Міністерство освіти і науки України

Кам`янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка

Фізико-математичний факультет

Кафедра математики

Дипломна робота

магістра

на тему: «**ЗАДАЧА МІНІМІЗАЦІЇ ОПУКЛОЇ КУСКОВО-АФІННОЇ ФУНКЦІЇ В ПРОСТОРІ, СПРЯЖЕНОМУ ДО ЛІНІЙНОГО НОРМОВАНОГО ПРОСТОРУ, З ОБМЕЖЕННЯМИ ТИПУ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ ТА НЕРІВНОСТЕЙ І ДОДАТКОВИМ ОБМЕЖЕННЯМ НА НОРМИ ЇЇ ДОПУСТИМИХ РОЗВ'ЯЗКІВ**»

Виконала: студентка 2 курсу, групи М1-М21
спеціальності: 014 Середня освіта (Математика)
Каліта Наталя Анатоліївна

Керівник: **Гудима Уляна Василівна**,
кандидат фізико-математичних наук, доцент

Рецензент: **Сорич Віктор Андрійович**,
кандидат фізико-математичних наук, доцент

Кам`янець-Подільський – 2022

ЗМІСТ

ВСТУП

Актуальність теми. Математичне моделювання і методи оптимізації важливі при пошуку системних зв'язків і закономірностей функціонування складних систем, для підвищення ефективності управління в технічних, економічних, соціальних системах.

Важливий внесок в розвиток теорії і методів оптимізації та математичного моделювання зробили А. Таккер, Л. Канторович, Дж. Дацинг, Г. Зойтендейк, Е. Гольштейн, Б. Пшеничний та багато інших [2, 5, 8, 10, 11, 12, 13, 14].

Одним із важливих напрямків теорії оптимізації є дослідження задач кусково-лінійного програмування.

Кусково-лінійне програмування – розділ математичного програмування, що вивчає відшукання мінімуму (максимуму) опуклої (вгнутої – у випадку відшукання максимуму) кусково-лінійної функції на опуклій многогранній множині. Зрозуміло, що задача кусково-лінійного програмування є узагальненням задачі лінійного програмування.

Опуклою кусково-лінійною функцією n змінних називають функцію , яку можна подати у вигляді:

$$f(x) = \min_{1 \le l \le p} \varphi_l(x),$$

де $\varphi_l(x) = \sum_{i=1}^{n} d_{li} x_i - b_l, l = 1,2, \dots, p$ – лінійні функції.

Класична задача кусково-лінійного програмування полягає в наступному:

$$\min(max)\, f(x), \tag{0.1}$$

при обмеженнях

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i \{\ge; =; \le\} b_j, j = \overline{1,m}, \tag{0.2}$$

$$x_j \ge 0, \tag{0.3}$$

де $f(x) -$ опукла кусково-лінійна функція, $x = (x_1, \dots, x_n) -$ вектор змінних; матриці $A = (a_{ji}), j = \overline{1,m}, i = \overline{1,n}, b = (b_1, \dots, b_m) -$ задані величини.

Обмеження (0.2), (0.3) визначають опуклу многогранну множину допустимих розв'язків задачі (0.1) – (0.3).

До задач кусково-лінійного програмування зводиться ряд технічних та економічних задач, зокрема, деякі задачі календарного планування виробництва, транспортні задачі, задачі автоматичного регулювання.

Також часто задачі лінійного програмування з великою кількістю обмежень та змінних, шляхом певних міркувань, зводять до задач кусково-лінійного програмування з меншою кількістю змінних та обмежень.

При розв'язуванні більш загальних задач математичного програмування можна точно або наближено звести їх до задачі кусково – лінійного програмування, що дає змогу знайти наближений розв'язок початкової задачі.

Тому дослідження задач кусково-лінійного програмування, зокрема і в узагальнених випадках, є актуальною проблемою сучасної математики.

У роботі розглядається задача мінімізації опуклої кусково-афінної функції в просторі, спряженому до лінійного нормованого простору, з обмеженнями типу лінійних рівнянь та нерівностей і додатковим обмеженням на норми її допустимих розв'язків, яка полягає в наступному.

Нехай X – лінійний над полем дійсних чисел нормований простір, X^* - простір, спряжений з X ; $d_l, l = \overline{1,p}$; $v_j, j = \overline{1,m}$, u_i, $i = \overline{1,n}$, - фіксовані елементи простору X , $\alpha_l \in R, l = \overline{1,p}$; $a_i \in R$, $i = \overline{1,n}$; $b_j \in R$, $j = \overline{1,m}$; θ - фіксоване додатне число, $f \in X^*$.

Поставимо задачу відшукання величини

$$\inf_{f \in X^*} \max_{1 \le l \le p} (f(d_l) + \alpha_l) \tag{0.4}$$

при обмеженнях:

$$f(u_i) = a_i, \ i = \overline{1,n}; \tag{0.5}$$

$$f(v_j) \ge b_j, \ j = \overline{1,m}; \tag{0.6}$$

$$\|f\| \le \theta \ . \tag{0.7}$$

Важливим частковим випадком задачі (0.4) – (0.7) є задача мінімізації кусково-лінійної функції при обмеженнях заданих системою лінійних рівнянь та додатковим обмеженням на норми допустимих розв'язків, яка розглядалась у праці [1].

Мета, об’єкт, предмет і задачі дослідження.

Метою дослідження є: встановити умови існування допустимого розв’язку задачі (0.4) – (0.7), властивості допустимих розв’язків для цієї задачі, дослідити допоміжну задачу до задачі (0.4) – (0.7), довести співвідношення двоїстості для задачі (0.4) – (0.7) та критерії оптимальності допустимих розв’язків двоїстих задач побудованих на цьому співвідношенні.

Об’єктом дослідження є: задача мінімізації опуклої кусково-афінної функції в просторі, спряженому до лінійного нормованого простору, з обмеженнями типу лінійних рівнянь та нерівностей і додатковим обмеженням на норми її допустимих розв’язків.

Предметом дослідження є: проблеми теорії оптимізаційних задач, що стосуються задачі опуклої кусково-афінної функції в просторі, спряженому до лінійного нормованого простору, з обмеженнями типу лінійних рівнянь та нерівностей і додатковим обмеженням на норми її допустимих розв’язків.

Задачами дослідження є:

1) Дослідити множину допустимих розв’язків для задачі (0.4) – (0.7) та її цільову функцію;

2) Встановити умови існування допустимого розв’язку задачі (0.4) – (0.7);

3) Розглянути приєднану задачу до задачі (0.4) – (0.7).

4) Встановити співвідношення двоїстості для задачі (0.4) – (0.7);

5) Встановити критерій оптимальності допустимих розв’язків задач (0.4) - (0.7) та двоїстої до неї.

При розв’язуванні поставлених задач використовувались методи математичного, функціонального, опуклого аналізу, методів оптимізації та дослідження операцій.

Наукова новизна результатів.

Результати роботи є новими і полягають у наступному:

1) Досліджено множину допустимих розв’язків для задачі (0.4) – (0.7) та її цільову функцію;

2) Встановлено умови існування допустимого розв’язку задачі (0.4) – (0.7);

3) Розглянуто приєднану задачу до задачі (0.4) – (0.7).

4) Знайдено співвідношення двоїстості для задачі (0.4) – (0.7);

5) Встановлено критерій оптимальності допустимих розв’язків задач (0.4) - (0.7) та двоїстої до неї.

Практичне значення отриманих результатів. Результати досліджень в дипломній роботі можуть бути використані для подальшого розвитку математичного програмування.

Апробація результатів роботи.

Результати роботи доповідались на засіданнях проблемної групи «Найкраще рівномірне наближення компактнозначних відображень», яка функціонує при кафедрі математики. Окремі результати дослідження висвітлено у статті « Умови існування допустимих розв’язків для задачі мінімізації опуклої кусково-афінної функції в просторі, спряженому до лінійного нормованого простору, з обмеженнями типу лінійних рівнянь та нерівностей і додатковим обмеженням на норми її допустимих ».

Структура роботи. Дипломна робота складається із вступу, двох розділів та списку використаних джерел.

У першому розділі наведено постановку задачі мінімізації опуклої кусково-афінної функції в просторі, спряженому до лінійного нормованого простору, з обмеженнями типу лінійних рівнянь та нерівностей і додатковим обмеженням на норми її допустимих розв’язків, для цієї задачі досліджено множину допустимих розв’язків та її цільову функцію, встановлено умови існування допустимого розв’язку цієї задачі.

У другому розділі розглядається приєднана задача до задачі (0.4) – (0.7), доведено співвідношення двоїстості і критерій оптимальності допустимих розв’язків задач (0.4) - (0.7) та двоїстої до неї.

ВИСНОВКИ

У дипломній роботі розглядалась задача мінімізації опуклої кусково-афінної функції в просторі, спряженому до лінійного нормованого простору, з обмеженнями типу лінійних рівнянь та нерівностей і додатковим обмеженням на норми її допустимих розв’язків.

При дослідженні цієї задачі досліджено властивості множини допустимих розв’язків для задачі (1.1.8) – (1.1.11) та її цільову функцію, встановлено умови існування допустимого розв’язку задачі (1.1.8) – (1.1.11), розглянуто приєднану задачу до задачі (1.1.8) – (1.1.11), знайдено співвідношення двоїстості для задачі (1.1.8) – (1.1.11), встановлено критерій оптимальності допустимих розв’язків задач (1.1.8) – (1.1.11) та двоїстої до неї.

При розв’язуванні поставлених задач використовувались методи математичного, функціонального, опуклого аналізу, методів оптимізації та дослідження операцій.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Гнатюк В. О., Чікуркова Я. В. Співвідношення двоїстості для задачі мінімізації кусково-лінійної функції при обмеженнях, заданих системою лінійних рівнянь, та додатковому обмеженню на норми допустимих розв'язків. Наукові праці Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка: збірник за підсумками звітної наукової конференції викладачів, докторантів і аспірантів. [Електронний ресурс]. Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2022. Вип. 21.С. 283-285.

2. Гольштейн Е. Г. Выпуклое программирование (элементы теории). 117 М: Наука. Главная редакция физико-математической литературы. 1970. 68 с.

3. Гольштейн Е.Г. Теория двойственности в математическом программировании и ее приложения. М: Наука, 1971 – 351 с.

4. Гудима У. В., Гнатюк В. О. Опуклий аналіз: навчальний посібник. Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2019. С.112.

5. Зангвилл У. Нелинейное программирование. Единый подход. 1969г. Пер. с англ., под ред. Е. Г. Гольштейна. М.: «Сов. радио», 1973. 312 с.

6. Иоффе А. Д., Тихомиров В. М. Теория экстремальных задач. М: Наука, 1974. 480 с.

7. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. М: Наука, 1984. С.752.

8. Пшеничный Б. Н. Выпуклый анализ и экстремальные задачи. М: 128 Наука. Главная редакция физико-математической литературы. 1980.

9. Фань Цзи. Теоремы о минимаксе . Бесконечные антагонистические игры. М.: Физматгиз, 1963. С. 31-39.

10. Bazaraa, M. S., Sherali H. D., Shetty C. M.: Nonlinear Programming: Theory and Algorithms, 3rd ed. Wiley-Interscience, Hoboken, New Jersey, 2006. 853 p.

11. Bertsekas D. P., Nedić A., Ozdaglar A. E., Convex Analysis and Optimization. Athena Scientific, Belmont, Massachusetts, 2003. 560 p

12. Borwein J.M., Lewis A.S. Convex analysis and nonlinear optimization. SpringerVerlag, New York, 2000.

13. Kuhn H. W. and Tucker A. W. "Nonlinear Programming", Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability (J. Neyman, ed.), Berkeley, University of California Press, 1951, pp. 481-492.

14. Nesterov, Y., and A. Nemirovskii: Interior-Point Polynomial Algorithms in Convex Programming. Studies in Applied Mathematics, Vol. 13. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1994.