

Міністерство освіти і науки України  
Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка  
Фізико-математичний факультет  
Кафедра математики

Дипломна робота  
магістра

з теми: **“МАТРИЦІ ВІДСТАНЕЙ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ”**

Виконав: студент 2 курсу  
ступеня вищої освіти «магістр»,  
групи М1-М21  
спеціальності 014 Середня освіта  
(Математика)

**Солярник Олексій**

Керівник: **Зеленський О. В.**,  
кандидат фізико-математичних наук

Рецензент: **Кріль С. О.**,  
кандидат фізико-математичних наук,  
доцент

Кам'янець-Подільський – 2022

## ЗМІСТ

ВСТУП.....	3
РОЗДІЛ 1. МАТРИЦІ ПОКАЗНИКІВ ТА ЇХ САГАЙДАКИ.....	4
1.1. Матриці показників.....	5
1.2. Допустимі сагайдаки.....	10
РОЗДІЛ 2. (0,1) МАТРИЦІ ТА ГОРЕНШТЕЙНОВІ МАТРИЦІ.....	18
2.1. (0,1) МАТРИЦІ.....	18
2.2. Допустимі сагайдаки які одержуються тільки з горенштейнових матриць.....	30
РОЗДІЛ 3. МАТРИЦІ ВІДСТАНЕЙ.....	35
3.1. Матриці показників та матриці відстаней.....	35
3.2. Відновлення матриць відстаней.....	43
3.2.1. Відновлення матриці відстаней між об'єктами на прямій.....	44
3.2.2. Відновлення матриці Евклідових відстаней.....	45
3.3. Застосування матриць відстаней при розв'язуванні математичних проблем.....	48
ВИСНОВКИ.....	54
СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ.....	55

## ВСТУП

Дипломна робота присвячена матрицям показників та матрицям відстаней

Матриці відстаней присутні в економіці, біоінформатиці, програмуванні, а також у створенні нових технологій. Також матриці відстаней можуть бути застосовані у машинному навчанні, та при створенні будь-якої статистики.

Матриці показників виникають в різних питаннях теорії кілець та застосовуються в алгебрі та дискретній математиці.

Метою наукової роботи є визначення можливості відновлення матриці Евклідових відстаней, відновлення матриці відстаней між об'єктами на прямій, а також дослідження застосування матриці відстаней в криптографії та теорії графів. Також в дипломній роботі розглянуті матриці показників які є матрицями Евклідових відстаней та Манхеттенських відстаней.

Матриця показників визначається допустимим сагайдаком та ваговою функцією, матриця відстаней визначається розміщенням об'єктів тобто це матриці різної будови. В роботі досліджується зв'язок між матрицями показників та матрицями відстаней.

Для досягнення поставленої мети необхідно вирішити такі завдання:

- виконати аналіз сучасних відомостей про матриці відстаней;
- знайти необхідні та достатні умови можливості відновлення матриці Евклідових відстаней,

- розробити алгоритм застосування матриці відстаней у криптографії;

Об'єктом дослідження є матриці відстаней.

Під час дослідження використовувалися комбінаторні та геометричні методи дослідження та методи теорії графів.

Предметом дослідження є можливість відновлення матриці відстаней з різними мірами відстаней.

Наукова новизна основних результатів роботи:

- Знайдено алгоритм відновлення матриці відстаней між об'єктами на прямій;
- Знайдено критерій можливості відновлення матриці відстаней між об'єктами площини;
- Встановлено коли симетрична матриця показників є матрицею відстаней
- Створено алгоритм застосування матриці відстаней у криптографії

Практичне значення цієї роботи полягає в тому, що проведені в ній дослідження можуть використовувати учні, які готуються до різних математичних конкурсів, вчителі математики та фахівці з теорії графів, теорії матриць, та криптографії.

## ВИСНОВКИ

Робота присвячена дослідженню зв'язку між матриці відстані та матрицями показників. Також в дипломній роботі досліджується можливість відновлення т матриць відстаней за певних умов, а також застосування матриць відстаней в криптографії та математиці.

Матриці відстаней широко використовуються у сучасному світі. Наприклад в економіці, біоінформатиці, програмуванні, а також у створенні нових технологій. Також матриці відстаней можуть бути застосовані у машинному навчанні та при створенні будь-якої статистики

В роботі доведено, що для відновлення матриці відстаней  $D$  між об'єктами на прямій необхідно та досить, щоб граф  $G(D)$  був зв'язним. Для відновлення матриці Евклідових відстаней між об'єктами на площині, необхідно та досить знати  $2n-3$  незалежних відстані.

В дипломній роботі встановлено, що допустимий сагайдак від матриці показників, яка є матрицею відстаней має петлю в кожній вершині, знайдено умови коли симетрична матриця показників є матрицею Манхеттенських відстаней та знайдені матриці довільної розмірності, які одночасно є матрицями показників та відстаней.

Знайдено застосування матриць відстаней в криптографії для передачі ключа до шифру по відкритому каналу зв'язку, та розглянуто застосування в математиці при розв'язуванні задач, пов'язаних з цикломатичним числом площини.

Практичне значення цієї роботи полягає в тому, що проведені в ній дослідження можуть використовувати фахівці з теорії кілець та теорії графів, також учні та вчителі математики, які готуються до різних математичних конкурсів та олімпіад.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Hazewinkel M. Algebras Rings and Modules, vol. 1/ M. Hazewinkel, N. Gubareni, V.V. Kirichenko – Kluwer Academic Publisheers, 2004.- 380 p.
2. Kirichenko V. V. Exponent Matrices and Tiled Order over Discrete Valuation Rings/ V. V. Kirichenko , O. V. Zelenskiy, V. N. Zhuravlev // International Journal of Algebra and Computation. – 2005. – Vol. 15, № 5 & 6. – p. 1-16.
3. Зеленський О. В. Жорсткі сагайдаки зведених матриць показників / О. В. Зеленський // Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки. – 2007. – №3. – С. 27-31.
4. Журавлев В. Н. Допустимые колчаны./ В.Н. Журавлев// Фундаментальная и прикладная математика. Том 14, 2008. 7, с. 121-128.
5. Журавльов В. М. Одиничні сагайдаки матриці показників/ В.М. Журавльов, О.В. Зеленський, В.М. Дармосюк // Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки. – 2012. – №4. – С. 27-31.
6. Kirichenko V. V. / Quivers and Latin square. // V. V. Kirichenko, M. A. Khibina, V. N Zhuravlev, O. V Zelenskiy Quivers and Latin square. São Paulo Journal of Mathematical Sciences P. 1-15.
6. Кириченко В.В., Журавлёв В.Н., Цыгановская И.Н., О жестких колчанах // Фундаментальная и прикладная математика. Том 12, выпуск 8, 2006. Часть 1. С.105 – 120.
7. Журавльов В. М. Одиничні сагайдаки матриці показників/ В.М. Журавльов, О.В. Зеленський, В.М. Дармосюк // Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки. – 2012. – №4. – С. 27-31.
8. Зеленський О. В. Цикли допустимих сагайдаків / О. В. Зеленський// Математичні студії. Том 42, випуск 1.С. 3-8.

9. A. Y. Alfakih, A. Khandani, and H. Wolkowicz, “Solving Euclidean Distance Matrix Completion Problems via Semidefinite Programming,” *Comput. Optim. Appl.*, vol. 12, no. 1-3, pp. 13–30, Jan. 1999.
10. L. Doherty, K. Pister, and L. El Ghaoui, “Convex Position Estimation in Wireless Sensor Networks,” in *Proc. IEEE INFOCOM*, vol. 3, 2001, pp. 1655–1663.
11. S. Saharon. Axiom of choice and chromatic number of the plane/ Saharon S., Soifer A. *Journal of Combinatorial Theory, Series A T.* 103 (2): 387–391