

Міністерство освіти і науки України
Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка
Фізико-математичний факультет
Кафедра математики

Дипломна робота
магістра

з теми: «ГІПОТЕЗА $3N+1$ ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ»

Виконала: студентка 2 курсу
ступеня вищої освіти магістр,
групи М1-М21
спеціальності 014 Середня освіта
(Математика)

Сливка Христина Володимирівна

Керівник: **Зеленський О. В.**,
кандидат фізико-математичних наук

Рецензент: **Кріль С. О.**,
кандидат фізико-математичних наук,
доцент

Кам'янець-Подільський – 2022

ЗМІСТ

ВСТУП.....	3
РОЗДІЛ 1. ГРУПИ ТА МАТРИЦІ.....	6
РОЗДІЛ 2. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ГРАФІВ ТА ФОРМУЛЮВАННЯ ГІПОТЕЗИ КОЛЛАТЦА.....	39
2.1. Елементи теорії графів.....	39
2.2. Формулювання гіпотези Колатца та її можливий мінімальний контрприклад.....	41
РОЗДІЛ 3. АЛГОРИТМУ КОЛЛАТЦА ТА ФУНКЦІЯ $T(N)$	47
3.1. Функція $T(n)$	47
3.2. Застосування гіпотези $3n+1$ у криптографії.....	49
ВИСНОВКИ.....	51
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	52

ВСТУП

Гіпотеза Коллатца – одна з найвідоміших невирішених математичних проблем, яку сформулював Лотар Коллатц у 1932 році. Ця проблема має багато різних імен. Гіпотеза також відома під назвою “Сіракузька проблема”, або “гіпотеза $3n+1$ ”, або “послідовність чисел градін”, або “гіпотеза Улама”, або “Теорема Какутані”, або “алгоритм Хасса” або “гіпотеза Туетца”,

Розглянемо натуральне число n . Якщо воно непарне помножимо його на три та додамо один, а якщо парне поділимо його на два. З одержаним числом повторимо цю дію. Потрібно довести, що починаючи з довільного числа ми прийдемо до циклу (4, 2,1).

Формулювання гіпотези зрозуміло учню 5 класа, проте молодим математикам не радять займатися цією проблемою, щоб даремно не витратити час.

Відомий математик Пол Елдерш говорив:”Математика ще не дозріла для таких серйозних питань”. Числа, які одержуються в послідовностях алгоритма $3n+1$ називаються числами градинами, тому, що подібно до градін в облаках їх значення то піднімаються то опускаються.

Існувала навіть думка, що гіпотеза $3n+1$ це розробка радянських вчених, щоб зупинити науку в Сполучених Штатах Америки тому, що ніхто не міг отримати результати в цій проблемі.

Гіпотеза може виявитися хибною в двох випадках. Якщо починаючи з деякого натурального числа ми одержимо послідовність чисел, які необмежено зростають, або починаючи з деякого натурального числа ми одержимо цикл відмінний від циклу (4,2,1).

В пошуках таких контрприкладів математики простим перебором перевірили всі натуральні числа до 2^{68} , всі вони приходять до циклу (4,2,1). Використовуючи це було доведено, що якщо існує цикл відмінний від (4 2 1) він містить мінімум 180 000 000 000 чисел.

У 2019 році Теренс Тао завдяки теорії ймовірності показав, що майже всі орбіти натуральних чисел в гіпотезі Коллатца обмежені будь-якою повільно зростаючою функцією, що прямує до нескінченності. Це один із найбільш значущих результатів гіпотези Коллатца, досягнутих за останні десятиліття

Проблема $3n+1$ залишається відкритою вже більше 90 років, хоча певні просування у її вирішенні є.

Вектор дослідження спрямовано на аналіз можливих контрприкладів до гіпотези з подальшим знаходженням їх деяких характеристик. Автором з'ясовано вигляд можливих мінімальних контрприкладів до гіпотези.

Крім того в роботі досліджено функцію $T(n)$, та перші кроки алгоритму $T(n)$. В роботі доведено, що перших k кроків алгоритму $T(n)$ однозначно визначаються останніми k двійковими бітами числа n .

Актуальність обраної теми дослідження визначається стрімкими темпами розвитку сучасної теорії чисел та графів, які пов'язані із розширенням їх сфери використання: бізнес, логістика, криптографія, туризм і, головне, створення комп'ютерних програм.

Метою наукової роботи є дослідження гіпотези Коллатца.

Для досягнення поставленої мети необхідно вирішити такі завдання:

- проаналізувати сучасний стан дослідженості гіпотези Коллатца;
- дослідити можливі мінімальні контрприкладі до гіпотези Коллатца
- дослідити рух по орбіті Коллатца в звичайному та оберненому напрямі;
- розробити застосування гіпотези Коллатца у криптографії;

Об'єктом дослідження є математична проблема теорії чисел– гіпотеза Коллатца.

Наукова новизна основних результатів роботи:

- знайдені обмеження можливих мінімальних контрприкладів до гіпотези,
- досліджено рух по орбіті Коллатца в зворотньому напрямі,
- знайдено застосування гіпотези Коллатца у Криптографії,
- доведено, що перші k кроків алгоритму $T(n)$ визначаються останніми k бітами в двійковому запису числа n

Практичне значення цієї роботи полягає в тому, що проведені в ній дослідження можуть використовуватись учнями які готуються до різних математичних конкурсів, учителями математики та науковці, які цікавляться теорією чисел та теорією графів.

Основні твердження цього дослідження є ефективними доповненнями відомої гіпотези, оскільки вони визначають важливі властивості, що може допомогти в остаточному розв'язанні поставленої проблеми.

Під час дослідження використовувалися комбінаторні методи дослідження, методи теорії чисел та методи теорії графів.

ВИСНОВКИ

В роботі досліджується гіпотеза Коллатца та її застосування в різних галузях. Визначели рівень дослідженості проблеми. Гіпотеза Коллатца одна з найскладніших проблем сучасної математики.

В науковому дослідженні знайдені обмеження для можливого мінімального контрприкладу до гіпотези Коллатца. В роботі досліджено орбіту послідовності $T(n)$. Зокрема, доведено, що перших k кроків алгоритму $T(n)$ однозначно визначаються останніми k двійковими бітами числа n , та не залежать від перших бітів числа n .

В роботі знайдено ряд властивостей звичайних та обернених орбіт Коллатца. В науковому дослідженні розроблено використання гіпотези у криптографії, за допомогою обернених орбіт Коллатца

За результатами цієї роботи наукова стаття “A note on possible counterexamples to Collatz conjecture” подано до друку у математичний журнал “Opuscula Mathematica”.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. W. Ren, «A New Approach on Proving Collatz Conjecture,» Journal of Mathematics, pp. 1- 12, 2019.
2. J. A. Tenreiro Machado, A. Galhano y D. Cao Labora, «A Clustering Perspective of the Collatz Conjecture,» Mathematics, vol. 9, n° 314, pp. 1-14, 2021.
3. T. Tao, «Almost all orbits of the Collatz map attain almost bounded values,» 18 09 2019. [En línea]. Available: <https://arxiv.org/abs/1909.03562>.
4. D. Barina, «Convergence verification of the Collatz problem,» The Journal of Supercomputing, pp. 2681-2688, 2021.
5. L. Colussi, «The convergence classes of Collatz function,» Theoretical Computer Science, vol. 412, n° 39, pp. 5409-5419, 2011. [6] P. C. Hew, «Working in binary protects the repetends of $1/3h$: Comment on Colussi's 'The convergence classes of Collatz function',» Theoretical Computer Science, vol. 618, pp. 135- 141, 2016.
6. Карнаух Т.О., Ставровський А.Б. Теорія графів у задачах / К.: ВПЦ "Київський університет", 2004. 90 с.
7. Шевченко Г.В. Дискретна математика / К.: ДУТ, 2015. 158 с.
8. Diestel R. Graph Theory. Graduate Texts in Mathematics. Vol. 173, 2nd ed. 2000. P. 7.
9. J. Lagarias, The $3x+1$ problem and its generalizations, Amer. Math. Monthly 92 (1985), no. 1, 3–23
J. Lagarias, A. Weiss, The $3x + 1$ problem: two stochastic models, Ann. Appl. Probab. 2 (1992), no. 1, 229–261.
10. Oliveira e Silva, T. (1999). Maximum excursion and stopping time record-holders for the $3x+1$ problem: computational results. Mathematics of Computation, 68(225), 371-384.