. *Збірник наукових праць молодих вчених Кам'янець-Подільського національного*

*університету імені Івана Огієнка.* Кам’янець-Подільський, 2019. Вип. 10. С. 88–89.

21. Геселева К. Г. Колокаційний та колокаційно-ітеративний методи розв’язання інтегро-функціональних рівнянь з малою нелінійністю. *Математичне та комп’ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки :* зб. наук. пр. / Ін-т кібернетики ім. В. М. Глушкова НАН України; Кам’янець-Поділ. нац. ун-т ім. Івана Огієнка. Кам’янець-Подільський, 2015. Вип. 12. С. 19–27.
22. Геселева К. Колокаційний та колокаційно-ітеративний методи розв’язання крайових задач для диференціально-функціональних рівнянь. *Вісник КНУ ім. Т. Шевченка. Математика. Механіка.* 1(39)/2018. Київ : Вид.-поліграф. центр «Київський університет», 2018. С. 9–14.
23. Геселева К. Г. Колокаційно-ітеративний метод розв’язування інтегро-функціональних рівнянь з обмеженнями. *Математичне та комп’ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки* : зб. наук. пр. / Ін-т кібернетики ім. В М. Глушкова НАН України; Кам’янець-Поділ. нац. ун-т ім. Івана Огієнка. Кам’янець-Подільський, 2018. Вип. 18. С. 55–65.
24. Геселева К. Г. Колокаційно-ітеративний метод розв’язування інтегро-функціональних рівнянь. *Шістнадцята міжнародна наукова конференція ім. М. Кравчука «Диференціальні та інтегральні рівняння та їх застосування» : матеріали конф., 14-15 трав. 2015 р. / НТУУ «КПІ»*. Київ : КНУУ, 2015. С. 58–60.
25. Геселева К. Г. Колокаційно-ітеративний метод розв’язування інтегро-функціональних рівнянь з обмеженнями. *Міжнародна наукова конференція «Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках й інформаційних технологіях»* : матеріали конф., 17-19 верес. 2018р. Чернівці : Чернівецький нац. ун-т, 2018. С. 136–137.

26. Геселева К. Г. Колокаційно-ітеративний метод розв'язування лінійних інтегро-функціональних рівнянь. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки* : зб. наук. пр. / Ін-т кібернетики ім. В. М. Глушкова НАН України; Кам'янець-Поділ. нац. ун-т ім. Івана Огієнка. Кам'янець-Подільський, 2017. Вип. 16. С. 41–48.
27. Геселева К. Г. Колокаційно-ітеративний метод розв'язування нелінійного інтегрального рівняння з додатковими умовами. *Міжнародна конференція молодих математиків* : тези доп., 6-8 черв. 2019 р. Київ, 2019. С. 54.
28. Геселева К. Г. Побудова наближених розв'язків інтегро-функціональних рівнянь колокаційно-ітеративним методом. *Наукові праці Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка* : зб. за підсумками звіт. наук. конф. викл., докторантів і асп., 4-5 квіт. 2018 р. : у 3 т. Кам'янець-Подільський, 2018. Вип 17. Том 2. С. 38–41.
29. Геселева К. Г. Побудова наближених розв'язків інтегро-функціональних рівнянь з додатковими умовами колокаційно-ітеративним методом. *Міжнародна наукова конференція «Сучасні проблеми диференціальних рівнянь та їх застосування», присвячена 100-річчю від дня народження професора С. Д. Ейдельмана* : матеріали конф., 16-19 верес. 2020 р. Чернівці : Чернівецький нац. ун-т, 2020. С. 106–107.
30. Геселева К. Г. Розв'язання крайової задачі для звичайного диференціального рівняння колокаційно-ітеративним методом. *Міжнародна конференція, присвячена 75-річчю від дня народження доктора фізико-математичних наук, професора, лауреата Державної премії України в галузі науки і техніки Д. І. Мартинюка (1942-1996)* : матеріали конф., 19-21 трав. 2017 р. Кам'янець-Подільський : Аксіома, 2017. С. 23–24.

31. Геселева К. Г. Розв’язування інтегро-різницевих рівнянь колокаційно-ітеративним методом. *Всеукраїнська науково-практична конференція «Математика та інформатика у вищій школі: виклики сучасності» :* зб. наук. пр. за матеріалами конф., 18-19 трав. 2017 р. Вінниця : Вінниц. держ. пед. ун-т ім. Михайла Коцюбинського, 2017. С. 39–42.

32. Геселева К. Г. Сумісність та побудова наближених розв’язків інтегро-функціональних рівнянь з малою нелінійністю та обмеженнями. *«Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації»* : 8-ма Міжнар. наук. конф., присвяч. 100-річчю Нац. акад. наук України та 100-річчю Кам’янець-Поділ. нац. ун-ту ім. Івана Огієнка, 18-20 квіт. 2018 р. Кам’янець-Подільський, 1918. С. 96–97.

33. Геселева К. Г. Сумісність і побудова наближених розв’язків інтегро-функціональних рівнянь з обмеженнями. *Міжнародна наукова конференція «Сучасні проблеми механіки та математики»*, 22-25 трав. 2018 р. / ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України : зб. наук. пр. : у 3 т. Львів, 2018. Т. 3. С. 108–109.

34. Геселева К. Г., Конет І. М., Кріль С. О. Відшукання наближених розв’язків одного типу інтегро-функціональних рівнянь з обмеженнями колокаційно-ітеративним методом. *Буковинський математичний журнал.* Чернівці : Чернівецький нац. ун-т, 2020. Т. 8, № 1. С. 41−54.

35. Геселева К.Г., Кріль С.О. Застосування колокаційно-ітеративного методу до нелінійних інтегро-функціональних рівнянь. *Математичне та комп’ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки* : зб. наук. пр. / Ін-т кібернетики ім. В. М. Глушкова НАН України; Кам’янець-Поділ. нац. ун-т ім. Івана Огієнка. Кам’янець-Подільський, 2020. Вип. 21. С. 62–68.

36. Годунов С. К., Рябенький В. С. Разностные схемы. Москва : Наука, 1977. 440 с.

37. Головач Г. П., Калайда О. Ф. Наближені методи розв’язування операторних рівнянь. Київ : Вища школа, 1974. 248 с.
38. Гома И. А. Метод последовательных приближений в двухточечной краевой задаче с параметром. *Укр. мат. журн.* 1977. Т. 29, № 6. С. 800–806.
39. Гончаров В. Л. Теория интерполирования и приближения функций. Москва : Гостехиздат, 1954. 327 с.
40. Даугавет Н. К. Введение в теорию приближения функций. Ленинград : Изд-во Ленингр. ун-та, 1977. 184 с.
41. Даугавет Н. К., Нагих В. В. К вопросу об оптимальном выборе координатных функций и узлов в методе коллокации. *Методы вычислений.* Ленинград : Изд-во ЛГУ, 1976. С. 96–98.
42. Дзядык В. К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. Москва : Наука, 1977. 521 с.
43. Захарійченко Ю. О. Застосування проекційно-ітеративного методу до імпульсної задачі з параметрами та обмеженнями. *Доп. НАН України.* 2002. № 10. С. 12–17.
44. Захарійченко Ю. О. Методи розв’язання імпульсних систем диференціальних рівнянь з параметрами та обмеженнями. *Вісн. Нац. ун-ту «Львівська Політехніка»: Прикладна математика.* 2000. № 411. С. 143–147.
45. Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций / М. А. Красносельский и др.]. Москва : Наука, 1966. 500 с.
46. Канторович Л. В. Об одном новом методе приближенного решения дифференциальных уравнений в частных производных. *Докл. АН СССР.* 1934. 2, № 8–9. С. 532–536.
47. Канторович Л. В. Функциональный анализ и прикладная математика. *Успехи мат. наук.* 1948. 3, № 6. С. 89–185.
48. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. Москва : Наука, 1948. 752 с.

49. Каспшицькая М. Ф., Лучка А. Ю. О методе коллокации. *Журн. вычисл. математики и мат. физики.* 1968. 8, № 5. С. 950–964.

50. Каспшицькая М. Ф., Тукалевская Н. И. К вопросу о сходимости метода коллокации. *Укр. мат. журн.* 1967. 19, № 4. С. 43–56.

51. Келыш М. В. О методе Б. Г. Галеркина для решения краевых задач. *Изв. АН СССР. Сер. математ*. 1942. 6, № 6. С. 309–330.

52. Кибенко А. В. Метод последовательных приближений в двухточечной краевой задаче с параметрами. *Учен. зап. Ленингр. ун-та.* 1961. № 6. С. 13–21.

53. Кибенко А. В. Функция Грина краевой задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с параметром. *Докл. АН СССР.* 1963. № 3. С. 309–314.

54. Киш О. О. О сходимости метода совпадения. *Acta math. akad. scient. Hung.* 1966. 17, № 3-4. С. 433–442.

55. Ковтун О. І. Наближені методи побудови розв'язків нелінійних інтегральних рівнянь зі слабкою нелінійністю з обмеженнями. *Вісн. Київ. ун-ту. Серія: Фіз.-мат. науки*. 2004. № 3. С. 216–225.

56. Ковтун О. І. Наближені методи побудови розв'язання нелінійних інтегральних рівнянь зі слабкою нелінійністю з обмеженнями. *Вісн. Київ. ун-ту. Серія: Фіз.-мат. науки.* 2004. Вип. № 2. С. 111–120.

57. Ковтун О. І. Нелінійні інтегральні рівняння зі слабкою нелінійністю і обмеженнями на шукану функцію. *Вісн. нац. ун-ту «Львівська політехніка». Прикладна математика*. 2000. № 411. С. 174–177.

58. Ковтун О. І. Проекційно-ітеративні методи для інтегральних рівнянь зі слабкою нелінійністю і додатковими умовами. *Нелінійні коливання.* 2000. 3, № 3. С. 365–374.

59. Коллатц Л. Ю. Функциональный анализ и вычислительная математика. Москва : Мир, 1969. 448 с.

60. Конет И. М., Геселева К. Г. Коллокационный и коллокационно-итеративный методы решения интегро-функционального уравнения.

*Часопіс «Веснік Брэсцкага універсітэта». Серыя 4. Фізіка. Матэматыка.* 2017. № 2. С. 82–89.

61. Корнейчук Н. П. Экстремальные задачи теории приближения. Москва : Наука, 1976. 320 с.
62. Кравчук М. П. Застосування способу моментів до розв'язування лінійних диференціальних та інтегральних рівнянь. Київ : Вид-во ВУАН, 1936. Вип. 2. 370 с.
63. Красносельский М. А. Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений. Москва : Гостехиздат, 1956. 392 с.
64. Криль С. А. Решение интегро-разностных уравнений с малой нелинейностью проекционно-итеративным методом. Киев : Ин-т математики, 1987. 35 с. (Препринт. АН УССР, Ин-т математики; 87-17).
65. Крылов Н. М. Избранные труды : в 3 т. Киев : Изд-во АН УССР, 1961. Т. 1. 266 с.
66. Крылов Н. М. Избранные труды : в 3 т. Киев : Изд-во АН УССР, 1961. Т. 2. 308 с.
67. Крылов Н. М. Избранные труды : в 3 т. Киев : Изд-во АН УССР, 1961. Т. 3. 352 с.
68. Курпель М. С. Про одне узагальнення методу осереднення функціональних поправок. *Доп. АН УРСР.* 1965. № 8. С. 1005–1009.
69. Курпель Н. С. Проекционно-итеративные методы решения операторных уравнений. Киев : Наук. думка, 1968. 244 с.
70. Курпель Н. С., Марусяк А. Г. Об одной многоточечной краевой задаче для дифференциальных уравнений с параметрами. *Укр. мат. журн.* 1980. 32, № 2. С. 223–226.
71. Кучерук Т. А. Ітераційний метод побудови розв'язків рівнянь з малою нелінійністю та обмеженнями. *Нелінійні коливання.* 2002. Т. 5, № 1. С. 32–40.

72. Кучерук Т. А. Крайова задача для звичайних диференціальних рівнянь з додатковими умовами та її розв'язання ітераційним методом. *Доп. НАН України*. 2002. № 12. С. 17–20.
73. Лебедев В. И. О КР-методе ускорения сходимости итераций при решении кинетического уравнения. *Численные методы решения задач математической физики.* Москва, 1966. С. 154–176.
74. Лебедев В. И. Об итерационном КР-методе. *Журн. вычисл. математики и мат. физики.* 1967. 7, № 6. С. 1250–1269.
75. Луцев Е. М. Коллокационно-итеративный метод решения линейных интегральных уравнений Фредгольма второго рода. *Методы исследования дифференциальных и интегральных операторов.* Киев : Наук. думка, 1989. С. 132–138.
76. Луцев Е. М. Об одном варианте проекционно-итеративного метода. *Приближения и качественные методы теории дифференциально-функциональных*. Киев, 1983. С. 54–63.
77. Лучка А. Ю. Вариационно-итеративный метод. Киев : Ин-т математики, 1983. 52 с. (Препринт. АН УССР, Ин-т математики; 83-55).
78. Лучка А. Ю. Достаточные условия сходимости модифицированного проекционно-итеративного метода для уравнений со слабой нелинейностью. *Укр. мат. журн.* 1990. Т. 42, № 12. С. 1626–1635.
79. Лучка А. Ю. Застосування проекційно-ітеративного методу до крайової задачі для диференціальних рівнянь з імпульсною дією. *Доп. АН України.* 1993. № 9. С. 10–14.
80. Лучка А. Ю. Интегральные уравнения с ограничениями и методы их решения. *Кибернетика и системный анализ.* 1996. № 3. С. 82–96.
81. Лучка А. Ю. Краевая задача для дифференциальных уравнений с параметрами и ее решение проекционным методом. *Докл. АН УССР. Сер. А.* 1989. № 9. С. 12–15.

82. Лучка А. Ю. Крайова задача для диференціальних рівнянь з імпульсною дією і побудова її розв'язку проекційним методом. *Доп. АН України.* 1993. № 8. С. 11–16.
83. Лучка А. Ю. Критерии сходимости проекционно-итеративного метода для нелинейных уравнений. Киев : Ин-т математики, 1982. 54 с. (Препринт. АН УССР, Ин-т математики; 82-24).
84. Лучка А. Ю. Метод интегральных уравнений исследования краевой задачи для системы дифференциальных уравнений с параметрами. *Докл. АН УССР. Сер. А.* 1990. № 8. С. 18–22.
85. Лучка А. Ю. Методи дослідження систем диференціальних рівнянь з імпульсним впливом. *Укр. мат. журн.* 1998. Т. 50, № 2. С. 189–194.
86. Лучка А. Ю. Методи розв'язання рівнянь з обмеженнями і проекційно-ітеративний метод Ю. Д. Соколова. *Укр. мат. журн.* 1996. Т. 48, № 11. С. 1501–1509.
87. Лучка А. Ю. Применение итерационных процессов к краевым задачам для дифференциальных уравнений с параметрами. *Докл. АН УССР. Сер. А.* 1989. № 10. С. 22–27.
88. Лучка А. Ю. Проекційно-ітеративний метод для диференціальних рівнянь з обмеженнями. *Нелінійні коливання.* 2002. Т. 5, № 4. С. 465–488.
89. Лучка А. Ю. Проекционно-итеративные методы. Киев : Наук. думка, 1993. 288 с.
90. Лучка А. Ю. Проекционно-итеративные методы решения линейных дифференциальных и интегральных уравнений. Киев : Наук. думка, 1980. 264 с.
91. Лучка А. Ю. Теория и применение метода осреднения функциональных поправок. Киев : Изд-во АН УССР, 1963. 128 с.
92. Лучка А. Ю., Захарійченко Ю. О. Дослідження систем диференціальних рівнянь з параметрами в імпульсних умовах та обмеженнях. *Нелінійні коливання.* 2000. Т. 3, № 4. С. 218–225.

93. Лучка А. Ю., Захарійченко Ю. О. Методи дослідження імпульсних систем диференціальних рівнянь з параметрами та обмеженнями. *Теорія обчислень.* Київ : Ін-т кібернетики ім. В. М. Глушкова, 1999. С. 232–236.
94. Лучка А. Ю., Кучерук Т. А. Ітераційний метод побудови розв'язків лінійних рівнянь з обмеженнями. *Укр. мат. журн.* 2002. Т. 54, № 4. С. 472–482.
95. Лучка А. Ю., Листопадова В. В. Об одном варианте проекционно-итеративного метода для многоточечной задачи с параметрами. *Докл. НАН Украины.* 1992. № 11. С. 13–18.
96. Лучка А. Ю., Луцев Е. М. Быстрота сходимости одного проекционно-итеративного метода, основанного на тригонометрической коллокации для линейных интегральных уравнений с параметрами. *Докл. АН УССР. Сер. А.* 1984. № 10. С. 10–13.
97. Лучка А. Ю., Луцев Е. М. О быстроте сходимости одного варианта проекционно-итеративного метода. *Приближенные и качественные методы теории дифференциально-функциональных уравнений.* Киев : Ин-т математики АН УССР, 1983. С. 47–54.
98. Лучка А. Ю., Лучка Т. Ф. Возникновение и развитие прямых методов математической физики. Киев : Наук. думка, 1985. 240 с.
99. Лучка А. Ю., Нощенко О. Э., Н. И. Тукалевская. Вариационно-градиентный метод. *Журн. вычисл. мат. и мат. физики.* 1984. Т. 24, № 7. С. 963–971.
100. Лучка А. Ю., Ферук В. А. Модифікований проекційно-ітеративний метод для системи квазілінійних диференціальних рівнянь із запізненням та обмеженнями. *Нелінійні коливання.* 2004. Т. 7, № 2. С. 188–207.
101. Марчук Г. М. Методы вычислительной математики. Москва : Наука, 1980. 536 с.

102. Митропольский Ю. А., Кореневский Д. Г. Применение асимптотических методов к системам с распределенными параметрами и запаздыванием. *Прикл. механика.* 1969. Т. 5, № 4. С. 22–31.

103. Михлин С. Г. Вариационные методы в математической физике. Москва : Наука, 1970. 512 с.

104. Михлин С. Г. Численная реализация вариационных методов. Москва : Наука, 1966. 432 с.

105. Натансон И. П. Конструктивная теория функций. Москва : Гостехиздат, 1949. 635 с.

106. Немыцкий В. В. Метод неподвижных точек в анализе. *Успехи мат. наук.* 1936. Т. 1. С. 141–174.

107. Перестюк Н. А. Устойчивость решений линейных систем с импульсным воздействием. *Вестн. Киев. ун-та. Математика и механика.* 1977. Вып. 19. С. 71–76.

108. Перестюк М. О., Слюсарчук В. Ю. Умови існування неосцилюючих розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь з запізненням та імпульсним впливом у банаховому просторі. *Укр. мат. журн.* 2003. Т. 55, № 6. С. 956–965.

109. Петровский И. Г. Лекции по теории интегральных уравнений. Москва : Наука, 1965. 127 с.

110. Поліщук О. Б. Модифікований проекційно-ітеративний метод розв'язання сингулярного інтегрального рівняння з параметрами та з малою не лінійністю. *Укр. мат. журн.* 1999. Т. 51, № 3. С. 418–422.

111. Поліщук О. Б. Умови сумісності задачі з обмеженнями для сингулярних інтегральних рівнянь. *Нелінійні коливання.* 2000. № 4. С. 511–514.

112. Польский Н. И. Проекционные методы в прикладной математике. *Докл. АН СССР.* 1962. 143, № 4, С. 787–790.

113. Польский Н. И. Проекционные методы решения линейных задач. *Успехи мат. наук.* 1963. Т. 18, № 2. С. 175–180.

114. Поселюжна В. Б. Про достатні умови збіжності модифікованого колокаційно-ітеративного методу розв’язування нелінійних рівнянь / *Нелінійні коливання.* 2002. Т. 5, № 1. С. 66–76.
115. Поселюжна В. Б., Семчишин Л. М. До питання збіжності колокаційно-ітеративного методу розв’язування крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь з імпульсним впливом та параметрами. *Математичне та комп’ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки* : зб. наук. пр. / Ін-т кібернетики ім. В. М. Глушкова НАН України; Кам’янець-Поділ. нац. ун-т ім. Івана Огієнка. Кам’янець-Подільський, 2011. Вип. 5. С. 213–225.
116. Поселюжна В. Б., Семчишин Л. М. Колокаційно-ітеративний метод розв’язування диференціальних та інтегральних рівнянь : монографія / Терноп. нац. екон. ун-т. Тернопіль : Економічна думка, 2013. 203 с.
117. Поселюжна В. Б., Семчишин Л. М. Розв’язування деяких класів інтегральних рівнянь нестаціонарним колокаційно-ітеративним методом. *Математичне та комп’ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки* : зб. наук. пр. / Ін-т кібернетики ім. В. М. Глушкова НАН України; Кам’янець-Поділ. нац. ун-т ім. Івана Огієнка. Кам’янець-Подільський, 2012. Вип. 6. С. 195–204.
118. Приближенное решение операторных уравнений / Красносельский М. А. и др. Москва : Наука, 1969. 456 с.
119. Ронто Н. И. О методе коллокации для многоточечной краевой задачи *Укр. мат. журн.* 1993. 35, № 4. С. 524–527.
120. Ронто Н. И., Король Н. И. Исследование и решение краевых задач с параметрами численно-аналитическим методом. *Укр. мат. журн.* 1994. Т. 46, № 8. С. 1031–1042.
121. Ронто Н. И., Ронто В. А. Об одном методе исследования краевых задач с параметрами. *Краевые задачи математической физики.* Киев : Наук. думка, 1990. С. 3–10.
122. Самарский А. А. Теория разностных схем. Москва : Наука, 1977. 65 с.

123. Самарский А. А., Гулин А. В. Устойчивость разностных схем. Москва : Наука, 1973. 416 с.
124. Самойленко А. М., Лучка А. Ю., Листопадова В. В. Краевая задача для системы дифференциальных уравнений с импульсным воздействием и параметрами и её решение проекционным методом. *Докл. НАН Украины.* 1994. № 1. С. 21–25.
125. Самойленко А. М., Лучка А. Ю., Листопадова В. В. О применении итерационных процессов к краевой задаче для системы дифференциальных уравнений с импульсным воздействием и параметрами. *Докл. НАН Украины.* 1994. № 2. С. 15–20.
126. Самойленко А. М., Перестюк Н. А. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. Киев : Вища школа, 1987. 287 с.
127. Самойленко А. М., Ронто Н. И. Численно-аналитические методы исследования периодических решений задач. Киев : Наук. думка, 1976. 180 с.
128. Самойленко А. М., Ронто Н. И. Численно-аналитические методы исследования решений краевых задач. Киев : Наук. думка, 1986. 224 с.
129. Самойленко А. М., Ронто. Н. И., Ронто В. А. Двухточечная краевая задача с параметром в граничных условиях. *Докл. АН УССР. Сер. А.* 1985. № 7. С. 23–26.
130. Сеидов З. Б. Краевая задача с параметром для систем дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом. *Укр. мат. журн.* 1976. Т. 28, № 5. С. 671–677.
131. Соколов Ю. Д. Метод усреднения функциональных поправок. Киев : Наук. думка, 1968. 336 с.
132. Стечкин С. Б., Субботин Ю. Н. Сплайны в вычислительной математике. Москва : Наука, 1976. 248 с.
133. Тивончук В. І. Про розв’язування лінійних інтегральних рівнянь змішаного типу за допомогою одного варіанта методу Ю. Д. Соколова. *Доп. АН УРСР.* 1964. № 12. С. 1559–1563.

134. Тукалевська Н. І. Про один метод розв'язування лінійних інтегральних рівнянь вольтерівського типу в класі $L_p$ –функцій. *Доп. АН УРСР.* 1966. № 3. С. 229–302.
135. Тукалевська Н. І. Про один метод розв'язування лінійних інтегральних рівнянь типу Вольтерра. *Доп. АН УРСР.* 1965. № 8. С. 998–1002.
136. Ферук В. А. Ітераційний метод для систем нелінійних диференціальних рівнянь із запізненням та обмеженнями. *Нелінійні коливання.* 2003. Т. 6, № 3. С. 428–436.
137. Фонарев А. А. О проекционно-итерационном методе решения некоторых нелинейных уравнений. *Изв. вузов. Математика*. 1981. № 9. С. 54–56.
138. Черевко І.М., Матвій О.В. Про наближення систем диференціально-різницевих рівнянь нейтрального типу системами звичайних диференціальних рівнянь. *Нелінійні коливання*. 2007. Т.10, № 3. С.328–335.
139. Чернишенко Є. А. Про один варіант методу осереднення. *Доп. АН УРСР.* 1956. № 1. С. 10–12.
140. Эйдельман Ю. С. Краевая задача для дифференциальных уравнений с параметрами. *Дифференц. уравнения.* 1978. № 7. С.1335–1337.
141. Banach S. Surliest operations dens les ensembles abstracts et application aux equations integrals. *Pand. Math.* 1922. 3. P. 133–181.
142. Boichuk, A., Diblik, J., Khusainov, D. and Ruzickova, M. Boundary-value problems for weakly nonlinear delay di erential system. *Abstr. Appl. Anal*. 2011. P. 19.
143. Boichuk A. A., Samoilenko A. M. Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems. Berlin; Boston : de Gruyter, 2004. 317 p.; 2nd ed., 2016. 314 p.
144. Caccioppoli R. Sugli elementi uniti delle transformazionali: un'osservazione sui problemi di valori ai limiti. *Fee. Naz. Lincei.* 1931. 6, N 13. P. 498–502.

145. Jankowski T. The application of numerical-analytic method for systems of differential equations with a parameter. *Укр. мат. журн.* 2002. Т. 54, № 4. С. 545–554.

146. Konet I., Heseleva K. One variant of the collocation-iterative method of solving integro-functional equations. *Science and Education a New Dimension. Natural and Technical Sciences.* 2021 February. IX (31), Issue 250. P. 14–17.

147. Ritz W. Theorie der Transversal-Schwingungen einer quadratischen Platte mit freien Ränder. *Ann. der Physik.* 1909. 28, N 4. P. 737–786.

148. Ritz W. Uber eine neue Methode zur hosunq gtwissen Variationsproblee der mathematischen Physik. *J. für die reine und angew Math.* 1908. 135, № 1. P. 1–62.

149. Schauder J. *Stad. Math.* 1930. 2. P. 171–180.

*Наукове видання*

ГЕСЕЛЕВА Катерина Григорівна

# НАБЛИЖЕНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ІНТЕГРО-ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Монографія

Формат 60х84/16. Ум.-др. арк. 8,37.
Наклад 100 пр. Зам. № 104.

Видавець та виготовлювач ФОП Панькова А. С.,
вул. Симона Петлюри, 30б, м. Кам'янець-Подільський,
Хмельницька обл., 32302.
Тел./факс: (03849) 3 90 06, тел. (067) 381 29 43.
E-mail: aksiomaprint@ukr.net
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
ДК № 6561 від 28.12.2018 р.