Міністерство освіти і науки України

Кам’янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка

Фізико-математичний факультет

Кафедра математики

Дипломна робота магістра

з теми: **“ЧЕБИШОВСЬКА ТОЧКА У РОЗУМІННІ МЕТРИКИ ГАУСДОРФА СИСТЕМИ ЗАМКНЕНИХ КУЛЬ ЛІНІЙНОГО НОРМОВАНОГО ПРОСТОРУ, ЯКІ НЕПЕРЕРВНО ЗМІНЮЮТЬСЯ, ТА ЧИСЕЛЬНИЙ МЕТОД ЇЇ ВІДШУКАННЯ”**

Виконала: студентка II курсу, М1-М21 групи
спеціальності 014 Середня освіта (Математика)
Борзик Марина Сергіївна

Керівник: Гнатюк В. О.,
доцент кафедри математики,
кандидат фізико-математичних наук, доцент

Рецензент: Щирба В. С.,
професор кафедри інформатики,
кандидат фізико-математичних наук, доцент

Кам’янець-Подільський – 2022

ЗМІСТ

ВСТУП

Предметом дослідження дипломної роботи є задача відшукання чебишовської у розумінні метрики Гаусдорфа точки системи замкнених куль лінійного нормованого простору, які неперервно змінюються. Крім того, в роботі побудовано збіжний чисельний метод розв'язування вищеназваної задачі, встановлено двосторонні оцінки збіжності, які дозволяють відшукати оптимальне значення її цільової функції з наперед заданою точністю.

Актуальність теми. Актуальність досліджуваної теми полягає, зокрема, в тому, що задача відшукання у деякій множині лінійного нормованого простору чебишовської точки системи замкнених куль цього нормованого простору, яка розглядається в роботі, водночас є деякою екстремальною задачею в метричному у розумінні метрики Гаусдорфа просторі замкнених обмежених підмножин лінійного нормованого простору. Значні труднощі при дослідженні екстремальних задач у таких метричних просторах пов'язані з тим, що ці простори не є лінійними нормованими просторами. У дипломній роботі ці труднощі подолані з урахуванням специфіки самої задачі.

Актуальність теми випливає також зі змісту задачі, адже у заданій множині лінійного нормованого простору потрібно знайти для заданої системи замкнених куль, які неперервно змінюються, так звану “точку справедливості”, тобто таку точку у заданій множині, найбільша гаусдорфова відстань від якої до цих куль буде найменшою з найбільших гаусдорфових відстаней від інших точок фіксованої множини до цих куль, які неперервно змінюються.

Крім того, ця тема є актуальною у зв'язку з тим, що низка екстремальних задач, які розглядаються у лінійних нормованих просторах, є частковими випадками розглядуваної задачі. Дослідження поставленої задачі дозволяє з єдиних позицій подивитись на відомі результати дослідження цих часткових задач, а також отримувати результати для ще недосліджених задач, які вкладаються у схему постановки розглядуваної у роботі задачі.

Розглядувана в роботі задача полягає в наступному.

Нехай X – лінійний над полем дійсних чисел нормований простір, X^* – простір, спряжений з X, S – довільний компакт, $C(S,X)$ – множина всеможливих неперервних відображень S в X, $C(S,R)$ – множина всеможливих відображень S в R, де R – множина дійсних чисел; $a \in C(S,X)$, тобто a є абстрактною неперервною функцією, що задана на компакті S зі значеннями в просторі X; $r \in C(S,R)$, $r(s) \geq 0$, тобто r є дійснозначною, неперервною і невід'ємною функцією, заданою на компакті S;

$$B_{r(s)}\big(a(s)\big) = \{x \in X : \|x - a(s)\| \leq r(s)\},\ s \in S, –$$

замкнені кулі простору X з центрами у точках $a(s)$ і радіусами $r(s)$, $s \in S$; V – довільна фіксована множина простору X. Поставимо задачу відшукання величини

$$\alpha_V^*\left(\left\{B_{r(s)}\big(a(s)\big)\right\}_{s\in S}\right) = \inf_{x\in V} \sup_{s\in S} H\left(\{x\}, B_{r(s)}\big(a(s)\big)\right), \tag{0.1}$$

де $H\left(\{x\}, B_{r(s)}\big(a(s)\big)\right)$ – гаусдорфова відстань між одноелементною множиною $\{x\}$ $(x \in V)$ та замкненою кулею $B_{r(s)}\big(a(s)\big)$, $s \in S$.

Частковим випадком задачі відшукання величини (0.1) є, зокрема, задача найкращого наближення фіксованого елемента $a \in X$ опуклою множиною V, тобто задача відшукання величини

$$\inf_{x\in V} \|x - a\|, \tag{0.2}$$

яка досліджувалась багатьма авторами й основні результати дослідження якої подані у працях Н. І. Ахієзера [1], В. К. Дзядика [2], М. П. Корнєйчука [3], П.-Ж. Лорана [4], О. І. Степанця [5, 6] та ін.

Частковим випадком задачі відшукання величини (0.1) є також задача найкращої одночасної апроксимації кількох елементів $a_1, \dots, a_m$ лінійного нормованого простору X опуклою множиною V цього простору, яка полягає у відшуканні

$$\inf_{x\in V} \max_{1\leq i\leq m} \|x - a_i\|. \tag{0.3}$$

Задачі найкращого одночасного наближення кількох та нескінченної кількості елементів розглядалися, зокрема, у працях [7-12].

Зрозуміло, що у схему постановки задачі відшукання величини (0.1) вкладається задача відшукання чебишовської у розумінні метрики Гаусдорфа точки кількох замкнених куль лінійного нормованого простору та інші задачі.

Зауважимо, що задачу відшукання величини (0.1) можна розглядати, як задачу відновлення функціональної залежності, що характеризує не означені точно об'єкти і процеси, про які відомо, що їх значення у точках $s \in S$ належать кулям $B_{r(s)}\big(a(s)\big)$, які змінюються неперервно по s на S, однозначними функціональними залежностями (однозначними апроксимантами) певного класу.

Задачам відновлення функціональних залежностей, про які відомо, що їх значення у точках $s \in S$ належать компактам $a(s)$, які змінюються неперервно по s на S, присвячено низку робіт. Серед них праці [13-20] та інші.

Однак, як відомо, куля в нескінченновимірному лінійному нормованому просторі не є компактом цього простору (див., наприклад, [21, с. 336]).

Зрозуміло, що актуальність дослідження задачі (0.1) підсилюється зазначеними вище обставинами.

Мета, об'єкт, предмет і задачі дослідження.

Метою роботи є встановлення умов існування та єдиності екстремального елемента для задачі відшукання величини (0.1), побудова збіжного чисельного методу відшукання величини (0.1) та її екстремального елемента, основаного на ідеї методу січних площин розв'язування задачі лінійного програмування.

Об'єктом дослідження є задача відшукання чебишовської у розумінні метрики Гаусдорфа точки системи замкнених куль лінійного нормованого простору, які неперервно змінюються.

Предметом дослідження є вирішення окремих питань теорії екстремальних задач в лінійних нормованих просторах, пов'язаних із дослідженням задачі відшукання величини (0.1) та її екстремального елемента.

Задачами дослідження є:

1. Отримання зручніших для дослідження еквівалентних постановок задачі відшукання величини (0.1).

2. Встановлення опуклості та неперервності цільової функції задачі відшукання величини (0.1).

3. Доведення деяких загальних теорем існування екстремального елемента для задачі відшукання величини (0.1).

4. Встановлення існування чебишовської точки системи замкнених куль у скінченновимірному підпросторі лінійного нормованого простору.

5. Доведення теореми існування екстремального елемента для задачі відшукання величини (0.1) у слабко компактній множині.

6. Дослідження питання існування та єдиності екстремального елемента для задачі відшукання величини (0.1) у банаховому просторі, в якому має місце "нерівність паралелограма".

7. Доведення теореми про єдиність екстремального елемента для задачі відшукання величини (0.1) в строго нормованому просторі.

8. Доведення теореми про еквівалентність задачі відшукання величини (0.1) та її екстремального елемента в скінченновимірному підпросторі деякій задачі лінійного програмування з нескінченною кількістю обмежень.

9. Побудова збіжного чисельного методу відшукання величини (0.1) та її екстремального елемента, основаного на ідеї методу січних площин, отримання двосторонніх оцінок збіжності, які дозволяють відшукати величину (0.1) з наперед заданою точністю.

При вирішенні вищезазначених завдань у дипломній роботі використовувались **методи** математичного, функціонального та опуклого аналізів, теорії оптимізації та апроксимації, методи оптимізації, зокрема, методи лінійного програмування.

Наукова новизна отриманих результатів. Результати роботи є новими і полягають в наступному:

1. Отримано зручніші для дослідження еквівалентні постановки задачі відшукання величини (0.1).

2. Встановлено опуклість та неперервність цільової функції задачі відшукання величини (0.1).

3. Доведено деякі загальні теореми існування екстремального елемента для задачі відшукання величини (0.1).

4. Встановлено існування чебишовської точки системи замкнених куль у скінченновимірному підпросторі лінійного нормованого простору.

5. Доведено теорему існування екстремального елемента для задачі відшукання величини (0.1) у слабко компактній множині.

6. Досліджено питання існування та єдиності екстремального елемента для задачі відшукання величини (0.1) у банаховому просторі, в якому має місце "нерівність паралелограма".

7. Доведено теорему про єдиність екстремального елемента для задачі відшукання величини (0.1) в строго нормованому просторі.

8. Доведено теорему про еквівалентність задачі відшукання величини (0.1) та її екстремального елемента в скінченновимірному підпросторі деякій задачі лінійного програмування з нескінченною кількістю обмежень.

9. Побудовано збіжний чисельний метод відшукання величини (0.1) та її екстремального елемента, оснований на ідеї методу січних площин, отримано двосторонні оцінки збіжності, які дозволяють відшукати величину (0.1) з наперед заданою точністю.

Практичне значення отриманих результатів. Дипломна робота має теоретичний характер. Її результати можуть бути використані для відшукання чебишовської точки системи куль, які неперервно змінюються, однієї чи кількох таких куль, розв'язування інших задач теорії оптимізації та апроксимації, подальшого розвитку цих теорій.

Апробація результатів роботи. Результати роботи доповідались на засіданнях студентської проблемної групи "Найкраще рівномірне наближення компактнозначних відображень", яка функціонує при кафедрі математики.

Структура роботи. Робота містить вступ, три розділи, висновки та список використаних джерел.

У першому розділі поставлено задачу відшукання величини (0.1) та її екстремального елемента.

Для цієї задачі встановлено:

– еквівалентну їй задачу;

– опуклість та неперервність цільової функції задачі відшукання величини (0.1);

– деякі загальні теореми існування екстремального елемента для величини (0.1); його існування у скінченновимірному підпросторі простору X; у слабко компактній множині цього простору.

У другому розділі розглянуто деякі питання єдиності екстремального елемента для задачі відшукання величини (0.1), зокрема встановлено, що:

– в банаховому просторі X, в якому має місце “нерівність паралелограма”, при $r(s) = r \geq 0$, $s \in S$, екстремальний елемент для величини (0.1) існує та єдиний;

– у випадку строго нормованого простору X екстремальний елемент для задачі відшукання величини (0.1) єдиний (за умови його існування).

Третій розділ дипломної роботи присвячено:

– побудові методу відшукання величини (0.1) та її екстремального елемента, основаного на ідеї методу січних площин розв’язування задачі опуклого програмування;

– збіжності цього методу;

– отриманню двосторонніх оцінок збіжності, що дозволяють знайти величину (0.1) з наперед заданою точністю.

ВИСНОВКИ

У дипломній роботі на тему “Чебишовська точка у розумінні метрики Гаусдорфа системи замкнених куль лінійного нормованого простору, які неперервно змінюються, та чисельний метод її відшукання”:

1. Отримано задачі апроксимаційного характеру, еквівалентні задачі відшукання величини (0.1).

2. Встановлено властивості цільової функції задачі відшукання величини (0.1) (її опуклість, неперервність).

3. Доведено деякі загальні теореми існування екстремального елемента для задачі відшукання величини (0.1). Встановлено його існування:

– у скінченновимірному підпросторі лінійного нормованого простору;

– у слабко компактній множині.

4. Досліджено питання існування та єдиності екстремального елемента для задачі відшукання величини (0.1) у банаховому просторі, в якому має місце “нерівність паралелограма”.

5. За умови існування екстремального елемента для величини (0.1) доведено його єдиність у строго нормованому просторі.

6. Доведено теорему про еквівалентність задачі відшукання величини (0.1) та її екстремального елемента в скінченновимірному підпросторі деякій задачі лінійного програмування з нескінченною кількістю обмежень.

7. Побудовано чисельний метод відшукання величини (0.1) та її екстремального елемента; доведено його збіжність; отримано двосторонні оцінки збіжності, з допомогою яких величину (0.1) можна знайти з наперед заданою точністю.

Отримані результати можна використати для розв’язування й інших задач оптимізації та апроксимації, які вкладаються у схему постановки задачі (0.1).

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Ахиезер Н. И. Лекции по теории аппроксимации / Н. И. Ахиезер. – М. : Наука, 1965. – 407 с.

2. Дзядык В. К. Введение в теорию равномерного приближения функций / В. К. Дзядык. – М. : Наука, 1977. – 510 с.

3. Корнейчук Н. П. Экстремальные задачи теории приближения / Н. П. Корнейчук. – М. : Наука, 1976. – 320 с.

4. Лоран П.-Ж. Аппроксимация и оптимизация / П.-Ж. Лоран. – М. : Мир, 1975. – 496 с.

5. Степанец А. И. Методы теории приближений / А. И. Степанец. – Киев : Ин-т математики НАН Украины, 2002. – Ч. I. – 427 с.

6. Степанец А. И. Методы теории приближений / А. И. Степанец. – Киев : Ин-т математики НАН Украины, 2002. – Ч. II. – 468 с.

7. Гнатюк Ю. В. Двоїсті співвідношення для задачі найкращої за дробово-опуклою функцією наближення кількох елементів та критерії елемента найкращого наближення / Ю. В. Гнатюк // Доп. НАН України, 1995. – № 6. – С. 23-26.

8. Гнатюк Ю. В. Основні властивості задачі найкращого одночасного наближення кількох елементів / Ю. В. Гнатюк // Укр. мат. журн., 1996. – Вип. 48, № 97. – С. 1183-1193.

9. Гнатюк Ю. В. Найкраще рівномірне наближення сім’ї неперервних на компакті функцій / Ю. В. Гнатюк // Укр. мат. журн., 2002. – Вип. 54, № 11. – С. 1574-1580.

10. Гнатюк Ю. В. Алгоритми найкращого одночасного рівномірного наближення сім’ї неперервних на компакті функцій чебишовським підпростором / Ю. В. Гнатюк // Укр. мат. журн., 2003. – Вип. 55, № 2. – С. 291-307.

11. Tanimoto S. A. Characterization of best simultaneous approximations / S. A Tanimoto // J. Approximation Theory. – 1989. – № 59. – P. 359-361.

12. Tanimoto S. A. On best simultaneous approximation / S. A Tanimoto // Math. Japonica. – 1998. – 48, № 2. – P. 275-279.

13. Гнатюк Ю. В. Задача найкращої рівномірної апроксимації неперервного компактнозначного відображення скінченновимірним підпростором однозначних неперервних відображень / Ю. В. Гнатюк, У. В. Гудима // Проблеми теорії наближення функцій та суміжні питання – відп. ред.: О. І. Степанець – Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – Т. 1, № 1. – Київ: Ін-т математики НАН України, 2004. – С. 115-129.

14. Гнатюк Ю. В. Критерії екстремального елемента та його єдиності для задачі найкращої рівномірної апроксимації неперервного компактнозначного відображення множинами однозначних відображень / Ю. В. Гнатюк, У. В. Гудима // Доп. НАНУ, 2005. – № 6. – С. 19-23.

15. Гнатюк Ю. В. Модифікація методу січних площин на випадок апроксимації компактнозначного відображення / Ю. В. Гнатюк, У. В. Гудима // Вісник КНУ. Серія: фізико-математичні науки, 2005. – № 3. – С. 245-250.

16. Гудима У. В. Найкраща рівномірна апроксимація неперервного компактнозначного відображення множинами неперервних однозначних відображень / У. В. Гудима // Укр. мат. журн., 2005. – Вип. 57, № 12. – С. 1601-1619.

17. Гудима У. В. Найкраща рівномірна апроксимація неперервного компактнозначного відображення скінченновимірним підпростором / У. В. Гудима // Вісник КНУ. Серія: фізико-математичні науки, 2005. – № 3. – С. 262-267.

18. Ипате Д. М. Аппроксимация многозначных отображений непрерывными отображениями / Д. М. Ипате, М. М. Чобан // Сердика Бълг. мат. спис. – 1991. – Vol. 17. – P. 127-136.

19. Никольский М. С. Аппроксимация выпуклозначных непрерывных многозначных отображений / Н. С. Никольский // Докл. АН СССР. – 1989. – 308, № 5. – С. 1047-1050.

20. Сендов Б. Хаусдорфовы приближения / Б. Сендов. – София : БАН, 1979. – 372 с.

21. Кадец В. М. Курс функционального анализа: Учебное пособие для студентов механико-математического факультета / В. М. Кадец. – Х. :ХНУ имени В. Н. Каразина, 2006. – 607 с.

22. Арутюнов А. В. Лекции по выпуклому и многозначному анализу / А. В. Арутюнов. – М. : Физматлит, 2014. – 184 с.

23. Канторович Л. В. Функциональный анализ / Л. В. Канторович, Г. П. Акилов. – М. : Наука, 1984. – 752 с.

24. Гудима У. В. Опуклий аналіз: навчальний посібник / У. В. Гудима, В. О. Гнатюк. – Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2019. – 112 с.

25. Шкіль М. І. Математичний аналіз: Підручник: У 2 ч. Ч. 1. – 3-тє вид., переробл. і допов. / М. І. Шкіль. – К. : Вища шк., 2005. – 447 с.

26. Томусяк А. А. Математичний аналіз: посібник для випускників фіз.-мат. фак.-тів пед. ун-тів та ін-тів / А. А. Томусяк, В. С. Трохименко. – Вінниця : ВДПУ, 1999. – 485 с.

27. Бердышев В. И. Аппроксимация функций, сжатие численной информации, приложения / В. И. Бердышев, Л. В. Петрак. – Екатеринбург : УрО РАН, 1999. – 297 с.

28. Bynum W. L. Weak parallelogram lows for Banach spaces / W. L. Bynum // Can. Math. Bull., 1976. – 19, № 3. – P. 269-275.

29. Гнатюк В. О. Модифікація методу січних площин на випадок задачі відшукання чебишовської точки системи опуклих обмежених замкнених множин, які неперервно змінюються, відносно скінченновимірного підпростору / В. О. Гнатюк // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки: зб. наук. праць. – Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2010. – Вип. 3. – С. 37-46.

30. Юдин Д. Б. Линейное программирование (теория и конечные методы) / Д. Б. Юдин, Е. Г. Гольштейн. – М. : Физматгиз, 1963. – 774 с.