Міністерство освіти і науки України
Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка
Фізико-математичний факультет
Кафедра математики

Дипломна робота
магістра

з теми: **«ОЦІНКА НАЙКРАЩИХ НАБЛИЖЕНЬ ДЛЯ УЗАГАЛЬНЕНОЇ ПОХІДНОЇ»**

Виконав:
студент 2 курсу, М1-М21 групи
спеціальності 014 Середня освіта
(Математика)
Ямполь Юрій Віталійович

Науковий керівник:
кандидат фізико-математичних наук,
доцент, доцент кафедри математики
Ковальська Ірина Борисівна

Рецензент: кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент
кафедри математики
Сорич Віктор Андрійович

Кам'янець-Подільський – 2022

ЗМІСТ

ВСТУП

У даній роботі ми досліджуємо задачу про властивості найкращих наближень для узагальненої похідної в банахових просторах.

Диференціальне числення та теорія диференціальних рівнянь базуються на понятті похідної, яка спочатку вводиться у класичному значенні. Наприклад, будь-яка монотонно неспадна функція має не більше ніж зліченне число точок розриву першого роду, в яких функція явно не диференційована в класичному сенсі.

У фізиці та розділах математики: у диференціальних рівняннях та теорії ймовірностей виникає потреба розширити поняття похідної, вводячи узагальнену похідну, за допомогою якої функція, що має розриви першого роду, стає диференційованою в точках розриву. Як наслідок диференціювання в узагальненому сенсі розривних функцій виникають узагальнені похідні.

Важливий внесок у формуванні нового математичного підходу до поняття похідної належить Вейлю, Надю Б., Степанцю О. І., які узагальнили поняття похідної. Це дозволило більш тонко класифікувати диференційовні функції, детальніше вивчати їх поведінку і глибше розуміти зв'язки між різними класами диференційовних функцій та їх апроксимаційними характеристиками.

В теорії апроксимації часто доводиться розв'язувати задачу, яка полягає в тому, щоб ґрунтуючись на досліджуваних властивостях даної функції, встановити властивості її апроксимаційних характеристик. Функції з однаковими властивостями об'єднуються в класи і тоді факти, встановлені для певного класу, відносяться до кожного його представника. При цьому з'являється можливість формулювати нові задачі, зокрема, задачі математичного моделювання вже для цілих класів функцій, які описують досліджувані процеси.

Об'єкт дослідження: узагальнені похідні елементів у банахових просторах.

Предмет дослідження: найкращі наближення узагальнених похідних поліномами степеня n.

Мета дослідження: дати теоретичне обґрунтування поняття узагальнених похідних функцій банахового просторору та зробити оцінку найкращих наближень цих похідних поліномами степеня n у банахових просторах.

Завдання дослідження:

1. Розглянути властивості функцій у банахових.

2. Означити узагальнені похідні для таких функцій.

3. Оцінити найкращі наближення узагальнених похідних поліномами $T_n(\varphi)$ у банахових просторах.

Для вирішення поставлених завдань використовувався комплекс **методів дослідження**:

− аналіз науково-методичної літератури;

− систематизація інформації і узагальнення отриманих даних;

− формулювання та доведення основи результатів дослідження.

Практичне значення. Матеріал, розглянутий у цій магістерській кваліфікаційній роботі, можна використовувати у вузівському курсі вивчення функціонального аналізу.

Структура дослідження: робота складається з вступу, двох розділів, висновків, списку використаних джерел.

ВИСНОВКИ

Дипломна робота складається зі вступу, двох розділів, висновків і списку використаних джерел.

У вступі сформовано основну мету дослідження, деталізуються поставлені завдання, підкреслюється їх актуальність.

Перший розділ містить п’ять пунктів. У них сформовано основні означення та властивості елементів банахового простору. Сформульовано теорему Джексона та її узагальнення для апроксимації функцій у банаховому просторі. У п’ятому пункті означено поняття узагальненої похідної та подано її властивості у банаховому просторі.

Другий розділ складається з трьох пунктів. У них розглянуто найкращі наближення функцій у банахових просторах, сформульовано та доведено теорему С. Н. Бернштейна про наближення функцій у банаховому просторі. Завершується розділ теоремою та її доведенням про оцінку найкращих наближень узагальненої похідної у банаховому просторі.

При написанні дипломної роботи було проведено детальне порівняння різних оцінок найкращих наближень узагальненої похідної у банахових просторах. Це дослідження дозволило виокремити сильні та слабкі сторони оцінки найкращих наближень, зрозуміти область їх використання.

В результаті було доведено наступну теорему.

Нехай для деякої зростаючої послідовності натуральних чисел $\{n_i\}_{i=1}^{\infty}$ збігається ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu_{n+1}\left(\partial_{\varphi}^{\lambda}\right) E_{n_i}(f, \varphi)$$

Тоді, для вектора $f \in \mathcal{B}$ існує $\partial_{\varphi}^{\lambda}$ похідна і її найкраще наближення поліномами $T_n(\varphi)$ не перевищує подвоєного залишку цього рядку, тобто

$$E_{n_k}\left(\partial_\varphi^\lambda f,\varphi\right) \le 2\sum_{i=k}^{\infty}\mu_{n_{i+1}}\left(\partial_\varphi^\lambda\right)E_{n_i}(f,\varphi)$$

Ця теорема узагальнює усі підходи до оцінки найкращих наближень похідних різних типів поліномами степеня n в банахових просторах.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Антосик П., Микусинский Я., Сикорский Р. Теория обобщенных функций. Москва: Мир, 1976. 311 с.

2. Арестов В. В. Про інтегральні нерівності для тригонометричних поліномів та їх похідних. АН СССР. Серія матем., 1981. С. 3-22.

3. Antosik P., Kaminski A. Functions and Convergence Memorial Volume for Professor Jan Mikusinski / Institute of Mathematics Polish Academy of Sciences. Katowice: World Scientific, 1990. 396 p.

4. Бернштейн С. Н. О наилучшем приближении непрерывных функций посредством многочленов данной степени. Москва. АН СССР, 1952. С. 11-104.

5. Bremermann H. J. Distributions, Complex Variables, and Fourier Transforms. 1st ed. New Jersey: Addison-Wesley, 1965. 186 p.

6. Baker G., Freie. A. Nonlinear Partial Differential Equations in Geometry and Physics / University of Tennessee. Tennessee: Springer Basel AG, 1997. 150 p.

7. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. 4-е издание. Москва: Наука, 1981. 512 с.

8. Владимиров В. С. Обобщенные функции в математической физики. Москва: Наука, 1979. 320 с.

9. 7. Егоров Ю. В. К теории обобщенных функций. *Успехи математических наук*. 1990. Вып. 5 (275). С. 19–31.

10. Зигмунд А. Тригонометрические ряды. Т. 1, 2. Москва: Мир, 1965.

11. Никольский С.М. Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем Изв. АН СССР, сер.матем.1946. 10. С.207-256.

12. Степанец А. И. Методы теории приближений. Киев: Институт математики НАН Украины, 2022, Ч. I. 427 с.

13. Степанец А. И. Методы теории приближений. Киев: Институт математики НАН Украины, 2022, Ч. II. 468 с.

14. Степанец А. И., Жукина Е. И. Обратные теоремы приближения $(\psi;\beta)$ – дифференцируемых функций. Укр. мат. журнал (№8). 1989, с. 1106-1112.

15. Стечкин С.Б. Оценки остатка ряда Фурье для дифференцируемых функций. Труды МИ АН СССР. 1980. С.126-151.

16. Colombeau J. F. Elementary Introduction to New Generalized Functions. Amsterdam: North-Holland Publishing, 1985. 280 p.

17. Caputo M., Fabrizio M. New definition of fractional derivative without singular kernel: *Natural Sciences Publishing*. 2015. Vol. 2, No. 1. P. 73–85.

18. Li C. K. The powers of the Dirac delta function by Caputo fractional derivatives. *Journal Fractional calculus application*. 2016. Vol. 7, No. 1. P. 12–23. URL: https://people.brandonu.ca/lic/files/2015/11/Li_2016.pdf. (дата звернення: 12.07.2022 р.)

19. Szego G. Uber einen satz des Hern Serge Bernstein. Schrift. Konigsberg. Ge-lehrten Gesellschaft.1928.Vol. 5. No4. P. 59-70.