Кам’янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка

У. В. ГУДИМА, В. О. ГНАТЮК

ОПУКЛИЙ АНАЛІЗ

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

Кам’янець-Подільський
2019

УДК 517.972.85(075.8)
ББК 22.16Я73
Г93

Друкується згідно з рішенням вченої ради Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка
(протокол № 7 від 27 червня 2019 року)

Рецензенти:

А. С. Сердюк, доктор фізико-математичних наук, старший науковий співробітник, провідний науковий співробітник відділу теорії функцій Інституту математики НАН України;

В. А. Сорич, кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри математики Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка;

І. В. Семенишина, кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри математичних дисциплін і моделювання Подільського державного аграрно-технічного університету.

Гудима У.В.

Г93 **Опуклий аналіз :** навчальний посібник / У. В. Гудима, В. О. Гнатюк. — Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2019. — 112 с.

У навчальному посібнику розглядаються основні поняття, твердження, теореми, що стосуються властивостей опуклих множин та опуклих функцій, субдиференціального числення опуклих функцій та їх застосування при дослідженні задачі опуклого програмування.

Посібник розрахований на студентів математичних спеціальностей. Може бути використаний при викладанні відповідного курсу на інших спеціальностях, а також при вивченні суміжних з опуклим аналізом навчальних дисциплін.

УДК 517.972.85(075.8)
ББК 22.16Я73

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

Останніми роками при дослідженні екстремальних задач, які виникають у різних галузях науки і практики, важливу роль відіграють методи, пов'язані з поняттям опуклості.

Опуклі множини, функції та екстремальні задачі вивчаються в опуклому аналізі.

Ідеї і результати опуклого аналізу можуть бути використані, зокрема, для дослідження некласичних екстремальних задач, які виникають в теорії оптимізації, апроксимації, оптимального керування, в економіці, фізиці тощо.

Умови екстремальності допустимих розв'язків задач оптимізації, встановлені за допомогою теорії опуклого аналізу, можуть використовуватися для побудови чисельних методів розв'язування цих задач, обґрунтування їх скінченності або збіжності.

Отже, опуклий аналіз – це розділ математики, методи якого повинні знати всі фахівці, діяльність яких пов'язана з дослідженням екстремальних задач.

Метою навчального посібника «Опуклий аналіз» є ознайомлення читача з основними результатами теорії опуклих множин і функцій, застосуваннями цих результатів для встановлення умов оптимальності допустимих розв'язків задач опуклого програмування.

Посібник складається з 10 розділів.

У розділах 1-3 наведені факти з теорії топологічних, метричних, лінійних нормованих і лінійних топологічних просторів, які необхідні для розуміння матеріалу наступних розділів.

У розділах 4-6 описані властивості опуклих множин та опуклих оболонок множин лінійних і лінійних топологічних просторів, встановлені теореми віддільності двох опуклих множин лінійних топологічних просторів.

Розділи 7-9 містять основні властивості опуклих функцій, заданих на лінійних топологічних просторах. Серед них – критерії опуклості власної функції, властивості власної опуклої функції однієї змінної, критерій неперервності опуклої функції; розглянуто властивості спряжених функцій; доведено теорему Фенхеля-Моро про інволютивність операції побудови спряженої функції на сукупності опуклих і замкнених функцій, заданих на локально опуклому лінійному топологічному просторі.

Розглянуто поняття субградієнта та субдиференціала функції; встановлено властивості субдиференціала; доведено критерій точки глобального мінімуму опуклої функції.

Розділ 10 присвячено задачі опуклого програмування в лінійному та лінійному топологічному просторах. Доведено теореми Куна-Таккера та Каруша-Куна-Таккера (в субдиференціальній формі) про умови оптимальності допустимого розв'язку задачі опуклого програмування.

Крім того, в цьому розділі доведено теорему Моро-Рокафєллара про субдиференціал суми кількох опуклих функцій та теорему Дубовіцкого-Мілютіна про субдиференціал максимуму кількох опуклих функцій, на яких базується доведення теореми Каруша-Куна-Таккера. Слід зазначити, що ці теореми мають і самостійний науковий інтерес.

Навчальний посібник написаний на основі лекцій з курсу «Опуклий аналіз», які читалися його авторами студентам напряму підготовки 6.040201 Математика* фізико-математичного факультету Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка впродовж останніх п'яти років.

Посібник розрахований на студентів математичних спеціальностей, може бути використаний при викладанні відповідного курсу на інших спеціальностях, а також при вивченні суміжних з опуклим аналізом навчальних дисциплін.

Крім того, посібник може бути корисним при проведенні досліджень у відповідних галузях науки, при написанні студентами курсових і дипломних робіт.

Розділ 1

ТОПОЛОГІЧНІ І МЕТРИЧНІ ПРОСТОРИ

1.1. Означення топології та топологічного простору. Приклади топологій та топологічних просторів

Означення 1.1.1. *Нехай X – множина довільної природи. Кажуть, що система τ підмножин множини X задає на X топологію τ, якщо:*

1) $X, \varnothing \in \tau$;

2) об'єднання довільної кількості підмножин із τ є підмножиною із τ;

3) перетин скінченної кількості підмножин із τ є підмножиною із τ.

Означення 1.1.2. *Якщо на множині X задано топологію τ, то цю множину називають носієм топології, а упорядковану пару (X,τ) – топологічним простором.*

Топологічний простір (X,τ) будемо позначати просто через X у випадку, коли відомо, про яку топологію йде мова.

Якщо (X,τ) – топологічний простір, то множину X будемо називати часто простором, а елементи з X – точками.

Зазначимо, що умови 1)-3), які фігурують в означенні 1.1.1, називаються аксіомами топології або топологічного простору.

Наведемо приклади топологій та топологічних просторів.

Приклад 1.1.1. Нехай X – множина довільної природи, τ – множина всіх підмножин множини X. Зрозуміло, що τ є топологією, заданою на X, а тому (X,τ) є топологічним простором. Вищеназвану топологію називають дискретною топологією, заданою на X.

Приклад 1.1.2. Нехай X – множина довільної природи, $\tau = \{X, \varnothing\}$. Зрозуміло, що τ є топологією, заданою на X. Її називають тривіальною топологією, заданою на X.

Приклад 1.1.3. Нехай $X = \{a,b,c\}$, а $\tau = \{\{a,b,c\}, \varnothing, \{a,b\}, \{a\}\}$. Очевидно, що τ є топологією, заданою на X, а тому (X,τ) – топологічний простір.

1.2. Відкриті множини топологічного простору. Критерій відкритості множини топологічного простору. Внутрішні точки та внутрішність множини топологічного простору. Відкритість внутрішності множини топологічного простору

Означення 1.2.1. *Нехай (X,τ) – топологічний простір. Тоді всі підмножини множини X, які входять до τ, називаються відкритими множинами цього топологічного простору.*

Так, наприклад, якщо $X=\{a,b,c\}$, а $\tau=\{\{a,b,c\},\varnothing,\{a,b\},\{a\}\}$, то відкритими множинами топологічного простору (X,τ) будуть $\{a,b,c\}$, $\varnothing$, $\{a,b\}$, $\{a\}$, а множина $\{a,c\}$, зокрема, не є відкритою множиною.

Якщо X – множина довільної природи, а τ – дискретна топологія, задана на X, то відкритими множинами топологічного простору (X,τ) є всі підмножини X.

Якщо X – множина довільної природи, а τ – тривіальна топологія, то відкритими множинами топологічного простору (X,τ) будуть X та $\varnothing$.

З означень 1.1.1 та 1.2.1 випливає, що

$\alpha 1$) носій топології та порожня множина є відкритими множинами топологічного простору;

$\alpha 2$) об'єднання довільної кількості відкритих множин топологічного простору є відкритою множиною цього простору;

$\alpha 3$) перетин скінченної кількості відкритих множин топологічного простору є відкритою множиною цього простору.

Означення 1.2.2. *Околом точки топологічного простору називають будь-яку відкриту множину, що містить цю точку.*

Часто околи точки x топологічного простору (X,τ) позначають через $O(x)$, $v(x)$, $\omega(x)$ тощо.

Приклад 1.2.1. $X=\{a,b,c\}$, $\tau=\{\{a,b,c\},\varnothing,\{a,b\},\{a\}\}$. Околами точки a топологічного простору (X,τ) будуть множини $O(a)=\{a\}$, $v(a)=\{a,b\}$, $\omega(a)=\{a,b,c\}$.

Теорема 1.2.1. *Для того щоб множина топологічного простору була його відкритою множиною, необхідно і достатньо, щоб кожна точка цієї множини входила до неї разом з деяким своїм околом.*

Доведення. ***Необхідність***. Нехай A є відкритою множиною топологічного простору (X,τ). Доведемо, що для будь-якої точки $x \in A$ існує її окіл $O(x)$ такий, що $O(x) \subset A$.

Оскільки A – відкрита множина та $x \in A$, то $O(x) = A$ є околом точки x таким, що $O(x) = A \subset A$.

Необхідність доведено.

Достатність. Нехай (X,τ) – топологічний простір, $A \subset X$ і для будь-якої точки $x \in A$ існує її окіл $O(x)$ такий, що $O(x) \subset A$. Доведемо, що A – відкрита множина. Зрозуміло, що

$$A = \bigcup_{x \in A} \{x\} \subset \bigcup_{x \in A} O(x) \subset A, \tag{1.1}$$

оскільки $O(x) \subset A$, $x \in A$.

З (1.1) випливає, що $A = \bigcup\limits_{x \in A} O(x)$, тобто A – об'єднання околів $O(x)$, які є відкритими множинами. Тому A є відкритою множиною (див. твердження α 2).

Достатність доведено.

Теорему доведено.

Означення 1.2.3. *Точка x множини A топологічного простору (X,τ) називається внутрішньою точкою множини A, якщо існує окіл $O(x)$ точки x такий, що $O(x) \subset A$.*

Сукупність усіх внутрішніх точок множини A називається внутрішністю цієї множини і позначається, зазвичай, $\operatorname{int} A$ *або* $\overset{0}{A}$.

Теорема 1.2.2. *Внутрішність множини топологічного простору є відкритою множиною.*

Доведення. Нехай (X,τ) – топологічний простір, $A \subset X$. Виберемо довільну точку $x \in \operatorname{int} A$. Оскільки x є внутрішньою точкою множини A, то існує окіл $O(x)$ точки x такий, що $O(x) \subset A$.

Доведемо, що $O(x) \subset \operatorname{int} A$. Нехай $y \in O(x)$. Оскільки $O(x)$ – відкрита множина, що містить y, то $O(x) = O(y)$ – окіл точки y, причому $O(x) = O(y) \subset A$. Отже, y є внутрішньою точкою множини A. Тому $y \in \operatorname{int} A$. Оскільки y вибрано довільно з $O(x)$, то $O(x) \subset \operatorname{int} A$. Отже, x входить у множину $\operatorname{int} A$ з деяким своїм околом. Згідно з теоремою 1.2.1 $\operatorname{int} A$ є відкритою множиною.

Теорему доведено.

Теорема 1.2.3. *Для того щоб множина топологічного простору була відкритою множиною цього простору, необхідно і достатньо, щоб вона співпадала зі своєю внутрішністю.*

Доведення. ***Необхідність.*** Нехай A – відкрита множина топологічного простору (X,τ). Зрозуміло, що

$$\operatorname{int} A \subset A. \tag{1.2}$$

Доведемо, що $A \subset \operatorname{int} A$. Нехай $x \in A$. Оскільки A – відкрита множина, то згідно з теоремою 1.2.1 існує окіл $O(x)$ точки x такий, що $O(x) \subset A$. Згідно з означенням 1.2.3 x є внутрішньою точкою множини A. Отже, $x \in \operatorname{int} A$. Тому

$$A \subset \operatorname{int} A. \tag{1.3}$$

Із включень (1.2), (1.3) випливає, що $A = \operatorname{int} A$.

Необхідність доведено.

Достатність. Нехай $A = \operatorname{int} A$. Згідно з теоремою 1.2.2 $\operatorname{int} A$ – відкрита множина. Тому A також є відкритою множиною.

Достатність доведено.

Теорему доведено.

1.3. Замкнені множини топологічного простору та деякі їх властивості

Означення 1.3.1. *Множина A топологічного простору (X,τ) називається замкненою, якщо її доповнення $X \setminus A = C_X A = CA$ до X є відкритою множиною.*

Теорема 1.3.1. *Для того щоб множина A топологічного простору (X,τ) була замкненою множиною, необхідно і достатньо, щоб вона була доповненням до X деякої відкритої множини.*

Доведення. ***Необхідність.*** Нехай A – замкнена множина топологічного простору (X,τ). Згідно з означенням 1.3.1 $X \setminus A$ – відкрита множина простору X. Звідси та з рівності $A = X \setminus \left(X \setminus A\right) = C_X \left(X \setminus A\right)$ випливає, що A є доповненням до X відкритої множини $X \setminus A$.

Необхідність доведено.

Достатність. Нехай множина A топологічного простору (X,τ) є доповненням до X деякої відкритої множини B: $A = X \setminus B$. Оскільки $X \setminus A = X \setminus \left(X \setminus B\right) = B$, то доповнення A до X є відкритою множиною. Згідно з означенням 1.3.1 A є замкненою множиною топологічного простору X.

Достатність доведено.

Теорему доведено.

Теорема 1.3.2. *Для будь-якого топологічного простору* (X, τ) *мають місце такі властивості його замкнених множин:*

1) X *,* $\varnothing$ *– замкнені множини;*
2) *об'єднання скінченної кількості замкнених множин є замкненою множиною;*
3) *перетин довільної кількості замкнених множин є замкненою множиною.*

Доведення. 1) Оскільки $X \setminus X = \varnothing$, $X \setminus \varnothing = X$ і згідно з твердженням $\alpha 1$) підрозділу 1.2 $\varnothing$, X є відкритими множинами простору X, то згідно з означенням 1.3.1 X, $\varnothing$ є замкненими множинами простору X.

Твердження 1) доведено.

2) Нехай A_i, $i = \overline{1, n}$, – замкнені множини топологічного простору X. Переконаємося, що $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ також є замкненою множиною цього простору.

Згідно з означенням 1.3.1 $C_X A_i$, $i = \overline{1, n}$, – відкриті множини топологічного простору X. Відповідно до твердження $\alpha 3$) підрозділу 1.2 $\bigcap\limits_{i=1}^{n} C_X A_i$ є відкритою множиною простору X. Внаслідок правила де Моргана $C_X (\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i) = \bigcap\limits_{i=1}^{n} C_X A_i$ – відкрита множина. Тому $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ є замкненою множиною (див. означення 1.3.1).

Твердження 2) доведено.

3) Нехай A_i, $i \in I$, – довільна кількість замкнених множин простору X. Доведемо, що $\bigcap\limits_{i \in I} A_i$ також є замкненою множиною цього простору. Згідно з правилом де Моргана

$$C_X (\bigcap_{i \in I} A_i) = \bigcup_{i \in I} C_X A_i . \tag{1.4}$$

Оскільки A_i, $i \in I$, є замкненими множинами простору X, то $C_X A_i$, $i \in I$, є відкритими множинами топологічного простору X (див. означення 1.3.1). Внаслідок цього та твердження $\alpha 2$) підрозділу 1.2 $\bigcup\limits_{i \in I} C_X A_i$ є відкритою множиною простору X. З урахуванням цього, означення 1.3.1 та рівності (1.4) робимо висновок, що $\bigcap\limits_{i \in I} A_i$ є замкненою множиною простору X.

Твердження 3) доведено.

Теорему доведено.

Означення 1.3.2. *Нехай* (X,τ) *– топологічний простір,* $A\subset X$ *. Точка* $x_0\in X$ *називається межовою точкою множини* A *, якщо в будь-якому її околі містяться як точки, що належать множині* A *, так і точки, які цій множині не належать.*

Означення 1.3.3. *Множина всіх межових точок множини* A *топологічного простору* (X,τ) *називається межею множини* A *.*

Будемо позначати межу множини A топологічного простору (X,τ) через ∂A.

Теорема 1.3.3. *Нехай* (X,τ) *– топологічний простір,* $A\subset X$ *. Межа* ∂A *множини* A *є замкненою множиною простору* (X,τ) *.*

Доведення. Переконаємося, що $X\setminus\partial A$ є відкритою множиною X . Нехай $x_0\in X\setminus\partial A$. Тоді $x_0\notin\partial A$. Звідси випливає, що існує окіл $O(x_0)$ точки x_0 простору X , який складається лише з точок множини A або лише з точок, які цій множині не належать. Тому $O(x_0)\cap\partial A=\varnothing$. Отже, $O(x_0)\subset X\setminus\partial A$. Згідно з теоремою 1.2.1 $X\setminus\partial A$ є відкритою множиною. Відповідно до означення 1.3.1 ∂A є замкненою множиною.

Теорему доведено.

1.4. Точки дотикання множини топологічного простору. Замикання множини топологічного простору. Замкненість замикання множини топологічного простору. Критерій замкненості множини

Означення 1.4.1. *Точка* x *топологічного простору* (X,τ) *називається точкою дотикання множини* $A\subset X$ *, якщо будь-який окіл цієї точки містить хоча б одну точку множини* A *.*

Сукупність точок дотикання множини A *називають замиканням множини* A *і позначають* $\overline{A}$ *.*

Теорема 1.4.1. *Замикання множини топологічного простору є його замкненою множиною.*

Доведення. Нехай (X,τ) – топологічний простір, $A\subset X$, $\overline{A}$ – замикання множини A . Доведемо, що $\overline{A}$ є замкненою множиною. Для цього достатньо переконатись, що $C_X\overline{A}$ є відкритою множиною простору X . Нехай $x\in C_X\overline{A}$. Тоді $x\notin\overline{A}$, тобто x не є точкою дотикання множини A. Тому існує окіл $O(x)$ точки x такий, що $O(x)\cap A=\varnothing$. Оскільки $O(x)=O(y)$ для всіх $y\in O(x)$, то $O\left(y\right)\cap A=\varnothing$, $y\in O(x)$. Звідси випливає, що $y\notin \overline{A}$ для всіх $y\in O(x)$. Отже, $O\left(x\right)\subset C_X\overline{A}$. Згідно з теоремою 1.2.1 $C_X\overline{A}$ є відкритою множиною простору X. Тому $\overline{A}$ є замкненою множиною простору X (див. означення 1.3.1).

Теорему доведено.

Теорема 1.4.2. *Для того щоб множина топологічного простору була замкненою, необхідно і достатньо, щоб вона співпадала зі своїм замиканням.*

Доведення. *Необхідність.* Нехай (X,τ) – топологічний простір, A – замкнена множина цього простору, $\overline{A}$ – замикання множини A. Доведемо, що $A=\overline{A}$.

Нехай $x\in A$. Оскільки будь-який окіл точки x містить саму точку $x\in A$, то x є точкою дотикання множини A. Отже, $x\in\overline{A}$. Тому має місце включення

$$A\subset\overline{A}. \tag{1.5}$$

Доведемо, що $\overline{A}\subset A$. Доведення проведемо методом від супротивного. Припустимо, що існує точка $x\in\overline{A}$ і $x\notin A$. Оскільки множина A є замкненою множиною простору X, то множина $C_X A$ є відкритою множиною цього простору. Зрозуміло, що $x\in C_X A$. Тоді $C_X A$ є околом точки x, який не містить жодної точки множини A, а, отже, x не є точкою дотикання множини A, що суперечить включенню $x\in\overline{A}$. Одержана суперечність доводить, що

$$\overline{A}\subset A. \tag{1.6}$$

Врахувавши (1.5) та (1.6), одержимо, що $A=\overline{A}$.

Необхідність доведено.

Достатність. Нехай $A=\overline{A}$. Згідно з теоремою 1.4.1 $\overline{A}$ є замкненою множиною топологічного простору (X,τ). Тому A також є замкненою множиною цього простору.

Достатність доведено.

Теорему доведено.

1.5. Базиси околів точок топологічного простору. Властивості базисів околів точок топологічного простору. Задання топології за допомогою базисів околів

Означення 1.5.1. *Нехай* (X,τ) *– топологічний простір. Множину* $\{\nu(x)\}$ *околів точки* x *називають базисом околів точки* x*, якщо для будь-якого околу* $O(x)$ *точки* x *існує окіл* $\nu(x)\in\{\nu(x)\}$ *такий, що* $\nu(x)\subset O(x)$.

Зрозуміло, що множина $\{O(x)\}$ всіх околів точки x топологічного простору (X,τ) є базисом околів цієї точки.

Теорема 1.5.1. *Нехай* (X,τ) *– топологічний простір,* $\{\nu(x)\}$, $\{\nu(y)\}$, *... – базиси околів точок* x, y, *... цього простору. Тоді мають місце співвідношення:*

1) $x\in\nu(x)\ \ \forall\,\nu(x)\in\{\nu(x)\}$;

2) $(\forall\,\nu_1(x),\nu_2(x)\in\{\nu(x)\})\ \ (\exists\,\nu_3(x)\in\{\nu(x)\})\ \ \nu_3(x)\subset\nu_1(x)\cap\nu_2(x)$;

3) $(\forall y\in\nu(x)\in\{\nu(x)\})\ \ (\exists\,\nu(y)\in\{\nu(y)\})\ \ \nu(y)\subset\nu(x)$.

Доведення. Точка $x\in\nu(x)$ для довільного $\nu(x)\in\{\nu(x)\}$, оскільки $\nu(x)$ є околом точки x.

Нехай $\nu_1(x),\nu_2(x)\in\{\nu(x)\}$, тоді $\nu_1(x)\cap\nu_2(x)$ є відкритою множиною (перетин двох відкритих множин), що містить точку x, тобто $\nu_1(x)\cap\nu_2(x)$ є околом точки x. Оскільки $\{\nu(x)\}$ – базис околів точки x, то згідно з означенням 1.5.1 $\exists\,\nu_3(x)\in\{\nu(x)\}$, що $\nu_3(x)\subset\nu_1(x)\cap\nu_2(x)$.

Співвідношення 2) доведено.

Нехай $y\in\nu(x)$. Тоді $\nu(x)$ є відкритою множиною, яка містить точку y. Тому $\nu(x)=O(y)$ – окіл точки y. Оскільки $\{\nu(y)\}$ – базис околів точки y, то $\exists\,\nu(y)\in\{\nu(y)\}$, що $\nu(y)\subset O(y)=\nu(x)$. Отже, $(\forall y\in\nu(x)\in\{\nu(x)\})\ \ (\exists\,\nu(y)\in\{\nu(y)\})\ \ \nu(y)\subset\nu(x)$.

Співвідношення 3) доведено.

Теорему доведено.

Теорема 1.5.2. *Нехай точкам* $x,y,\ldots$ *множини* X *віднесені відповідно системи* $\{\nu(x)\}$, $\{\nu(y)\}$, *... підмножин цієї множини, такі, що виконуються умови 1)-3) теореми 1.5.1.*

До τ віднесемо порожню множину та всі підмножини A множини X такі, що

$$(\forall x \in A) \ \ (\exists \nu(x) \in \{\nu(x)\}) \ \ \nu(x) \subset A .$$

Тоді τ є топологією, заданою на X.

Крім того, в топологічному просторі (X, τ) системи $\{\nu(x)\}$, $\{\nu(y)\}$, ... є базисами околів точок $x, y, \ldots$.

Доведення. Переконаємося, що τ задовольняє аксіомам топології (див. означення 1.1.1).

Оскільки $\forall x \in X$ кожна множина $\nu(x) \in \{\nu(x)\}$ є підмножиною X ($\nu(x) \subset X$), то $X \in \tau$. $\varnothing \in \tau$ згідно з означенням τ.

Отже, перша аксіома топології для системи τ виконується.

Нехай A_i, $i \in I$, – довільна кількість множин із τ. Переконаємось, що $\bigcup\limits_{i \in I} A_i \subset \tau$.

Для кожної точки $x \in \bigcup\limits_{i \in I} A_i$ існує $i_x \in I$, що $x \in A_{i_x}$. Оскільки $A_{i_x} \in \tau$, то згідно з означенням τ існує $\nu(x) \in \{\nu(x)\}$, що $\nu(x) \subset A_{i_x}$.

З урахуванням вищезазначеного маємо, що

$$\nu(x) \subset A_{i_x} \subset \bigcup_{i \in I} A_i \ \text{ та } \ \nu(x) \in \{\nu(x)\} .$$

Тому $\bigcup\limits_{i \in I} A_i \in \tau$.

Отже, друга аксіома топології для системи τ виконується.

Виконання третьої аксіоми топології для системи τ доведемо методом математичної індукції.

Нехай $A_1, A_2 \in \tau$. Переконаємось, що $A_1 \cap A_2 \in \tau$. Оскільки $A_1, A_2 \in \tau$, то $\forall x \in A_1 \cap A_2$ існують $\nu_1(x) \in \{\nu(x)\}$ та $\nu_2(x) \in \{\nu(x)\}$ такі, що $\nu_1(x) \subset A_1$, $\nu_2(x) \subset A_2$. Згідно з умовою 2) (див. теорему 1.5.1) $\exists \nu_3(x) \in \{\nu(x)\}$, що $\nu_3(x) \subset \nu_1(x) \cap \nu_2(x) \subset A_1 \cap A_2$. Тому $A_1 \cap A_2 \in \tau$.

Припустимо, що $\bigcap\limits_{i=1}^{k} A_i \in \tau$ для будь-яких $A_1, A_2, \ldots, A_k \in \tau$ ($k \geq 2$).

Доведемо, що $\bigcap\limits_{i=1}^{k+1} A_i \in \tau$, якщо $A_1, A_2, \ldots, A_k, A_{k+1} \in \tau$.

Оскільки $\bigcap\limits_{i=1}^{k+1} A_i = (\bigcap\limits_{i=1}^{k} A_i) \cap A_{k+1}$ та $B = \bigcap\limits_{i=1}^{k} A_i \in \tau$ (за припущенням) і $A_{k+1} \in \tau$, то $\bigcap\limits_{i=1}^{k+1} A_i = B \cap A_{k+1} \in \tau$, тому, що, як доведено вище, перетин двох множин із τ є елементом системи τ.

Тоді, згідно з принципом математичної індукції, перетин будь-якої скінченної кількості множин із τ належить τ.

Отже, третя аксіома топології для системи τ також виконується.

Тому τ буде топологією на X.

Переконаємось, що для кожного $x \in X$ та кожного $\nu(x) \in \{\nu(x)\}$ $\nu(x)$ є околом точки x в топологічному просторі (X, τ). Дійсно, згідно з умовою 3) (див. теорему 1.5.1) $(\forall y \in \nu(x) \in \{\nu(x)\})$ $(\exists\, \nu(y) \in \{\nu(y)\})$ $\nu(y) \subset \nu(x)$. Тому $\nu(x) \in \tau$ і, отже, $\nu(x)$ – відкрита множина. Згідно з умовою 1) (див. теорему 1.5.1) $x \in \nu(x)$. Тому $\nu(x)$ є околом точки x.

Переконаємось, що $\{\nu(x)\}$ є базисом околів точки x в просторі (X, τ).

Нехай $O(x)$ – довільний окіл точки x в просторі (X, τ). Тоді $x \in O(x)$ та $O(x)$ є відкритою множиною, отже, $O(x) \in \tau$. Тому існує $\nu(x) \in \{\nu(x)\}$, що $\nu(x) \subset O(x)$. Це й означає, що $\{\nu(x)\}$ є базисом околів точки x.

Теорему доведено.

1.6. Метричний простір як частковий випадок топологічного простору. Метрична топологія

Означення 1.6.1. *Нехай X – множина довільної природи. Функція $\rho : X \times X \to R$ називається метрикою (відстанню), заданою на X, якщо:*

1) $(\forall x, y \in X)\ \rho(x, y) \geq 0, \rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;

2) $(\forall x, y \in X)\ \rho(x, y) = \rho(y, x)$;

3) $(\forall x, y, z \in X)\ \rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$.

Множина X разом із заданою на ній метрикою ρ називається метричним простором, який позначається через (X, ρ) або просто через *X*, якщо відомо, про яку метрику йде мова.

Зазначимо, що умови 1)-3), які фігурують в означенні 1.6.1, називаються аксіомами метрики або метричного простору, причому аксіома 2) називається аксіомою симетрії, а аксіома 3) – аксіомою трикутника.

Приклади метричних просторів:

Приклад 1.6.1. Нехай R – множина дійсних чисел. Функція $\rho : R \times R \to R$ така, що $\rho(x, y) = |x - y|$, $x, y \in R$, задає метрику на *R*. Тому (R, ρ) є метричним простором.

Приклад 1.6.2. Нехай R^n – множина всеможливих впорядкованих сукупностей *n* дійсних чисел. Функція $\rho : R^n \times R^n \to R$ така, що $\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$, $x = (x_1, ..., x_n)$, $y = (y_1, ..., y_n) \in R^n$, задає метрику на R^n. Тому (R^n, ρ) є метричним простором.

Приклад 1.6.3. Нехай $C_{[a;b]}$ – множина всіх неперервних на сегменті $[a, b]$ функцій. Функція $\rho : C_{[a;b]} \times C_{[a;b]} \to R$ така, що $\rho(x, y) = \max_{t \in [a;b]} |x(t) - y(t)|$, $x, y \in C_{[a;b]}$, задає метрику на $C_{[a;b]}$. Тому $(C_{[a;b]}, \rho)$ є метричним простором.

Теорема 1.6.1. *Нехай* (X, ρ) *– метричний простір. Для точок* $x, y, ...$ *цього простору задамо системи множин* $\{v(x)\}$, $\{v(y)\}$, *..., де* $v(x) = \{u \in X : \rho(u, x) < \varepsilon\}$, $\varepsilon > 0$; $v(y) = \{u \in X : \rho(u, y) < \varepsilon\}$, $\varepsilon > 0$;.... *Системи множин* $\{v(x)\}$, $\{v(y)\}$, *... задовольняють умови 1)-3) теореми 1.5.1.*

Доведення. Оскільки для $x \in X$ та $\varepsilon > 0$ $\rho(x, x) = 0 < \varepsilon$, то $x \in v(x)$ для кожної множини $v(x) \in \{v(x)\}$. Отже, система множин $\{v(x)\}$ задовольняє умову 1) теореми 1.5.1.

Нехай
$v_1(x) = \{u \in X : \rho(u, x) < \varepsilon_1\}$, $\varepsilon_1 > 0$; $v_2(x) = \{u \in X : \rho(u, x) < \varepsilon_2\}$, $\varepsilon_2 > 0$, є довільними множинами із $\{v(x)\}$. Покладемо $\varepsilon_3 = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$, $v_3(x) = \{u \in X : \rho(u, x) < \varepsilon_3\}$. Зрозуміло, що $v_3(x) \in \{v(x)\}$. Переконаємось, що $v_3(x) \subset v_1(x) \cap v_2(x)$.

Дійсно, для кожного $u \in v_3(x)$ маємо, що $\rho(u, x) < \varepsilon_3 \le \varepsilon_1$ та $\rho(u, x) < \varepsilon_3 \le \varepsilon_2$. Звідси випливає, що $u \in v_1(x)$ і $u \in v_2(x)$. Тому

$$u \in v_1(x) \cap v_2(x),\ u \in v_3(x).$$

Це й означає, що $v_3(x) \subset v_1(x) \cap v_2(x)$.

Отже, система множин $\{v(x)\}$ задовольняє умову 2) теореми 1.5.1.

Нехай тепер $v(x) \in \{v(x)\}$ та $y \in v(x)$. Оскільки $v(x) \in \{v(x)\}$, то існує $\varepsilon > 0$, що $v(x) = \{u \in X : \rho(u, x) < \varepsilon\}$. Оскільки $y \in v(x)$, то $\rho(y,x)<\varepsilon$, а $\varepsilon_1=\varepsilon-\rho(y,x)>0$. Доведемо, що $\nu(y)= =\{z\in X:\rho(z,y)<\varepsilon_1\}\subset\nu(x)$.

Нехай $z\in\nu(y)$. Тоді $\rho(z,y)<\varepsilon_1$. Звідси випливає, що

$$\rho(z,x)\le\rho(z,y)+\rho(y,x)<\varepsilon_1+\rho(y,x)=\varepsilon-\rho(y,x)+\rho(y,x)=\varepsilon .$$

Тому $z\in\nu(x)$ для всіх $z\in\nu(y)$. Отже, $\nu(y)\subset\nu(x)$, тобто для будь-якого $y\in\nu(x)$ існує $\nu(y)\in\{\nu(y)\}$, що $\nu(y)\subset\nu(x)$.

Це означає, що системи множин $\{\nu(x)\}$, $\{\nu(y)\}$, … задовольняють умову 3) теореми 1.5.1.

Теорему доведено.

Наслідок 1.6.1. *Нехай* (X,ρ) *– метричний простір. Для точок* $x,y,\ldots$ *цього простору задамо системи множин* $\{\nu(x)\}$, $\{\nu(y)\}$, *..., де* $\nu(x)=\{u\in X:\rho(u,x)<\varepsilon\}$, $\varepsilon>0$; $\nu(y)=\{u\in X:\rho(u,y)<\varepsilon\}$, $\varepsilon>0$;*....* *До* τ *віднесемо порожню множину та всі підмножини* A *множини* X *такі, що*

$$(\forall x\in A)(\exists\,\nu(x)\in\{\nu(x)\})\quad \nu(x)\subset A .$$

Тоді τ *задає топологію на* X, *причому система* $\{\nu(x)\}$ *підмножин* X *є базисом околів точки* x *в цій топології.*

Справедливість наслідку випливає з теорем 1.5.2 та 1.6.1.

Введена у спосіб, визначений цим наслідком, топологія τ на X, де (X,ρ) – метричний простір, називається топологією на X, породженою метрикою ρ, або метричною топологією.

У зв’язку зі сказаним вище, вважається, що метричний простір є частковим випадком топологічного простору.

1.7. Гаусдорфові (віддільні) топологічні простори

Означення 1.7.1. *Топологічний простір називається гаусдорфовим або віддільним, якщо для будь-яких двох точок цього простору існують їх околи, які не перетинаються.*

Теорема 1.7.1. *Нехай* (X,ρ) *– метричний простір,* τ *– топологія на* X, *породжена метрикою* ρ *(метрична топологія). Тоді* (X,τ) *є гаусдорфовим (віддільним) простором.*

Доведення. Нехай $x,y\in X$, $x\ne y$; $\varepsilon=\dfrac{1}{2}\rho(x,y)$;

$\nu(x)=\{u\in X : \rho(u,x)<\varepsilon\}$ – окіл точки x простору (X,τ),

$\nu(y)=\{u\in X : \rho(u,y)<\varepsilon\}$ – окіл точки y простору (X,τ).

Переконаємося, що $\nu(x)\cap\nu(y)=\varnothing$.

Припустимо супротивне. Тоді існує $u\in X$, що $\rho(u,x)<\varepsilon$ та $\rho(u,y)<\varepsilon$.

Внаслідок цього та аксіоми 3) метрики (див. означення 1.6.1) одержимо, що

$$\rho(x,y)\le\rho(u,x)+\rho(u,y)<\varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon=2\cdot\frac{1}{2}\cdot\rho(x,y)=\rho(x,y),$$

$$\rho(x,y)<\rho(x,y).$$

Одержана суперечність доводить, що $\nu(x)\cap\nu(y)=\varnothing$. Тому (X,τ) є гаусдорфовим (віддільним) простором.

Теорему доведено.

Розділ 2

ЛІНІЙНІ ПРОСТОРИ НАД ПОЛЕМ ДІЙСНИХ ЧИСЕЛ. ЛІНІЙНІ НОРМОВАНІ ПРОСТОРИ. ТОПОЛОГІЯ, ПОРОДЖЕНА НОРМОЮ

2.1. Означення лінійного простору над полем дійсних чисел. Приклади лінійних просторів над полем дійсних чисел

Означення 2.1.1. *Множина X елементів $x,y,z,\ldots$ називається лінійним простором над полем R дійсних чисел, якщо для будь-яких елементів $x,y\in X$ визначено єдиний елемент $x+y\in X$, який називається їхньою сумою, та для будь-яких $\alpha\in R$, $x\in X$ визначено єдиний елемент $\alpha\cdot x\in X$, який називається добутком числа α й елемента x, причому виконуються такі аксіоми:*

1) $(\forall x,y\in X)\ x+y=y+x$;

2) $(\forall x,y,z\in X)\ (x+y)+z=x+(y+z)$;

3) $(\exists 0\in X)(\forall x\in X)\ x+0=x$;

4) $(\forall x \in X)(\exists(-x) \in X)\ \ x+(-x)=0$ *;*

5) $\left(\forall \alpha, \beta \in R; x \in X\right)(\alpha \cdot \beta)x = \alpha(\beta \cdot x)$ *;*

6) $\left(\forall \alpha \in R; x, y \in X\right)\ \alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$ *;*

7) $\left(\forall \alpha, \beta \in R; x \in X\right)\ (\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x$ *;*

8) $\left(\forall x \in X\right) 1 \cdot x = x$.

Назвемо деякі приклади лінійних просторів над полем дійсних чисел.

Приклад 2.1.1. Сукупність R усіх дійсних чисел зі звичайними операціями їх додавання та множення є лінійним простором над полем дійсних чисел.

Приклад 2.1.2. Множина R^n всеможливих впорядкованих сукупностей *n* дійсних чисел $x = (x_1, ..., x_n)$, $y = (y_1, ..., y_n), \ldots$, для яких додавання і множення на $\alpha \in R$ визначаються рівностями $x + y = (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n)$, $\alpha x = (\alpha x_1, ..., \alpha x_n)$, також є лінійним простором над полем дійсних чисел. Він називається *n*-вимірним арифметичним простором.

Приклад 2.1.3. Сукупність $C_{[a;b]}$ дійснозначних неперервних на сегменті $\left[a, b\right]$ функцій зі звичайними операціями додавання і множення їх на дійсні числа утворює лінійний над полем дійсних чисел простір.

Пропонуємо читачам самостійно переконатися у справедливості аксіом 1)-8) лінійного простору над полем дійсних чисел для кожного з цих прикладів.

Надалі будемо розглядати лише лінійні простори над полем дійсних чисел і називатимемо їх просто лінійними просторами.

2.2. Лінійні нормовані простори. Топологія, породжена нормою

Означення 2.2.1. *Нехай* X *– лінійний простір. Функція* $\|\bullet\| : X \to R$ *називається нормою, заданою на* X *, якщо:*

1) $\left(\forall x \in X\right)\|x\| \ge 0; \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0;$

2) $\left(\forall \alpha \in R; x \in X\right)\ \|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|;$

3) $\left(\forall x, y \in X\right)\ \|x + y\| \le \|x\| + \|y\|$.

Лінійний простір X , на якому задана норма $\|\bullet\|$, називається лінійним нормованим простором і позначається $(X, \|\bullet\|)$. Лінійний нормований простір $(X,\|\bullet\|)$ будемо позначати просто через X у випадку, коли відомо, про яку норму йде мова. Зазначимо, що умови 1)-3), які фігурують в означенні норми, називають аксіомами норми або лінійного нормованого простору.

Приклади лінійних нормованих просторів:

Приклад 2.2.1. Лінійний простір R, про який йшла мова у прикладі 2.1.1, стає лінійним нормованим простором, якщо для будь-якого $x \in R$ покласти $\|x\| = |x|$.

Приклад 2.2.2. Якщо для кожного $x = (x_1,...,x_n)$ лінійного простору R^n (див. приклад 2.1.2) покласти $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$, то R^n стане лінійним нормованим простором.

Приклад 2.2.3. Лінійний простір $C_{[a;b]}$ (див. приклад 2.1.3) стає лінійним нормованим простором, якщо для будь-якої функції $x = x(t) \in C_{[a;b]}$ покласти $\|x\| = \max\limits_{t\in[a,b]}|x(t)|$. Цю норму називають нормою Чебишова або рівномірною нормою.

Пропонуємо читачам самостійно переконатися у справедливості аксіом лінійного нормованого простору для кожного з цих прикладів.

Теорема 2.2.1. *Нехай* $(X,\|\bullet\|)$ *– лінійний нормований простір. Функція* $\rho : X \times X \to R$ *така, що* $\rho(x,y) = \|x - y\|$, $x, y \in X$, *задає метрику на* X.

Доведення. Згідно з аксіомою 1) норми (див. означення 2.2.1)

$$(\forall x, y \in X) \quad \rho(x,y) = \|x - y\| \ge 0; \quad \rho(x,y) = \|x - y\| = 0 \Leftrightarrow x - y = 0,$$

тобто тоді і тільки тоді, коли $x = y$.

Отже, функція ρ задовольняє аксіому 1) метрики (див. означення 1.6.1).

Згідно з аксіомою 2) норми (див. означення 2.2.1)

$$(\forall x, y \in X)$$

$$\rho(x,y) = \|x - y\| = \|(-1)(y - x)\| = |-1| \cdot \|y - x\| = \|y - x\| = \rho(y,x).$$

Отже, функція ρ задовольняє аксіому 2) метрики (див. означення 1.6.1).

Згідно з аксіомою 3) норми (див. означення 2.2.1) $(\forall x, y, z \in X)$

$$\rho(x,y) = \|x - y\| = \|(x - z) + (z - y)\| \le \|x - z\| + \|z - y\| = \rho(x,z) + \rho(z,y).$$

Отже, функція ρ задовольняє також аксіому 3) метрики (див. означення 1.6.1).

З урахуванням встановленого вище робимо висновок, що ρ задає метрику на X.

Теорему доведено.

З теореми 2.2.1 випливає, що будь-який лінійний нормований простір $(X, \|\bullet\|)$ стає метричним простором, якщо в ньому ввести метрику (відстань) ρ, поклавши $\rho(x, y) = \|x - y\|$, $x, y \in X$.

Наслідок 2.2.1. *Нехай* $(X, \|\bullet\|)$ *– лінійний нормований простір. Для точок* $x, y, ...$ *цього простору задамо системи множин* $\{\nu(x)\}$, $\{\nu(y)\}$, *..., де*

$$\nu(x) = \{u \in X : \rho(u; x) = \|u - x\| < \varepsilon\},\ \varepsilon > 0;$$

$$\nu(y) = \{u \in X : \rho(u; y) = \|u - y\| < \varepsilon\},\ \varepsilon > 0, \ldots .$$

До τ *віднесемо порожню множину та всі підмножини* A *множини* X *такі, що* $(\forall x \in A)(\exists\, \nu(x) \in \{\nu(x)\})\quad \nu(x) \subset A$.

Тоді τ *задає топологію на* X*, причому система* $\{\nu(x)\}$ *підмножин* X *є базисом околів точки* x *в цій топології.*

Справедливість наслідку випливає з наслідку 1.6.1 та теореми 2.2.1.

Введена у спосіб, визначений цим наслідком, топологія τ на X, де $(X, \|\bullet\|)$ – лінійний нормований простір, називається топологією на X, породженою нормою $\|\bullet\|$.

На підставі викладеного вище вважається, що лінійний нормований простір є частковим випадком топологічного простору.

Розділ 3

ЛІНІЙНІ ТОПОЛОГІЧНІ ПРОСТОРИ ТА ДЕЯКІ ЇХ ВЛАСТИВОСТІ

3.1. Означення лінійного топологічного простору. Лінійний нормований простір як частковий випадок лінійного топологічного простору

Означення 3.1.1. *Множина X називається лінійним топологічним простором, якщо:*

1) *X є лінійним простором;*
2) *X є топологічним простором;*
3) *операції додавання елементів X та множення їх на дійсні числа є неперервними операціями в топології простору X, тобто:*

$$(\forall x, y \in X)(\forall O(x+y))(\exists O(x), O(y)) : O(x)+O(y) \subset O(x+y)\ ;$$

$$(\forall \alpha \in R, x \in X)(\forall O(\alpha x))(\exists O(\alpha), O(x)) : O(\alpha)\cdot O(x) \subset O(\alpha x)\ .$$

Теорема 3.1.1. *Нехай $(X, \|\bullet\|)$ – лінійний нормований простір. Тоді операції додавання елементів цього простору та множення їх на дійсні числа є неперервними у розумінні топології τ на X, породженої нормою $\|\bullet\|$.*

Доведення. Нехай $x, y \in X$ та $O(x+y)$ – довільний окіл точки $x+y$. Оскільки система множин $\{v(x+y)\}$, де $v(x+y) = = \{u \in X : \|u-(x+y)\| < \varepsilon\}$, $\varepsilon > 0$, є базисом околів точки $x+y$ у розумінні топології τ (див. наслідок 2.2.1), то існує $\varepsilon > 0$ таке, що

$$v(x+y) = \{u : \|u-(x+y)\| < \varepsilon\} \subset O(x+y)\ . \qquad (3.1)$$

Покладемо

$$O(x) = \left\{t \in X : \|t-x\| < \frac{\varepsilon}{2}\right\},\ O(y) = \left\{z \in X : \|z-y\| < \frac{\varepsilon}{2}\right\}.$$

Маємо, що $\forall t \in O(x)$, $z \in O(y)$

$$\|(t+z)-(x+y)\| \le \|(t-x)+(z-y)\| \le \|t-x\| + \|z-y\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\ .$$

Звідси та зі співвідношення (3.1) випливає, що

$$O(x)+O(y) \subset v(x+y) \subset O(x+y)\ .$$

Це й означає, що операція додавання елементів простору X є неперервною у розумінні топології τ .

Переконаємося, що операція множення елементів простору X на дійсні числа є неперервною операцією у розумінні топології τ .

Нехай $\alpha \in R, x \in X, O(\alpha x)$ – окіл точки αx. Оскільки система множин $\{\nu(\alpha x)\}$, де $\nu(\alpha x) = \{u \in X : \|u - \alpha x\| < \varepsilon\}$, $\varepsilon > 0$, є базисом точки αx у розумінні топології τ (див. наслідок 2.2.1), то існує $\varepsilon > 0$ таке, що

$$\nu(\alpha x) = \{u \in X : \|u - \alpha x\| < \varepsilon\} \subset O(\alpha x) . \tag{3.2}$$

Покладемо

$$O(\alpha) = \{\beta \in R : |\beta - \alpha| < \delta\}, \ O(x) = \{y \in X : \|y - x\| < \delta\}, \tag{3.3}$$

де

$$0 < \delta < \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{|\alpha| + 1 + \|x\|}\right\}. \tag{3.4}$$

Оскільки $|\beta| - |\alpha| \le |\beta - \alpha|$, $\beta \in R$, то

$$(\forall \beta \in O(\alpha)) \ \ |\beta| \le |\alpha| + |\beta - \alpha| < |\alpha| + \delta < |\alpha| + 1 . \tag{3.5}$$

З урахуванням співвідношень (3.3)-(3.5) $\forall \beta \in O(\alpha)$, $y \in O(x)$ матимемо, що

$$\|\beta y - \alpha x\| = \|\beta(y - x) + (\beta - \alpha)x\| \le |\beta| \cdot \|y - x\| + |\beta - \alpha| \cdot \|x\| <$$

$$< (|\alpha| + 1)\delta + \delta\|x\| = (|\alpha| + 1 + \|x\|)\delta < (|\alpha| + 1 + \|x\|)\frac{\varepsilon}{(|\alpha| + 1 + \|x\|)} = \varepsilon .$$

Звідси та зі співвідношення (3.2) випливає, що

$$O(\alpha) \cdot O(x) \subset \nu(\alpha x) \subset O(\alpha x) .$$

Це й означає, що операція множення елементів простору X на дійсні числа є неперервною у розумінні топології τ .

Теорему доведено.

Наслідок 3.1.1. *Нехай* $(X, \|\bullet\|)$ *– лінійний нормований простір,* τ *– топологія на* X *, породжена нормою* $\|\bullet\|$*. Тоді* (X, τ) *є лінійним топологічним простором.*

Справедливість наслідку випливає з означення 2.2.1, згідно з яким X є лінійним простором; наслідку 2.2.1, згідно з яким (X, τ) є топологічним простором; теореми 3.1.1, згідно з якою операції додавання елементів простору X та множення їх на дійсні числа є неперервними у розумінні топології τ .

З наслідку 3.1.1 випливає, що важливими прикладами лінійних топологічних просторів є лінійні нормовані простори.

3.2. Зсув відкритої множини лінійного топологічного простору та її добуток на число, відмінне від нуля

Теорема 3.2.1. *Якщо G є відкритою множиною лінійного топологічного простору X, $x \in X$, то $G + x = x + G$ є відкритою множиною цього простору.*

Доведення. Нехай $y \in G + x$. Тоді $y + (-x) \in G = O\left(y + (-x)\right)$. Оскільки операція додавання елементів лінійного топологічного простору є неперервною та $y + (-x) \in G = O(y + (-x))$, то існують околи $O(y), O(-x)$ такі, що $O(y) + O(-x) \subset O(y + (-x)) = G$. Звідси випливає, що $O(y) + \left(-x\right) \subset G$, а тому $O(y) \subset x + G$. Отже, точка y входить у множину $G + x$ з деяким своїм околом. Згідно з критерієм відкритості множини топологічного простору (див. теорему 1.2.1) $x + G$ є відкритою множиною.

Теорему доведено.

Теорема 3.2.2. *Якщо G є відкритою множиною лінійного топологічного простору X, а $\alpha \in R, \alpha \neq 0$, то αG є відкритою множиною цього простору.*

Доведення. Нехай $y \in \alpha G$. Тоді $\frac{1}{\alpha} y \in G = O(\frac{1}{\alpha} y)$. Оскільки операція множення числа на елемент лінійного топологічного простору є неперервною, то існують околи $O(\frac{1}{\alpha}),\ O(y)$ числа $\frac{1}{\alpha}$ та точки y відповідно, такі, що $O(\frac{1}{\alpha}) \cdot O(y) \subset O(\frac{1}{\alpha} y) = G$. Звідси випливає, що $\frac{1}{\alpha} O(y) \subset G$. Тоді $O(y) \subset \alpha G$.

Отже, точка y входить у множину αG з деяким своїм околом. Згідно з критерієм відкритості множини (див. теорему 1.2.1) αG є відкритою множиною.

Теорему доведено.

Теорема 3.2.3. *Нехай X – лінійний топологічний простір, $\overline{x} \in X$, $O\left(\overline{x}\right)$ – окіл точки $\overline{x}$ простору X, $x \in X$. Тоді існує додатне число δ таке, що $\overline{x} + \left(-\delta; \delta\right) x \subset O\left(\overline{x}\right)$, тобто*

$$\overline{x}+\lambda x\in O\left(\overline{x}\right),\ \lambda\in\left(-\delta,\delta\right). \tag{3.6}$$

Доведення. Маємо, що $0\cdot x=0\in O\left(\overline{x}\right)-\overline{x}$. Внаслідок неперервності операції множення числа на елемент простору X існують число $\delta>0$ та окіл $O\left(x\right)$ точки x простору X такі, що $\left(-\delta,\delta\right)O\left(x\right)\subset O\left(\overline{x}\right)-\overline{x}$. Тому $\overline{x}+\left(-\delta;\delta\right)O\left(x\right)\subset O\left(\overline{x}\right)$. Зокрема, $\overline{x}+\left(-\delta;\delta\right)x\subset O\left(\overline{x}\right)$, тобто $\overline{x}+\lambda x\in O\left(\overline{x}\right)$, $\lambda\in\left(-\delta,\delta\right)$.

Теорему доведено.

3.3. Зв'язок між околами точок лінійного топологічного простору та околами точки нуль цього простору. Поглинаючі та зрівноважені множини. Існування базису околів точки нуль, який складається із зрівноважених околів цієї точки

Теорема 3.3.1. *Для того щоб множина $O(x)$ була околом точки x лінійного топологічного простору X, необхідно і достатньо, щоб $O(x)=x+O(0)$, де $O(0)$ – деякий окіл точки нуль цього простору.*

Доведення. *Необхідність.* Нехай $O(x)$ є околом точки x. Згідно з означенням 1.2.2 $O(x)$ є відкритою множиною лінійного топологічного простору X, яка містить точку x. Відповідно до теореми 3.2.1 $O(x)+\left(-x\right)$ є відкритою множиною. Оскільки $x+\left(-x\right)=0\in O(x)+\left(-x\right)$, то $O(x)+\left(-x\right)$ – відкрита множина, яка містить точку 0. Отже, $O(x)+\left(-x\right)=O(0)$. Тому $O(x)=x+O(0)$, де $O(0)$ – окіл точки 0.

Необхідність доведено.

Достатність. Нехай $O(0)$ – окіл точки 0, $x\in X$. Оскільки $O(0)$ є відкритою множиною лінійного топологічного простору X, то відповідно до теореми 3.2.1 $O(x)=x+O(0)$ є відкритою множиною. Зрозуміло, що $x\in O(x)$, оскільки $x=x+0$, де $0\in O(0)$. Тому $O(x)=x+O(0)$ є околом точки x.

Достатність доведено.

Теорему доведено.

Означення 3.3.1. *Нехай X – лінійний простір. Множина $M\subset X$ називається поглинаючою множиною цього простору, якщо:*

$$(\forall x\in X)(\exists\beta_0>0)(\forall\beta:\left|\beta\right|>\beta_0)\,x\in\beta M.$$

Приклад 3.3.1. Нехай X – лінійний нормований простір, $M = \{u \in X : \|u\| < 1\}$. Тоді M – поглинаюча множина X. Дійсно, нехай $x \in X$. Виберемо $\beta_0 > \|x\|$. Тоді для будь-яких β таких, що $|\beta| > \beta_0 > \|x\|$, одержимо $\frac{\|x\|}{|\beta|} < 1$. Звідси $\frac{1}{|\beta|}\|x\| = \left\|\frac{1}{\beta}x\right\| < 1$. Тому $\frac{1}{\beta}x \in M$, а $x \in \beta M$ для довільних β таких, що $|\beta| > \beta_0 > 0$. Отже, множина M є поглинаючою множиною.

Означення 3.3.2. *Множина M лінійного простору X називається зрівноваженою множиною, якщо*

$$(\forall x \in M)(\forall \alpha : |\alpha| \le 1)\ \alpha x \in M .$$

Приклад 3.3.2. Нехай X – лінійний нормований простір, $M = \{x \in X : \|x\| < 1\}$. Тоді M – зрівноважена множина простору X.

Дійсно, нехай $x \in M$. Тоді $\|x\| < 1$. Для будь-якого α такого, що $|\alpha| \le 1$, одержимо

$$\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\| \le \|x\| < 1 .$$

Тому $\alpha x \in M$, а, отже, M – зрівноважена множина простору X.

Теорема 3.3.2. *Нехай X – лінійний топологічний простір. Будь-який окіл нуля цього простору є поглинаючою множиною.*

Доведення. Нехай $O(0)$ – довільний окіл точки нуль лінійного топологічного простору X, $x \in X$. З (3.6) випливає, що існує $\delta > 0$ таке, що

$$\lambda \cdot x \in O(0), \forall \lambda \in (-\delta, \delta). \tag{3.7}$$

Нехай $\beta_0 = \frac{1}{\delta} > 0$, $\beta \in R$ і $|\beta| > \beta_0$.

Тоді $\frac{1}{|\beta|} = \left|\frac{1}{\beta}\right| < \frac{1}{\beta_0} = \delta$, а тому $\frac{1}{\beta} \in (-\delta, \delta)$.

З урахуванням (3.7) звідси одержимо, що $\frac{1}{\beta}x \in O(0)$, $x \in \beta O(0)$, для всіх $\beta \in R : |\beta| > \beta_0$.

Це й означає, що $O(0)$ є поглинаючою множиною.

Теорему доведено.

Теорема 3.3.3. *Нехай X – лінійний топологічний простір. Будь який окіл $O(0)$ точки нуль простору X включає зрівноважений окіл $\omega(0)$ цієї точки.*

Доведення. Нехай $O(0)$ – довільний окіл точки нуль лінійного топологічного простору X. Оскільки операція множення числа на елемент лінійного топологічного простору є неперервною і $O(0) = O\left(0 \cdot 0\right)$, то існує $\delta > 0$ та $\vartheta(0)$ такі, що

$$(-\delta, \delta) \cdot \vartheta(0) \subset O(0), \tag{3.8}$$

де $\vartheta(0)$ – окіл точки нуль простору X.

З (3.8) випливає, зокрема, що

$$\lambda \vartheta(0) \subset O(0), \text{ де } |\lambda| < \delta, \lambda \neq 0. \tag{3.9}$$

Оскільки $\vartheta(0)$ – відкрита множина, то згідно з теоремою 3.2.2 $\lambda \vartheta(0)$, де $|\lambda| < \delta, \lambda \neq 0$, – також відкрита множина лінійного топологічного простору X, яка містить точку 0. Тому для всіх $\lambda \in R$, $|\lambda| < \delta$, $\lambda \neq 0$, маємо, що $\lambda \vartheta(0)$ – окіл точки нуль, який включається в $O(0)$.

Покладемо $\omega(0) = \bigcup\limits_{\substack{\forall \lambda: |\lambda| < \delta, \\ \lambda \neq 0}} \lambda \vartheta(0)$. Тоді $\omega(0)$ – відкрита множина, як об'єднання відкритих множин, яка містить нуль. Отже, $\omega(0)$ є околом точки нуль. Оскільки має місце співвідношення (3.9), то $\omega(0) \subset O(0)$. Переконаємось, що $\omega(0)$ є зрівноваженою множиною. Нехай $x \in \omega(0)$. Тоді існує число λ_0 таке, що

$$x \in \lambda_0 \vartheta(0), \; |\lambda_0| < \delta, \lambda_0 \neq 0. \tag{3.10}$$

Переконаємось, що $\alpha x \in \omega(0)$ для довільного $\alpha, |\alpha| \leq 1$.

Якщо $\alpha = 0$, то $\alpha x = 0x = 0 \subset \omega(0)$. Отже, для $\alpha = 0$ твердження вірне.

Нехай $\alpha \neq 0$ і $|\alpha| \leq 1$. З урахуванням співвідношення (3.10) одержимо, що

$$\alpha x \in \alpha \lambda_0 \vartheta(0), \; |\alpha \lambda_0| < \delta, \; \alpha \lambda_0 \neq 0. \tag{3.11}$$

Покладемо $\alpha \lambda_0 = \lambda_1$. Внаслідок (3.11)

$$\alpha x \in \lambda_1 \vartheta(0), \text{ де } |\lambda_1| < \delta, \lambda_1 \neq 0.$$

Звідси випливає, що $\alpha x \in \lambda_1 \vartheta(0) \subset \bigcup\limits_{\substack{\forall \lambda: |\lambda| < \delta, \\ \lambda \neq 0}} \lambda v(0) = \omega(0)$.

Це й означає, що $\omega(0)$ є околом точки нуль, який є зрівноваженою множиною.

Теорему доведено.

Теорема 3.3.4. *Нехай X – лінійний топологічний простір. Існує базис $\{\omega(0)\}$ околів $\omega(0)$ точки нуль цього простору, який складається з зрівноважених околів точки нуль.*

Доведення. Нехай $\{O(0)\}$ – довільний базис околів точки нуль. За теоремою 3.3.3 для довільного $O(0)$ існує зрівноважений окіл $\omega(0)$ точки нуль, який включається в $O(0)$. Доведемо, що $\{\omega(0)\}$ є базисом околів точки нуль. Нехай $\vartheta(0)$ – довільний окіл точки нуль. Оскільки $\{O(0)\}$ є базисом околів точки нуль, то існує окіл $O(0) \in \{O(0)\}$, такий, що $O(0) \subset \vartheta(0)$. Оскільки $\omega(0) \subset O(0) \subset \vartheta(0)$, то звідси випливає, що $\{\omega(0)\}$ є базисом околів точки нуль, який складається із зрівноважених околів точки нуль.

Теорему доведено.

Розділ 4
ВІДРІЗОК ЛІНІЙНОГО ПРОСТОРУ. ОПУКЛІ МНОЖИНИ

4.1. Відрізок лінійного простору

Розглянемо відрізок $[x_1, x_2]$ числової прямої, для якого $x_1 < x_2$. Нехай $x \in [x_1, x_2]$. Позначимо $\alpha = \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1}$. Зрозуміло, що $0 \le \alpha \le 1$. Звідки

$$x - x_1 = \alpha(x_2 - x_1) = \alpha x_2 - \alpha x_1, \; x = (1-\alpha)x_1 + \alpha x_2 .$$

Отже, для довільного $x \in [x_1, x_2]$ $x = (1-\alpha)x_1 + \alpha x_2$, де $0 \le \alpha \le 1$. Таке подання має місце і тоді, коли $x_1 = x_2$.

Отже, якщо $x_1 \le x_2$, то

$$[x_1, x_2] \subset \{x : x = (1-\alpha)x_1 + \alpha x_2, 0 \le \alpha \le 1\} . \tag{4.1}$$

Нехай тепер $x \in \{x : x = (1-\alpha)x_1 + \alpha x_2, 0 \le \alpha \le 1\}$. Тоді

$$x = (1-\alpha)x_1 + \alpha x_2, \text{ де } 0 \le \alpha \le 1.$$

Звідси $x_1 = (1-\alpha)x_1 + \alpha x_1 \le x = (1-\alpha)x_1 + \alpha x_2 \le (1-\alpha)x_2 + \alpha x_2 = x_2$. Тобто $x \in [x_1, x_2]$.

Тому

$$\{x : x = (1-\alpha)x_1 + \alpha x_2, 0 \le \alpha \le 1\} \subset [x_1, x_2]. \tag{4.2}$$

З (4.1) і (4.2) випливає, що

$$[x_1, x_2] = \{x : x = (1-\alpha)x_1 + \alpha x_2, 0 \le \alpha \le 1\}.$$

Отримане подання точок відрізка $[x_1, x_2]$ числової прямої з допомогою параметра α та кінців цього відрізка покладено в основу означення відрізка будь-якого лінійного простору.

Означення 4.1.1. *Нехай X – лінійний простір, $x_1, x_2 \in X$. Відрізком $[x_1, x_2]$ простору X, кінцями якого є точки x_1 та x_2, називається сукупність точок простору X виду*

$$[x_1, x_2] = \{x \in X : x = (1-\alpha)x_1 + \alpha x_2, 0 \le \alpha \le 1\}.$$

Якщо в означенні 4.1.1 покласти $(1-\alpha) = \beta$, то $\alpha = (1-\beta)$, а

$$[x_1, x_2] = \{x \in X : x = \beta x_1 + (1-\beta)x_2, 0 \le \beta \le 1\}.$$

Якщо покласти $1-\alpha = \alpha_1$, а $\alpha = \alpha_2$, то

$$[x_1, x_2] = \{x \in X : x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, \alpha_1 \ge 0, \alpha_2 \ge 0, \alpha_1 + \alpha_2 = 1\}.$$

Підсумовуючи сказане вище, приходимо до висновку, що в лінійному просторі X відрізок $[x_1, x_2]$, кінцями якого є точки x_1, x_2, подається таким чином:

$$[x_1, x_2] = \{x \in X : x = (1-\alpha)x_1 + \alpha x_2, 0 \le \alpha \le 1\} =$$
$$= \{x \in X : x = \beta x_1 + (1-\beta)x_2, 0 \le \beta \le 1\} =$$
$$= \{x \in X : x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, \alpha_1 \ge 0, \alpha_2 \ge 0, \alpha_1 + \alpha_2 = 1\}.$$

4.2. Опуклі множини лінійного простору та деякі їх властивості. Приклади опуклих множин

Означення 4.2.1. *Множина A лінійного простору X називається опуклою множиною, якщо разом з довільними двома її точками x_1, x_2 вона включає відрізок, кінцями якого є ці точки, тобто*

$$(\forall x_1, x_2 \in A)\ [x_1, x_2] \subset A.$$

Розглянемо деякі приклади опуклих множин.

Приклад 4.2.1. Нехай X – лінійний нормований простір, $A=\{x\in X:\|x\|\le 1\}$. Переконаємося, що A є опуклою множиною. Нехай $x_1,x_2\in A$, тобто $\|x_1\|\le 1, \|x_2\|\le 1$. Переконаємося, що $[x_1,x_2]\subset A$. Нехай $x\in[x_1,x_2]$. Тоді $x=(1-\alpha)x_1+\alpha x_2$, де $0\le\alpha\le 1$. Звідси

$$\|x\|=\|(1-\alpha)x_1+\alpha x_2\|\le(1-\alpha)\|x_1\|+\alpha\|x_2\|\le(1-\alpha)\cdot 1+\alpha\cdot 1=1 .$$

Отже, $\|x\|\le 1$. Тому $x\in A$. Звідси випливає, що $[x_1,x_2]\subset A$. Це й означає, що A – опукла множина.

Теорема 4.2.1. *Перетин довільної кількості опуклих множин лінійного простору X є опуклою множиною.*

Доведення. Нехай $M=\bigcap\limits_{i\in I}M_i$, де M_i, $i\in I$, – опуклі множини простору X, $x_1,x_2\in M$. Тоді $x_1,x_2\in M_i$ для довільного $i\in I$. Оскільки M_i, $i\in I$, – опукла множина, то відрізок $[x_1,x_2]\subset M_i$, $i\in I$. Тому $[x_1,x_2]\subset M$. Звідси випливає, що M є опуклою множиною.

Теорему доведено.

Теорема 4.2.2. *Нехай A, B – опуклі множини лінійного простору X, $\alpha\in R$. Тоді опуклими будуть множини*

$$A+B=\{c:c=x+y, x\in A, y\in B\},\ \alpha A=\{c:c=\alpha x, x\in A\} .$$

Доведення. Нехай $c_1,c_2\in A+B$. Тоді існують $x_1,x_2\in A$ та $y_1,y_2\in B$ такі, що $c_1=x_1+y_1$, $c_2=x_2+y_2$. Доведемо, що відрізок $[c_1,c_2]\subset A+B$. Нехай $c\in[c_1,c_2]$. Тоді існує число $\tilde\alpha\in[0,1]$ таке, що

$$c=(1-\tilde\alpha)c_1+\tilde\alpha c_2=(1-\tilde\alpha)(x_1+y_1)+\tilde\alpha(x_2+y_2)=$$
$$=(1-\tilde\alpha)x_1+\tilde\alpha x_2+(1-\tilde\alpha)y_1+\tilde\alpha y_2 .$$

Оскільки $x_1,x_2\in A$ і A – опукла множина простору X, то $[x_1,x_2]\subset A$. Аналогічно $[y_1,y_2]\subset B$. Тому $x=(1-\tilde\alpha)x_1+\tilde\alpha x_2\in A$, $y=(1-\tilde\alpha)y_1+\tilde\alpha y_2\in B$. Звідси $c=(1-\tilde\alpha)c_1+\tilde\alpha c_2=x+y\in A+B$. Отже, відрізок $[c_1,c_2]\subset A+B$. Тому $A+B$ є опуклою множиною.

Доведемо, що αA є опуклою множиною. Нехай $c_1,c_2\in\alpha A$. Тоді існують $x_1,x_2\in A$ такі, що $c_1=\alpha x_1$, $c_2=\alpha x_2$. Доведемо, що відрізок $[c_1,c_2]\subset\alpha A$. Нехай $c\in[c_1,c_2]$. Існує $\tilde\alpha\in[0,1]$ таке, що

$$c=(1-\tilde\alpha)c_1+\tilde\alpha c_2=(1-\tilde\alpha)(\alpha x_1)+\tilde\alpha(\alpha x_2)=\alpha((1-\tilde\alpha)x_1+\tilde\alpha x_2) .$$

Оскільки $x_1,x_2\in A$ і A – опукла множина простору X, то $[x_1,x_2]\subset A$. Тому $x=(1-\tilde\alpha)x_1+\tilde\alpha x_2\in A$. Звідси

$$c = (1-\tilde{\alpha})c_1 + \ \ +\tilde{\alpha}c_2 = \alpha x \in \alpha A .$$

Отже, відрізок $[c_1, c_2] \subset \alpha A$. Це означає, що αA є опуклою множиною.

Теорему доведено.

4.3. Деякі властивості опуклих множин лінійного топологічного простору

Теорема 4.3.1. *Якщо A є опуклою множиною лінійного топологічного простору X, то $\overline{A}$ також є опуклою множиною цього простору.*

Доведення. Нехай $x_1, x_2 \in \overline{A}$. Доведемо, що $[x_1, x_2] \subset \overline{A}$.

Нехай x – довільна точка відрізка $[x_1, x_2]$. Тоді $x = (1-\alpha)x_1 + \alpha x_2$, $\alpha \in [0,1]$. Оскільки в X операція додавання елементів цього простору є неперервною, то для довільного околу $O(x) = O((1-\alpha)x_1 + \alpha x_2)$ точки x існують окіл $O((1-\alpha)x_1)$ точки $(1-\alpha)x_1$ та окіл $O(\alpha x_2)$ точки αx_2 такі, що

$$O((1-\alpha)x_1) + O(\alpha x_2) \subset O(x) . \qquad (4.3)$$

Враховуючи, що операція множення дійсних чисел на елементи простору X є неперервною, то існують окіл $O(1-\alpha)$ числа $(1-\alpha)$, окіл $O(x_1)$ точки x_1, окіл $O(\alpha)$ числа α, окіл $O(x_2)$ точки x_2 такі, що

$$O(1-\alpha)O(x_1) \subset O((1-\alpha)x_1),\ O(\alpha)O(x_2) \subset O(\alpha x_2) .$$

З цих співвідношень та співвідношення (4.3) випливає, що

$$O(1-\alpha)O(x_1) + O(\alpha)O(x_2) \subset O(x) .$$

Зокрема, $(1-\alpha)O(x_1) + \alpha O(x_2) \subset O(x)$.

Оскільки $x_1, x_2 \in \overline{A}$, то існують $y_1, y_2 \in A$ такі, що $y_1 \in O(x_1)$, $y_2 \in O(x_2)$. Тоді $y = (1-\alpha)y_1 + \alpha y_2 \in (1-\alpha)O(x_1) + \alpha O(x_2) \subset O(x)$. Оскільки за умовою A є опуклою множиною простору X, $y_1, y_2 \in A$, то відрізок $[y_1, y_2] \subset A$. Тому $y \in A$. Отже, довільний окіл $O(x)$ точки x містить точку $y \in A$. Тому x є точкою дотикання множини A і, отже, $x \in \overline{A}$. Тому $[x_1, x_2] \subset \overline{A}$. Це означає, що $\overline{A}$ є опуклою множиною простору X.

Теорему доведено.

Теорема 4.3.2. *Нехай X – лінійний топологічний простір, A – опукла множина простору X, $p \in \overset{0}{A}$, $g \in \overline{A}$, тоді $[p, g) \subset \overset{0}{A}$.*

Доведення. Якщо $p \in \overset{0}{A}$, то існує окіл $O(p)$ точки p такий, що $O(p) \subset A$. Згідно з теоремою 3.3.1 існує окіл $O(0)$ точки нуль такий, що $O(p) = p + O(0)$.

Нехай $x \in (p, g)$. Тоді $x = (1-\alpha)p + \alpha g$, $\alpha \in (0,1)$. Доведемо, що $x \in \overset{0}{A}$.

Нехай $O(g) = g + \dfrac{1-\alpha}{-\alpha} O(0)$. З теорем 3.2.2 та 3.3.1 випливає, що $O(g)$ є околом точки g. Оскільки $g \in \overline{A}$, то існує $y \in O(g) \cap A$.

Врахувавши, що

$$O(g) = g + \frac{1-\alpha}{-\alpha} O(0) = g + \frac{1-\alpha}{-\alpha}(O(0) + p - p) = g + \frac{1-\alpha}{-\alpha}(O(p) - p),$$

робимо висновок, що

$$y \in g + \frac{1-\alpha}{-\alpha} O(p) - \frac{1-\alpha}{-\alpha} p .$$

Звідси $-\alpha y \in -\alpha g + (1-\alpha)O(p) - (1-\alpha)p$. Тому

$$(1-\alpha)p + \alpha g \in \alpha y + (1-\alpha)O(p) . \tag{4.4}$$

Оскільки A є опуклою множиною, $y \in A$ і $O(p) \subset A$, то

$$\alpha y + (1-\alpha)O(p) \subset A, \alpha \in (0,1) .$$

Оскільки $\alpha y + (1-\alpha)O(p)$ є відкритою множиною (див. теореми 3.2.1 та 3.2.2), яка включається в A, то $\alpha y + (1-\alpha)O(p) \subset \overset{0}{A}$. Внаслідок цього та (4.4) тоді $(1-\alpha)p + \alpha g \in \overset{0}{A}$, а, отже, і $(p, g) \subset \overset{0}{A}$. Звідси випливає, що $[p, g) \subset \overset{0}{A}$, оскільки $p \in \overset{0}{A}$ за умовою теореми.

Теорему доведено.

Теорема 4.3.3. *Нехай X – лінійний топологічний простір, $A \subset X$, A – опукла множина, $\overset{0}{A} \neq \varnothing$. Тоді $\overset{0}{A}$ також є опуклою множиною.*

Доведення. Нехай $p, g \in \overset{0}{A}$. Оскільки $g \in \overset{0}{A} \subset A$, то $g \in \overline{A}$. Згідно з теоремою 4.3.2 $[p, g) \subset \overset{0}{A}$. З урахуванням того, що $g \in \overset{0}{A}$, одержимо, що $[p, g] \subset \overset{0}{A}$. Тому $\overset{0}{A}$ є опуклою множиною простору X.

Теорему доведено.

4.4. Опукла комбінація точок лінійного простору. Опукла оболонка множини лінійного простору

Означення 4.4.1. *Нехай* X *– лінійний простір,* $x_1,...,x_m \in X$ *. Точка* $\alpha_1 x_1 + ... + \alpha_m x_m$ *, де* $\alpha_i \in R$ *,* $\alpha_i \geq 0$ *,* $i = \overline{1,m}$ *,* $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1$ *, називається опуклою комбінацією точок* $x_1,...,x_m$ *.*

Означення 4.4.2. *Нехай* $A \subset X$ *. Сукупність усіх опуклих комбінацій точок множини* A *називається опуклою оболонкою цієї множини. Опукла оболонка множини* A *позначається через* coA *.*

Твердження 4.4.1. *Нехай* X *– лінійний простір,* $A \subset X$ *. Тоді* $A \subset coA$ *.*

Доведення. Нехай $x \in A$. Тоді $1 \cdot x \in coA$. Тому $A \subset coA$.

Твердження доведено.

Твердження 4.4.2. *Нехай* X *– лінійний простір,* $A \subset X$ *. Тоді* coA *– опукла множина простору* X *.*

Доведення. Нехай $x^1, x^2 \in coA$. Тоді x^1, x^2 є опуклими комбінаціями точок множини A. Отже, існують $a_i \in A$, $\alpha_i \in R$, $\alpha_i \geq 0$, $i = \overline{1,m}$, $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1$; $b_j \in A$, $\beta_j \in R$, $\beta_j \geq 0$, $j = \overline{1,n}$, $\sum_{j=1}^{n} \beta_j = 1$, такі, що $x^1 = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i a_i$, $x^2 = \sum_{j=1}^{n} \beta_j b_j$.

Нехай $x \in \left[x^1, x^2 \right]$. Тоді існує $\lambda \in [0,1]$ таке, що

$$x = (1-\lambda) x^1 + \lambda x^2 = (1-\lambda) \sum_{i=1}^{m} \alpha_i a_i + \lambda \sum_{j=1}^{n} \beta_j b_j .$$

Покладемо $\gamma_i = (1-\lambda)\alpha_i$, $i = \overline{1,m}$, $\gamma_{m+j} = \lambda \beta_j$, $j = \overline{1,n}$. Ясно, що $\gamma_i \geq 0$, $i = \overline{1, m+n}$. Крім того,

$$\sum_{i=1}^{m+n} \gamma_i =$$

$$= (1-\lambda)\alpha_1 + ... + (1-\lambda)\alpha_m + \lambda\beta_1 + ... + \lambda\beta_n =$$

$$= (1-\lambda) \sum_{i=1}^{m} \alpha_i + \lambda \sum_{j=1}^{n} \beta_j = (1-\lambda) \cdot 1 + \lambda \cdot 1 = 1 .$$

Тоді $x=\gamma_1 a_1+...+\gamma_m a_m+\gamma_{m+1}b_1+...+\gamma_{m+n}b_n$, де $a_1,...,a_m$, $b_1,...,b_n \in A$, $\gamma_i \geq 0$, $i=\overline{1,m+n}$, $\sum_{i=1}^{m+n}\gamma_i=1$. Тому x є опуклою комбінацією точок $a_1,...,a_m,b_1,...,b_n$ множини A, отже, $x \in coA$. Звідси випливає, що $\left[x^1,x^2\right] \subset coA$. Це означає, що coA є опуклою множиною простору X.

Твердження доведено.

Твердження 4.4.3. *Нехай X – лінійний простір, A – опукла множина цього простору. Тоді $coA \subset A$.*

Доведення. Нехай $x \in coA$. Тоді $x=\alpha_1 a_1+...+\alpha_m a_m$, де $m \in N$, $a_i \in A$, $\alpha_i \in R$, $\alpha_i \geq 0$, $i=\overline{1,m}$, $\sum_{i=1}^{m}\alpha_i=1$. Доведемо, що $x \in A$.

Доведемо це співвідношення методом математичної індукції.

Нехай $m=1$. Тоді $x=1\cdot a_1=a_1 \in A$. Отже, при $m=1$ співвідношення $x \in A$ має місце.

Припустимо, що $\alpha_1 a_1+...+\alpha_m a_m \in A$ для довільних $a_i \in A$, $\alpha_i \in R$, $\alpha_i \geq 0$, $i=\overline{1,m}$, $\sum_{i=1}^{m}\alpha_i=1$.

Доведемо, що $x=\alpha_1 a_1+...+\alpha_m a_m+\alpha_{m+1}a_{m+1}$ належить A для довільних $a_i \in A$, $\alpha_i \in R$, $\alpha_i \geq 0$, $i=\overline{1,m+1}$, $\sum_{i=1}^{m+1}\alpha_i=1$.

Оскільки $\sum_{i=1}^{m+1}\alpha_i=1$ та $\alpha_i \geq 0$, $i=\overline{1,m+1}$, то $0 \leq \alpha_{m+1} \leq 1$.

Якщо $\alpha_{m+1}=1$, то $\alpha_1=...=\alpha_m=0$. Звідси $x=1\cdot a_{m+1}=a_{m+1} \in A$.

Якщо $\alpha_{m+1}=0$, то $x=\alpha_1 a_1+...+\alpha_m a_m \in A$ (за припущенням).

Нехай $0<\alpha_{m+1}<1$. Покладемо $\bar{x}=\frac{\alpha_1}{1-\alpha_{m+1}}a_1+...+\frac{\alpha_m}{1-\alpha_{m+1}}a_m$.

Оскільки $\frac{\alpha_i}{1-\alpha_{m+1}} \geq 0$, $i=\overline{1,m}$,

$$\sum_{i=1}^{m}\frac{\alpha_i}{1-\alpha_{m+1}}=\frac{1}{1-\alpha_{m+1}}\sum_{i=1}^{m}\alpha_i=\frac{1}{1-\alpha_{m+1}}\left(1-\alpha_{m+1}\right)=1,$$

то згідно з припущенням $\bar{x} \in A$. Тоді $x=\left(1-\alpha_{m+1}\right)\bar{x}+\alpha_{m+1}a_{m+1}$, де $\bar{x},a_{m+1} \in A$ і $0 \leq \alpha_{m+1} \leq 1$. Отже, $x \in \left[\bar{x},a_{m+1}\right]$. Оскільки A – опукла множина лінійного простору X і $\overline{x}$, $a_{m+1} \in A$, то $\left[\overline{x}, a_{m+1}\right] \subset A$, а, отже, і $x \in A$.

Згідно з принципом математичної індукції тоді для будь-яких $x \in coA$ будемо мати, що $x \in A$. Тому $coA \subset A$.

Твердження доведено.

Теорема 4.4.1. *Множина A лінійного простору X буде опуклою тоді і тільки тоді, коли $A = coA$.*

Доведення. ***Необхідність.*** Нехай множина A лінійного простору X є опуклою множиною. Згідно з твердженням 4.4.3 $coA \subset A$, а згідно з твердженням 4.4.1 $A \subset coA$ для будь-якої множини $A \subset X$. Тому справедлива рівність $A = coA$.

Необхідність доведено.

Достатність. Нехай для множини A лінійного простору X має місце рівність $A = coA$. Згідно з твердженням 4.4.2 coA є опуклою множиною X. Звідси та з рівності $A = coA$ випливає, що A є опуклою множиною лінійного простору X.

Достатність доведено.

Теорему доведено.

Розділ 5
ЛІНІЙНІ ФУНКЦІОНАЛИ

5.1. Означення функціонала. Критерій неперервності функціонала

Означення 5.1.1. *Відповідність, при якій кожному елементу множини X відповідає єдине дійсне число, називається дійснозначною функцією, заданою на X, або дійснозначним функціоналом, заданим на X.*

Далі будемо розглядати лише дійснозначні функціонали і називати їх просто функціоналами.

Часто функціонали позначають літерами $f, \varphi, \ldots$.

Нехай (X, τ) – топологічний простір. Функціонал, заданий на X, будемо називати функціоналом, заданим на топологічному просторі X.

Означення 5.1.2. *Функціонал f, заданий на топологічному просторі X, називається неперервним в точці $x_0 \in X$ (у розумінні то-*

пології τ , заданої на X), якщо для довільного числа $\varepsilon > 0$ існує окіл $O(x_0)$ точки x_0 топологічного простору X , такий, що $\left| f(x) - f(x_0) \right| < \varepsilon, x \in O(x_0)$, тобто, якщо

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists O(x_0))(\forall x \in O(x_0)) \left| f(x) - f(x_0) \right| < \varepsilon .$$

Означення 5.1.3. *Кажуть, що функціонал f , заданий на топологічному просторі X , є неперервним на множині $A \subset X$, якщо він неперервний в кожній точці множини A .*

Означення 5.1.4. *Кажуть, що функціонал f , заданий на топологічному просторі X , є неперервним функціоналом, якщо він неперервний у кожній точці $x \in X$.*

Теорема 5.1.1 (критерій неперервності функціонала). *Для того щоб функціонал f був неперервним на топологічному просторі X , необхідно і достатньо, щоб для довільних α і β , $\alpha, \beta \in R$, множини $\{x \in X : f(x) < \alpha\}$ та $\{x \in X : f(x) > \beta\}$ були відкритими множинами цього топологічного простору.*

Доведення. *Необхідність.* Нехай f є неперервним функціоналом на топологічному просторі X . Доведемо, що множина $\{x \in X : f(x) < \alpha\}$, де $\alpha \in R$, є відкритою множиною цього простору.

Нехай $x_0 \in \{x \in X : f(x) < \alpha\}$. Тоді $f(x_0) < \alpha$. Покладемо $\varepsilon = \alpha - f(x_0)$. Зрозуміло, що $\varepsilon > 0$. Оскільки f є неперервним функціоналом на X , то він є неперервним у точці x_0 . Тому для $\varepsilon = \alpha - f(x_0)$ існує окіл $O(x_0)$ точки x_0 простору X такий, що для довільних $x \in O(x_0)$ має місце нерівність

$$\left| f(x) - f(x_0) \right| < \varepsilon = \alpha - f(x_0) . \tag{5.1}$$

З (5.1) випливає, що

$f(x) - f(x_0) < \alpha - f(x_0)$ для довільного $x \in O(x_0)$.

Тому $f(x) < \alpha$ для довільного $x \in O(x_0)$. Звідси випливає, що

$$O(x_0) \subset \{x \in X : f(x) < \alpha\} .$$

Згідно з теоремою 1.2.1 $\{x \in X : f(x) < \alpha\}$ є відкритою множиною простору X .

Аналогічно доводиться, що множина $\{x \in X : f(x) > \beta\}$ є відкритою множиною топологічного простору X .

Необхідність доведено.

Достатність. Нехай для довільних $\alpha, \beta \in R$ множини $\{x \in X : f(x) < \alpha\}$, $\{x \in X : f(x) > \beta\}$ є відкритими множинами топологічного простору X. Доведемо, що f є неперервним функціоналом на цьому просторі. Нехай $\varepsilon > 0$, $x_0 \in X$. Покладемо $\alpha = \varepsilon + f(x_0)$. За умовами теореми множина $A = \{x \in X : f(x) < \alpha = \varepsilon + f(x_0)\}$ є відкритою множиною X. Зрозуміло, що $x_0 \in A$. Для довільного $x \in A$ $f(x) < \varepsilon + f(x_0)$. Отже,

$$f(x) - f(x_0) < \varepsilon, \ x \in A. \tag{5.2}$$

Покладемо $\beta = f(x_0) - \varepsilon$. За умовами теореми множина $B = \{x \in X : f(x) > \beta = f(x_0) - \varepsilon\}$ є відкритою множиною X. Зрозуміло, що $x_0 \in B$. Для довільного $x \in B$ $f(x) > f(x_0) - \varepsilon$. Отже,

$$f(x_0) - f(x) < \varepsilon, \ x \in B. \tag{5.3}$$

Оскільки $O(x_0) = A \cap B$ є перетином двох відкритих множин A і B, то $O(x_0)$ є відкритою множиною (див. властивість α_3) підрозділу1.2) простору X, яка містить точку x_0. Тому $O(x_0)$ є околом точки x_0 (див. означення 1.2.2). Згідно з (5.2) та (5.3) отримаємо, що для довільного $x \in O(x_0)$

$$\left| f(x) - f(x_0) \right| < \varepsilon.$$

Тому функціонал f є неперервним у точці $x_0 \in X$. Оскільки x_0 вибрано довільно з X, то звідси випливає, що f є неперервним функціоналом на X.

Достатність доведено.

Теорему доведено.

5.2. Лінійні функціонали та деякі їх властивості

Означення 5.2.1. *Функціонал f, заданий на лінійному просторі X, називається лінійним функціоналом, якщо:*

1) $(\forall x, y \in X) \ \ f(x+y) = f(x) + f(y),$

2) $(\forall \alpha \in R)(\forall x \in X) \ \ f(\alpha x) = \alpha f(x).$

Розглянемо деякі приклади лінійних функціоналів, заданих на лінійних просторах.

Приклад 5.2.1. Нехай $X = R^n$, $c = (c_1,...,c_n) \in R^n$. Для $x = (x_1,..., x_n) \in R^n$ покладемо

$$f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n = \langle c, x \rangle .$$

Переконаємося, що f є лінійним функціоналом, заданим на R^n.

Дійсно, нехай $x^1, x^2 \in R^n$, тоді

$$f(x^1 + x^2) = \left\langle c, x^1 + x^2 \right\rangle = \left\langle c, x^1 \right\rangle + \left\langle c, x^2 \right\rangle = f(x^1) + f(x^2) .$$

Умова 1) виконується.

Нехай $\alpha \in R$, $x \in R^n$. Тоді

$$f(\alpha x) = \langle c, \alpha x \rangle = \alpha \langle c, x \rangle = \alpha f(x) .$$

Умова 2) виконується.

Отже, f є лінійним функціоналом, заданим на R^n.

Приклад 5.2.2. Нехай $X = C_{[a,b]}$, $t_0 \in [a,b]$. Для довільного $x \in C_{[a,b]}$ покладемо $f(x) = x(t_0)$.

Переконаємося, що f є лінійним функціоналом, заданим на $C_{[a,b]}$.

Дійсно, для довільних $x_1, x_2 \in C_{[a,b]}$

$$f(x_1 + x_2) = (x_1 + x_2)(t_0) = x_1(t_0) + x_2(t_0) = f(x_1) + f(x_2).$$

Для $\alpha \in R$, $x \in C_{[a,b]}$

$$f(\alpha x) = (\alpha x)(t_0) = \alpha x(t_0) = \alpha f(x) .$$

Отже, f є лінійним функціоналом, заданим на $C_{[a,b]}$.

Розглянемо деякі властивості лінійних функціоналів.

Теорема 5.2.1. *Нехай X – лінійний простір, Q – опукла множина простору X, $c \in R$, f – лінійний функціонал, заданий на X, $f(x) \neq c$ для всіх $x \in Q$. Тоді або $f(x) < c$ для всіх $x \in Q$, або $f(x) > c$ для всіх $x \in Q$.*

Доведення. Доведення проведемо методом від супротивного.

Припустимо, що існують такі $x_1, x_2 \in Q$, що $f(x_1) < c$, $f(x_2) > c$.

Розглянемо числову функцію

$$\psi(\alpha) = f((1-\alpha)x_1 + \alpha x_2) - c = (1-\alpha) f(x_1) + \alpha f(x_2) - c =$$
$$= \alpha(f(x_2) - f(x_1)) + f(x_1) - c, \quad \alpha \in R .$$

Маємо, що

$$\psi(0) = f(x_1) - c < 0, \quad \psi(1) = f(x_2) - c > 0 . \tag{5.4}$$

Оскільки $\psi(\alpha)$, $\alpha \in R$, є лінійною функцією, заданою на R, то вона неперервна на R. З нерівностей (5.4) і неперервності функції $\psi(\alpha)$, $\alpha \in R$, випливає, що існує число $\alpha_0 \in (0,1)$, для якого

$$\psi(\alpha_0) = f((1-\alpha_0)x_1 + \alpha_0 x_2) - c = 0 .$$

Тому для точки $\overline{x} = (1-\alpha_0)x_1 + \alpha_0 x_2$ $f(\overline{x}) = c$, причому $\overline{x} \in Q$, оскільки Q є опуклою множиною простору X, що суперечить умові теореми.

Отже, або $f(x) < c$ для всіх $x \in Q$, або $f(x) > c$ для всіх $x \in Q$.

Теорему доведено.

Теорема 5.2.2. *Нехай X – лінійний топологічний простір, Q – відкрита множина простору X, f – ненульовий лінійний функціонал, заданий на X, $f(x) \le c$ для всіх $x \in Q$. Тоді $f(x) < c$ для всіх $x \in Q$.*

Доведення. Доведення проведемо методом від супротивного.

Припустимо, що існує елемент $x_0 \in Q$ такий, що $f(x_0) = c$.

Оскільки множина Q є відкритою, то Q є околом точки x_0. Згідно з теоремою 3.3.1 існує такий окіл $O(0)$ точки нуль, що $Q = x_0 + O(0)$. Відповідно до теореми 3.3.3 існує зрівноважений окіл $\omega(0)$ точки нуль простору X, який включається в окіл $O(0)$. Тоді $x_0 + \omega(0) \subset$ $\subset x_0 + O(0) = Q$. Тому для довільного $z \in \omega(0)$ $x_0 + z \in Q$, а, отже,

$$f(x_0 + z) = f(x_0) + f(z) \le c = f(x_0) .$$

Звідси випливає, що

$$f(z) \le 0, \ z \in \omega(0) . \tag{5.5}$$

Оскільки $\omega(0)$ – зрівноважений окіл нуля, то для довільного $z \in \omega(0)$ також і $(-z) \in \omega(0)$. Зі співвідношення (5.5) одержимо, що $f(-z) = -f(z) \le 0$. Тому

$$f(z) \ge 0, \ z \in \omega(0) . \tag{5.6}$$

Внаслідок (5.5) та (5.6) одержуємо, що $(\forall z \in \omega(0)) f(z) = 0$.

Переконаємось, що $f(x) = 0$ для довільного $x \in X$. Оскільки $\omega(0)$ є поглинаючою множиною простору X (див. теорему 3.3.2), то

$$(\forall x \in X)(\exists \beta_0 > 0)(\forall \beta : |\beta| > \beta_0) \ x \in \beta\omega(0) .$$

Тому для $x \in X$ існують число $\beta \ne 0$ та елемент $z \in \omega(0)$ такі, що $x = \beta z$. Звідси

$$f(x) = f(\beta z) = \beta f(z) = \beta \cdot 0 = 0 .$$

Отже, $f(x)=0$ для довільного $x \in X$. Тому f – нульовий функціонал, що суперечить умові теореми.

Одержана суперечність доводить, що $f(x)<c$ для всіх $x \in Q$.

Теорему доведено.

Надалі будемо розглядати, в основному, функціонали, неперервні на лінійному топологічному просторі X.

Легко переконатися, що лінійний функціонал *f* прикладу 5.2.1 є неперервним на просторі R^n, який є нормованим і, отже, лінійним топологічним простором.

Переконаємось, що лінійний функціонал *f* прикладу 5.2.2 є неперервним на лінійному топологічному просторі $C_{[a,b]}$, топологія якого породжена рівномірною нормою, заданою на $C_{[a,b]}$ (див. приклад 2.2.3).

Нехай, як і в прикладі 5.2.2, $t_0 \in [a,b]$. Для довільного $\varepsilon>0$ розглянемо окіл $O(x_0)$ точки $x_0 \in C_{[a,b]}$ такий, що

$$O(x_0)=\left\{x \in C_{[a,b]}:\|x-x_0\|<\delta=\varepsilon\right\}.$$

Тоді для довільного $x \in O(x_0)$

$$\left|f(x)-f(x_0)\right|=\left|x(t_0)-x_0(t_0)\right|=\left|(x-x_0)(t_0)\right| \leq$$
$$\leq \max_{a \leq t \leq b}\left|(x-x_0)(t)\right|=\|x-x_0\|<\delta=\varepsilon.$$

Отже,

$$(\forall \varepsilon>0)(\exists O(x_0)=\left\{x:\|x-x_0\|<\delta=\varepsilon\right\})(\forall x \in O(x_0))\ \left|f(x)-f(x_0)\right|<\varepsilon.$$

Це й означає, що f є лінійним функціоналом, неперервним у будь-якій точці $x_0 \in C_{[a,b]}$, а, отже, неперервний на $C_{[a,b]}$.

Теорема 5.2.3. *Нехай X – лінійний топологічний простір. Якщо лінійний функціонал f, заданий на X, неперервний у деякій точці $x_0 \in X$, то він неперервний на X.*

Доведення. Нехай X – лінійний топологічний простір, f – заданий на X лінійний функціонал, неперервний в точці $x_0 \in X$. Нехай y – довільна точка простору X. Оскільки f неперервний у точці x_0, то

$$(\forall \varepsilon>0)(\exists O(x_0))(\forall x \in O(x_0))\ \left|f(x)-f(x_0)\right|<\varepsilon.$$

Розглянемо множину $O(y)=O(x_0)-x_0+y$. Зрозуміло, що $O(y)$ є околом точки y. Тоді для довільного $z \in O(y)$ існує $x \in O(x_0)$, що $z=x-x_0+y$. Тому

$$\left|f(z)-f(y)\right|=\left|f\left(x-x_0+y\right)-f(y)\right|=\left|f(x)-f(x_0)\right|<\varepsilon .$$

Отже,

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists O(y))(\forall z\in O(y))\ \left|f(z)-f(y)\right|<\varepsilon .$$

Це й означає, що функціонал f є неперервним у будь-якій точці $y\in X$.

Теорему доведено.

5.3. Простір, спряжений з лінійним топологічним простором, і слабка $*$ топологія цього простору

На множині лінійних функціоналів, визначених на лінійному просторі X , можна ввести лінійні операції. Нехай f та φ – такі функціонали. Означимо суму цих функціоналів рівністю $\left(f+\varphi\right)\left(x\right)=f(x)+\varphi(x)$, $x\in X$, а добуток дійсного числа λ на функціонал f – рівністю $\left(\lambda f\right)\left(x\right)=\lambda f(x)$, $x\in X$.

Зрозуміло, що $f+\varphi$ та λf є лінійними функціоналами, заданими на X . Легко перевірити, що означені в такий спосіб операції додавання функціоналів та множення їх на числа задовольняють аксіомам лінійного простору. Тому множина всіх лінійних функціоналів, заданих на лінійному просторі X, є лінійним простором. Зокрема, нулем цього простору є такий функціонал 0 , що $0\left(x\right)=0$ для будь-яких $x\in X$, а протилежним до лінійного функціонала f буде функціонал $-f=\left(-1\right)f$.

Якщо X – лінійний топологічний простір, то сума двох неперервних лінійних функціоналів, заданих на X, та добуток лінійного неперервного функціонала, заданого на X, на число також є лінійними неперервними функціоналами, заданим на X.

З вищезазначеного випливає, що множина всіх лінійних неперервних функціоналів, заданих на лінійному топологічному просторі X, є лінійним простором.

Означення 5.3.1. *Нехай X – лінійний топологічний простір. Лінійний простір всіх лінійних неперервних функціоналів, заданих на X, називають простором, спряженим з X , і позначають як X^* .*

Означення 5.3.2. *Лінійний топологічний простір називається локально опуклим лінійним топологічним простором, якщо існує базис околів точки нуль цього простору, який складається з опуклих множин.*

Нехай X – лінійний топологічний простір, X^* – простір, спряжений з X. Простір X^* можна зробити топологічним. Один із способів задання топології на X^* розглянуто нижче.

Теорема 5.3.1. *Нехай X – лінійний топологічний простір, X^* – простір, спряжений з X, $\{O(f_0)\}$, $\{O(\varphi_0)\}$, ... – множини підмножин $O(f_0)$, $O(\varphi_0)$, ... простору X^*, поставлені у відповідність елементам f_0, φ_0, ... цього простору, які визначаються числами $\varepsilon > 0$; $\delta > 0$; ... та точками $x_i \in X$, $i = \overline{1,m}$; $y_j \in X$, $j = \overline{1,n}$; ... відповідно в такий спосіб:*

$$O(f_0) = O(f_0; \varepsilon; x_1, ..., x_m) = \left\{ f \in X^* : \left| f(x_i) - f_0(x_i) \right| < \varepsilon, i = \overline{1,m} \right\},$$

$$O(\varphi_0) = O(\varphi_0; \delta; y_1, ..., y_n) = \left\{ \varphi \in X^* : \left| \varphi(y_j) - \varphi_0(y_j) \right| < \delta, j = \overline{1,n} \right\}, \ldots.$$

Тоді:

1) $f_0 \in O(f_0) \in \{O(f_0)\}$,

2) $\left(\forall O_1(f_0), O_2(f_0) \in \{O(f_0)\} \right) \left(\exists O_3(f_0) \in \{O(f_0)\} \right)$
$O_3(f_0) \subset O_1(f_0) \cap O_2(f_0)$,

3) $\left(\forall \varphi_0 \in O(f_0) \in \{O(f_0)\} \right) \left(\exists O(\varphi_0) \in \{O(\varphi_0)\} \right)$ $O(\varphi_0) \subset O(f_0)$.

Доведення. Оскільки $\left| f_0(x_i) - f_0(x_i) \right| = 0 < \varepsilon, \; i = \overline{1,m}$, то $f_0 \in O(f_0)$ для всіх $O(f_0) \in \{O(f_0)\}$.

Отже, співвідношення 1) має місце.

Доведемо справедливість співвідношення 2). Нехай

$$O_1(f_0) = \left\{ f \in X^* : \left| f(x_i^1) - f_0(x_i^1) \right| < \varepsilon_1, i = \overline{1,m_1} \right\},$$

де $x_i^1 \in X$, $i = \overline{1,m_1}$, $\varepsilon_1 > 0$;

$$O_2(f_0) = \left\{ f \in X^* : \left| f(x_i^2) - f_0(x_i^2) \right| < \varepsilon_2, i = \overline{1,m_2} \right\},$$

де $x_i^2 \in X$, $i = \overline{1,m_2}$, $\varepsilon_2 > 0$.

Покладемо

$$O_3(f_0) =$$
$$= \left\{ f \in X^* : \left| f(x_i^1) - f_0(x_i^1) \right| < \varepsilon_3, i = \overline{1,m_1}; \left| f(x_i^2) - f_0(x_i^2) \right| < \varepsilon_3, i = \overline{1,m_2} \right\},$$

де $\varepsilon_3 = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$. Зрозуміло, що $O_3(f_0) \subset O_1(f_0) \cap O_2(f_0)$.

Співвідношення 2) встановлено.

Переконаємося у справедливості співвідношення 3).

Нехай $\varphi_0 \in O(f_0) = \left\{ f \in X^* : \left| f(x_i) - f_0(x_i) \right| < \varepsilon, i = \overline{1,m} \right\}$, де $x_i \in X$, $i = \overline{1,m}$, $\varepsilon > 0$.

Тоді $\max\limits_{1 \le i \le m} \left| \varphi_0(x_i) - f_0(x_i) \right| < \varepsilon$.

Покладемо $\delta = \varepsilon - \max\limits_{1 \le i \le m} \left| \varphi_0(x_i) - f_0(x_i) \right| > 0$ та розглянемо

$$O(\varphi_0) = \left\{ \varphi \in X^* : \left| \varphi(x_i) - \varphi_0(x_i) \right| < \delta, i = \overline{1,m} \right\}.$$

Переконаємося, що $O(\varphi_0) \subset O(f_0)$. Нехай $\varphi \in O(\varphi_0)$. Тоді

$$\left| \varphi(x_i) - \varphi_0(x_i) \right| < \delta, \ i = \overline{1,m}.$$

Звідси одержимо, що для $i \in \{1, ..., m\}$

$$\left| \varphi(x_i) - f_0(x_i) \right| = \left| \varphi(x_i) - \varphi_0(x_i) + \varphi_0(x_i) - f_0(x_i) \right| \le \left| \varphi(x_i) - \varphi_0(x_i) \right| +$$

$$+ \max_{1 \le i \le m} \left| \varphi_0(x_i) - f_0(x_i) \right| < \varepsilon - \max_{1 \le i \le m} \left| \varphi_0(x_i) - f_0(x_i) \right| + \max_{1 \le i \le m} \left| \varphi_0(x_i) - f_0(x_i) \right| = \varepsilon.$$

Отже, $\varphi \in O(f_0)$ для всіх $\varphi \in O(\varphi_0)$. Тому $O(\varphi_0) \subset O(f_0)$.

Співвідношення 3) встановлено.

Теорему доведено.

Якщо до τ віднести порожню множину та множини A простору X^* такі, що для будь-якого $f_0 \in A$ існує $O(f_0)$, $O(f_0) \subset A$, то згідно з теоремою 1.5.2 τ задає топологію на X^*, яку називають слабкою* топологією.

Відповідно до теореми 1.5.2 множини $\{O(f_0)\}$, $\{O(\varphi_0)\}$, … утворюють базиси околів точок f_0, φ_0, … у розумінні слабкої * топології простору X^*.

Теорема 5.3.2. *Простір X^*, наділений слабкою* топологією, є локально опуклим віддільним лінійним топологічним простором.*

Доведення. Перш за все доведемо, що простір X^*, наділений слабкою* топологією, є лінійним топологічним простором.

Для цього необхідно переконатися лише, що операції додавання елементів цього простору і множення їх на числа є неперервними у розумінні слабкої* топології.

Нехай $f_0, \varphi_0 \in X^*$ і $V(f_0 + \varphi_0)$ – довільний окіл точки $f_0 + \varphi_0$. Оскільки $\{O(f_0 + \varphi_0)\}$ – базис околів точки $f_0 + \varphi_0$, то існує $O(f_0 + \varphi_0) \subset V(f_0 + \varphi_0)$. Маємо, що

$$O(f_0+\varphi_0)=\left\{\psi\in X^*:\left|\psi(x_i)-(f_0+\varphi_0)(x_i)\right|<\varepsilon, i=\overline{1,m}\right\},$$

де $x_i \in X$, $i=\overline{1,m}$, $\varepsilon>0$.

Покладемо

$$O(f_0)=\left\{f\in X^*:\left|f(x_i)-f_0(x_i)\right|<\frac{\varepsilon}{2}, i=\overline{1,m}\right\},$$

$$O(\varphi_0)=\left\{\varphi\in X^*:\left|\varphi(x_i)-\varphi_0(x_i)\right|<\frac{\varepsilon}{2}, i=\overline{1,m}\right\}.$$

Тоді для $f\in O(f_0)$, $\varphi\in O(\varphi_0)$ маємо, що

$$\left|(f+\varphi)(x_i)-(f_0+\varphi_0)(x_i)\right|\le\left|f(x_i)-f_0(x_i)\right|+\left|\varphi(x_i)-\varphi_0(x_i)\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$$

$$i=\overline{1,m}.$$

Звідси випливає, що $f+\varphi\in O(f_0+\varphi_0)$. Тому

$$O(f_0)+O(\varphi_0)\subset O(f_0+\varphi_0)\subset V(f_0+\varphi_0).$$

Це й означає, що операція додавання елементів простору X^* є неперервною у розумінні слабкої* топології цього простору.

Нехай тепер $f_0\in X^*$, $\lambda\in R$ і $V(\lambda f_0)$ – довільний окіл точки λf_0. Оскільки $\{O(\lambda f_0)\}$ – базис околів точки λf_0, то існує $O(\lambda f_0)\subset V(\lambda f_0)$. Нехай

$O(\lambda f_0)=\left\{\psi\in X^*:\left|\psi(x_i)-(\lambda f_0)(x_i)\right|<\varepsilon, i=\overline{1,m}\right\}$, де $x_i\in X$, $i=\overline{1,m}$,

$$\varepsilon>0.$$

Для $\delta>0$ покладемо

$$O(\lambda)=\left\{\alpha\in R:\left|\alpha-\lambda\right|<\delta\right\},$$

$$O(f_0)=\left\{f\in X^*:\left|f(x_i)-f_0(x_i)\right|<\delta, i=\overline{1,m}\right\}.$$

Тоді для $\alpha\in O(\lambda)$, $f\in O(f_0)$ маємо, що

$$|\alpha|-|\lambda|\le|\alpha-\lambda|<\delta,\ |\alpha|<|\lambda|+\delta,$$

$$\begin{aligned}&\left|(\alpha f)(x_i)-(\lambda f_0)(x_i)\right|=\\ &=\left|\alpha\left(f(x_i)-f_0(x_i)\right)+(\alpha-\lambda)f_0(x_i)\right|\le|\alpha|\left|f(x_i)-f_0(x_i)\right|+\\ &+|\alpha-\lambda|\left|f_0(x_i)\right|<\left(|\lambda|+\delta\right)\delta+\max_{1\le i\le m}\left|f_0(x_i)\right|\delta,\ i=\overline{1,m}.\end{aligned}\tag{5.7}$$

Виберемо $\delta>0$ настільки малим, що $\left(|\lambda|+\delta\right)\delta+\max\limits_{1\le i\le m}\left|f_0(x_i)\right|\delta<\varepsilon$.

Тоді для такого $\delta > 0$ матимемо (див. 5.7), що

$$\left|(\alpha f)(x_i) - (\lambda f_0)(x_i)\right| < \varepsilon, \; i = \overline{1,m}.$$

Звідси випливає, що $\alpha f \in O(\lambda f_0)$. Тому

$$O(\lambda) O(f_0) \subset O(\lambda f_0) \subset V(\lambda f_0).$$

Це й означає, що операція множення елементів простору X^* на дійсні числа є неперервною.

Оскільки X^* є лінійним простором, топологічним простором та операції додавання елементів простору X^* і множення їх на дійсні числа є неперервними відносно заданої на X^* слабкої* топології, то X^* є лінійним топологічним простором.

Переконаємося, що X^* є локально опуклим простором. Для цього достатньо переконатися, що для $f_0 = 0 \in X^*$ околи $O(0)$ базису $\{O(0)\}$ околів точки 0 є опуклими множинами (див. означення 5.3.2).

Нехай $f_1, f_2 \in O(0) = \left\{ f \in X^* : \left| f(x_i) \right| < \varepsilon, i = \overline{1,m} \right\}$, де $x_i \in X$, $i = \overline{1,m}$, $\varepsilon > 0$; $\alpha \in [0,1]$.

Тоді для $f = (1-\alpha) f_1 + \alpha f_2$ матимемо, що

$$\left| f(x_i) \right| = \left| (1-\alpha) f_1(x_i) + \alpha f_2(x_i) \right| \le$$

$$\le (1-\alpha) \left| f_1(x_i) \right| + \alpha \left| f_2(x_i) \right| < (1-\alpha)\varepsilon + \alpha\varepsilon = \varepsilon, \; i = \overline{1,m},$$

оскільки $f_1, f_2 \in O(0)$.

Звідси випливає, що $[f_1, f_2] \in O(0)$. Тому $O(0)$ є опуклим околом точки 0 для всіх $O(0) \in \{O(0)\}$.

Це й означає, що X^* є локально опуклим лінійним топологічним простором.

Переконаємося у його віддільності. Нехай $f_0, \varphi_0 \in X^*$ та $f_0 \ne \varphi_0$. Тоді існує $x_1 \in X$, що $f_0(x_1) \ne \varphi_0(x_1)$. Покладемо $\varepsilon = \dfrac{\left| f_0(x_1) - \varphi_0(x_1) \right|}{2}$. Зрозуміло, що $\varepsilon > 0$.

Нехай

$$O(f_0) = \left\{ f \in X^* : \left| f(x_1) - f_0(x_1) \right| < \varepsilon \right\},$$

$$O(\varphi_0) = \left\{ \varphi \in X^* : \left| \varphi(x_1) - \varphi_0(x_1) \right| < \varepsilon \right\}.$$

Доведемо, що

$$O(f_0) \cap O(\varphi_0) = \varnothing . \tag{5.8}$$

Припустимо, що існує $\psi \in O(f_0) \cap O(\varphi_0)$. Тоді $\left|\psi(x_1) - f_0(x_1)\right| < \varepsilon$, $\left|\psi(x_1) - \varphi_0(x_1)\right| < \varepsilon$. З урахуванням цього одержимо, що

$$\left|f_0(x_1) - \varphi_0(x_1)\right| \le \left|f_0(x_1) - \psi(x_1)\right| + \left|\psi(x_1) - \varphi_0(x_1)\right| < 2\varepsilon = \left|f_0(x_1) - \varphi_0(x_1)\right| .$$

Одержана суперечність доводить, що має місце співвідношення (5.8).

Тому X^* є локально опуклим віддільним лінійним топологічним простором.

Теорему доведено.

Теорема 5.3.3. *Нехай X – лінійний топологічний простір, X^* – простір, спряжений з X, $x \in X$, $\varphi_x(f) = f(x)$, $f \in X^*$. Функціонал φ_x є лінійним функціоналом, неперервним на X^* відносно слабкої* топології.*

Доведення. Маємо для $f_1, f_2 \in X^*$, $\alpha \in R$, що

$$\varphi_x(f_1 + f_2) = (f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x) = \varphi_x(f_1) + \varphi_x(f_2),$$

$$\varphi_x(\alpha f_1) = (\alpha f_1)(x) = \alpha f_1(x) = \alpha \varphi_x(f_1) .$$

Тому φ_x є лінійним функціоналом, заданим на X^*.

Нехай $\varepsilon > 0$, $O(f_0) = \left\{ f \in X^* : \left|f(x) - f_0(x)\right| < \varepsilon \right\}$.

Тоді для всіх $f \in O(f_0)$

$$\left|\varphi_x(f) - \varphi_x(f_0)\right| = \left|f(x) - f_0(x)\right| < \varepsilon .$$

Отже,

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists O(f_0))\ (\forall f \in O(f_0))\ \left|\varphi_x(f) - \varphi_x(f_0)\right| < \varepsilon .$$

Тобто функціонал φ_x є неперервним у будь-якій точці $f_0 \in X^*$ відносно слабкої* топології на X^*. Це й означає, що він є неперервним відносно цієї топології на X^*.

Теорему доведено.

Розділ 6

ТЕОРЕМИ ПРО ВІДДІЛЬНІСТЬ ДВОХ ОПУКЛИХ МНОЖИН

6.1. Гіперплощина та півпростори лінійного топологічного простору

Нехай $X = R^n$, f – ненульовий лінійний функціонал, заданий на R^n, тобто $f(x) = f(x_1,...,x_n) = c_1x_1 + \cdots + c_nx_n$, $x = (x_1,...,x_n) \in R^n$, де $(c_1,...,c_n) \neq (0,...,0)$.

Для $c \in R$ множина

$$H = \left\{ x = (x_1,...,x_n) \in R^n : f(x) = f(x_1,...,x_n) = c_1x_1 + \cdots + c_nx_n = c \right\}$$

називається гіперплощиною простору R^n.

Ця гіперплощина є межею таких множин простору R^n:

$$P_1 = \left\{ x = (x_1,...,x_n) \in R^n : f(x) = f(x_1,...,x_n) = c_1x_1 + \cdots + c_nx_n \leq c \right\},$$

$$P_2 = \left\{ x = (x_1,...,x_n) \in R^n : f(x) = f(x_1,...,x_n) = c_1x_1 + \cdots + c_nx_n \geq c \right\},$$

$$P_3 = \left\{ x = (x_1,...,x_n) \in R^n : f(x) = f(x_1,...,x_n) = c_1x_1 + \cdots + c_nx_n < c \right\},$$

$$P_4 = \left\{ x = (x_1,...,x_n) \in R^n : f(x) = f(x_1,...,x_n) = c_1x_1 + \cdots + c_nx_n > c \right\}.$$

Множини P_1, P_2, P_3, P_4 називаються півпросторами простору R^n.

Зрозуміло, що коли $X = R^2$, то H є прямою простору R^2, а півпростори P_1, P_2, P_3, P_4 є півплощинами R^2.

Якщо ж $X = R^3$, то H є площиною простору R^3, а P_1, P_2, P_3, P_4 – його півпросторами.

Нехай тепер X – лінійний топологічний простір, f – ненульовий лінійний неперервний функціонал, заданий на X ($f \in X^*$, $f \neq 0$), $c \in R$.

Аналогічно до вищезазначеного множину

$$H = \left\{ x \in X : f(x) = c \right\}$$

назвемо гіперплощиною простору X, а

$$P_1 = \left\{ x \in X : f(x) \leq c \right\},$$

$$P_2 = \left\{ x \in X : f(x) \geq c \right\},$$

$$P_3 = \left\{ x \in X : f(x) < c \right\},$$

$$P_4 = \{x \in X : f(x) > c\}$$

– півпросторами простору X .

Згідно з теоремою 5.1.1 півпростори P_3, P_4 є відкритими множинами простору X .

Оскільки доповненням до півпростору P_1 є відкрита множина P_4, а доповнення до півпростору P_2 є відкрита множина P_3, то P_1, P_2 є замкненими множинами простору X (див. означення 1.3.1). У зв'язку з цим півпростори P_1, P_2 називають замкненими півпросторами, півпростори P_3, P_4 – відкритими півпросторами лінійного топологічного простору X .

Зрозуміло, що гіперплощина H є межею (див. означення 1.3.3) півпросторів P_1, P_2, P_3, P_4; $P_3 \cap P_4 = \varnothing$; $P_1 = P_3 \cup H$; $P_2 = P_4 \cup H$; $H = P_1 \cap P_2$; $X = P_1 \cup P_2$; $X = P_3 \cup P_4 \cup H$.

Оскільки H є перетином замкнених множин P_1, P_2, то H є замкненою множиною простору X (див. теорему 1.3.2).

6.2. Підпростори. Лінійні многовиди. Теорема про віддільність двох опуклих множин

Означення 6.2.1. *Нехай X – лінійний простір. Множина P цього простору називається підпростором, якщо:*

1) $(\forall x_1, x_2 \in P) \quad x_1 + x_2 \in P$,

2) $(\forall x \in P, \alpha \in R) \quad \alpha x \in P$.

Приклад 6.2.1. Нехай X – лінійний простір, $P = H = \{x \in X : f(x) = 0\}$ – гіперплощина цього простору, що проходить через точку нуль. Переконаємось, що H – підпростір простору X .

Дійсно, $(\forall x_1, x_2 \in H) \quad f(x_1) = f(x_2) = 0$. Тоді

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2) = 0 + 0 = 0 .$$

Отже, $x_1 + x_2 \in H$. Умова 1) означення 6.2.1 виконується.

Також $(\forall x \in H, \alpha \in R)$

$$f(\alpha x) = \alpha f(x) = \alpha \cdot 0 = 0 .$$

Тому $\alpha x \in H$. Умова 2) означення 6.2.1 виконується.

Отже, H є підпростором простору X .

Означення 6.2.2. *Нехай P – підпростір лінійного простору X , $x_0 \in X$. Множина $Q = P + x_0 = x_0 + P$ називається лінійним многовидом, що є зсувом підпростору P на вектор x_0 .*

Теорема 6.2.1 (Гана-Банаха в геометричній формі). *Нехай* X – *лінійний топологічний простір,* A – *відкрита опукла множина простору* X, Q – *лінійний многовид цього простору. Якщо* $Q \cap A = \varnothing$, *то існує гіперплощина* H *простору* X, *що* $H \cap A = \varnothing$ *і* $H \supset Q$.

Тобто існують ненульовий неперервний лінійний функціонал f, заданий на X, *та число* c, *такі, що* $f(x) = c,\ x \in Q$, *і, крім того,* $f(x) < c$ *або* $f(x) > c$ *для всіх* $x \in A$ *(див. теорему 5.2.1).*

Теорема 6.2.2 (про віддільність двох опуклих множин). *Нехай* X – *лінійний топологічний простір,* A – *відкрита опукла множина простору* X, B – *довільна опукла множина цього простору,* $A \cap B = \varnothing$. *Тоді існує гіперплощина* $H = \{x \in X : f(x) = c\}$, *де* f – *ненульовий лінійний неперервний функціонал,* $c \in R$, *що* $f(x) < c$ *для всіх* $x \in A$ *(* $A \subset \{x : f(x) < c\} = D_1$ *),* $f(x) \geq c$ *для всіх* $x \in B$ *(* $B \subset \{x : f(x) \geq c\} = D_2$ *). Крім того,* $D_1 \cap D_2 = \varnothing$.

Доведення. Покладемо $D = A - B = A + (-B)$. Згідно з теоремою 4.2.2 D – опукла множина простору X.

Оскільки $D = A - B = \bigcup\limits_{y \in B} (A - y) = \bigcup\limits_{y \in B} (A + (-y))$, то D – відкрита множина (див. теорему 3.2.1 та властивість α_2) відкритих множин).

Переконаємось, що $0 \notin D$. Припустимо, що $0 \in D = A - B$. Тоді існують $x \in A, y \in B$ такі, що $x - y = 0$. Звідси $x = y$, що суперечить умові $A \cap B = \varnothing$ теореми. Отже, $0 \notin D$.

Розглянемо лінійний многовид $M = \{0\}$. З доведеного випливає, що $M \cap D = \varnothing$. Тоді згідно з теоремою Гана-Банаха існує гіперплощина $H_1 = \{z \in X : f(z) = d\}$, де $f \in X^*$, $f \neq 0$, $d \in R$, така, що

$$M \subset H_1, \tag{6.1}$$

$$H_1 \cap D = \varnothing. \tag{6.2}$$

З умови (6.1) випливає, що $\{0\} \subset H_1$, тоді $f(0) = 0 = d$. Отже

$$H_1 = \{z \in X : f(z) = 0\}.$$

Звідси і з (6.2) одержуємо, що для будь-якого $z \in D$ $f(z) \neq 0$. Оскільки D є опуклою множиною і $f(z) \neq 0$, $z \in D$, то згідно з теоремою 5.2.1 $f(z) < 0$, $z \in D$, або $f(z) > 0,\ z \in D$.

Припустимо (для конкретності), що $f(z) < 0$, $z \in D$. Оскільки $D = A - B$, то $f(x - y) = f(x) - f(y) < 0, x \in A, y \in B$.

Тому

$$f(x) < f(y) \text{ для довільних } x \in A, y \in B. \qquad (6.3)$$

З (6.3) одержимо, що $\sup\limits_{x \in A} f(x) \le \inf\limits_{y \in B} f(y)$.

Тоді існує $c \in R$, що $\sup\limits_{x \in A} f(x) \le c \le \inf\limits_{y \in B} f(y)$. Звідси $f(x) \le c \le f(y)$ для будь-яких $x \in A, y \in B$.

Розглянемо гіперплощину $H = \{x \in X : f(x) = c\}$.

Оскільки $f \ne 0$, $f(x) \le c$ для всіх $x \in A$ і A – відкрита множина простору X, то згідно з теоремою 5.2.2 $f(x) < c$ для всіх $x \in A$, тобто множина A включається в півпростір $D_1 = \{x : f(x) < c\}$.

Оскільки $f(x) \ge c$ для всіх $x \in B$, то B включається в півпростір $D_2 = \{x : f(x) \ge c\}$.

Крім того, $D_1 \cap D_2 = \varnothing$.

Теорему доведено.

6.3. Друга теорема відділності

Нехай X – лінійний топологічний простір, X^* – простір, спряжений з X. Кажуть, що лінійний функціонал $f \in X^*$ сильно розділяє множини A і B, якщо існує число $\varepsilon > 0$ таке, що

$$f(x) + \varepsilon \le f(y) \text{ для всіх } x \in A,\ y \in B. \qquad (6.4)$$

Із зазначеного вище випливає, що коли $f \in X^*$ сильно розділяє множини A і B, то $f \ne 0$. В протилежному випадку з (6.4) отримуємо, що $\varepsilon \le 0$, де $\varepsilon > 0$.

Теорема 6.3.1 (друга теорема відділності). *Нехай B – замкнена опукла множина локально опуклого лінійного топологічного простору X, $x \in X$ і $x \notin B$. Тоді існує функціонал $f \in X^*$, який сильно розділяє x і B, тобто $f(x) + \varepsilon \le f(y)$, $y \in B$, для деякого числа $\varepsilon > 0$.*

Доведення. Множина $X \setminus B$ є відкритою множиною простору X, як доповнення до X замкненої множини B. Оскільки $x \notin B$, то $x \in X \setminus B$. Тому $X \setminus B$ є околом точки x.

Оскільки X є локально опуклим лінійним топологічним простором, то існує опуклий окіл $O(x)$ точки *x*, який включається в $X \setminus B$. Тому $O(x) \cap B = \varnothing$.

Згідно з теоремою про віддільність двох опуклих множин множини $O(x)$ та B можна розділити ненульовим функціоналом $f \in X^*$, тобто існує $c \in R$, що

$$f(z) < c,\ z \in O(x) = x + O(0);\ f(y) \ge c,\ y \in B,$$

де $O(0)$ – опуклий окіл точки 0.

Отже, $f(x+u) = f(x) + f(u) < f(y)$, $u \in O(0)$, $y \in B$.

Звідки

$$f(x) + \sup_{u \in O(0)} f(u) \le \inf_{y \in B} f(y). \tag{6.5}$$

Тому $\varepsilon = \sup\limits_{u \in O(0)} f(u) \in R$. Оскільки $f \ne 0$, то $f(\upsilon) \ne 0$ для деякого $\upsilon \in X$. Згідно з теоремою 3.2.3 існує додатне число δ, для якого $(-\delta, \delta) \cdot \upsilon \subset O(0)$.

Внаслідок цього $-\dfrac{\delta}{2}\upsilon \in O(0)$, $\dfrac{\delta}{2}\upsilon \in O(0)$. Тоді

$$\varepsilon = \sup_{u \in O(0)} f(u) \ge \max\left\{ f\left(-\frac{\delta}{2}\upsilon\right), f\left(\frac{\delta}{2}\upsilon\right) \right\} =$$

$$= \max\left\{ -\frac{\delta}{2} f(\upsilon), \frac{\delta}{2} f(\upsilon) \right\} > 0.$$

Звідси і з (6.5) одержуємо, що $f(x) + \varepsilon \le f(y)$, $y \in B$, причому $\varepsilon > 0$.

Теорему доведено.

Розділ 7
ОПУКЛІ ФУНКЦІЇ ТА ЇХ ВЛАСТИВОСТІ

7.1. Опуклі функції. Критерій опуклості власної функції

В цьому пункті і далі будемо вважати, що арифметичні операції і нерівності, в яких фігурують невласні числа $+\infty$, $-\infty$, довільне дійсне число a та додатне число b, означаються так:

$$(+\infty)+(+\infty)=+\infty\,,\qquad (+\infty)(\pm\infty)=\pm\infty\,,\qquad (\pm\infty)(-b)=\mp\infty\,,$$

$$\pm\infty+a=\pm\infty\,,\qquad (-\infty)(\pm\infty)=\mp\infty\,,\qquad +\infty>a\,,$$

$$(-\infty)+(-\infty)=-\infty\,,\qquad (\pm\infty)b=\pm\infty\,,\qquad -\infty<a\,,$$

$$-(+\infty)=-\infty\,,\ -(-\infty)=+\infty\,,\qquad (\pm\infty)0=0\,,\qquad +\infty>-\infty\,;$$

вирази $(+\infty)-(+\infty)$, $(+\infty)+(-\infty)$ та $(-\infty)-(-\infty)$ вважаються позбавленими сенсу; не означається також і операція ділення з невласними числами.

Означення 7.1.1. *Нехай X – довільна множина, p – функція, яка відображає X в $\overline{R}=R\cup\{-\infty,+\infty\}$. Тоді:*

1) ефективною множиною функції p будемо називати множину

$$dom p=\{x\in X : p(x)<+\infty\}\,,$$

2) функцію p називають власною функцією, якщо $dom p\neq\varnothing$ і

$$p(x)>-\infty,\ x\in X\,,$$

3) надграфіком функції p називається множина

$$epi\ p=\{(x,\beta)\in X\times R : p(x)\le\beta\}\,.$$

Приклад 7.1.1. Нехай $X=R$,

$$p(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x},\ x>0,\\ +\infty,\ x\le 0.\end{cases}$$

Функція p є власною функцією, оскільки $dom p=(0,+\infty)\neq\varnothing$ і $p(x)>-\infty,\ x\in R$.

Означення 7.1.2. *Нехай X – лінійний простір. Функція $p : X\to\overline{R}$ називається опуклою функцією, якщо її надграфік $epi\ p$ є опуклою множиною в просторі $X\times R$.*

Означення 7.1.3. *Нехай* X *– лінійний топологічний простір. Функція* $p: X \to \overline{R}$ *називається замкненою функцією, якщо її надграфік є замкненою множиною в просторі* $X \times R$ *.*

Приклад 7.1.2. Нехай X – лінійний нормований простір, $p(x) = \|x\|$, $x \in X$. Тоді p є опуклою та замкненою функцією, заданою на X.

Дійсно, нехай $(x^1, \beta_1), (x^2, \beta_2) \in epi\ p$. Тоді $\|x^1\| \le \beta_1$, $\|x^2\| \le \beta_2$.

Доведемо, що відрізок $\left[(x^1, \beta_1), (x^2, \beta_2)\right] \in epi\ p$. Нехай $(x, \beta) \in \left[(x^1, \beta_1), (x^2, \beta_2)\right]$. Тоді існує $\alpha \in [0,1]$ таке, що

$$(x, \beta) = (1-\alpha)(x^1, \beta_1) + \alpha(x^2, \beta_2) = \left((1-\alpha)x^1 + \alpha x^2, (1-\alpha)\beta_1 + \alpha\beta_2\right).$$

Маємо, що

$$\|x\| = \left\|(1-\alpha)x^1 + \alpha x^2\right\| \le (1-\alpha)\left\|x^1\right\| + \alpha\left\|x^2\right\| \le (1-\alpha)\beta_1 + \alpha\beta_2 .$$

Отже, $(x, \beta) = \left((1-\alpha)x^1 + \alpha x^2, (1-\alpha)\beta_1 + \alpha\beta_2\right) \in epi\ p$.

Тому і $\left[(x^1, \beta_1), (x^2, \beta_2)\right] \subset epi\ p$.

Звідси випливає, що $epi\ p$ є опуклою множиною, а, отже, p – опукла функція.

Переконаємося у її замкненості. Для цього доведемо, що $epi\ p$ є замкненою множиною простору $X \times R$. Нехай $(x_0, \beta_0) \in X \times R$ і $(x_0, \beta_0) \notin epi\ p$ ((x_0, β_0) належить доповненню $epi\ p$ до $X \times R$). Тоді $\beta_0 < p(x_0)$. Виберемо число $\varepsilon > 0$ так, що $\beta_0 + \varepsilon < p(x_0)$, і розглянемо окіл $O(x_0, \beta_0) = O(x_0) \times (\beta_0 - \varepsilon, \beta_0 + \varepsilon)$ точки (x_0, β_0) простору $X \times R$, де $O(x_0) = \left\{x \in X : \|x - x_0\| < \delta = p(x_0) - (\beta_0 + \varepsilon)\right\}$. Для будь-якого $(x, \beta) \in O(x_0, \beta_0)$ матимемо, що

$$p(x_0) - p(x) = \|x_0\| - \|x\| \le \|x_0 - x\| = \|x - x_0\| < \delta = p(x_0) - (\beta_0 + \varepsilon),$$

$$\beta_0 - \varepsilon < \beta < \beta_0 + \varepsilon .$$

Звідси випливає, що $p(x) > \beta_0 + \varepsilon > \beta$.

Отже, $(x, \beta) \notin epi\ p$ для всіх $(x, \beta) \in O(x_0, \beta_0)$, тобто разом з точкою (x_0, β_0) в доповнення $epi\ p$ до $X \times R$ включається також її окіл $O(x_0, \beta_0)$.

Відповідно до теореми 1.2.1 доповнення $epi\ p$ до простору $X \times R$ є відкритою множиною. Згідно з означенням 1.3.1 $epi\ p$ є замкненою множиною. Тому p – замкнена функція.

Теорема 7.1.1 (критерій опуклості власної функції). *Нехай* X – *лінійний простір. Для того щоб власна функція* $p: X \to \overline{R}$ *була опуклою, необхідно і достатньо, щоб* $\forall x_1, x_2 \in X$ *виконувалась нерівність*

$$p\left(\left(1-\alpha\right)x_1 + \alpha x_2\right) \le \left(1-\alpha\right)p\left(x_1\right) + \alpha\, p\left(x_2\right),\ \alpha \in \left[0,1\right]. \qquad (7.1)$$

Доведення. *Необхідність.* Нехай X – лінійний простір, p – власна опукла функція, задана на X. Тоді $epi\ p$ є опуклою множиною простору $X \times R$.

Якщо $\alpha = 0$ або $\alpha = 1$, то права і ліва частини співвідношення (7.1) співпадають.

Якщо $\alpha \in \left(0,1\right)$ і хоча б одне із значень $p\left(x_1\right), p\left(x_2\right)$ дорівнює $+\infty$, то права частина рівності (7.1) рівна $+\infty$, тоді нерівність (7.1) має місце.

Нехай $p\left(x_1\right), p\left(x_2\right) \in R$. Тоді $\left(x_1, p\left(x_1\right)\right) \in epi\ p$, $\left(x_2, p\left(x_2\right)\right) \in epi\ p$. Оскільки $epi\ p$ є опуклою множиною, то $\forall \alpha \in \left(0,1\right)$

$$\begin{gathered}\left(1-\alpha\right)\left(x_1, p\left(x_1\right)\right) + \alpha\left(x_2, p\left(x_2\right)\right) = \\ = \left(\left(1-\alpha\right)x_1 + \alpha x_2; \left(1-\alpha\right)p\left(x_1\right) + \alpha\, p\left(x_2\right)\right) \in \\ \in \left[\left(x_1, p\left(x_1\right)\right); \left(x_2, p\left(x_2\right)\right)\right] \subset epi\ p.\end{gathered}$$

Звідси

$$p\left(\left(1-\alpha\right)x_1 + \alpha x_2\right) \le \left(1-\alpha\right)p\left(x_1\right) + \alpha\, p\left(x_2\right),\ \alpha \in \left(0,1\right).$$

Отже, нерівність (7.1) має місце для всіх $\alpha \in \left[0,1\right]$.

Необхідність доведено.

Достатність. Нехай X – лінійний простір, p – власна функція, задана на X, для якої виконується нерівність (7.1). Доведемо, що p – опукла функція.

Нехай $\left(x_1, \beta_1\right) \in epi\ p$, $\left(x_2, \beta_2\right) \in epi\ p$. Тоді $p\left(x_1\right) \le \beta_1$, $p\left(x_2\right) \le \beta_2$. Доведемо, що відрізок $\left[\left(x_1, \beta_1\right), \left(x_2, \beta_2\right)\right] \subset epi\ p$. Нехай $\left(x, \beta\right) \in \left[\left(x_1, \beta_1\right), \left(x_2, \beta_2\right)\right]$. Тоді існує $\alpha \in \left[0,1\right]$ таке, що

$$\left(x, \beta\right) = \left(1-\alpha\right)\left(x_1, \beta_1\right) + \alpha\left(x_2, \beta_2\right) = \left(\left(1-\alpha\right)x_1 + \alpha x_2, \left(1-\alpha\right)\beta_1 + \alpha\beta_2\right).$$

З нерівності (7.1) випливає, що

$$p\left(\left(1-\alpha\right)x_1 + \alpha x_2\right) \le \left(1-\alpha\right)p\left(x_1\right) + \alpha\, p\left(x_2\right) \le \left(1-\alpha\right)\beta_1 + \alpha\beta_2.$$

Це означає, що $(x,\beta)\in epi\ p$, а отже, і $\left[(x_1,\beta_1),(x_2,\beta_2)\right]\subset epi\ p$. Звідси випливає, що $epi\ p$ – опукла множина простору $X\times R$. Тому p – опукла функція.

Достатність доведено.

Теорему доведено.

Твердження 7.1.1. *Нехай* X *– лінійний простір,* p *– власна опукла функція, задана на* X, $x_0\in domp$, f *– лінійний функціонал, заданий на* X, $a, b, c\in R$, $a\geq 0$.

Тоді функція $g(x)=ap(x_0+x)+bf(x)+c$, $x\in X$, *є власною опуклою функцією, заданою на* X.

Доведення. Оскільки $p(x_0+x)>-\infty$, $f(x)>-\infty$, $x\in X$, то $g(x)=ap(x_0+x)+bf(x)+c>-\infty$, $x\in X$. Крім того, $g(0)=ap(x_0)+$ $+c<+\infty$. Оскільки $g(x)>-\infty$, $x\in X$, та $g(0)<+\infty$, то g є власною функцією, заданою на X. Нехай $x_1,x_2\in X$, $\alpha\in[0,1]$. Маємо, що

$$g\left((1-\alpha)x_1+\alpha x_2\right)=ap\left(x_0+(1-\alpha)x_1+\alpha x_2\right)+bf\left((1-\alpha)x_1+\alpha x_2\right)+c\leq$$
$$\leq a\left((1-\alpha)p(x_0+x_1)+\alpha p(x_0+x_2)\right)+b\left((1-\alpha)f(x_1)+\alpha f(x_2)\right)+c=$$
$$=(1-\alpha)\left(ap(x_0+x_1)+bf(x_1)+c\right)+\alpha\left(ap(x_0+x_2)+bf(x_2)+c\right)=$$
$$=(1-\alpha)g(x_1)+\alpha g(x_2).$$

Звідси і з теореми 7.1.1 випливає, що g є опуклою функцією, заданою на X.

Твердження доведено.

Теорема 7.1.2. *Нехай* X *– лінійний простір,* $p:X\to\overline{R}$ *– власна функція, задана на* X. *Для того щоб* p *була опуклою на* X, *необхідно і достатньо, щоб для будь-яких* $x,h\in X$ *функція* $\varphi(t)=p(x+th)$, $t\in R$, *була опуклою на* R.

Доведення. ***Необхідність.*** Нехай p – опукла функція на X. Доведемо, що функція $\varphi(t)$, $t\in R$, є опуклою функцією на R.

Нехай $t_1,t_2\in R$, $\alpha\in[0,1]$. Тоді

$$\varphi\left((1-\alpha)t_1+\alpha t_2\right)=p\left(x+\left((1-\alpha)t_1+\alpha t_2\right)h\right)=$$
$$=p\left((1-\alpha)(x+t_1h)+\alpha(x+t_2h)\right)\leq(1-\alpha)p(x+t_1h)+\alpha p(x+t_2h)=$$
$$=(1-\alpha)\varphi(t_1)+\alpha\varphi(t_2).$$

Отже, $\varphi\left(\left(1-\alpha\right)t_1+\alpha t_2\right)\le\left(1-\alpha\right)\varphi\left(t_1\right)+\alpha\varphi\left(t_2\right)$. Тому, згідно з теоремою 7.1.1, $\varphi\left(t\right)$, $t\in R$, є опуклою на R, що й потрібно було встановити.

Необхідність доведено.

Достатність. Нехай $\varphi\left(t\right)$, $t\in R$, є опуклою функцією на R. Доведемо, що p – опукла функція на X.

Нехай $x_1,x_2\in X,\alpha\in\left[0,1\right]$. Покладемо $x=x_1$, $h=x_2-x_1$. За умовою функція $\varphi\left(t\right)=p\left(x_1+t\left(x_2-x_1\right)\right),t\in R$, є опуклою. Тому

$$\varphi\left(\left(1-\alpha\right)\cdot 0+\alpha\cdot 1\right)=p\left(x_1+\alpha\left(x_2-x_1\right)\right)=p\left(\left(1-\alpha\right)x_1+\alpha x_2\right)\le$$
$$\le\left(1-\alpha\right)\varphi\left(0\right)+\alpha\varphi\left(1\right)=\left(1-\alpha\right)p\left(x_1\right)+\alpha p\left(x_2\right).$$

Отже,

$$p\left(\left(1-\alpha\right)x_1+\alpha x_2\right)\le\left(1-\alpha\right)p\left(x_1\right)+\alpha p\left(x_2\right),\ \alpha\in\left[0,1\right].$$

Згідно з теоремою 7.1.1 p є опуклою функцією на X.

Достатність доведено.

Теорему доведено.

7.2. Властивість власної опуклої функції однієї змінної

Теорема 7.2.2. *Нехай φ – власна опукла функція, задана на R. Якщо числа $\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2$ із $dom\varphi$ такі, що $\alpha_0<\alpha_1<\alpha_2$, то мають місце співвідношення:*

$$\frac{\varphi\left(\alpha_1\right)-\varphi\left(\alpha_0\right)}{\alpha_1-\alpha_0}\le\frac{\varphi\left(\alpha_2\right)-\varphi\left(\alpha_0\right)}{\alpha_2-\alpha_0}, \tag{7.2}$$

$$\frac{\varphi\left(\alpha_1\right)-\varphi\left(\alpha_0\right)}{\alpha_1-\alpha_0}\le\frac{\varphi\left(\alpha_2\right)-\varphi\left(\alpha_1\right)}{\alpha_2-\alpha_1}. \tag{7.3}$$

Доведення. Доведемо співвідношення (7.2). Оскільки $\alpha_0<\alpha_1<\alpha_2$, то $\alpha_1\in\left(\alpha_0,\alpha_2\right)$, а отже, існує $\alpha\in\left(0,1\right)$, для якого

$$\alpha_1=\left(1-\alpha\right)\alpha_0+\alpha\alpha_2=\alpha_0+\alpha\left(\alpha_2-\alpha_0\right).$$

Звідси

$$0<\alpha=\frac{\alpha_1-\alpha_0}{\alpha_2-\alpha_0}<1. \tag{7.4}$$

Оскільки φ за умовою є власною опуклою функцією, то за теоремою 7.1.1

$$\varphi(\alpha_1)=\varphi((1-\alpha)\alpha_0+\alpha\alpha_2)\le(1-\alpha)\varphi(\alpha_0)+\alpha\varphi(\alpha_2)\ . \qquad (7.5)$$

Тому

$$\varphi(\alpha_1)-\varphi(\alpha_0)\le\frac{\alpha_1-\alpha_0}{\alpha_2-\alpha_0}(\varphi(\alpha_2)-\varphi(\alpha_0)).$$

Поділивши останню нерівність на $\alpha_1-\alpha_0$, одержимо

$$\frac{\varphi(\alpha_1)-\varphi(\alpha_0)}{\alpha_1-\alpha_0}\le\frac{\varphi(\alpha_2)-\varphi(\alpha_0)}{\alpha_2-\alpha_0}.$$

Співвідношення (7.2) доведено.

Доведемо співвідношення (7.3). Із співвідношень (7.4), (7.5) випливає, що

$$\varphi(\alpha_1)\le(1-\alpha)\varphi(\alpha_0)+\alpha\varphi(\alpha_2),\ \text{де}\ 0<\alpha=\frac{\alpha_1-\alpha_0}{\alpha_2-\alpha_0}<1.$$

Тоді $1-\alpha=1-\dfrac{\alpha_1-\alpha_0}{\alpha_2-\alpha_0}=\dfrac{\alpha_2-\alpha_1}{\alpha_2-\alpha_0}$.

З урахуванням того, що

$$\varphi(\alpha_1)\le(1-\alpha)\varphi(\alpha_0)+\alpha(\varphi(\alpha_2)-\varphi(\alpha_1)+\varphi(\alpha_1)),$$

$$(1-\alpha)\varphi(\alpha_1)\le(1-\alpha)\varphi(\alpha_0)+\alpha(\varphi(\alpha_2)-\varphi(\alpha_1)),$$

$$(1-\alpha)(\varphi(\alpha_1)-\varphi(\alpha_0))\le\alpha(\varphi(\alpha_2)-\varphi(\alpha_1)),$$

одержимо

$$\frac{\alpha_2-\alpha_1}{\alpha_2-\alpha_0}(\varphi(\alpha_1)-\varphi(\alpha_0))\le\frac{\alpha_1-\alpha_0}{\alpha_2-\alpha_0}(\varphi(\alpha_2)-\varphi(\alpha_1)).$$

Звідси

$$\frac{\varphi(\alpha_1)-\varphi(\alpha_0)}{\alpha_1-\alpha_0}\le\frac{\varphi(\alpha_2)-\varphi(\alpha_1)}{\alpha_2-\alpha_1}.$$

Співвідношення (7.3) доведено.

Теорему доведено.

7.3. Неперервність власної опуклої функції

Теорема 7.3.1. *Нехай X – лінійний топологічний простір, p – власна опукла функція, задана на X, $x_0\in dom p$. Для того щоб функція p була неперервною в точці x_0, необхідно і достатньо, щоб вона була обмежена зверху в деякому околі цієї точки.*

Доведення. ***Необхідність.*** Нехай p – неперервна в точці $x_0\in dom p$. Доведемо, що p обмежена зверху в деякому околі точки x_0.

Оскільки p – неперервна в точці x_0, то для $\varepsilon = 1$ існує окіл $O(x_0)$ точки x_0 простору X такий, що

$$\left(\forall x \in O(x_0)\right) \ \left|p(x) - p(x_0)\right| < 1.$$

Тоді для $x \in O(x_0)$

$$p(x) - p(x_0) \le \left|p(x) - p(x_0)\right| < 1.$$

Звідси $p(x) < p(x_0) + 1 = c,\ x \in O(x_0)$.

Отже, p обмежена зверху в околі $O(x_0)$ точки x_0.

Необхідність доведено.

Достатність. Нехай p є обмеженою зверху в деякому околі точки x_0. Доведемо, що p неперервна в точці x_0.

Припустимо, що $x_0 = 0$. Тоді існує число c та окіл $O_1(0)$ точки 0 простору X такі, що $p(x) < c,\ x \in O_1(0)$. Доведемо, що функція p є неперервною в точці 0.

Згідно з теоремою 3.3.3 існує $O_2(0) \subset O_1(0)$, де $O_2(0)$ – зрівноважений окіл точки 0. Тому $p(tx) < c$ для всіх $x \in O_2(0)$, $t \in R : |t| \le 1$.

Для $x \in O_2(0)$ розглянемо функцію $\varphi(t) = p(tx)$, $t \in R$. Оскільки p – власна опукла функція, задана на X, то згідно з теоремою 7.1.2 φ – власна опукла функція. Нехай $0 < \alpha < 1$. Розглянемо на числовій прямій точки $-1, 0, \alpha, 1$. Оскільки $\varphi(-1) = p(-x) < c$, $\varphi(0) = p(0) < c$, $\varphi(\alpha) = p(\alpha x) < c$, $\varphi(1) = p(x) < c$, то точки $-1, 0, \alpha, 1$ належать $dom\varphi$.

Згідно з співвідношенням (7.2) для $0, \alpha, 1$ одержимо

$$\frac{\varphi(\alpha) - \varphi(0)}{\alpha - 0} \le \frac{\varphi(1) - \varphi(0)}{1 - 0},$$

$$\frac{p(\alpha x) - p(0)}{\alpha} \le p(x) - p(0) < c - p(0).$$

Тому

$$p(\alpha x) - p(0) \le \alpha\left(c - p(0)\right). \tag{7.6}$$

Згідно з співвідношенням (7.3) для $-1, 0, \alpha$ одержимо

$$\frac{\varphi(0) - \varphi(-1)}{0 - (-1)} \le \frac{\varphi(\alpha) - \varphi(0)}{\alpha - 0},$$

$$\frac{p(0)-p(-x)}{1} \le \frac{p(\alpha x)-p(0)}{\alpha},$$

$$\frac{p(\alpha x)-p(0)}{\alpha} \ge \frac{p(0)-c}{1}.$$

Тому

$$p(\alpha x)-p(0) \ge \alpha\left(p(0)-c\right). \tag{7.7}$$

Оскільки $c - p(0) > 0$, то, з урахуванням (7.6), (7.7), одержимо

$$\left|p(\alpha x)-p(0)\right| \le \alpha\left(c-p(0)\right), \text{ де } 0<\alpha<1, \quad x \in O_2(0). \tag{7.8}$$

Для $\varepsilon > 0$ оберемо число ε_1 таке, що $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon$ і $0 < \dfrac{\varepsilon_1}{c-p(0)} < 1$. Розглянемо окіл нуля $O(0) = \dfrac{\varepsilon_1}{c-p(0)} O_2(0)$. Для довільного $y \in O(0)$ існує $x \in O_2(0)$ таке, що $y = \dfrac{\varepsilon_1}{c-p(0)} x$. Тоді, поклавши $\alpha = \dfrac{\varepsilon_1}{c-p(0)}$, з урахуванням (7.8) одержимо, що

$$\left|p(y)-p(0)\right| = \left|p(\alpha x)-p(0)\right| \le \alpha\left(c-p(0)\right) =$$

$$= \frac{\varepsilon_1}{c-p(0)}\left(c-p(0)\right) = \varepsilon_1 < \varepsilon.$$

Отже, $(\forall \varepsilon > 0)\left(\exists O(0)\right)\left(\forall y \in O(0)\right) \quad \left|p(y)-p(0)\right| < \varepsilon$.

Тому p є неперервною в точці 0, що й потрібно було довести.

Нехай тепер $x_0 \ne 0$, функція p обмежена зверху в деякому околі точки x_0, тобто існують окіл $O(x_0)$ точки x_0 простору X та число c такі, що для будь-якого $x \in O(x_0)$ $p(x) < c$. Розглянемо функцію $g(x) = p(x_0 + x) - p(x_0)$, $x \in X$. Зрозуміло, що g – власна опукла на X функція і $g(0) = 0$.

Згідно з теоремою 3.3.1 існує окіл нуля $O(0)$ простору X такий, що $O(x_0) = x_0 + O(0)$.

Тоді для $x \in O(0)$: $x_0 + x \in O(x_0)$ і $p(x_0 + x) < c$. Звідси для будь-якого $x \in O(0)$

$$g(x) = p(x_0 + x) - p(x_0) < c - p(x_0) = c_1.$$

Тому функція g є обмеженою зверху в околі точки нуль. З доведеного вище випливає, що вона неперервна в точці 0. Це означає, що

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists O_1(0))(\forall x \in O_1(0)) \ |g(x) - g(0)| < \varepsilon, \qquad (7.9)$$

де $O_1(0)$ – окіл точки 0.

Покладемо $O_1(x_0) = x_0 + O_1(0)$ та розглянемо $|p(y) - p(x_0)|$, де $y \in O_1(x_0)$. Оскільки для $y \in O_1(x_0)$ існує $x \in O_1(0)$, що $y = x_0 + x$, то з урахуванням (7.9) одержимо, що

$$|p(y) - p(x_0)| = |p(x_0 + x) - p(x_0)| = |g(x) - g(0)| < \varepsilon.$$

Отже,

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists O_1(x_0))(\forall y \in O_1(x_0)) \ |p(y) - p(x_0)| < \varepsilon,$$

де $O_1(x_0)$ – окіл точки x_0.

Тому функція p є неперервною в точці x_0, що й потрібно було довести.

Достатність доведено.

Теорему доведено.

Теорема 7.3.2. *Нехай X – лінійний топологічний простір, p – власна опукла функція, задана на X. Якщо функція p неперервна в точці $x_0 \in X$, то вона неперервна на* $\operatorname{int} domp$.

Доведення. Нехай p є власною опуклою функцією, неперервною в точці $x_0 \in X$. Тоді для $\varepsilon = 1$ існує окіл $O(x_0)$ точки x_0 простору X такий, що

$$(\forall x \in O(x_0)) \ |p(x) - p(x_0)| < 1.$$

Звідси одержуємо, що

$$p(x) < p(x_0) + 1, \ x \in O(x_0). \qquad (7.10)$$

Тому $O(x_0) \subset domp$ і, отже, $x_0 \in \operatorname{int} domp$.

Візьмемо $\beta_0 > p(x_0) + 1$. Маємо, що $(x_0, \beta_0) \in epi\, p$, оскільки $\beta_0 > p(x_0) + 1 > p(x_0)$.

Розглянемо окіл $O(x_0, \beta_0) = O(x_0) \times (p(x_0) + 1, +\infty)$ точки (x_0, β_0) простору $X \times R$. Для кожної точки $(x, \beta) \in O(x_0, \beta_0)$ маємо, що $x \in O(x_0)$, а $\beta > p(x_0) + 1$. Звідси та із співвідношення (7.10) одержуємо, що $p(x) < p(x_0) + 1 < \beta$, $x \in O(x_0)$.

Отже, $(x,\beta)\in epi\ p$, для всіх

$$(x,\beta)\in O(x_0,\beta_0)=O(x_0)\times\left(p(x_0)+1,+\infty\right).$$

Тому $O(x_0,\beta_0)\subset epi\ p$. Це означає, що $(x_0,\beta_0)\in \operatorname{int} epi\ p$.

Нехай тепер $\bar{x}\in \operatorname{int} domp$. Згідно з теоремою 3.2.3 існує $\delta>0$, що $\bar{x}+t(x_0-\bar{x})\in \operatorname{int} domp$, $t\in(-\delta,\delta)$. Нехай $-\delta<\bar{t}<0$. Маємо, що $x_1=\bar{t}x_0+(1-\bar{t})\bar{x}\in \operatorname{int} domp$, а

$$\bar{x}=\frac{-\bar{t}}{1-\bar{t}}x_0+\frac{1}{1-\bar{t}}x_1=(1-\lambda)x_0+\lambda x_1,\ \text{де}\ \lambda=\frac{1}{1-\bar{t}}, \qquad (7.11)$$

причому $0<\lambda<1$.

Оскільки $x_1\in \operatorname{int} dom\ p$, то $(x_1,p(x_1))\in epi\ p$. Внаслідок опуклості $epi\ p$, співвідношень $(x_1,p(x_1))\in epi\ p$, $(x_0,\beta_0)\in \operatorname{int} epi\ p$, теореми 4.3.2 робимо висновок, що

$$(1-\lambda)(x_0,\beta_0)+\lambda(x_1,p(x_1))=$$
$$=\left((1-\lambda)x_0+\lambda x_1,(1-\lambda)\beta_0+\lambda p(x_1)\right)=\left(\bar{x},\bar{\beta}\right)\in \operatorname{int} epi\ p,$$

де $\bar{\beta}=(1-\lambda)\beta_0+\lambda p(x_1)$.

Звідси випливає, що існують окіл $O(\bar{x})$ точки $\bar{x}$ простору X та число $\varepsilon>0$ такі, що окіл $O(\bar{x},\bar{\beta})=O(\bar{x})\times\left(\bar{\beta}-\varepsilon,\bar{\beta}+\varepsilon\right)$ точки $(\bar{x},\bar{\beta})$ простору $X\times R$ включається в $epi\ p$.

Тому для всіх $(x,\beta)\in O(\bar{x})\times\left(\bar{\beta}-\varepsilon,\bar{\beta}+\varepsilon\right)$ матимемо, що $p(x)\le\beta<\bar{\beta}+\varepsilon$.

Отже, функція p є обмеженою зверху в околі $O(\bar{x})$ точки $\bar{x}$ ($p(x)<\bar{\beta}+\varepsilon,\ x\in O(\bar{x})$).

Згідно з теоремою 7.3.1 вона є неперервною в точці $\bar{x}$. Оскільки точку $\bar{x}$ вибрано довільно з $\operatorname{int} dom\ p$, то p є неперервною на $\operatorname{int} dom\ p$.

Теорему доведено.

Розділ 8

ПОНЯТТЯ СПРЯЖЕНОЇ ФУНКЦІЇ. ПРИКЛАДИ СПРЯЖЕНИХ ФУНКЦІЙ. ВЛАСТИВОСТІ СПРЯЖЕНИХ ФУНКЦІЙ. ТЕОРЕМА ФЕНХЕЛЯ-МОРО

8.1. Означення спряжених функцій. Приклади спряжених функцій

Означення 8.1.1. *Нехай* X *– лінійний топологічний простір,* $p :$ $X \to \overline{R}$ *– функція, задана на* X *,* X^* *– простір, спряжений з* X *. Для всіх* $f \in X^*$ *покладемо*

$$p^*(f) = \sup_{x \in X} \big(f(x) - p(x) \big).$$

Функцію $p^*(f)$ *,* $f \in X^*$ *, називають функцією, спряженою з* p *, або полярою функції* p *.*

Розглянемо деякі приклади спряжених функцій.

Приклад 8.1.1. Нехай $p(x) = x^2$, $x \in R$. Оскільки $f \in R^*$ тоді і тільки тоді, коли $f(x) = cx$, $x \in R$, для деякого $c \in R$, то

$$p^*(f) = \sup_{x \in R} \big(f(x) - p(x) \big) = \sup_{x \in R} \left(cx - x^2 \right).$$

Розглянемо функцію $\varphi(x) = cx - x^2$, $x \in R$. Маємо $\varphi'(x) = c - 2x$. Точка $x = \frac{c}{2}$ – точка, в якій функція $\varphi(x)$ приймає своє найбільше значення.

Отже, якщо $f(x) = cx$, $x \in R$, де $c \in R$, то

$$p^*(f) = \sup_{x \in R} \varphi(x) = c \cdot \frac{c}{2} - \frac{c^2}{4} = \frac{c^2}{4}.$$

Приклад 8.1.2. Розглянемо функцію $p(x) = \frac{1}{1 + x^2}$, $x \in R$.

Тоді $p^*(f) = \begin{cases} 0, & f = 0, \\ +\infty, & f \neq 0. \end{cases}$

Дійсно, нехай $f = 0$. Тоді

$$p^*(f) = p^*(0) = \sup_{x \in R} \big(0 - p(x) \big) = \sup_{x \in R} \left(-\frac{1}{1 + x^2} \right) = -\inf_{x \in R} \frac{1}{1 + x^2}.$$

Оскільки $\frac{1}{1+x^2} > 0$ для всіх $x \in R$ і $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{1+x^2} = 0$, то $\inf\limits_{x\in R} p(x) = 0$, а, отже, $p^*(0) = 0$.

Нехай тепер $f \neq 0$. Тоді $f(x) = cx$, де $c \neq 0$,

$$p^*(f) = \sup_{x\in R}\left(cx - \frac{1}{1+x^2}\right) \geq cx - \frac{1}{1+x^2}, x \in R. \quad (8.1)$$

Нехай $c > 0$. Тоді з (8.1)

$$p^*(f) \geq \lim_{x\to+\infty}\left(cx - \frac{1}{1+x^2}\right) = +\infty.$$

Тому $p^*(f) = +\infty$, якщо $f(x) = cx$, $x \in R$, де $c > 0$.

Нехай $c < 0$. Тоді з (8.1)

$$p^*(f) \geq \lim_{x\to-\infty}\left(cx - \frac{1}{1+x^2}\right) = +\infty.$$

Тому $p^*(f) = +\infty$, якщо $f(x) = cx$, $x \in R$, де $c < 0$.

Отже, $p^*(f) = \begin{cases} 0, & f = 0, \\ +\infty, & f \neq 0. \end{cases}$

8.2. Властивості спряжених функцій

Наведемо деякі властивості спряжених функцій.

Твердження 8.2.1. *Нехай* X *– лінійний топологічний простір,* $p : X \to \overline{R}$ *– власна функція, задана на* X. *Має місце нерівність*

$$p(x) + p^*(f) \geq f(x), \; x \in X, \; f \in X^*. \quad (8.2)$$

Доведення. Згідно з означенням 8.1.1 $p^*(f) = \sup\limits_{x\in X}\left(f(x) - p(x)\right)$, $f \in X^*$. Тому

$$p^*(f) \geq f(x) - p(x), \; x \in X, \; f \in X^*.$$

Отже, $p(x) + p^*(f) \geq f(x)$, $x \in X$, $f \in X^*$, що й потрібно було довести.

Твердження доведено.

Нерівність (8.2) називають нерівністю Юнга-Фенхеля.

Твердження 8.2.2. *Нехай* X *– лінійний топологічний простір,* $p : X \to \overline{R}$ *– функція, задана на* X. *Для довільного додатного числа* λ *справедлива рівність* $(\lambda p)^*(f) = \lambda p^*\left(\frac{f}{\lambda}\right)$.

Доведення. За означенням 8.1.1

$$(\lambda p)^*(f) = \sup_{x\in X}\left(f(x) - \lambda p(x)\right) = \lambda \sup_{x\in X}\left(\frac{f}{\lambda}(x) - p(x)\right) = \lambda p^*\left(\frac{f}{\lambda}\right), \quad f \in X^*.$$

Твердження доведено.

Твердження 8.2.3. *Нехай* X *– лінійний топологічний простір,* $p : X \to \overline{R}$ *– функція, задана на* X *. Для* $\alpha \in R$ *справедлива рівність*

$$(p+\alpha)^*(f) = p^*(f) - \alpha, \quad f \in X^*.$$

Доведення. За означенням 8.1.1

$$(p+\alpha)^*(f) = \sup_{x\in X}\left(f(x) - (p+\alpha)(x)\right) = \sup_{x\in X}\left(f(x) - p(x) - \alpha\right) =$$

$$= \sup_{x\in X}\left(f(x) - p(x)\right) - \alpha = p^*(f) - \alpha, \quad f \in X^*.$$

Твердження доведено.

Твердження 8.2.4. *Нехай* X *– лінійний топологічний простір,* $p : X \to \overline{R}$ *– функція, задана на* X *. Для* $z \in X$ *справедлива рівність* $p_z^*(f) = p^*(f) + f(z)$, $f \in X^*$*, де* $p_z(x) = p(x-z)$, $x \in X$.

Доведення. За означенням 8.1.1

$$p_z^*(f) = \sup_{x\in X}\left(f(x) - p(x-z)\right) = \sup_{x\in X}\left(\left(f(x) - f(z)\right) + f(z) - p(x-z)\right) =$$

$$= \sup_{x\in X}\left(f(x-z) - p(x-z)\right) + f(z) = p^*(f) + f(z), \quad f \in X^*.$$

Твердження доведено.

Твердження 8.2.5. *Нехай* X *– лінійний топологічний простір,* $p_1, p_2 : X \to \overline{R}$ *– функції, задані на* X , $p_1(x) \le p_2(x)$, $x \in X$ *. Тоді* $p_1^*(f) \ge p_2^*(f)$, $f \in X^*$.

Доведення. Оскільки $p_1(x) \le p_2(x)$, $x \in X$, то $-p_1(x) \ge -p_2(x)$, $x \in X$. Для довільного $f \in X^*$

$$f(x) - p_1(x) \ge f(x) - p_2(x),$$

$$\sup_{x\in X}\left(f(x) - p_1(x)\right) \ge \sup_{x\in X}\left(f(x) - p_2(x)\right),$$

$$p_1^*(f) \ge p_2^*(f).$$

Твердження доведено.

Твердження 8.2.6. *Нехай* X *– лінійний топологічний простір,* $p_i : X \to \overline{R}$, $i \in I$ *, – функції, задані на* X *. Тоді*

$$\left(\inf_{i\in I} p_i\right)^*(f)=\sup_{i\in I} p_i^*(f),\ f\in X^*,\ \textit{де}\ \left(\inf_{i\in I} p_i\right)(x)=\inf_{i\in I} p_i(x),\ x\in X .$$

Доведення. Нехай $p(x)=\left(\inf_{i\in I} p_i\right)(x)=\inf_{i\in I} p_i(x)$, $x\in X$. Маємо, що $p(x)\le p_i(x)$ для довільних $i\in I$, $x\in X$. Згідно з твердженням 8.2.5 $p^*(f)\ge p_i^*(f)$, $i\in I$, $f\in X^*$. Тому

$$\sup_{i\in I} p_i^*(f)\le p^*(f)=\left(\inf_{i\in I} p_i\right)^*(f),\ f\in X^*. \tag{8.3}$$

Якщо $p^*(f)=-\infty$ для деякого $f\in X^*$, то згідно з (8.3) $\sup_{i\in I} p_i^*(f)=-\infty$. Отже, в цьому випадку твердження доведено.

Припустимо, що $f\in X^*$ і $p^*(f)>-\infty$.

Візьмемо $a<p^*(f)$. Тоді $a<\sup_{x\in X}\left(f(x)-p(x)\right)$. Тому існує елемент $x_0\in X$ такий, що

$$a<f(x_0)-p(x_0)=f(x_0)-\inf_{i\in I} p_i(x_0)=\sup_{i\in I}\left(f(x_0)-p_i(x_0)\right).$$

Тому існує індекс $i_0\in I$ такий, що

$$a<f(x_0)-p_{i_0}(x_0)\le\sup_{x\in X}\left(f(x)-p_{i_0}(x)\right)=p_{i_0}^*(f)\le\sup_{i\in I} p_i^*(f).$$

При $a\to p^*(f)$ звідси одержимо, що

$$p^*(f)=\left(\inf_{i\in I} p_i\right)^*(f)\le\sup_{i\in I} p_i^*(f). \tag{8.4}$$

З урахуванням (8.3) та (8.4) робимо висновок, що

$$\left(\inf_{i\in I} p_i\right)^*(f)=\sup_{i\in I} p_i^*(f)$$

і в цьому випадку.

Твердження доведено.

Твердження 8.2.7. *Нехай* X *– лінійний топологічний простір. Для будь-якої функції* $p:\ X\to\overline{R}$ *справедлива нерівність*

$$p(x)\ge p^{**}(x),\ x\in X ,$$

де $p^{**}(x)=\sup_{f\in X^*}\left(f(x)-p^*(f)\right),\ x\in X$.

Доведення. Маємо, що $p^*(f)=\sup_{x\in X}\left(f(x)-p(x)\right)$, $f\in X^*$.

Тому $f(x) - p(x) \le p^*(f)$, $x \in X$, $f \in X^*$.

Звідки $f(x) - p^*(f) \le p(x)$, $x \in X$, $f \in X^*$.

Тоді $p^{**}(x) = \sup\limits_{f \in X^*}\left(f(x) - p^*(f)\right) \le p(x)$, $x \in X$.

Твердження доведено.

Твердження 8.2.8. *Нехай* X *– лінійний топологічний простір,* $p: X \to \overline{R}$. *Тоді* p^{**} *є опуклою та замкненою функцією.*

Доведення. Нехай $p^*(f) = +\infty$, $f \in X^*$. Тоді

$$p^{**}(x) = \sup_{f \in X^*}\left(f(x) - p^*(f)\right) = -\infty, \ x \in X .$$

Внаслідок цього $(x,\alpha) \in epi\, p^{**}$ для всіх $(x,\alpha) \in X \times R$. оскільки $p^{**}(x) = -\infty < \alpha$. Звідси випливає, що в цьому випадку $epi\, p^{**} = X \times R$ – опукла і замкнена множина. Тому p^{**} є опуклою та замкненою функцією.

Припустимо, що $domp^* \ne \varnothing$ та $p^*(f_0) = -\infty$ для деякого $f_0 \in X^*$. Тоді

$$p^{**}(x) = \sup_{f \in X^*}\left(f(x) - p^*(f)\right) \ge f_0(x) - p^*(f_0) = +\infty, \ x \in X .$$

В цьому випадку $epi\, p^{**} = \varnothing$, оскільки для будь-якого $(x,\alpha) \in X \times R$ $p^{**}(x) = +\infty > \alpha$.

Вважається, що $\varnothing$ є опуклою множиною. Вона також є замкненою множиною. Тому і в цьому випадку p^{**} є опуклою та замкненою функцією.

Нехай тепер $domp^* \ne \varnothing$ та $p^*(f) > -\infty$, $f \in X^*$, тобто p^* є власною функцією, заданою на X^*. В цьому випадку

$$p^{**}(x) = \sup_{f \in X^*}\left(f(x) - p^*(f)\right) = \sup_{f \in domp^*}\left(f(x) - p^*(f)\right) > -\infty, \ x \in X . \quad (8.5)$$

Для $f \in domp^*$ позначимо через

$$\varphi_f(x) = f(x) - p^*(f), \ x \in X .$$

Переконаємося, що власні функції φ_f, $f \in domp^*$, є опуклими та замкненими.

Нехай $x_1, x_2 \in X$, $\alpha \in [0,1]$. Тоді

$$\varphi_f\left((1-\alpha)x_1+\alpha x_2\right)= f\left((1-\alpha)x_1+\alpha x_2\right)-p^*(f)=$$
$$=(1-\alpha)\Big(f(x_1)-p^*(f)\Big)+\alpha\Big(f(x_2)-p^*(f)\Big)=(1-\alpha)\varphi_f(x_1)+\alpha\varphi_f(x_2)\,.$$

Відповідно до теореми 7.1.1 функції φ_f, $f\in domp^*$, є опуклими. Тому $epi\,\varphi_f$ є опуклою множиною простору $X\times R$ для всіх $f\in domp^*$.

Доведемо, що $epi\,\varphi_f$, $f\in domp^*$, є замкненою множиною. Нехай $(x_0,\beta_0)\notin epi\,\varphi_f$. Тоді $\varphi_f(x_0)>\beta_0$. Виберемо $\varepsilon>0$ таким, що $\varphi_f(x_0)>\beta_0+\varepsilon$. Оскільки функція φ_f, $f\in domp^*$, є неперервною на X, то існує окіл $O(x_0)$ точки x_0 простору X такий, що $\varphi_f(x)>\beta_0+\varepsilon$, $x\in O(x_0)$. Нехай $O(\beta_0)=(\beta_0-\varepsilon,\beta_0+\varepsilon)$. Маємо, що для всіх $(x,\beta)\in O(x_0)\times O(\beta_0)$: $\varphi_f(x)>\beta_0+\varepsilon>\beta$. Отже, $\big(O(x_0)\times O(\beta_0)\big)\cap epi\,\varphi_f=\varnothing$. Тому доповнення $epi\,\varphi_f$ до $X\times R$ є відкритою множиною простору $X\times R$. Звідси з урахуванням означення 1.3.1 робимо висновок, що $epi\,\varphi_f$ є замкненою множиною простору $X\times R$ для всіх $f\in domp^*$. Переконаємося, що

$$epi\,p^{**}=\bigcap_{f\in domp^*} epi\,\varphi_f\,. \qquad (8.6)$$

Нехай $(x,\beta)\in epi\,p^{**}$. Тоді

$$p^{**}(x)\le\beta\,,\quad \sup_{f\in domp^*}\Big(f(x)-p^*(f)\Big)\le\beta\,,$$
$$f(x)-p^*(f)=\varphi_f(x)\le\beta\,,\quad f\in domp^*\,.$$

Тому $(x,\beta)\in epi\,\varphi_f$, $f\in domp^*$. Звідси випливає, що

$$(x,\beta)\in\bigcap_{f\in domp^*} epi\,\varphi_f\,,\ epi\,p^{**}\subset\bigcap_{f\in domp^*} epi\,\varphi_f\,. \qquad (8.7)$$

Навпаки, якщо $(x,\beta)\in\bigcap_{f\in domp^*} epi\,\varphi_f$, то $\varphi_f(x)\le\beta$, $f\in domp^*$.

Тоді

$$p^{**}(x)=\sup_{f\in domp^*}\Big(f(x)-p^*(f)\Big)=\sup_{f\in domp^*}\varphi_f(x)\le\beta\,.$$

Звідси випливає, що

$$(x,\beta)\in epi\,p^{**},\quad \bigcap_{f\in domp^*} epi\,\varphi_f\subset epi\,p^{**}\,. \qquad (8.8)$$

Зі співвідношень (8.7), (8.8) робимо висновок про справедливість рівності (8.6). Оскільки $epi\,\varphi_f$, $f \in dom p^*$, є опуклими та замкненими множинами простору $X \times R$, то $epi\,p^{**} = \bigcap_{f \in dom p^*} epi\,\varphi_f$ також є опуклою (як перетин опуклих множин) та замкненою множиною (як перетин замкнених множин).

Тому p^{**} є опуклою та замкненою функцією і в розглядуваному випадку.

Твердження доведено.

Твердження 8.2.9. *Нехай X – локально опуклий лінійний топологічний простір, p – власна опукла замкнена функція, задана на X. Тоді p^* – власна функція.*

Доведення. Нехай $x_0 \in dom p$. Тоді

$$p^*(f) = \sup_{x \in X}\big(f(x) - p(x)\big) \geq f(x_0) - p(x_0) > -\infty,\quad f \in X^*.$$

З іншого боку, точка $\big(x_0, p(x_0) - 1\big) \notin epi p$ та $epi\,p$ є опуклою замкненою множиною локально опуклого простору $X \times R$. Згідно з теоремою 6.3.1 (друга теорема віддільності) існує $\big(f^*, \beta\big) \in X^* \times R$, що

$$f^*(x_0) + \beta\big(p(x_0) - 1\big) > \sup_{(x,\alpha) \in epi\,p}\big(f^*(x) + \beta\alpha\big). \tag{8.9}$$

Ясно, що $\beta \neq 0$. Дійсно, якщо б $\beta = 0$, то відповідно до (8.9)

$$f^*(x_0) > \sup_{(x,\alpha) \in epi\,p} f^*(x) \geq f^*(x_0),$$

що неможливо.

З іншого боку, β не може бути додатним числом, оскільки верхня межа у правій частині нерівності (8.9) дорівнювала б $+\infty$, що суперечить (8.9).

Отже, $\beta < 0$. Поділивши (8.9) на $|\beta|$ та позначивши через $f_0 = \frac{1}{|\beta|} f^*$, одержимо, що

$$+\infty > f_0(x_0) - p(x_0) + 1 > \sup_{(x,\alpha) \in epi\,p}\big(f_0(x) - \alpha\big) = \sup_{x \in dom p}\big(f_0(x) - p(x)\big) =$$

$$= \sup_{x \in X}\big(f_0(x) - p(x)\big) = p^*(f_0).$$

Звідси випливає, що $p^*\left(f_0\right)<+\infty$. Це означає, що $f_0 \in dom p^*$. Отже, $dom p^* \neq \varnothing$. Вище встановлено, що $p^*\left(f\right)>-\infty$, $f \in X^*$.

Це й означає, що p^* є власною функцією.

Твердження доведено.

Твердження 8.2.10. *Нехай X – локально опуклий лінійний топологічний простір, p – власна опукла замкнена функція, задана на X. Тоді p^{**} є власною опуклою замкненою функцією, заданою на X.*

Доведення. Згідно з твердженням 8.2.8 p^{**} є опуклою та замкненою функцією. Оскільки p є власною функцією, то існує точка $x_0 \in X$ така, що $p\left(x_0\right)<+\infty$. Оскільки $p^{**}\left(x_0\right) \leq p\left(x_0\right)$ (див. твердження 8.2.7), то $p^{**}\left(x_0\right)<+\infty$.

Згідно з твердженням 8.2.9 p^* є власною функцією. Тоді існує $f_0 \in X^*$, що $p^*\left(f_0\right) \in R$. Тому для всіх $x \in X$:

$$p^{**}\left(x\right)=\sup_{f \in X^*}\left(f\left(x\right)-p^*\left(f\right)\right) \geq f_0\left(x\right)-p^*\left(f_0\right)>-\infty .$$

Отже, $p^{**}\left(x\right)>-\infty$, $x \in X$, та $p^{**}\left(x_0\right)<+\infty$. Це й означає, що p^{**} є власною функцією.

Твердження доведено.

8.3. Теорема Фенхеля-Моро

В цьому пункті доводиться одна з основних теорем теорії двоїстості опуклих функцій.

Теорема 8.3.1 (Фенхеля-Моро). *Нехай X – локально опуклий лінійний топологічний простір, $p: X \to R \cup \left\{+\infty\right\}$. Тоді $p=p^{**}$ тоді і тільки тоді, коли p є опуклою і замкненою.*

Доведення. ***Необхідність.*** Нехай $p=p^{**}$. Оскільки p^{**} є опуклою та замкненою (див. твердження 8.2.8), то p також є опуклою та замкненою.

Необхідність доведено.

Достатність. Нехай p є опуклою і замкненою. Доведемо, що $p=p^{**}$. Якщо $p\left(x\right)=+\infty$, $x \in X$, то

$$p^*(f) = \sup_{x \in X} \big(f(x) - p(x) \big) = -\infty , \quad f \in X^* ,$$

а

$$p^{**}(x) = \sup_{f \in X^*} \big(f(x) - p^*(f) \big) = +\infty = p(x) .$$

Отже, в цьому випадку $p = p^{**}$.

Припустимо, що p є власною функцією, тобто, що $dom p \neq \varnothing$. Тоді p є власною опуклою та замкненою функцією. Згідно з твердженням 8.2.10 p^{**} – власна опукла замкнена функція і, отже, $p^{**}(x) > -\infty$, $x \in X$. Припустимо, що існує точка $x_0 \in X$ така, що $p^{**}(x_0) < p(x_0)$. Тоді $p^{**}(x_0) \in R$ і точка $\big(x_0, p^{**}(x_0)\big) \notin epi\ p$. Відповідно до другої теореми віддільності (див. теорему 6.3.1) $epi\ p$, як непорожню опуклу і замкнену множину, можна сильно відділити від точки $\big(x_0, p^{**}(x_0)\big)$ ненульовим лінійним функціоналом, тобто існує $\big(f^*, \beta\big) \in X^* \times R$, $\big(f^*, \beta\big) \neq (0,0)$, що

$$f^*(x_0) + \beta p^{**}(x_0) > \sup_{(x,\alpha) \in epi\ p} \big(f^*(x) + \beta\alpha \big) . \qquad (8.10)$$

Переконаємося, що $\beta < 0$. Дійсно, якщо б β було більшим 0, то для точок $(\bar{x}, \alpha) \in epi\ p$, де $\bar{x} \in dom\ p$, а $\alpha \geq p(\bar{x})$, одержали б, що

$$f^*(x_0) + \beta p^{**}(x_0) > f^*(\bar{x}) + \beta\alpha . \qquad (8.11)$$

В цьому випадку $\lim\limits_{\substack{\alpha \to +\infty, \\ \alpha \geq p(\bar{x})}} \big(f^*(\bar{x}) + \beta\alpha \big) = +\infty$. Тому для достатньо великих $\alpha \geq p(\bar{x})$ одержали б, що $f^*(x_0) + \beta p^{**}(x_0) < f^*(\bar{x}) + \beta\alpha$. Ця нерівність суперечить співвідношенню (8.11). Отже, $\beta \leq 0$.

Переконаємося, що випадок $\beta = 0$ також неможливий. Дійсно, нехай $\beta = 0$. Тоді внаслідок (8.10)

$$f^*(x_0) > \sup_{(x,\alpha) \in epi\ p} f^*(x) = \sup_{x \in dom p} f^*(x) ,$$

$$\delta = f^*(x_0) - \sup_{x \in dom p} f^*(x) > 0 . \qquad (8.12)$$

Вибравши $f_1 \in X^*$ так, що $p^*(f_1) \in R$ (див. твердження 8.2.9), отримаємо для $t > 0$

$$p^*\left(f_1^*+tf^*\right)=\sup_{x\in domp}\left(\left(f_1^*+tf^*\right)(x)-p(x)\right)=\sup_{x\in domp}\left(f_1^*(x)-p(x)+tf^*(x)\right)\le$$

$$\le\sup_{x\in domp}\left(f_1^*(x)-p(x)\right)+t\sup_{x\in domp}f^*(x)=p^*\left(f_1^*\right)+t\sup_{x\in domp}f^*(x).$$

Тоді

$$p^{**}(x_0)=\sup_{f\in X^*}\left(f(x_0)-p^*(f)\right)\ge\left(f_1^*+tf^*\right)(x_0)-p^*\left(f_1^*+tf^*\right)\ge$$

$$\ge f_1^*(x_0)+tf^*(x_0)-p^*\left(f_1^*\right)-t\sup_{x\in domp}f^*(x)=f_1^*(x_0)-p^*\left(f_1^*\right)+ \tag{8.13}$$

$$+t\left(f^*(x_0)-\sup_{x\in domp}f^*(x)\right)=f_1^*(x_0)-p^*\left(f_1^*\right)+t\delta,$$

де $\delta>0$ (див. 8.12).

Оскільки $f_1^*(x_0)-p^*\left(f_1^*\right)+t\delta\to+\infty$ при $t\to+\infty$, $t>0$, то з (8.13) одержуємо, що $p^{**}(x_0)=+\infty$, що суперечить припущенню про те, що $p^{**}(x_0)\in R$.

Отже, $\beta<0$.

Поділимо (8.10) на $|\beta|$ та позначимо $f_0^*=\dfrac{f^*}{|\beta|}$. Тоді одержимо, що

$$f_0^*(x_0)-p^{**}(x_0)>\sup_{(x,\alpha)\in epi\,p}\left(f_0^*(x)-\alpha\right)\ge\sup_{x\in domp}\left(f_0^*(x)-p(x)\right)=p^*\left(f_0^*\right).$$

Звідси випливає, що

$$p^{**}(x_0)<f_0^*(x_0)-p^*\left(f_0^*\right)\le\sup_{f\in X^*}\left(f(x_0)-p^*(f)\right)=p^{**}(x_0).$$

Одержана суперечність доводить, що в розглядуваному випадку для всіх $x_0\in X$ $p^{**}(x_0)\ge p(x_0)$. Оскільки $p^{**}(x)\le p(x)$, $x\in X$, (див. твердження 8.2.7), то $p^{**}(x)=p(x)$ для всіх $x\in X$ у випадку, коли $p(x)=+\infty$, $x\in X$, й у випадку, коли p є власною функцією.

Достатність доведено.

Теорему доведено.

Розділ 9

ПОНЯТТЯ СУБГРАДІЄНТА ТА СУБДИФЕРЕНЦІАЛА ФУНКЦІЇ. ВЛАСТИВОСТІ СУБДИФЕРЕНЦІАЛА

9.1. Поняття субградієнта та субдиференціала функції. Приклади

Нехай X – лінійний топологічний простір, X^* – простір, спряжений з X, $p : X \to \overline{R}$ – власна функція, задана на X, $x_0 \in domp$.

Означення 9.1.1. *Функціонал* $f \in X^*$ *називається субградієнтом функції* p *в точці* x_0, *якщо*

$$p(x) - p(x_0) \geq f(x - x_0) = f(x) - f(x_0), \quad x \in X .$$

Приклад 9.1.1. Нехай $X = R$, $p(x) = |x|$, $x \in R$, $x_0 = 0$. Розглянемо $f \in R^*$: $f(x) = cx$, $x \in R$, де $|c| \leq 1$. Переконаємося, що f є субградієнтом функції p в точці $x_0 = 0$.

Оскільки $|c| \leq 1$, то $cx \leq |cx| = |c||x| \leq |x|$, тому

$$p(x) - p(0) = |x| - |0| = |x| \geq cx = c(x-0) = f(x-0), \ x \in R .$$

Згідно з означенням 9.1.1 $f(x) = cx$, $x \in R$, де $|c| \leq 1$, є субградієнтом функції $p(x) = |x|$, $x \in R$, в точці $x_0 = 0$.

Означення 9.1.2. *Множину всіх субградієнтів функції* p *в точці* x_0 *називають субдиференціалом цієї функції в точці* x_0 *і позначають* $\partial p(x_0)$.

З цього означення випливає, що

$$\partial p(x_0) = \left\{ f \in X^* : p(x) - p(x_0) \geq f(x - x_0), x \in X \right\} .$$

Приклад 9.1.2. Довести, що для $p(x) = |x|$, $x \in R$,

$$\partial p(0) = \left\{ f \in R^* : f(x) = cx, x \in R, |c| \leq 1 \right\} . \tag{9.1}$$

З прикладу 9.1.1 випливає, що

$$\left\{ f \in R^* : f(x) = cx, x \in R, |c| \leq 1 \right\} \subset \partial p(0) . \tag{9.2}$$

Нехай $f(x) = cx$, $x \in R$, є субградієнтом функції $p(x) = |x|$ в точці $x_0 = 0$. Тоді згідно з означенням 9.1.1

$$p(x) - p(x_0) = |x| - |0| = |x| \geq cx - c \cdot 0 = cx, \ x \in R.$$

Звідси $cx \leq |x|$, $x \in R$. З цієї нерівності при $x = -1$ та $x = 1$ отримуємо відповідно нерівності $c \geq -1$, $c \leq 1$. Отже, $|c| \leq 1$. Тому

$$\partial p(0) \subset \left\{ f \in R^* : f(x) = cx, x \in R, |c| \leq 1 \right\}. \tag{9.3}$$

З (9.2) та (9.3) випливає рівність (9.1).

Теорема 9.1.1. *Нехай* X *– лінійний топологічний простір,* X^* *– простір, спряжений з* X, $p : X \to \overline{R}$ *– власна функція, задана на* X, $x_0 \in dom p$, p^* *– функція, спряжена з* p. *Тоді*

$$\partial p(x_0) = \left\{ f \in X^* : p(x_0) + p^*(f) = f(x_0) \right\}. \tag{9.4}$$

Доведення. Нехай $f \in \partial p(x_0)$. Тоді

$$p(x) - p(x_0) \geq f(x) - f(x_0), \ \ x \in X.$$

Звідси

$$f(x) - p(x) \leq f(x_0) - p(x_0), \ \ x \in X,$$

$$\sup_{x \in X} \big(f(x) - p(x) \big) = f(x_0) - p(x_0),$$

$$p^*(f) = f(x_0) - p(x_0).$$

Тому $p(x_0) + p^*(f) = f(x_0)$. Отже,

$$\partial p(x_0) \subset \left\{ f \in X^* : p(x_0) + p^*(f) = f(x_0) \right\}. \tag{9.5}$$

Навпаки, нехай $f \in \left\{ f \in X^* : p(x_0) + p^*(f) = f(x_0) \right\}$.

Тоді $p^*(f) + p(x_0) = f(x_0)$. Звідси

$$p^*(f) = \sup_{x \in X} \big(f(x) - p(x) \big) = f(x_0) - p(x_0),$$

$$f(x) - p(x) \leq f(x_0) - p(x_0), \ \ x \in X,$$

$$p(x) - p(x_0) \geq f(x) - f(x_0), \ \ x \in X.$$

Отже, $f \in \partial p(x_0)$. Тому

$$\left\{ f \in X^* : p(x_0) + p^*(f) = f(x_0) \right\} \subset \partial p(x_0). \tag{9.6}$$

З урахуванням включень (9.5) та (9.6) одержимо, що має місце (9.4).
Теорему доведено.

З теореми 9.1.1 випливають еквівалентні означення субградієнта та субдиференціала.

Означення 9.1.3. *Функціонал* $f \in X^*$ *називається субградієнтом функції* p *в точці* x_0*, якщо*

$$p(x_0) + p^*(f) = f(x_0).$$

Означення 9.1.4. *Множину всіх* $f \in X^*$ *таких, що* $p(x_0) + p^*(f) = f(x_0)$*, називають субдиференціалом функції* p *в точці* x_0.

9.2. Властивості субдиференціала. Критерій точки глобального мінімуму функції

Нехай X – лінійний топологічний простір, X^* – простір, спряжений з X, $p : X \to \overline{R}$ – власна функція, задана на X, $x_0 \in domp$, p^* – функція, спряжена з p.

Теорема 9.2.1. *Субдиференціал функції* p *в точці* x_0 *є опуклою слабко** *замкненою множиною простору* X^* *(замкненою у слабкій** *топології простору* X^**).*

Доведення. Доведемо, що $\partial p(x_0)$ є опуклою множиною простору X^*. Нехай $f_1, f_2 \in \partial p(x_0)$, $\alpha \in [0,1]$. Переконаємося, що $(1-\alpha) f_1 + \alpha f_2 \in \partial p(x_0)$.

Оскільки $f_1, f_2 \in \partial p(x_0)$, то

$$p(x) - p(x_0) \geq f_1(x) - f_1(x_0), \quad x \in X, \tag{9.7}$$

$$p(x) - p(x_0) \geq f_2(x) - f_2(x_0), \quad x \in X. \tag{9.8}$$

Помножимо нерівності (9.7), (9.8) на $(1-\alpha)$ та α відповідно та додамо одержані результати. Внаслідок цього будемо мати, що

$$p(x) - p(x_0) \geq \big((1-\alpha) f_1 + \alpha f_2\big)(x) - \big((1-\alpha) f_1 + \alpha f_2\big)(x_0), \quad x \in X. \tag{9.9}$$

З (9.9) випливає, що функціонал $(1-\alpha) f_1 + \alpha f_2 \in \partial p(x_0)$ для $\alpha \in [0,1]$, а, отже, відрізок $[f_1, f_2] \subset \partial p(x_0)$. Тому $\partial p(x_0)$ є опуклою множиною простору X^*.

Доведемо, що $X^* \setminus \partial p(x_0)$ є слабко* відкритою множиною простору X^*. Нехай $f_0 \in X^* \setminus \partial p(x_0)$. Тоді $f_0 \notin \partial p(x_0)$. Тому існує $\tilde{x} \in X$, що

$$p(\tilde{x}) - p(x_0) < f_0(\tilde{x}) - f_0(x_0). \qquad (9.10)$$

Покладемо $\varepsilon = f_0(\tilde{x} - x_0) - (p(\tilde{x}) - p(x_0))$. Зі співвідношення (9.10) випливає, що $\varepsilon > 0$. Розглянемо окіл $O(f_0)$ точки f_0 простору X^* у розумінні слабкої* топології простору X^*, що визначається числом ε та точкою $\tilde{x} - x_0$:

$$O(f_0) = O(f_0; \varepsilon; \tilde{x} - x_0) = \left\{ f \in X^* : \left| f(\tilde{x} - x_0) - f_0(\tilde{x} - x_0) \right| < \varepsilon \right\}.$$

Для будь-яких $f \in O(f_0)$

$$f_0(\tilde{x} - x_0) - f(\tilde{x} - x_0) \le \left| f(\tilde{x} - x_0) - f_0(\tilde{x} - x_0) \right| < \varepsilon =$$
$$= f_0(\tilde{x} - x_0) - (p(\tilde{x}) - p(x_0)),$$
$$p(\tilde{x}) - p(x_0) < f(\tilde{x} - x_0).$$

Це означає, що $f \in X^* \setminus \partial p(x_0)$, а, отже, $O(f_0) \subset X^* \setminus \partial p(x_0)$. Згідно з теоремою 1.2.1 $X^* \setminus \partial p(x_0)$ є відкритою множиною у розумінні слабкої* топології простору X^*, а згідно з означенням 1.3.1 $\partial p(x_0)$ є замкненою множиною у розумінні слабкої* топології простору X^*.

Теорему доведено.

Твердження 9.2.1. *Якщо* $\alpha \ge 0$*, то*

$$\partial(\alpha p)(x_0) = \alpha \partial p(x_0).$$

Доведення. Нехай $\alpha = 0$. Тоді $\alpha p(x) = 0$, $x \in X$. Нехай $f \in \partial(\alpha p)(x_0)$. Тоді

$$(\alpha p)(x) - (\alpha p)(x_0) = 0 - 0 = 0 \ge f(x - x_0), \ x \in X.$$

Звідси випливає, що $f = 0$. З іншого боку, $f = 0 \in \partial(\alpha p)(x_0)$ при $\alpha = 0$, оскільки

$$(\alpha p)(x) - (\alpha p)(x_0) = 0 - 0 \ge 0(x - x_0), \ x \in X.$$

Тому $\partial(0 \cdot p)(x_0) = \{0\} = 0 \cdot \partial p(x_0)$. Отже, при $\alpha = 0$ твердження справедливе.

Нехай $\alpha > 0$ та $f \in \partial(\alpha p)(x_0)$. Тоді

$$(\alpha p)(x) - (\alpha p)(x_0) = \alpha p(x) - \alpha p(x_0) \ge f(x - x_0), \ x \in X;$$

$$p(x) - p(x_0) \ge \frac{1}{\alpha} f(x - x_0), \ x \in X; \ \frac{1}{\alpha} f \in \partial p(x_0); \ f \in \alpha \partial p(x_0).$$

Тому $\partial(\alpha p)(x_0) \subset \alpha \partial p(x_0)$.

Нехай тепер $f \in \alpha\partial p(x_0)$. Тоді $f = \alpha\varphi$, де $\varphi \in \partial p(x_0)$. Тому

$$f(x) - f(x_0) = \alpha\varphi(x) - \alpha\varphi(x_0) = \alpha(\varphi(x) - \varphi(x_0)) \le$$

$$\le \alpha(p(x) - p(x_0)) = (\alpha p)(x) - (\alpha p)(x_0), \ x \in X .$$

Тому $f \in \partial(\alpha p)(x_0)$. Отже, $\alpha\partial p(x_0) \subset \partial(\alpha p)(x_0)$. Вище було встановлене протилежне включення. Тому $\partial(\alpha p)(x_0) = \alpha\partial p(x_0)$.

Твердження доведено.

Теорема 9.2.2 (критерій точки глобального мінімуму функції). *Нехай* X *– лінійний топологічний простір,* $p : X \to \overline{R}$ *– власна функція, задана на* X. *Точка* $x_0 \in dom p$ *є точкою глобального мінімуму функції* p *на* X *тоді і тільки тоді, коли* $0 \in \partial p(x_0)$.

Доведення. ***Необхідність.*** Нехай $x_0 \in dom p$ і є точкою глобального мінімуму функції p на X, тобто $\min\limits_{x \in X} p(x) = p(x_0)$. Тоді $p(x) \ge p(x_0)$, $x \in X$. Звідси

$$p(x) - p(x_0) \ge 0 = 0(x - x_0), \ x \in X .$$

Тому 0-функціонал ($0(x) = 0$, $x \in X$) є субградієнтом функції p в точці x_0. Отже, $0 \in \partial p(x_0)$.

Необхідність доведено.

Достатність. Нехай тепер $0 \in \partial p(x_0)$. Тоді

$$p(x) - p(x_0) \ge 0(x - x_0) = 0, \ x \in X .$$

Звідси $p(x) \ge p(x_0)$, $x \in X$. Отже, x_0 є точкою глобального мінімуму функції p на X.

Достатність доведено.

Теорему доведено.

Розділ 10

ЗАДАЧА ОПУКЛОГО ПРОГРАМУВАННЯ. ТЕОРЕМИ КУНА-ТАККЕРА, МОРО-РОКАФЄЛЛАРА, ДУБОВІЦКОГО-МІЛЮТІНА, КАРУША-КУНА-ТАККЕРА

10.1. Постановка задачі опуклого програмування. Теорема Куна-Таккера

Нехай X – лінійний над полем дійсних чисел простір, $p_i : X \to \overline{R}$, $i = 0,1,..., m$, – опуклі функції, A – непорожня опукла множина простору X.

Задачу відшукання

$$\inf\, p_0(x) \tag{10.1}$$

за умов

$$p_i(x) \le 0,\ i = 1,..., m\ , \tag{10.2}$$

$$x \in A \tag{10.3}$$

називають задачею опуклого програмування.

Функцією Лагранжа задачі (10.1)-(10.3) називається функція

$$L(x; \lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_m) = L(x; \lambda) = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i p_i(x)\,, \tag{10.4}$$

де $x \in X$, $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_m) \in R^{m+1}$.

Числа λ_i, $i = 0,1,..., m$, називаються множниками Лагранжа, а вектор $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_m)$ – вектором множників Лагранжа.

Теорема 10.1.1 (теорема Куна-Таккера). *Нехай в задачі (10.1)-(10.3)* $p_i : X \to \overline{R}$, $i = 0,1,..., m$, *– опуклі власні функції,* A *– непорожня опукла множина, яка включається в множину* $\bigcap_{i=0}^{m} dom p_i$ *. Тоді:*

1. *Якщо* x^* *є оптимальним розв'язком задачі опуклого програмування (10.1)-(10.3), то знайдеться ненульовий вектор множників Лагранжа* $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_m)$*, такий, що виконуються:*

   а) принцип мінімуму: $\min_{x \in A} L(x; \lambda) = L(x^*; \lambda)$*, де* $L(x; \lambda)$ *– функція Лагранжа (10.4);*

   б) умови доповнюючої нежорсткості: $\lambda_i p_i(x^*) = 0,\ i = 1,..., m$ *;*

в) умови невід'ємності: $\lambda_i \geq 0,\ i = 0,1,...,m$.

2. *Якщо* $\lambda_0 \neq 0$*, то умови а)-в) достатні для того, щоб допустимий розв'язок* x^* *задачі опуклого програмування (10.1)-(10.3) був оптимальним розв'язком цієї задачі.*
3. *Нехай для допустимого вектора* x^* *задачі (10.1)-(10.3) та ненульового вектора* $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_m)$ *виконуються умови а), б), в) пункту 1 теореми. Для того щоб за цих умов* $\lambda_0 \neq 0$*, достатньо виконання умови Слейтера, тобто існування вектора* $\overline{x} \in A$*, для якого* $p_i(\overline{x}) < 0,\ i = 1,...,m$.

Доведення. Нехай x^* є оптимальним розв'язком задачі опуклого програмування (10.1)-(10.3). Оскільки $x^* \in A \subset \bigcap_{i=0}^{m} dom p_i$, то $p_i\left(x^*\right) \in R,\ i = 0,1,...,m$.

Розглянемо в просторі R^{m+1} множину B, елементами якої є ті і тільки ті вектори $(\mu_0, \mu_1, ..., \mu_m) \in R^{m+1}$, для кожного з яких знайдеться такий вектор $x \in A$, що

$$p_0(x) - p_0\left(x^*\right) < \mu_0;\ p_1(x) \leq \mu_1,\ \ldots,\ p_m(x) \leq \mu_m.$$

Нехай для вектора $(\mu_0, \mu_1, ..., \mu_m) \in R^{m+1}$: $\mu_0 > 0, \mu_1 > 0, ..., \mu_m > 0$ ($(\mu_0, \mu_1, ..., \mu_m) \in R_+^{m+1}$). Оскільки x^* є допустимим розв'язком задачі (10.1)-(10.3), то $x^* \in A$ та

$$p_0\left(x^*\right) - p_0\left(x^*\right) = 0 < \mu_0;\ p_1\left(x^*\right) \leq 0 < \mu_1,\ \ldots,\ p_m\left(x^*\right) \leq 0 < \mu_m.$$

Отже, будь-який вектор $(\mu_0, \mu_1, ..., \mu_m)$ із R_+^{m+1} належить B. Тому $B \supset R_+^{m+1}$ і, отже, $B \neq \varnothing$.

Доведемо, що B є опуклою множиною простору R^{m+1}. Нехай вектори $\mu^1 = \left(\mu_0{}^1, \mu_1{}^1, ..., \mu_m{}^1\right)$, $\mu^2 = \left(\mu_0{}^2, \mu_1{}^2, ..., \mu_m{}^2\right)$ належать B.

Переконаємося, що $\left[\mu^1, \mu^2\right] \subset B$. Оскільки $\mu^1, \mu^2 \in B$, то існують $x_1, x_2 \in A$ такі, що

$$p_0(x_1) - p_0\left(x^*\right) < \mu_0{}^1;\ p_1(x_1) \leq \mu_1{}^1,\ \ldots,\ p_m(x_1) \leq \mu_m{}^1, \quad (10.5)$$

$$p_0(x_2) - p_0\left(x^*\right) < \mu_0{}^2;\ p_1(x_2) \leq \mu_1{}^2,\ \ldots,\ p_m(x_2) \leq \mu_m{}^2. \quad (10.6)$$

Внаслідок того, що A є опуклою множиною, то $\left[x_1, x_2\right] \subset A$.

Нехай $\mu \in \left[\mu^1, \mu^2\right]$. Тоді існує $\alpha \in [0,1]$, що

$$\mu = \mu(\alpha) = (1-\alpha)\mu^1 + \alpha\mu^2 =$$

$$= \left((1-\alpha)\mu_0{}^1 + \alpha\mu_0{}^2, (1-\alpha)\mu_1{}^1 + \alpha\mu_1{}^2, \ldots, (1-\alpha)\mu_m{}^1 + \alpha\mu_m{}^2\right).$$

Маємо, що точка $x(\alpha) = (1-\alpha)x_1 + \alpha x_2 \in \left[x_1, x_2\right] \subset A$.

Для цієї точки і точки $\mu = \mu(\alpha) \in \left[\mu^1, \mu^2\right]$ внаслідок того, що p_i, $i = 0,1,\ldots,m$, є власними опуклими функціями і справедливі нерівності (10.5), (10.6), отримаємо такі співвідношення

$$p_0\left((1-\alpha)x_1 + \alpha x_2\right) - p_0\left(x^*\right) \le$$

$$\le (1-\alpha)p_0(x_1) + \alpha p_0(x_2) - (1-\alpha)p_0\left(x^*\right) - \alpha p_0\left(x^*\right) =$$

$$= (1-\alpha)\left(p_0(x_1) - p_0\left(x^*\right)\right) + \alpha\left(p_0(x_2) - p_0\left(x^*\right)\right) < (1-\alpha)\mu_0{}^1 + \alpha\mu_0{}^2;$$

$$p_1\left((1-\alpha)x_1 + \alpha x_2\right) \le (1-\alpha)p_1(x_1) + \alpha p_1(x_2) \le (1-\alpha)\mu_1{}^1 + \alpha\mu_1{}^2, \ldots,$$

$$p_m\left((1-\alpha)x_1 + \alpha x_2\right) \le (1-\alpha)p_m(x_1) + \alpha p_m(x_2) \le (1-\alpha)\mu_m{}^1 + \alpha\mu_m{}^2.$$

Звідси випливає, що $\mu \in B$. Оскільки точку μ вибрано довільно з $\left[\mu^1, \mu^2\right]$, то $\left[\mu^1, \mu^2\right] \subset B$. Це й означає, що B є непорожньою опуклою множиною простору R^{m+1}.

Позначимо через $C = \left\{y = (y_0, y_1, \ldots, y_m) : y_i < 0,\ i = 0,1,\ldots,m\right\}$. Переконаємося, що C є відкритою опуклою множиною простору R^{m+1}. Нехай $y^0 = \left(y_0{}^0, y_1{}^0, \ldots, y_m{}^0\right) \in C$. Тоді $y_i{}^0 < 0$, $i = 0,1,\ldots,m$. Позначимо через $\varepsilon = \min\limits_{i=\{0,1,\ldots,m\}}\left(-y_i{}^0\right)$. Зрозуміло, що $\varepsilon > 0$. Розглянемо окіл $O\left(y^0\right)$ точки y^0 радіуса ε, тобто

$$O\left(y^0\right) = \left\{y = (y_0, y_1, \ldots, y_m) \in R^{m+1} : \sqrt{\sum_{i=0}^{m}\left(y_i - y_i^0\right)^2} < \varepsilon\right\}.$$

Для всіх $y = (y_0, y_1, \ldots, y_m) \in O\left(y^0\right)$ та $i = \{0,1,\ldots,m\}$ маємо, що

$$\left|y_i - y_i^0\right| = \sqrt{\left(y_i - y_i^0\right)^2} \le \sqrt{\sum_{i=0}^{m}\left(y_i - y_i^0\right)^2} < \varepsilon \le -y_i^0.$$

Звідки $y_i - y_i^0 < -y_i^0$, $y_i < 0$, $i \in \{0,1,...,m\}$. Тому будь-яка точка $y \in O\left(y^0\right)$ належить C, отже, $O\left(y^0\right) \subset C$, якщо $y^0 \in C$. Тому C є відкритою множиною (див. теорему 1.2.1).

Переконаємося в опуклості множини C. Нехай $y^1 = \left(y_0{}^1, y_1{}^1, ..., y_m{}^1\right) \in C$, $y^2 = \left(y_0{}^2, y_1{}^2, ..., y_m{}^2\right) \in C$. Доведемо, що $\left[y^1, y^2\right] \subset C$. Для довільного $y = (y_0, y_1, ..., y_m) \in \left[y^1, y^2\right]$ існує $\alpha \in [0,1]$, що

$$y = (y_0, y_1, ..., y_m) = (1-\alpha)y^1 + \alpha y^2 =$$
$$= \left((1-\alpha)y_0{}^1 + \alpha y_0{}^2, (1-\alpha)y_1{}^1 + \alpha y_1{}^2, ..., (1-\alpha)y_m{}^1 + \alpha y_m{}^2\right).$$

Оскільки $y_i{}^1 < 0$, $y_i{}^2 < 0$, то $y_i = (1-\alpha)y_i^1 + \alpha y_i{}^2 < 0$, $i = 0,1,..., m$.

Звідси випливає, що $y \in C$. Внаслідок того, що y вибрано довільно з $\left[y^1, y^2\right]$, то $\left[y^1, y^2\right] \subset C$. Тому C є опуклою множиною. Переконаємося, що $B \cap C = \varnothing$. Припустимо, що $\mu = (\mu_0, \mu_1, ..., \mu_m) \in B \cap C$. Тоді $\mu_i < 0$, $i = 0,1,...,m$, та існує $x' \in A$, що $p_0(x') - p_0\left(x^*\right) < \mu_0 < 0$; $p_1(x') \le \mu_1 < 0$, …, $p_m(x') \le \mu_m < 0$.

Звідси випливає, що $x' \in A$ і $p_i(x') < 0$, $i = 1,..., m$. Тому x' є допустимим розв'язком задачі (10.1)-(10.3), для якого $p_0(x') < p_0\left(x^*\right)$, що суперечить оптимальності вектора x^* для задачі (10.1)-(10.3).

З урахуванням теореми про віддільність опуклих множин (див. теорему 6.2.2) існує гіперплощина

$$\left\{\gamma = (\gamma_0, \gamma_1, ..., \gamma_m) \in R^{m+1} : \lambda_0\gamma_0 + \lambda_1\gamma_1 + ... + \lambda_m\gamma_m = d\right\},$$

де фіксований вектор $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_m)$ є ненульовим, $d \in R$, така, що

$$\lambda_0 y_0 + \lambda_1 y_1 + ... + \lambda_m y_m < d \text{ для всіх } y = (y_0, y_1, ..., y_m) \in C, \quad (10.7)$$

$$\lambda_0\mu_0 + \lambda_1\mu_1 + ... + \lambda_m\mu_m \ge d \text{ для всіх } \mu = (\mu_0, \mu_1, ..., \mu_m) \in B. \quad (10.8)$$

Перейшовши в (10.7) до границі при $y_0 \to 0$, $y_1 \to 0$, …, $y_m \to 0$, $(y_0, y_1, ..., y_m) \in C$, одержимо, що $d \ge 0$.

Переконаємося, що $\lambda_i \ge 0$, $i = 0,1,...,m$.

Припустимо, що, наприклад, $\lambda_1 < 0$. Нехай $\overline{y}_0, \overline{y}_2, ..., \overline{y}_m$ – фіксовані від'ємні числа, а y_1 – довільне від'ємне число.

Тоді вектор $(\bar{y}_0, y_1, \bar{y}_2, ..., \bar{y}_m) \in C$ і тому

$$\lambda_0 \bar{y}_0 + \lambda_1 y_1 + \lambda_2 \bar{y}_2 + ... + \lambda_m \bar{y}_m < d \text{ для всіх } y_1 \in (-\infty, 0). \quad (10.9)$$

Оскільки $\lambda_1 < 0$, то

$$\lim_{\substack{y_1 \to -\infty, \\ y_1 < 0}} (\lambda_0 \bar{y}_0 + \lambda_1 y_1 + \lambda_2 \bar{y}_2 + ... + \lambda_m \bar{y}_m) = +\infty,$$

що суперечить співвідношенню (10.9).

Одержана суперечність доводить, що $\lambda_1 \ge 0$. Аналогічно доводиться, що $\lambda_0 \ge 0$, $\lambda_2 \ge 0$, …, $\lambda_m \ge 0$. Отже, вектор $(\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_m) \ne 0$ і $\lambda_i \ge 0$, $i = 0,1,..., m$. Умову відмінності від нуля вектора $(\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_m)$ та умову в) невід'ємності його координат встановлено.

Оскільки за умовою x^* є оптимальним розв'язком задачі (10.1)-(10.3), то $x^* \in A$ і

$$p_0(x^*) - p_0(x^*) = 0 < \mu_0, \text{ де } \mu_0 > 0, \ p_i(x^*) \le 0, \ i = 1, 2, ..., m.$$

Тому вектор $(\mu_0, 0, ..., 0)$, де μ_0 – довільне додатне число, належить множині B. Тоді згідно з (10.8)

$$\lambda_0 \mu_0 + \lambda_1 \cdot 0 + ... + \lambda_m \cdot 0 \ge d.$$

Перейшовши в цій нерівності до границі при $\mu_0 \to 0$, $\mu_0 > 0$, одержимо, що $d \le 0$. Вище було встановлено, що $d \ge 0$. Тому $d = 0$. Тоді співвідношення (10.8) запишеться у такому вигляді

$$\lambda_0 \mu_0 + \lambda_1 \mu_1 + ... + \lambda_m \mu_m \ge 0 \text{ для всіх } \mu = (\mu_0, \mu_1, ..., \mu_m) \in B. \quad (10.10)$$

Для векторів $x \in A$ і довільного $\beta > 0$ маємо, що

$$p_0(x) - p_0(x^*) < p_0(x) - p_0(x^*) + \beta, \ p_i(x) \le p_i(x), \ i = 1, 2, ..., m.$$

Тому вектор $\left(p_0(x) - p_0(x^*) + \beta, p_1(x), ..., p_m(x)\right) \in B$. З урахуванням (10.10) звідси одержимо, що

$$\lambda_0 \left(p_0(x) - p_0(x^*) + \beta\right) + \lambda_1 p_1(x) + ... + \lambda_m p_m(x) \ge 0 \quad (10.11)$$

для всіх $x \in A$.

Перейдемо в (10.11) до границі при $\beta \to 0$, $\beta > 0$. Тоді одержимо

$$\lambda_0 \left(p_0(x) - p_0(x^*)\right) + \lambda_1 p_1(x) + ... + \lambda_m p_m(x) \ge 0,$$

$$\lambda_0 p_0(x) + \lambda_1 p_1(x) + ... + \lambda_m p_m(x) \ge \lambda_0 p_0(x^*), \ x \in A. \quad (10.12)$$

При $x = x^*$ з (10.12) випливає, що

$$\lambda_1 p_1\left(x^*\right)+\ldots+\lambda_m p_m\left(x^*\right)\geq 0. \qquad (10.13)$$

Оскільки $\lambda_1 \geq 0$, $p_1\left(x^*\right)\leq 0$;…;$\lambda_m \geq 0$, $p_m\left(x^*\right)\leq 0$, то $\lambda_i p_i\left(x^*\right)\leq 0$, $i=1,2,\ldots,m$.

Звідси і з (10.13) одержимо, що $\lambda_i p_i\left(x^*\right)=0$, $i=1,2,\ldots,m$. Отже, умову б) доповнюючої нежорсткості встановлено.

З урахуванням цієї умови та співвідношення (10.12) одержимо, що

$$L(x;\lambda)=\sum_{i=0}^{m}\lambda_i p_i(x)\geq\sum_{i=0}^{m}\lambda_i p_i\left(x^*\right)=L\left(x^*;\lambda\right),\ x\in A,$$

тобто, що

$$\min_{x\in A} L(x;\lambda)=L\left(x^*;\lambda\right). \qquad (10.14)$$

Принцип мінімуму встановлено.

Справедливість пункту 1 теореми Куна-Таккера доведено повністю.

Перейдемо до доведення пункту 2. Нехай x^* є допустимим розв’язком задачі опуклого програмування (10.1)-(10.3), існує ненульовий вектор $\lambda=\left(\lambda_0,\lambda_1,\ldots,\lambda_m\right)$, для якого виконуються умови а), б), в) та $\lambda_0>0$. Доведемо, що x^* є оптимальним розв’язком задачі (10.1)-(10.3). Нехай x є довільним допустимим розв’язком задачі (10.1)-(10.3), тобто $x\in A$ і $p_i(x)\leq 0$, $i=\overline{1,m}$. Згідно з умовами а), б), в) одержимо, що

$$L\left(x^*;\lambda\right)=\lambda_0 p_0\left(x^*\right)\leq\lambda_0 p_0(x)+\lambda_1 p_1(x)+\ldots+\lambda_m p_m(x)=L(x;\lambda)\leq\lambda_0 p_0(x).$$

Оскільки $\lambda_0>0$, то звідси випливає, що $p_0(x)\geq p_0\left(x^*\right)$ для всіх допустимих розв’язків задачі (10.1)-(10.3). Це й означає, що x^* є оптимальним розв’язком цієї задачі.

Перейдемо до доведення пункту 3. Нехай $\overline{x}\in A$ і $p_i\left(\overline{x}\right)<0$, $i=\overline{1,m}$, (для обмежень (10.2), (10.3) виконується умова Слейтера). Припустимо, що для допустимого вектора x^* та ненульового вектора $\lambda=\left(\lambda_0,\lambda_1,\ldots,\lambda_m\right)$ виконуються умови а), б), в). Переконаємося, що $\lambda_0>0$. Припустимо, що $\lambda_0=0$. Оскільки серед чисел $\lambda_0\geq 0$, $\lambda_1\geq 0$, …, $\lambda_m\geq 0$ є хоча б одне відмінне від нуля (більше нуля) та $p_i\left(\overline{x}\right)<0$, $i=1,2,\ldots,m$, то тоді

$$L\left(\overline{x};\lambda\right)=\sum_{i=0}^{m}\lambda_i p_i\left(\overline{x}\right)=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i p_i\left(\overline{x}\right)<0=\lambda_0 p_0\left(x^*\right)=L\left(x^*;\lambda\right),$$

що суперечить умові а) (принципу мінімуму).

Одержана суперечність доводить, що $\lambda_0>0$.

Теорему доведено.

Розглянемо варіант теореми Куна-Таккера, що стосується задачі (10.1)-(10.3), для якої виконується умова Слейтера.

В цьому варіанті замість функції Лагранжа $L\left(x;\lambda\right)$ (див. (10.4)) фігуруватиме функція Лагранжа

$$F\left(x;\lambda_1,...,\lambda_m\right)=F\left(x;\lambda\right)=p_0\left(x\right)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i p_i\left(x\right),$$

$$x\in X,\ \lambda=\left(\lambda_1,...,\lambda_m\right)\in R^m. \qquad (10.15)$$

Теорема 10.1.2. *Нехай в задачі (10.1)-(10.3)* $p_i:X\to\overline{R}$, $i=0,1,...,m$ *, – опуклі власні функції,* A *– непорожня опукла множина, яка включається в множину* $\bigcap_{i=0}^{m} domp_i$ *, існує вектор* $\overline{x}\in A$*, для якого* $p_i\left(\overline{x}\right)<0,\ i=1,...,m$.

Для того щоб допустимий вектор x^* *задачі (10.1)-(10.3) був оптимальним розв'язком цієї задачі, необхідно і достатньо, щоб існував вектор* $\lambda=\left(\lambda_1,...,\lambda_m\right)\in R^m$ *такий, що виконуються:*

а$^{/}$) принцип мінімуму: $\min_{x\in A}F\left(x;\lambda\right)=F\left(x^*;\lambda\right)$*, де* $F\left(x;\lambda\right)$ *– функція Лагранжа (10.15);*

б$^{/}$) умови доповнюючої нежорсткості: $\lambda_i p_i\left(x^*\right)=0,\ i=1,...,m$

в$^{/}$) умови невід'ємності: $\lambda_i\geq 0,\ i=1,...,m$.

Доведення. ***Необхідність.*** Нехай x^* є оптимальним розв'язком задачі опуклого програмування (10.1)-(10.3). Згідно з пунктом 1 теореми 10.1.1 існує ненульовий вектор $\left(\lambda_0',\lambda_1',...,\lambda_m'\right)$ такий, що

$$\begin{aligned}&\lambda_0' p_0\left(x\right)+\lambda_1' p_1\left(x\right)+\cdots+\lambda_m' p_m\left(x\right)\geq\\&\geq\lambda_0' p_0\left(x^*\right)+\lambda_1' p_1\left(x^*\right)+\cdots+\lambda_m' p_m\left(x^*\right),\ x\in A;\end{aligned} \qquad (10.16)$$

$$\lambda_i' p_i\left(x^*\right)=0,\ i=1,...,m\ ; \qquad (10.17)$$

$$\lambda_i'\geq 0,\ i=0,1,...,m\ . \qquad (10.18)$$

Згідно з пунктом 3 теореми 10.1.1 $\lambda_0' > 0$. Покладемо $\lambda_1 = \frac{\lambda_1'}{\lambda_0'}$, $\lambda_2 = \frac{\lambda_2'}{\lambda_0'}$, …, $\lambda_m = \frac{\lambda_m'}{\lambda_0'}$. Тоді для вектора $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_m)$ з (10.16) випливає принцип мінімуму а$'$), з (10.17) – умови доповнюючої нежорсткості б$'$), з (10.18) – умови невід'ємності в$'$).

Необхідність доведено.

Достатність. Нехай тепер для допустимого вектора x^* задачі (10.1)-(10.3) та вектора $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_m) \in R^m$ виконуються умови а$'$)-в$'$).

Тоді для вектора x^*, ненульового вектора $(1, \lambda_1, ..., \lambda_m) = = (\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_m) \in R^{m+1}$ внаслідок а$'$)-в$'$) виконуються умови:

$$\min_{x \in A} L\left(x; \lambda_0 \ , \lambda_1, ..., \lambda_m\right) = L\left(x^*; \lambda_0 \ , \lambda_1, ..., \lambda_m\right);$$

$$\lambda_i \ p_i\left(x^*\right) = 0, \ i = 1, ..., m; \ \lambda_i \geq 0, \ i = 0, 1, ..., m.$$

Оскільки $\lambda_0 = 1$, то згідно з пунктом 2 теореми 10.1.1 x^* є оптимальним розв'язком задачі (10.1)-(10.3).

Достатність доведено.

Теорему доведено.

10.2. Теорема Моро-Рокафєллара

Теорема 10.2.1 (теорема Моро-Рокафєллара). *Нехай X – лінійний топологічний простір, p_i, $i = \overline{1, m}$, – власні опуклі функції, задані на X, $\bigcap_{i=1}^{m} dom p_i \neq \varnothing$. Тоді*

$$\sum_{i=1}^{m} \partial p_i(x) \subset \partial\left(\sum_{i=1}^{m} p_i\right)(x), \ x \in \bigcap_{i=1}^{m} dom p_i. \qquad (10.19)$$

Якщо ж всі функції p_i, $i = \overline{1, m}$, за винятком, можливо, однієї, неперервні в деякій точці $\overline{x} \in \bigcap_{i=1}^{m} dom p_i$, то справедлива рівність

$$\sum_{i=1}^{m} \partial p_i(x) = \partial\left(\sum_{i=1}^{m} p_i\right)(x), \ x \in \bigcap_{i=1}^{m} dom p_i. \qquad (10.20)$$

Доведення. Нехай $x \in \bigcap_{i=1}^{m} dom p_i$, $f_i \in \partial p_i(x)$, $i = \overline{1,m}$. Тоді

$$p_i(y) - p_i(x) \ge f_i(y - x),\ y \in X,\ i = \overline{1,m}.$$

Звідки випливає, що

$$\left(\sum_{i=1}^{m} p_i\right)(y) - \left(\sum_{i=1}^{m} p_i\right)(x) \ge \left(\sum_{i=1}^{m} f_i\right)(y - x),\ y \in X.$$

Тому $\sum_{i=1}^{m} f_i \in \partial\left(\sum_{i=1}^{m} p_i\right)(x)$. Оскільки f_i вибрані з $\partial p_i(x)$, $i = \overline{1,m}$, довільно, то (10.19) має місце.

Нехай $\bar{x} \in \bigcap_{i=1}^{m} dom p_i$ і функції p_i, $i = \overline{1,m-1}$, неперервні в $\bar{x}$.

Доведемо, що за цих умов має місце рівність (10.20). Нехай $x_0 \in \bigcap_{i=1}^{m} dom p_i$.

Згідно (10.19)

$$\partial\left(\sum_{i=1}^{m} p_i\right)(x_0) \supset \sum_{i=1}^{m} \partial p_i(x_0). \tag{10.21}$$

Переконаємося, що

$$\partial\left(\sum_{i=1}^{m} p_i\right)(x_0) \subset \sum_{i=1}^{m} \partial p_i(x_0). \tag{10.22}$$

Для цього переконаємося, що довільний функціонал $f^* \in \partial\left(\sum_{i=1}^{m} p_i\right)(x_0)$ належить $\sum_{i=1}^{m} \partial p_i(x_0)$. Спочатку розглянемо випадок, коли $m = 2$, $x_0 = 0$, $p_1(0) = p_2(0) = 0$, $f^* = 0 \in \partial(p_1 + p_2)(0)$.

Доведемо, що в цьому випадку

$$f^* = 0 \in \partial p_1(0) + \partial p_2(0). \tag{10.23}$$

Оскільки $0 \in \partial(p_1 + p_2)(0)$, то

$$(p_1 + p_2)(x) - (p_1 + p_2)(0) = p_1(x) + p_2(x) \ge 0(x - 0) = 0,\ x \in X.$$

Звідси випливає, що

$$\min_{x \in X}\left(p_1(x) + p_2(x)\right) = p_1(0) + p_2(0) = 0. \tag{10.24}$$

Розглянемо в лінійному топологічному просторі $X \times R$ дві множини:

$$C_1 = \{(x,\alpha) \in X \times R : x \in \operatorname{int}(domp_1),\, p_1(x) < \alpha\},$$
$$C_2 = \{(y,\beta) \in X \times R : p_2(y) \le -\beta\}.$$

Оскільки за припущенням функція p_1 є неперервною в точці $\overline{x} \in domp_1$, то для довільного $\varepsilon > 0$ існує окіл $O(\overline{x})$ точки $\overline{x}$ в лінійному топологічному просторі X такий, що $\left|p_1(z) - p_1(\overline{x})\right| < \varepsilon$ для всіх $z \in O(\overline{x})$. Звідси випливає, що $p_1(z) < p_1(\overline{x}) + \varepsilon \in R$, $z \in O(\overline{x})$. Це й означає, що $O(\overline{x}) \subset domp_1$. Отже, $\overline{x} \in \operatorname{int}(domp_1)$. Тому $(\overline{x},\alpha) \in C_1$ для будь-яких $\alpha > p_1(\overline{x})$. Звідси випливає, що C_1 є непорожньою множиною.

За припущенням $\overline{x} \in domp_2$. Тому $p_2(\overline{x}) \in R$. Оскільки $p_2(\overline{x}) = -(-p_2(\overline{x}))$, то $(\overline{x}, -p_2(\overline{x})) \in C_2$.

Тому C_2 також є непорожньою множиною простору $X \times R$.

Переконаємося, що $C_1 = \operatorname{int}(epip_1)$. Нехай $(x,\alpha) \in C_1$. Тоді $x \in \operatorname{int}(domp_1)$ і $p_1(x) < \alpha$.

Виберемо $\varepsilon > 0$ так, що $p_1(x) < \alpha - \varepsilon < \alpha$. Оскільки за умовою p_1 є опуклою і неперервною в точці $\overline{x} \in \operatorname{int}(domp_1)$, то згідно з теоремою 7.3.2 вона є неперервною на $\operatorname{int}(domp_1)$. Оскільки $x \in \operatorname{int}(domp_1)$ та $p_1(x) < \alpha - \varepsilon$, то існує окіл $O(x)$ точки x простору X такий, що $O(x) \subset \operatorname{int}(domp_1)$, $p_1(z) < \alpha - \varepsilon$ для довільних $z \in O(x)$.

З урахуванням цього для будь-якої точки $(z,\beta) \in O(x) \times O(\alpha)$, де $O(\alpha) = (\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon)$, матимемо, що $z \in O(x) \subset \operatorname{int}(domp_1)$ і $p_1(z) < \alpha - \varepsilon < \beta$.

Це означає, що $(z,\beta) \in C_1$. Тому й $O(x) \times O(\alpha) \subset C_1$, якщо $(x,\alpha) \in C_1$. Звідси випливає, що C_1 є відкритою множиною.

Маємо, що
$$C_1 = \{(x,\alpha) \in X \times R : p_1(x) < \alpha,\, x \in \operatorname{int}(domp_1)\} \subset$$
$$\subset \{(x,\alpha) \in X \times R : p_1(x) \le \alpha\} = epip_1. \qquad (10.25)$$

Оскільки C_1 є відкритою множиною простору $X \times R$ і має місце співвідношення (10.25), то

$$C_1 \subset \operatorname{int}(epip_1). \tag{10.26}$$

Нехай тепер $(x,\alpha) \in \operatorname{int}(epip_1)$. Тоді існують окіл $O(x)$ точки x в просторі X та окіл $O(\alpha) = (\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon)$, де $\varepsilon > 0$, точки α простору R такі, що $O(x) \times O(\alpha) \subset epip_1$.

Звідси, зокрема, випливає, що

$$p_1(y) \le \alpha - \varepsilon, \; y \in O(x).$$

Тоді $O(x) \subset domp_1$. Тому $x \in \operatorname{int}(domp_1)$ і $p_1(x) \le \alpha - \varepsilon < \alpha$. З цих двох співвідношень випливає, що $(x,\alpha) \in C_1$.

Оскільки точку (x,α) вибрано довільно з $\operatorname{int}(epip_1)$, то

$$\operatorname{int}(epip_1) \subset C_1. \tag{10.27}$$

З (10.26), (10.27) робимо висновок, що $C_1 = \operatorname{int}(epip_1)$.

Оскільки p_1 є опуклою функцією, то за означенням опуклої функції $epip_1$ є опуклою множиною простору $X \times R$.

Згідно з теоремами 1.2.2 та 4.3.3 тоді $\operatorname{int}(epip_1)$ є відкритою та опуклою множиною простору $X \times R$.

Тому C_1 – непорожня відкрита опукла множина лінійного топологічного простору $X \times R$.

Переконаємося, що C_2 є опуклою множиною простору $X \times R$. Нехай $(x_1,\alpha_1) \in C_2$, $(x_2,\alpha_2) \in C_2$. Доведемо, що $[(x_1,\alpha_1),(x_2,\alpha_2)] \subset C_2$. Для цього переконаємося, що для будь-якого $t \in [0,1]$ точки

$$(1-t)(x_1,\alpha_1) + t(x_2,\alpha_2) = ((1-t)x_1 + tx_2, (1-t)\alpha_1 + t\alpha_2) \in C_2,$$

тобто, що

$$p_2((1-t)x_1 + tx_2) \le -((1-t)\alpha_1 + t\alpha_2).$$

Оскільки $(x_1,\alpha_1) \in C_2$, $(x_2,\alpha_2) \in C_2$, то $p_2(x_1) \le -\alpha_1$, $p_2(x_2) \le -\alpha_2$.

З останніх нерівностей випливає, що $(x_1,-\alpha_1) \in epip_2$, $(x_2,-\alpha_2) \in epip_2$.

Оскільки за умовою p_2 є опуклою функцією, то $epip_2$ є опуклою множиною простору $X \times R$. Тому

$$(1-t)(x_1,-\alpha_1) + t(x_2,-\alpha_2) = ((1-t)x_1 + tx_2, -((1-t)\alpha_1 + t\alpha_2)) \in epip_2.$$

Це означає, що $p_2((1-t)x_1 + tx_2) \le -((1-t)\alpha_1 + t\alpha_2)$.

Звідси випливає, що $\left((1-t)x_1+tx_2,(1-t)\alpha_1+t\alpha_2\right)\in C_2$.

Отже, $\left[(x_1,\alpha_1),(x_2,\alpha_2)\right]\subset C_2$. Це й означає, що C_2 є опуклою множиною лінійного топологічного простору $X\times R$. Отже, встановлено, що C_2 є непорожньою опуклою множиною простору $X\times R$.

Переконаємося, що $C_1\cap C_2=\varnothing$. Дійсно, якщо $(y,\beta)\in C_1\cap C_2$, то одержимо, що $p_1(y)<\beta$, $p_2(y)\le-\beta$. Звідки $p_1(y)+p_2(y)<0$, що суперечить (10.24).

Оскільки C_1 є непорожньою опуклою та відкритою множиною простору $X\times R$, а C_2 є непорожньою опуклою множиною цього простору і $C_1\cap C_2=\varnothing$, то згідно з теоремою 6.2.2 про віддільність двох опуклих множин існують пара $\left(f^*,\mu^*\right)\in X^*\times R$ і число c такі, що $\left(f^*,\mu^*\right)\ne(0,0)$,

$$f^*(x)+\mu^*\alpha<c,\ (x,\alpha)\in C_1, \tag{10.28}$$

$$f^*(y)+\mu^*\beta\ge c,\ (y,\beta)\in C_2. \tag{10.29}$$

Переконаємося, що $\mu^*\le0$. Припустимо, що $\mu^*>0$. Нехай $(x',\alpha')\in C_1$. Тоді $x'\in\operatorname{int} dom p_1$ та $p_1(x')<\alpha'$. Звідси випливає, що $(x',\alpha)\in C_1$ для всіх $\alpha\ge\alpha'$. Згідно з (10.28), тоді

$$f^*(x')+\mu^*\alpha<c \text{ для всіх } \alpha\ge\alpha'. \tag{10.30}$$

Якщо взяти число $\alpha\ge\alpha'$ і $\alpha\ge\dfrac{1}{\mu^*}\left(c-f^*(x')\right)$, то з (10.30) одержимо

$$c>f^*(x')+\mu^*\alpha\ge f^*(x')+c-f^*(x')=c,$$

що неможливо. Отже, $\mu^*\le0$. Якщо припустити, що $\mu^*=0$, то для точки $\left(\bar{x},p_1(\bar{x})+\varepsilon\right)$, де $\varepsilon>0$, яка належить C_1, з урахуванням (10.28) одержимо, що $f^*(\bar{x})<c$, а для точки $\left(\bar{x},-p_2(\bar{x})\right)\in C_2$ з урахуванням (10.29) одержимо, що $f^*(\bar{x})\ge c$, що неможливо. Отже, $\mu^*<0$.

Тепер розділимо обидві частини співвідношень (10.28), (10.29) на $-\mu^*$. В результаті одержимо, що

$$\left(-\frac{f^*}{\mu^*}\right)(x)-\alpha<-\frac{c}{\mu^*},\ (x,\alpha)\in C_1,$$

$$\left(-\frac{f^*}{\mu^*}\right)(y)-\beta \ge -\frac{c}{\mu^*}, \ (y,\beta)\in C_2 .$$

Позначивши через $\overline{f} = -\frac{f^*}{\mu^*}$, $\overline{c} = -\frac{c}{\mu^*}$, одержимо, що

$$\overline{f}(x)-\alpha<\overline{c}, \ (x,\alpha)\in C_1, \tag{10.31}$$

$$\overline{f}(y)-\beta\ge\overline{c}, \ (y,\beta)\in C_2 . \tag{10.32}$$

Нехай $x\in domp_1$. Тоді $p_1(x)\in R$ та

$$(x, p_1(x))\in epip_1\subset\overline{epip_1}=\overline{\operatorname{int}(epip_1)}=\overline{C_1} .$$

Оскільки C_1 є непорожньою відкритою та опуклою множиною, то для точки $(z,\gamma)\in C_1=\operatorname{int}C_1$ та для всіх $t\in[0,1)$ маємо, що

$$(1-t)(z,\gamma)+t(x,p_1(x))=((1-t)z+tx,(1-t)\gamma+tp_1(x))\in\operatorname{int}C_1=C_1 .$$

Згідно з (10.31) тоді отримаємо, що

$$(1-t)\,\overline{f}(z)+t\overline{f}(x)-((1-t)\gamma+tp_1(x))<\overline{c}, \ t\in[0,1) .$$

Перейшовши в цьому співвідношенні до границі при $t\to1$, $t<1$, одержимо, що

$$\overline{f}(x)-p_1(x)\le\overline{c} \text{ для всіх } x\in domp_1 . \tag{10.33}$$

Нехай тепер $y\in domp_2$. Тоді $(y,-p_2(y))\in C_2$, оскільки $p_2(y)\le-(-p_2(y))$. Внаслідок (10.32) отримаємо, що

$$\overline{c}\le\overline{f}(y)+p_2(y) \text{ для всіх } y\in domp_2 . \tag{10.34}$$

Оскільки $0\in domp_1\cap domp_2$ і $p_1(0)=p_2(0)=0$, то згідно з (10.33), (10.34) одержимо, що

$$\overline{f}(0)-p_1(0)=0\le\overline{c}\le\overline{f}(0)+p_2(0)=0 .$$

Звідси випливає, що $\overline{c}=0$. Тоді, врахувавши, що $p_1(x)=+\infty$ для $x\notin domp_1$, $p_2(y)=+\infty$ для $y\notin domp_2$, з (10.33) та (10.34) одержимо, що $\overline{f}(x)\le p_1(x)$, $x\in X$, $-\overline{f}(y)\le p_2(y)$, $y\in X$.

Оскільки за умовою $p_1(0)=p_2(0)=0$, то з цих співвідношень одержимо

$$p_1(x)-p_1(0)\ge\overline{f}(x)-\overline{f}(0), \ x\in X ,$$

$$p_2(y)-p_2(0)\ge(-\overline{f})(y)-(-\overline{f})(0), \ y\in X .$$

Це означає, що $\overline{f} \in \partial p_1(0)$, $-\overline{f} \in \partial p_2(0)$.

А тому $0 = \overline{f} + \left(-\overline{f}\right) \in \partial p_1(0) + \partial p_2(0)$.

Отже, ми встановили, що коли $m = 2$, $x_0 = 0$, $p_1(0) = p_2(0) = 0$, $f^* = 0 \in \partial\left(p_1 + p_2\right)(0)$, то тоді $0 \in \partial p_1(0) + \partial p_2(0)$, тобто має місце співвідношення (10.23).

Нехай тепер $m = 2$, $x_0 \in domp_1 \cap domp_2$, $f^* \in \partial\left(p_1 + p_2\right)(x_0)$. Доведемо, що

$$f^* \in \partial p_1(x_0) + \partial p_2(x_0). \tag{10.35}$$

Для цього розглянемо функції

$$g_1(y) = p_1(x_0 + y) - p_1(x_0) - f^*(y),\ y \in X,$$

$$g_2(y) = p_2(x_0 + y) - p_2(x_0),\ y \in X.$$

Згідно з твердженням 7.1.1 функції g_1, g_2 є власними опуклими функціями, заданими на X. Переконаємося, що функція g_1 є неперервною у точці $\overline{y} = \overline{x} - x_0$. Дійсно, оскільки функція p_1 за умовою є неперервною в точці $\overline{x}$, а $f^* \in X^*$, то для довільного $\varepsilon > 0$ існує окіл $O(\overline{x}) = \overline{x} + O(0)$ точки $\overline{x}$, де $O(0)$ деякий окіл точки $0 \in X$, такий, що

$$\left|p_1(x) - p_1(\overline{x})\right| < \frac{\varepsilon}{2},\ \left|f^*(x) - f^*(\overline{x})\right| < \frac{\varepsilon}{2},\ x \in O(\overline{x}) = \overline{x} + O(0). \tag{10.36}$$

Розглянемо окіл $O(\overline{y}) = \overline{y} + O(0) = \overline{x} - x_0 + O(0)$.

Для будь-якої точки $y \in O(\overline{y})$ матимемо, що $y \in O(\overline{y}) = \overline{x} - x_0 + O(0)$, $x_0 + y \in \overline{x} + O(0) = O(\overline{x})$.

Внаслідок цього та (10.36) одержимо, що

$$\left|p_1(x_0 + y) - p_1(\overline{x})\right| < \frac{\varepsilon}{2},\ \left|f^*(x_0 + y) - f^*(\overline{x})\right| < \frac{\varepsilon}{2},\ y \in O(\overline{y}). \tag{10.37}$$

З урахуванням (10.37) матимемо

$$\left|g_1(y) - g_1(\overline{y})\right| = \Big|p_1(x_0 + y) - p_1(x_0) -$$

$$- f^*(y) - p_1(x_0 + \overline{y}) + p_1(x_0) + f^*(\overline{y})\Big| \le$$

$$\le \left|p_1(x_0 + y) - p_1(\overline{x})\right| + \left|f^*(x_0 + y) - f^*(\overline{x})\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,\ y \in O(\overline{y}).$$

Звідси й випливає, що функція g_1 є неперервною у точці $\overline{y} \in domg_1$. Маємо, крім того, що $\overline{y} \in domg_2$, оскільки

$$g_2(\bar{y}) = p_2(x_0 + \bar{x} - x_0) - p_2(x_0) = p_2(\bar{x}) - p_2(x_0)$$

та $\bar{x} \in domp_2$, $x_0 \in domp_2$.

Справедливі рівності

$$g_1(0) = p_1(x_0 + 0) - p_1(x_0) - f^*(0) = 0,$$

$$g_2(0) = p_2(x_0 + 0) - p_2(x_0) = 0.$$

Переконаємося, що $0 \in \partial(g_1 + g_2)(0)$. Дійсно, оскільки $f^* \in \partial(p_1 + p_2)(x_0)$, то для всіх $y \in X$

$$(g_1 + g_2)(y) - (g_1 + g_2)(0) = p_1(x_0 + y) - p_1(x_0) -$$
$$- f^*(y) + p_2(x_0 + y) - p_2(x_0) =$$
$$= p_1(x_0 + y) + p_2(x_0 + y) - (p_1(x_0) + p_2(x_0)) - f^*(y) \ge$$
$$\ge f^*(x_0 + y) - f^*(x_0) - f^*(y) = 0.$$

Тому

$$(g_1 + g_2)(y) - (g_1 + g_2)(0) \ge 0(y - 0) \text{ для всіх } y \in X.$$

Це й означає, що $0 \in \partial(g_1 + g_2)(0)$. За доведеним вище $0 \in \partial g_1(0) + \partial g_2(0)$. Тобто існують функціонали $f_1 \in \partial g_1(0)$, $f_2 \in \partial g_2(0)$ такі, що

$$f_1 + f_2 = 0. \qquad (10.38)$$

Оскільки $f_1 \in \partial g_1(0)$, то

$$g_1(y) - g_1(0) = p_1(x_0 + y) - p_1(x_0) - f^*(y) \ge f_1(y),\ y \in X,$$

$$p_1(x_0 + y) - p_1(x_0) \ge (f^* + f_1)(x_0 + y) - (f^* + f_1)(x_0),\ y \in X. \qquad (10.39)$$

Для кожного $x \in X$ покладемо $y = x - x_0$. Тоді згідно з (10.39) отримуємо

$$p_1(x_0 + x - x_0) - p_1(x_0) = p_1(x) - p_1(x_0) \ge (f^* + f_1)(x) - (f^* + f_1)(x_0),$$
$$x \in X.$$

Звідси випливає, що $f^* + f_1 \in \partial p_1(x_0)$.

Оскільки $f_2 \in \partial g_2(0)$, то

$$g_2(y) - g_2(0) = g_2(y) = p_2(x_0 + y) - p_2(x_0) \ge f_2(y),\ y \in X. \qquad (10.40)$$

Для кожного $x \in X$ покладемо $y = x - x_0$. Тоді згідно з (10.40)

$$p_2(x) - p_2(x_0) \ge f_2(x - x_0),\ x \in X. \qquad (10.41)$$

Зі співвідношень (10.41) випливає, що $f_2 \in \partial p_2(x_0)$. З урахуванням (10.38) отримаємо, що

$$f^* = f^* + (f_1 + f_2) = \left(f^* + f_1\right) + f_2,$$

де $f^* + f_1 \in \partial p_1(x_0)$, а $f_2 \in \partial p_2(x_0)$.

Тому (10.35) має місце. Оскільки f^* вибрано довільно з $\partial(p_1 + p_2)(x_0)$, то $\partial(p_1 + p_2)(x_0) \subset \partial p_1(x_0) + \partial p_2(x_0)$.

Отже, співвідношення (10.22) доведено для $m = 2$. Припустимо, що (10.22) справедлива для натурального числа $k \geq 2$. Тобто, що

$$\partial(p_1 + p_2 + \ldots + p_k)(x_0) \subset \partial p_1(x_0) + \partial p_2(x_0) + \ldots + \partial p_k(x_0).$$

Переконаємося, що це твердження справедливе для натурального числа $k+1$. Дійсно, маємо

$$\partial(p_1 + p_2 + \ldots + p_k + p_{k+1})(x_0) = \partial\left((p_1 + p_2 + \ldots + p_k) + p_{k+1}\right)(x_0) \subset$$

$$\subset \partial(p_1 + p_2 + \ldots + p_k)(x_0) + \partial p_{k+1}(x_0) \subset$$

$$\subset \partial p_1(x_0) + \partial p_2(x_0) + \ldots + \partial p_k(x_0) + \partial p_{k+1}(x_0).$$

Згідно з принципом математичної індукції робимо висновок, що дане твердження вірне для будь-якого натурального числа m, тобто справедливе включення (10.22). Зі співвідношень (10.21) та (10.22) випливає справедливість рівності

$$\partial\left(\sum_{i=1}^{m} p_i\right)(x_0) = \sum_{i=1}^{m} \partial p_i(x_0). \tag{10.42}$$

Оскільки для довільного $x_0 \in \bigcap_{i=1}^{m} domp_i$ має місце рівність (10.42), то звідси випливає, що за умови теореми справедлива рівність (10.20).

Теорему доведено.

10.3. Теорема Дубовіцкого-Мілютіна про субдиференціал максимуму кількох опуклих функцій

Лема 10.3.1. *Нехай X – лінійний топологічний простір, p – власна опукла функція, задана на X, $x_0 \in domp$, $f^* \in X^*$ і нерівність*

$$g(x) = p(x) - p(x_0) - f^*(x - x_0) \geq 0 \tag{10.43}$$

виконується для всіх x деякої відкритої опуклої множини V, причому $g(\overline{x}) = 0$ для деякої точки $\overline{x} \in V$. Тоді $f^* \in \partial p(x_0)$.

Доведення. Переконаємося, що нерівність (10.43) має місце для всіх $x \in X$. Функція g є власною опуклою функцією на X , як сума власної опуклої функції p та афінної функції $-p(x_0)-f^*(x-x_0)$, заданої на X .

Припустимо, що $g(x')<0$ для деякого $x' \in X$. Тоді для $\overline{x}$ та будь-якого $\alpha \in (0,1)$

$$g\left((1-\alpha)\overline{x}+\alpha x'\right) \le (1-\alpha)g(\overline{x})+\alpha g(x')<0 . \qquad (10.44)$$

Оскільки $\overline{x} \in V$ і V є відкритою множиною, то V є відкритим околом точки $\overline{x}$. Як відомо (див. теорему 3.2.3) існує $\delta > 0$ таке, що $\overline{x}+\alpha(x'-\overline{x}) \in V$ для всіх $\alpha \in [0,\delta)$. Виберемо $\alpha \in (0,1)\cap[0,\delta)$. Тоді для цього α точка $\overline{x}+\alpha(x'-\overline{x})=(1-\alpha)\overline{x}+\alpha x' \in V$ і згідно (10.44) $g\left((1-\alpha)\overline{x}+\alpha x'\right)<0$, що суперечить умові леми про те, що $g(x) \ge 0$ для всіх $x \in V$. Звідси випливає, що нерівність (10.43) має місце для всіх $x \in X$.

З цієї нерівності випливає, що

$$p(x)-p(x_0) \ge f^*(x-x_0), \; x \in X .$$

Це й означає, що $f^* \in \partial p(x_0)$.

Лему доведено.

Теорема 10.3.1 (теорема Дубовіцкого-Мілютіна про субдиференціал максимуму кількох опуклих функцій). *Нехай* X *– локально опуклий лінійний топологічний простір,* p_i , $i=\overline{1,m}$, *– власні опуклі функції, задані на* X *, які неперервні в точці* $x_0 \in X$ *;* $p(x)=\max\limits_{1\le i\le m} p_i(x)$, $x \in X$ *;*

$$I=\left\{i \in \{1,\dots,m\} : p_i(x_0)=\max_{1\le i\le m} p_i(x_0)=p(x_0)\right\}=\{i_1,\dots,i_s\} .$$

Тоді

$$\partial p(x_0)=co\bigcup_{i\in I}\partial p_i(x_0)=co\left(\partial p_{i_1}(x_0)\cup\ldots\cup\partial p_{i_s}(x_0)\right)=$$

$$=\left\{f : f=\sum_{k=1}^{s}\alpha_k f_k, \, f_k \in \partial p_{i_k}(x_0); \alpha_k \ge 0, k=\overline{1,s}, \sum_{k=1}^{s}\alpha_k=1\right\}. \quad (10.45)$$

Доведення. Якщо $i \in I$ та $f \in \partial p_i(x_0)$, то

$$p(x)-p(x_0)=p(x)-p_i(x_0)=\max_{1\le i\le m} p_i(x)-p_i(x_0) \ge$$

$$\ge p_i(x)-p_i(x_0) \ge f(x-x_0), \; x \in X .$$

Звідси випливає, що $f \in \partial p(x_0)$. Тому $\partial p_i(x_0) \subset \partial p(x_0)$, $i \in I$; $\bigcup\limits_{i\in I} \partial p_i(x_0) \subset \partial p(x_0)$ та

$$co\bigcup_{i\in I} \partial p_i(x_0) \subset \partial p(x_0), \tag{10.46}$$

оскільки $\partial p(x_0)$ є опуклою множиною простору X^* (див. твердження 4.4.3 та теорему 9.2.1).

Переконаємося, що

$$\partial p(x_0) \subset co\bigcup_{i\in I} \partial p_i(x_0). \tag{10.47}$$

Нехай $f^* \in \partial p(x_0)$.

Розглянемо спочатку випадок, коли $I = \{i_1\}$, тобто, коли I є одноелементною множиною, і, отже,

$$\max_{\substack{i\in\{1,\dots,m\},\\ i\neq i_1}} p_i(x_0) < p_{i_1}(x_0) = p(x_0).$$

Нехай $h(x) = \max\limits_{\substack{i\in\{1,\dots,m\},\\ i\neq i_1}} p_i(x)$. Згідно з попереднім співвідношенням для власної опуклої і неперервної в точці x_0 функції $h(x)$ маємо, що $h(x_0) < p_{i_1}(x_0) = p(x_0)$, $h(x_0) - p_{i_1}(x_0) < 0$. Внаслідок неперервності функцій $h(x)$, $p_{i_1}(x)$, $x \in X$, в точці x_0, локальної опуклості простору X існує відкритий опуклий окіл $V(x_0)$ точки x_0 такий, що $h(x) - p_{i_1}(x) < 0$, $x \in V(x_0)$; $h(x) < p_{i_1}(x)$, $x \in V(x_0)$. Звідси випливає, що для всіх $x \in V(x_0)$ $\max\limits_{i\in\{1,\dots,m\}} p_i(x) = p(x) = p_{i_1}(x)$.

Оскільки $f^* \in \partial p(x_0)$, то

$$p(x) - p(x_0) \geq f^*(x - x_0),\ x \in X.$$

З урахуванням зазначеного вище звідси одержимо, що

$$p_{i_1}(x) - p_{i_1}(x_0) \geq f^*(x - x_0),\ x \in V(x_0);$$

$$g(x) = p_{i_1}(x) - p_{i_1}(x_0) - f^*(x - x_0) \geq 0,\ x \in V(x_0),$$

причому $g(x_0) = 0$ та $x_0 \in V(x_0)$.

Згідно з лемою 10.3.1 $f^* \in \partial p_{i_1}(x_0)$. Отже, якщо $I = \{i_1\}$, то $\partial p(x_0) \subset \partial p_{i_1}(x_0) = co\partial p_{i_1}(x_0)$, оскільки $\partial p_{i_1}(x_0)$ є опуклою множиною. Згідно з (10.46) $co\partial p_{i_1}(x_0) = \partial p_{i_1}(x_0) \subset \partial p(x_0)$. Тому в цьому випадку $\partial p(x_0) = \partial p_{i_1}(x_0) = co\partial p_{i_1}(x_0)$, що й потрібно було встановити. Отже, коли I є одноелементною множиною, то рівність (10.45) має місце.

Співвідношення (10.47) будемо доводити далі індуктивно по кількості функцій. При $m=1$ $p(x) = p_1(x)$, $x \in X$. Тому $I = \{1\}$, $\partial p(x_0) = \partial p_1(x_0) = co\partial p_1(x_0)$, оскільки $\partial p_1(x_0)$ є опуклою множиною. Отже, при $m=1$ (10.47) має місце.

Припустимо, що співвідношення (10.47) має місце для $m-1$ функції. Переконаємося, що воно має місце і для m функцій, де $m>1$ та множина I не є одноелементною.

Припустимо, що x_0 не є оптимальним розв'язком такої задачі опуклого програмування

$$\min g_{i_1}(x) = p_{i_1}(x) - p(x_0) - f^*(x - x_0) \tag{10.48}$$

при обмеженнях

$$g_i(x) = p_i(x) - p(x_0) - f^*(x - x_0) \le 0,\ i \in \{1,\dots,m\},\ i \ne i_1. \tag{10.49}$$

Тоді існує точка $\bar{y} \in X$, що

$$g_{i_1}(\bar{y}) < g_{i_1}(x_0) = p_{i_1}(x_0) - p(x_0) = p_{i_1}(x_0) - p_{i_1}(x_0) = 0,\ g_i(\bar{y}) \le 0,$$
$$i \in \{1,\dots,m\},\ i \ne i_1.$$

Оскільки g_{i_1} є неперервною функцією в точці x_0 (p_{i_1} є неперервною в точці x_0 за умовою, а $f^* \in X^*$), то $x_0 \in \operatorname{int} domg_{i_1}$. Оскільки $g_{i_1}(\bar{y}) < 0$, то $\bar{y} \in domg_{i_1}$. За теоремою 4.3.2

$$[x_0, \bar{y}) \subset \operatorname{int} domg_{i_1}. \tag{10.50}$$

З урахуванням того, що g_{i_1} є опуклою власною функцією, маємо, що

$$g_{i_1}((1-\alpha)x_0 + \alpha\bar{y}) \le (1-\alpha)g_{i_1}(x_0) + \alpha g_{i_1}(\bar{y}),\ \alpha \in [0,1].$$

Оскільки $g_{i_1}(x_0) = 0$, а $g_{i_1}(\bar{y}) < 0$, то

$$g_{i_1}((1-\alpha)x_0 + \alpha\bar{y}) \le \alpha g_{i_1}(\bar{y}) < 0 \text{ для всіх } \alpha \in (0,1]. \tag{10.51}$$

Виберемо $\bar{\alpha} \in (0,1)$. Внаслідок (10.50), (10.51) матимемо, що $\bar{x} = (1-\bar{\alpha})x_0 + \bar{\alpha}\bar{y} \in \operatorname{int} domg_{i_1}$ і $g_{i_1}(\bar{x}) < 0$. Оскільки g_{i_1} є неперервною в точці x_0, то згідно з теоремою 7.3.2 g_{i_1} є неперервною на

$\operatorname{int} dom g_{i_1}$, в тому числі й у точці $\bar{x}$. Оскільки X є локально опуклим лінійним топологічним простором, то існує відкритий опуклий окіл $V(\bar{x})$ точки $\bar{x}$ такий, що $g_{i_1}(x) < 0$ для всіх $x \in V(\bar{x})$, тобто

$$p_{i_1}(x) - p(x_0) < f^*(x - x_0), \; x \in V(\bar{x}). \qquad (10.52)$$

Оскільки функції g_i, $i \in \{1, \dots, m\}$, $i \neq i_1$, є власними опуклими функціями та $g_i(\bar{y}) \leq 0$,

$$g_i(x_0) = p_i(x_0) - p(x_0) \leq \max_{i \in \{1,\dots,m\}} p_i(x_0) - p(x_0) = p(x_0) - p(x_0) = 0,$$

$$i \in \{1, \dots, m\}, \; i \neq i_1,$$

то

$$g_i(\bar{x}) = g_i((1-\bar{\alpha})x_0 + \bar{\alpha}\bar{y}) \leq (1-\bar{\alpha}) g_i(x_0) + \bar{\alpha} g_i(\bar{y}) \leq$$
$$\leq (1-\bar{\alpha}) \cdot 0 + \bar{\alpha} \cdot 0 = 0, i \in \{1, \dots, m\}, \; i \neq i_1. \qquad (10.53)$$

Оскільки $f^* \in \partial p(x_0)$, то

$$p(x) - p(x_0) = \max_{i \in \{1,\dots,m\}} p_i(x) - p(x_0) \geq f^*(x - x_0), \; x \in X. \qquad (10.54)$$

Нехай $x \in V(\bar{x})$ і $\max\limits_{i \in \{1,\dots,m\}} p_i(x) = p_{i_x}(x)$, де $i_x \in \{1, \dots, m\}$. Переконаємося, що $i_x \neq i_1$, тобто, що $i_x \in \{1, \dots, m\} \setminus \{i_1\}$. Дійсно, якщо б $i_x = i_1$, то внаслідок (10.52), (10.54)

$$f^*(x - x_0) > p_{i_1}(x) - p(x_0) = \max_{i \in \{1,\dots,m\}} p_i(x) - p(x_0) \geq f^*(x - x_0),$$

що неможливо.

Отже, для всіх $x \in V(\bar{x})$

$$\max_{i \in \{1,\dots,m\}} p_i(x) = p_{i_x}(x) = \max_{\substack{i \in \{1,\dots,m\}, \\ i \neq i_1}} p_i(x) \leq \max_{i \in \{1,\dots,m\}} p_i(x),$$

оскільки $i_x \in \{1, \dots, m\} \setminus \{i_1\}$.

З отриманих вище співвідношень випливає, що для всіх $x \in V(\bar{x})$ $\max\limits_{\substack{i \in \{1,\dots,m\}, \\ i \neq i_1}} p_i(x) = \max\limits_{1 \leq i \leq m} p_i(x)$. Внаслідок цього і (10.54)

$$g(x) = \max_{\substack{i \in \{1,\dots,m\}, \\ i \neq i_1}} p_i(x) - p(x_0) - f^*(x - x_0) \geq 0, \; x \in V(\bar{x}). \qquad (10.55)$$

Оскільки $\bar{x} \in V(\bar{x})$, то

$$g\left(\overline{x}\right)=\max_{\substack{i\in\{1,\ldots,m\},\\ i\neq i_1}} p_i\left(\overline{x}\right)-p\left(x_0\right)-f^*\left(\overline{x}-x_0\right)\geq 0 . \qquad (10.56)$$

Внаслідок (10.53)

$$\max_{\substack{i\in\{1,\ldots,m\},\\ i\neq i_1}} g_i\left(\overline{x}\right)=\max_{\substack{i\in\{1,\ldots,m\},\\ i\neq i_1}} p_i\left(\overline{x}\right)-p\left(x_0\right)-f^*\left(\overline{x}-x_0\right)\leq 0 . \qquad (10.57)$$

З (10.56), (10.57) випливає, що

$$g\left(\overline{x}\right)=\max_{\substack{i\in\{1,\ldots,m\},\\ i\neq i_1}} p_i\left(\overline{x}\right)-p\left(x_0\right)-f^*\left(\overline{x}-x_0\right)=0 . \qquad (10.58)$$

Позначимо через $J=\{i_2,\ldots,i_s\}$. Маємо, що $J\subset\{1,\ldots,m\}\setminus\{i_1\}$. Тому

$$p\left(x_0\right)\geq\max_{\substack{i\in\{1,\ldots,m\},\\ i\neq i_1}} p_i\left(x_0\right)\geq p_{i_2}\left(x_0\right)=p\left(x_0\right),$$

$$p\left(x_0\right)=\max_{\substack{i\in\{1,\ldots,m\},\\ i\neq i_1}} p_i\left(x_0\right). \qquad (10.59)$$

Позначимо через $h\left(x\right)=\max_{\substack{i\in\{1,\ldots,m\},\\ i\neq i_1}} p_i\left(x\right)$, $x\in X$.

Зрозуміло, що h є власною опуклою функцією, заданою на X , $x_0\in domh$. Згідно з (10.55), (10.59)

$$g\left(x\right)=h\left(x\right)-h\left(x_0\right)-f^*\left(x-x_0\right)\geq 0,\ x\in V\left(\overline{x}\right),$$

а згідно з (10.58) $g\left(\overline{x}\right)=h\left(\overline{x}\right)-h\left(x_0\right)-f^*\left(\overline{x}-x_0\right)=0$.

Згідно з лемою 10.3.1 $f^*\in\partial h\left(x_0\right)$, де $h\left(x\right)=\max_{\substack{i\in\{1,\ldots,m\},\\ i\neq i_1}} p_i\left(x\right)$, а

$h\left(x_0\right)=p\left(x_0\right)=\max_{\substack{i\in\{1,\ldots,m\},\\ i\neq i_1}} p_i\left(x_0\right)=p_{i_k}\left(x_0\right)$, де $k=\overline{2,s}$.

Оскільки функція h є максимумом $m-1$ опуклої функції, то внаслідок індукційного припущення

$$f^*\in co\Big(\partial p_{i_2}\left(x_0\right)\cup\ldots\cup\partial p_{i_s}\left(x_0\right)\Big)\subset co\Big(\partial p_{i_1}\left(x_0\right)\cup\partial p_{i_2}\left(x_0\right)\cup\ldots\cup\partial p_{i_s}\left(x_0\right)\Big).$$

Отже, в цьому випадку для $f^*\in\partial p\left(x_0\right)$ маємо, що

$$f^*\in co\bigcup_{i\in I}\partial p_i\left(x_0\right). \qquad (10.60)$$

Нехай тепер x_0 є оптимальним розв’язком задачі (10.48), (10.49).

Оскільки X є локально опуклим лінійним топологічним простором і за умовою теореми функції p_i, $i=\overline{1,m}$, є неперервними в точці x_0, то $x_0 \in \bigcap_{i=1}^{m} domp_i$ та для $\varepsilon > 0$ існує опуклий окіл $O(x_0)$ точки x_0 такий, що

$$\left| p_i(x) - p_i(x_0) \right| < \varepsilon, \; x \in O(x_0).$$

Звідси випливає, що $O(x_0) \subset \bigcap_{i=1}^{m} domp_i$.

Переконаємося, що x_0 є оптимальним розв'язком такої задачі опуклого програмування:

$$\min g_{i_1}(x) = p_{i_1}(x) - p(x_0) - f^*(x - x_0) \qquad (10.61)$$

при обмеженнях

$$g_i(x) = p_i(x) - p(x_0) - f^*(x - x_0) \le 0, \; i \in \{1, ..., m\}, \; i \ne i_1, \qquad (10.62)$$

$$x \in O(x_0). \qquad (10.63)$$

Дійсно, нехай x' є допустимим розв'язком задачі (10.61)-(10.63). Тоді x' є допустимим розв'язком задачі (10.48), (10.49). Тому $g_{i_1}(x') \ge g_{i_1}(x_0)$.

З цих міркувань випливає, що x_0 є оптимальним розв'язком задачі (10.61)-(10.63), в якій функції g_i, $i=\overline{1,m}$, є власними опуклими функціями, а $O(x_0)$ є відкритою опуклою множиною, такою, що

$$O(x_0) \subset \bigcap_{i=1}^{m} domp_i = \bigcap_{i=1}^{m} domg_i.$$

Згідно з теоремою Куна-Таккера існує ненульовий вектор $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_m)$, для якого $\lambda_1 \ge 0, ..., \lambda_m \ge 0$,

$$\min_{x \in O(x_0)} L(x, \lambda) = \min_{x \in O(x_0)} \Big(\lambda_1 \big(p_1(x) - p(x_0) - f^*(x - x_0) \big) + ... +$$

$$+ \lambda_m \big(p_m(x) - p(x_0) - f^*(x - x_0) \big) \Big) = \qquad (10.64)$$

$$= \lambda_1 \big(p_1(x_0) - p(x_0) \big) + ... + \lambda_m \big(p_m(x_0) - p(x_0) \big),$$

причому

$$\lambda_i \big(p_i(x_0) - p(x_0) - f^*(x_0 - x_0) \big) =$$

$$= \lambda_i \big(p_i(x_0) - p(x_0) \big) = 0, \; i = 1, ..., m. \qquad (10.65)$$

Для всіх $i \in \{1,...,m\} \setminus I$ випливає, що $p_i(x_0) < p(x_0)$. Тому із (10.65) маємо, що $\lambda_i = 0$ для всіх $i \in \{1,...,m\} \setminus I$.

З урахуванням цього та (10.64) одержимо, що

$$\sum_{i \in I} \lambda_i \left(p_i(x) - p_i(x_0) - f^*(x - x_0) \right) \ge 0, \ x \in O(x_0), \tag{10.66}$$

причому $\lambda_i \ge 0$, $i \in I$, та серед чисел λ_i, $i \in I$, є хоча б одне більше нуля.

Для $i \in I$ позначимо через $\alpha_i = \dfrac{\lambda_i}{\sum_{i \in I} \lambda_i}$. З урахуванням цього та (10.66) будемо мати, що

$$g(x) = \sum_{i \in I} \alpha_i p_i(x) - \sum_{i \in I} \alpha_i p_i(x_0) - f^*(x - x_0) \ge 0, \ x \in O(x_0). \tag{10.67}$$

Оскільки $\sum_{i \in I} \alpha_i p_i$ є власною опуклою функцією, заданою на X,

$$x_0 \in dom\left(\sum_{i \in I} \alpha_i p_i \right), \ f^* \in X^*, \ x_0 \in O(x_0), \ g(x_0) = 0,$$

то з урахуванням (10.67) та леми 10.3.1 робимо висновок, що

$$f^* \in \partial\left(\sum_{i \in I} \alpha_i p_i \right)(x_0), \tag{10.68}$$

де

$$\alpha_i \ge 0, \ i \in I, \ \sum_{i \in I} \alpha_i = \sum_{i \in I} \frac{\lambda_i}{\sum_{i \in I} \lambda_i} = 1. \tag{10.69}$$

Оскільки функції $\alpha_i p_i$, $i \in I$, є неперервними в точці x_0, то згідно з теоремою Моро -Рокафєллара

$$\partial\left(\sum_{i \in I} \alpha_i p_i \right)(x_0) = \sum_{i \in I} \left(\partial(\alpha_i p_i)(x_0) \right). \tag{10.70}$$

Оскільки для $i \in I$, $\alpha_i \ge 0$, то, взявши до уваги твердження 9.2.1 та співвідношення (10.68), (10.70), робимо висновок, що

$$f^* \in \sum_{i \in I} \alpha_i \partial p_i(x_0) \subset co \bigcup_{i \in I} \partial p_i(x_0).$$

Отже, для всіх $f^* \in \partial p(x_0)$ маємо, що $f^* \in co \bigcup_{i \in I} \partial p_i(x_0)$. Тому

$$\partial p(x_0) \subset co \bigcup_{i \in I} \partial p_i(x_0).$$

Співвідношення (10.47) встановлено. Зі співвідношень (10.46) та (10.47) випливає справедливість рівності (10.45).

Отже, співвідношення (10.45) справедливе для $m = 1$. З припущення, що воно справедливе для натурального числа $m-1$ випливає, що воно справедливе і для натурального числа m. Згідно з принципом математичної індукції це твердження має місце для будь-якого $m \in N$.

Теорему доведено.

10.4. Субдиференціальна форма теореми Каруша-Куна-Таккера

Нехай X – локально опуклий лінійний топологічний простір, p_i, $i = 0,1,\ldots,m$, – власні опуклі функції, задані на X, A – непорожня опукла множина, яка включається в $\bigcap_{i=0}^{m} dom p_i$.

Розглянемо таку задачу опуклого програмування:

знайти

$$\min p_0(x) \tag{10.71}$$

за умов

$$p_i(x) \le 0, i = 1,\ldots,m, \tag{10.72}$$

$$x \in A. \tag{10.73}$$

Нагадаємо, що функцією Лагранжа задачі (10.71)-(10.73) називається функція

$$L(x;\lambda_0,\lambda_1,\ldots,\lambda_m) = L(x;\lambda) = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i p_i(x),$$

де $x \in X$, $\lambda = (\lambda_0,\lambda_1,\ldots,\lambda_m) \in R^{m+1}$.

Твердження 10.4.1. *Нехай x_0 є оптимальним розв'язком задачі (10.71)-(10.73). Тоді x_0 є оптимальним розв'язком задачі відшукання*

$$\min_{x \in X} g(x), \tag{10.74}$$

де

$$g(x) = \max\left\{ p_0(x) - p_0(x_0),\ p_1(x),\ldots,p_m(x) \right\} + \delta(x / A),$$

$$x \in X,$$

а $\delta(x / A) = \begin{cases} +\infty, \text{якщо } x \notin A, \\ 0, \text{якщо } x \in A \end{cases}$ *– індикаторна функція множини* A.

Доведення. Нехай x_0 є оптимальним розв'язком задачі (10.71)-(10.73). Тоді $p_i(x_0) \le 0,\ \ i=1,\dots,m$, $x_0 \in A$ і

$$\begin{gathered} g(x_0) = \max\{p_0(x_0) - p_0(x_0),\ p_1(x_0),\dots,p_m(x_0)\} + \\ +\delta(x_0 / A) = 0+0=0 \end{gathered}.$$

Припустимо, що $\bar{x} \in X$ та $g(\bar{x}) < 0 = g(x_0)$.

Тоді $\max\{p_0(\bar{x}) - p_0(x_0),\ p_1(\bar{x}),\dots,p_m(\bar{x})\} + \delta(\bar{x} / A) < 0$.

Звідси випливає, що $\bar{x} \in A$, $p_i(\bar{x}) < 0, i = \overline{1,m}$, $p_0(\bar{x}) - p_0(x_0) < 0$.

Отже, $\bar{x}$ є таким допустимим розв'язком задачі (10.71)-(10.73), що $p_0(\bar{x}) < p_0(x_0)$, що суперечить оптимальності вектора x_0 для задачі (10.71)-(10.73).

Одержана суперечність доводить, що $g(x) \ge 0 = g(x_0)$ для всіх $x \in X$. Це й означає, що x_0 є оптимальним розв'язком задачі (10.74).

Твердження доведено.

Теорема 10.4.1 (субдиференціальна форма теореми Каруша-Куна-Таккера). *Нехай в задачі (10.71)-(10.73) функції* $p_0,\ p_1,\dots,\ p_m$ *неперервні в точці* $x_0 \in A$.

Якщо x_0 є оптимальним розв'язком задачі (10.71)-(10.73), то існують числа α_i, $i = 0,1,\dots,m$, такі, що

$$\alpha_i \ge 0,\ i=0,1,\dots,m,\ \sum_{i=0}^{m} \alpha_i = 1, \tag{10.75}$$

$$\alpha_i p_i(x_0) = 0,\ i=1,\dots,m, \tag{10.76}$$

$$0 \in \sum_{i=0}^{m} \alpha_i \partial p_i(x_0) + N(x_0 / A) \tag{10.77}$$

де $N(x_0 / A) = \{f \in X^* : f(x) \le f(x_0), x \in A\}$ *– конус опорних функціоналів до множини* A *в точці* x_0.

Співвідношення (10.77) рівносильне тому, що існують $f_i^* \in \partial p_i(x_0)$, $i=0,1,\dots,m$, для яких справедлива нерівність

$$\left(\sum_{i=0}^{m} \alpha_i f_i^*\right)(x - x_0) \ge 0,\ x \in A. \tag{10.78}$$

Доведення. Нехай x_0 є оптимальним розв'язком задачі (10.71)-(10.73). Згідно з твердженням 10.4.1 точка x_0 є оптимальним розв'язком задачі безумовної мінімізації (10.74).

Внаслідок цього та теореми 9.2.2 про критерій точки глобального мінімуму функції справедливе включення

$$0 \in \partial g\left(x_0\right), \tag{10.79}$$

де, як і вище,

$$g\left(x\right) = \max\left\{p_0\left(x\right) - p_0\left(x_0\right),\ p_1\left(x\right), \dots, p_m\left(x\right)\right\} + \delta\left(x / A\right),$$
$$x \in X .$$

Зрозуміло, що

$$p\left(x\right) = \max\left\{p_0\left(x\right) - p_0\left(x_0\right),\ p_1\left(x\right), \dots, p_m\left(x\right)\right\},\ x \in X ,$$

є опуклою власною функцією на X, неперервною в точці $x_0 \in A$, оскільки за умовою теореми такими є функції $p_0, p_1, \dots, p_m$.

Крім того, опуклою власною на X є функція $\delta\left(\bullet/A\right)$, оскільки за умовою A є непорожньою опуклою множиною простору X.

З урахуванням цього, рівності $g\left(x\right) = p\left(x\right) + \delta\left(x / A\right)$, $x \in X$, та теореми Моро-Рокафєллара (див. теорему 10.2.1) можна зробити висновок, що

$$\partial g\left(x_0\right) = \partial p\left(x_0\right) + \partial \delta\left(\bullet/A\right)\left(x_0\right). \tag{10.80}$$

Маємо, що

$$p\left(x_0\right) = \max\left\{p_0\left(x_0\right) - p_0\left(x_0\right),\ p_1\left(x_0\right), \dots, p_m\left(x_0\right)\right\} =$$
$$= \max\left\{0,\ p_1\left(x_0\right), \dots, p_m\left(x_0\right)\right\} = 0,$$

оскільки $x_0 \in A$ та $p_i\left(x_0\right) \le 0, i = 1, \dots, m$.

Позначимо через $I_1 = \left\{i \in \left\{1, \dots, m\right\} : p_i\left(x_0\right) = 0\right\}$, $I = I_1 \cup \left\{0\right\}$.

Оскільки функції $p_0\left(x\right) - p_0\left(x_0\right),\ p_1\left(x\right), \dots, p_m\left(x\right)$, $x \in X$, є власними опуклими функціями, заданими на X, які неперервні в точці $x_0 \in X$, то відповідно до теореми Дубовіцкого-Мілютіна (див. теорему 10.3.1)

$$\begin{aligned} \partial p\left(x_0\right) &= co\left(\partial\left(p_0 - p_0\left(x_0\right)\right)\left(x_0\right) \cup \left(\bigcup_{i \in I_1} \partial p_i\left(x_0\right)\right)\right) = \\ &= co\left(\partial p_0\left(x_0\right) \cup \left(\bigcup_{i \in I_1} \partial p_i\left(x_0\right)\right)\right) = co\left(\bigcup_{i \in I} \partial p_i\left(x_0\right)\right). \end{aligned} \tag{10.81}$$

Згідно з (10.79)-(10.81)

$$0 \in co\left(\bigcup_{i\in I}\partial p_i\left(x_0\right)\right)+\partial\delta\left(\bullet/A\right)\left(x_0\right). \qquad (10.82)$$

З опуклості множин $\partial p_i\left(x_0\right), i\in I$, та співвідношення (10.82) випливає, що існують числа $\alpha_i \ge 0$, $i\in I$, $\sum_{i\in I}\alpha_i = 1$; функціонали $f_i^* \in \partial p_i\left(x_0\right)$, $i\in I$, $f^* \in \partial\delta\left(\bullet/A\right)\left(x_0\right)$ такі, що

$$0=\sum_{i\in I}\alpha_i f_i^* + f^*. \qquad (10.83)$$

Оскільки $f^* \in \partial\delta\left(\bullet/A\right)\left(x_0\right)$ та $x_0 \in A$, то

$$\delta\left(\bullet/A\right)\left(x\right)-\delta\left(\bullet/A\right)\left(x_0\right)=\delta\left(\bullet/A\right)\left(x\right)\ge f^*\left(x-x_0\right),$$
$$x\in X .$$

З урахуванням того, що $\delta\left(\bullet/A\right)\left(x\right)=0$, $x\in A$, звідси одержимо, що $f^*\left(x\right)\le f^*\left(x_0\right)$, $x\in A$.

Тому $f^* \in N\left(x_0 / A\right)$. З урахуванням проведених міркувань та співвідношення (10.83) приходимо до висновку, що існують числа

$$\alpha_i \ge 0,\ i\in I = I_1\cup\{0\},\ \sum_{i\in I}\alpha_i = 1, \qquad (10.84)$$

що

$$\begin{aligned} 0 &\in \sum_{i\in I}\alpha_i\partial p_i\left(x_0\right)+N\left(x_0/A\right)= \\ &=\alpha_0\partial p_0\left(x_0\right)+\sum_{i\in I_1}\alpha_i\partial p_i\left(x_0\right)+N\left(x_0/A\right). \end{aligned} \qquad (10.85)$$

Оскільки для $i\in I_1$ $p_i\left(x_0\right)=0$, то

$$\alpha_i p_i\left(x_0\right)=0,\ i\in I_1. \qquad (10.86)$$

Покладемо $\alpha_i = 0$ для $i\in\{1,...,m\}\setminus I_1$. Тоді для чисел α_i, $i=0,1,...,m$, внаслідок (10.84)-(10.86) мають місце співвідношення (10.75)-(10.77).

Нехай виконується співвідношення (10.77). Тоді існують функціонали $f_i^* \in \partial p_i\left(x_0\right)$, $i=0,1,...,m$, $f^* \in N\left(x_0/A\right)$, такі, що $0=\sum_{i=0}^{m}\alpha_i f_i^* + f^*$. Звідси випливає, що

$$0=\sum_{i=0}^{m}\alpha_i f_i^*\left(x-x_0\right)+f^*\left(x-x_0\right),\ x\in A .$$

$$\sum_{i=0}^{m}\alpha_i f_i^*\left(x-x_0\right)=-f^*\left(x-x_0\right)\ge 0\,,\ x\in A\,,$$

оскільки $f^*\in N\left(x_0/A\right)$. Отже (10.78) має місце.

Нехай для чисел α_i, $i=0,1,...,m$, існують функціонали $f_i^*\in\partial p_i\left(x_0\right)$, $i=0,1,...,m$, такі, що має місце (10.78). Тоді

$$f^*=-\sum_{i=0}^{m}\alpha_i f_i^*\in N\left(x_0/A\right),$$

а $\sum_{i=0}^{m}\alpha_i f_i^*+f^*=0$. Звідси випливає, що

$$0\in\sum_{i=0}^{m}\alpha_i\partial p_i\left(x_0\right)+N\left(x_0/A\right),$$

тобто має місце (10.77).

З проведених міркувань випливає, що співвідношення (10.77) і (10.78) є рівносильними.

Теорему доведено.

З урахуванням рівносильності співвідношень (10.77) і (10.78) теорему 10.4.1 можна сформулювати в такій еквівалентній формі.

Теорема 10.4.2 (субдиференціальна форма теореми Каруша-Куна-Таккера). *Нехай в задачі (10.71)-(10.73) функції* p_i, $i=0,1,...,m$, *неперервні в точці* $x_0\in A$.

Якщо x_0 *є оптимальним розв'язком задачі (10.71)-(10.73), то існують числа* α_i, *функціонали* $f_i^*\in\partial p_i\left(x_0\right)$, $i=0,1,...,m$, *такі, що*

$$\alpha_i\ge 0\,,\ i=0,1,...,m\,,\ \sum_{i=0}^{m}\alpha_i=1\,,$$

$$\alpha_i p_i\left(x_0\right)=0\,,\ i=1,...,m\,,$$

$$\left(\sum_{i=0}^{m}\alpha_i f_i^*\right)\left(x-x_0\right)\ge 0\,,\ x\in A\,.$$

Твердження 10.4.2. *Нехай обмеження (10.72), (10.73) задачі (10.71)-(10.73) задовольняють умові Слейтера, тобто існує точка* $\overline{x}\in A$ *така, що* $p_i\left(\overline{x}\right)<0$, $i=1,...,m$. *Якщо для точки* $x_0\in A$ *існують числа* α_i, $i=0,1,...,m$, *такі, для яких виконуються умови (10.75)-(10.77), то* $\alpha_0>0$.

Доведення. Припустимо, що $\alpha_0 = 0$. Тоді $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1$. Отже, серед чисел $\alpha_1, ..., \alpha_m$ є хоча б одне більше нуля. Оскільки $p_i(\overline{x}) < 0$, $i = 1, ..., m$, то звідси випливає, що

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i p_i(\overline{x}) < 0. \qquad (10.87)$$

Оскільки має місце співвідношення (10.77), то згідно з теоремою 10.4.1 існують функціонали $f_i^* \in \partial p_i(x_0)$, $i = 0,1, ..., m$, такі, що

$$\sum_{i=0}^{m} \alpha_i f_i^*(x - x_0) \geq 0, \; x \in A,$$

в тому числі

$$\sum_{i=0}^{m} \alpha_i f_i^*(\overline{x} - x_0) \geq 0. \qquad (10.88)$$

З урахуванням того, що $f_i^* \in \partial p_i(x_0)$, $i = 1, ..., m$, то

$$p_i(\overline{x}) - p_i(x_0) \geq f_i^*(\overline{x} - x_0), \; i = 1, ..., m. \qquad (10.89)$$

Звідки внаслідок (10.76), (10.87), (10.88) та рівності $\alpha_0 = 0$ одержимо, що

$$\begin{aligned} 0 &> \sum_{i=1}^{m} \alpha_i p_i(\overline{x}) - \sum_{i=1}^{m} \alpha_i p_i(x_0) = \\ &= \sum_{i=1}^{m} \alpha_i p_i(\overline{x}) \geq \sum_{i=1}^{m} \alpha_i f_i^*(\overline{x} - x_0) \geq 0 \end{aligned}.$$

Одержана суперечність дозволяє зробити висновок, що $\alpha_0 \neq 0$. Оскільки $\alpha_0 \geq 0$, то звідси випливає, що $\alpha_0 > 0$.

Твердження доведено.

Теорема 10.4.3. *Нехай для допустимого розв'язку* x_0 *задачі (10.71)-(10.73) існують числа* α_i, $i = 0,1, ..., m$, *для яких виконуються співвідношення (10.75)-(10.77), причому* $\alpha_0 > 0$.

Тоді x_0 *є оптимальним розв'язком цієї задачі.*

Доведення. Нехай x' – довільний допустимий розв'язок задачі (10.71)-(10.73), тобто

$$x' \in A \text{ і } p_i(x') \leq 0, \; i = 1, ..., m. \qquad (10.90)$$

Оскільки має місце співвідношення (10.77), то згідно з теоремою 10.4.1 існують функціонали $f_i^* \in \partial p_i(x_0)$, $i = 0,1,\ldots,m$, такі, що

$$\sum_{i=0}^{m} \alpha_i f_i^* (x - x_0) \ge 0, \; x \in A,$$

в тому числі

$$\sum_{i=0}^{m} \alpha_i f_i^* (x' - x_0) \ge 0 . \tag{10.91}$$

Оскільки $f_i^* \in \partial p_i(x_0)$, $i = 0,1,\ldots,m$, то

$$p_i(x') - p_i(x_0) \ge f_i^*(x' - x_0), \; i = 0,1,\ldots,m . \tag{10.92}$$

З урахуванням співвідношень (10.75), (10.76), (10.90), (10.91), $f_i^* \in \partial p_i(x_0)$, $i = 0,1,\ldots,m$, одержимо, що

$$\alpha_0 p_0(x') - \alpha_0 p_0(x_0) \ge \sum_{i=0}^{m} \alpha_i p_i(x') - \alpha_0 p_0(x_0) =$$

$$= \sum_{i=0}^{m} \alpha_i p_i(x') - \sum_{i=0}^{m} \alpha_i p_i(x_0) =$$

$$= \sum_{i=0}^{m} \alpha_i \left(p_i(x') - p_i(x_0) \right) \ge \sum_{i=0}^{m} \alpha_i f_i^* (x' - x_0) \ge 0 .$$

Отже, $\alpha_0 p_0(x') - \alpha_0 p_0(x_0) \ge 0$. Оскільки за припущенням $\alpha_0 > 0$, то $p_0(x') \ge p_0(x_0)$. Це й означає, що x_0 є оптимальним розв'язком задачі (10.71)-(10.73).

Теорему доведено.

Наслідок 10.4.1. *Нехай обмеження (10.72), (10.73) задачі (10.71)-(10.73) задовольняють умові Слейтера. Якщо для допустимого розв'язку* x_0 *цієї задачі існують числа* α_i, $i = 0,1,\ldots,m$, *для яких виконуються співвідношення (10.75)-(10.77), то* x_0 *є оптимальним розв'язком задачі (10.71)-(10.73).*

Доведення. Згідно з твердженням 10.4.2 $\alpha_0 > 0$. Тоді згідно з теоремою 10.4.3 x_0 є оптимальним розв'язком задачі (10.71)-(10.73).

Наслідок доведено.

Наслідок 10.4.2. *Нехай обмеження (10.72), (10.73) задачі (10.71)-(10.73) задовольняють умові Слейтера, функції* $p_0, p_1, \ldots, p_m$ *неперервні в точці* $x_0 \in A$, *яка є допустимим розв'язком задачі (10.71)-(10.73).*

Для того щоб точка x_0 *була оптимальним розв'язком задачі (10.71)-(10.73), необхідно і достатньо, щоб існували числа* α_i *,* $i = 0,1,...,m$ *, для яких справедливі співвідношення (10.75)-(10.77).*

Доведення. ***Необхідність.*** Нехай x_0 є оптимальним розв'язком задачі (10.71)-(10.73). Згідно з теоремою 10.4.1 існують числа α_i , $i = 0,1,..., m$, для яких виконуються умови (10.75)-(10.77).

Достатність встановлено в наслідку 10.4.1.

Наслідок доведено.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Алексеев В. М. Оптимальное управление / В. М. Алексеев, В. М. Тихомиров, С. В. Фомин. – М. : Наука, 1979. – 432 с.
2. Базара М. Нелинейное программирование. Теория и алгоритмы / М. Базара, К. Шетти. – М. : Мир, 1982. – 583 с.
3. Галеев Э. М. Краткий курс теории экстремальных задач / Э. М. Галеев, В. М. Тихомиров. – М. : Изд-во МГУ, 1989. – 204 с.
4. Гольштейн Е. Г. Теория двойственности в математическом программировании и ее приложения / Е. Г. Гольштейн. – М. : Наука, 1971. – 352 с.
5. Гудима У. В. Лінійне програмування в прикладах і задачах: навчальний посібник / У. В. Гудима. – Кам’янець-Подільський : «Медобори-2006», 2012. – 104 с.
6. Экланд И. Выпуклый анализ и вариационные проблемы / И. Экланд, Р. Темам. – М. : Мир, 1979. – 399 с.
7. Жалдак М. І. Основи теорії і методів оптимізації : навчальний посібник / М. І. Жалдак, Ю. В. Триус. – Черкаси : Брама-Україна, 2005. – 608 с.
8. Иоффе А. Д. Теория экстремальных задач / А. Д. Иоффе, В. М. Тихомиров. – М. : Наука, 1974. – 481 с.
9. Кадец В. М. Курс функционального анализа : учебное пособие для студентов механико-математического факультета / В. М. Кадец. – Харьков : ХНУ имени В. Н. Каразина, 2006. – 607 с.
10. Колмогоров А. Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. – М. : Наука, 1989. – 623 с.
11. Лейхтвейс К. Выпуклые множества / К. Лейхтвейс. – М. : Наука, 1985. – 335 с.
12. Лоран П.-Ж. Аппроксимация и оптимизация / П.-Ж. Лоран. – М. : Мир, 1975. – 496 с.
13. Люстерник Л. А. Краткий курс функционального анализа / Л. А. Люстерник, В. И. Соболев. – М. : Высшая школа, 1982. – 272 с.
14. Магарил-Ильяев Г. Г. Выпуклый анализ и его приложения / Г. Г. Магарил-Ильяев, В. М. Тихомиров. – М. : Едиториал УРСС, 2003. – 176 с.
15. Моклячук М. П. Методы оптимизации / М. П. Моклячук. – К. : УМК ВО, 1990. – 140 с.
16. Моклячук М. П. Основи опуклого аналізу : навчальний посібник / М. П. Моклячук. – К. : Видавництво ТВіМС, 2004. – 240 с.
17. Моклячук М. П. Негладкий аналіз та оптимізація : навчальний посібник / М. П. Моклячук. – К. : Видавничо-поліграфічний центр «Київський університет», 2008. – 399 с.
18. Моклячук М. П. Варіаційне числення. Екстремальні задачі : підручник / М. П. Моклячук. – К. : Видавничо-поліграфічний центр «Київський університет», 2009. – 380 с.
19. Никайдо Х. Выпуклые структуры и математическая экономика / Х. Никайдо. – М. : Мир, 1972. – 518 с.

20. Обен Ж.-П. Прикладной нелинейный анализ / Ж.-П. Обен, И. Экланд. – М. : Мир, 1988. – 512 с.
21. Обен Ж.-П. Нелинейный анализ и его экономические приложения / Ж.-П. Обен. – М. : Мир, 1988. – 264 с.
22. Петров Н. Н. Введение в выпуклый анализ : учебное пособие / Н. Н. Петров. – Ижевск : Удмуртский государственный университет, 2009. – 168 с.
23. Половинкин Е. С. Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа / Е. С. Половинкин, М. В. Балашов. – М. : Физматлит, 2004. – 416 с.
24. Пшеничный Б. Н. Выпуклый анализ и экстремальные задачи / Б. Н. Пшеничный. – М. : Наука, 1980. – 320 с.
25. Пшеничный Б. Н. Необходимые условия экстремума / Б. Н. Пшеничный. – М.: Наука, 1982. – 144 с.
26. Рокафеллар Р. Выпуклый анализ / Р. Рокафеллар. – М. : Мир, 1973. – 470 с.
27. Стрекаловский А. С. Введение в выпуклый анализ : учебное пособие / А. С. Стрекаловский. – Иркутск: Иркутский университет, 2009. – 81 с.
28. Тихомиров В. М. Выпуклый анализ / В. М. Тихомиров // Итоги науки и техники. Серия «Современные проблемы математики, фундаментальные направления». – М. : ВИНИТИ, 1987. – Т. 14. – С. 5-101.
29. Тихомиров В. М. Некоторые вопросы теории приближений / В. М. Тихомиров. – М. : МГУ, 1976. – 304 с.
30. Ус С. А. Функціональний аналіз: навчальний посібник / С. А. Ус. – Дніпропетровськ : Національний гірничий університет, 2013. – 236 с.

Міністерство освіти і науки України
Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

ГУДИМА Уляна Василівна,
кандидат фізико-математичних наук, доцент,
доцент кафедри математики Кам'янець-Подільського
національного університету імені Івана Огієнка

ГНАТЮК Василь Олексійович,
кандидат фізико-математичних наук, доцент,
професор кафедри математики Кам'янець-Подільського
національного університету імені Івана Огієнка

ОПУКЛИЙ АНАЛІЗ

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

Підписано до друку 24.10.2019 р. Гарнітура «Таймс».
Папір офісний. Друк різографічний.
Формат 60x84/16. Умовн. друк. арк. 6,5. Обл.-вид. арк. 7,6.
Тираж 50. Зам. № 868.

Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка,
вул. Огієнка, 61, м. Кам'янець-Подільський, 32300.
Свідоцтво серії ДК № 3382 від 05.02.2009 р.

Надруковано в Кам'янець-Подільському національному
університеті імені Івана Огієнка,
вул. Огієнка, 61, м. Кам'янець-Подільський, 32300.