

Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова
Національної академії наук України
Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка

МАТЕМАТИЧНЕ ТА КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ

Серія: Технічні науки

Збірник наукових праць

Випуск 20

Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка
2019

УДК 004.94:53.072
ББК 30
М34

Свідцтво про державну реєстрацію друкованого засобу масової інформації:
Серія КВ № 14522-3493Р від 25.06.2008 р.

Збірник наукових праць включено до Переліку наукових фахових
видань ДАК Міністерства освіти і науки України з технічних наук
(наказ №1021 від 07 жовтня 2015 р.)

Друкується згідно з рішенням вченої ради Кам'янець-Подільського
національного університету імені Івана Огієнка,
протокол № 8 від 28 серпня 2019 року.

Рецензенти:

І. В. Бейко, доктор технічних наук, професор,
Національний технічний університет України

«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»;

Р. Н. Квстний, доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри
Вінницького національного технічного університету.

Редакційна колегія:

О. М. Хіміч, член-кореспондент НАНУ,
доктор фізико-математичних наук, професор (*відповідальний редактор*);

А. Ф. Верлань, член-кореспондент НАПНУ,
доктор технічних наук, професор (*заст. відповідального редактора*);

В. А. Федорчук, доктор технічних наук, професор (*відповідальний секретар*);

Т. Бокалруд, доктор філософії, професор, Норвегія;

В. П. Боюн, член-кореспондент НАНУ, доктор технічних наук, професор;

В. В. Васильєв, член-кореспондент НАНУ, доктор технічних наук, професор;

Д. Г. Вєлєв, доктор філософії, професор, Болгарія;

А. А. Верлань, доктор філософії, професор, Норвегія;

В. К. Задірака, академік НАНУ, доктор фізико-математичних наук, професор;

І. М. Конет, доктор фізико-математичних наук, професор;

Б. Б. Нестеренко, доктор технічних наук, професор;

С. А. Положаєнко, доктор технічних наук, професор.

Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки : зб.
М34 наук. праць / Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова Національної
академії наук України, Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка ; [редкол.: О. М. Хіміч (відп. ред.) та ін.]. — Кам'янець-
Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана
Огієнка, 2019. — Вип. 20. — 152 с.

У збірнику друкуються результати досліджень, що стосуються проблем
застосування математичних моделей у різних галузях людської діяльності.

Збірник включений до бази даних наукових журналів Норвегії.

Для наукових та інженерно-технічних працівників, докторантів, аспірантів,
студентів вищих навчальних закладів.

УДК 004.94:53.072
ББК 30

ISSN 2308-5916
DOI: 10.32626/2308-5916.2019-20

© Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова НАН України, 2019
© Кам'янець-Подільський національний
університет імені Івана Огієнка, 2019

V. M. Glushkov Institute of Cybernetics
of National Academy of Sciences of Ukraine
Kamianets-Podilskyi National Ivan Ohienko University

MATHEMATICAL AND COMPUTER MODELLING

Series: Technical sciences

Scientific journal

ISSUE 20

Kamianets-Podilskyi National Ivan Ohienko University
2019

Critics:

I. Beyko, Doctor of Technical Science, Professor,
National Technical University of Ukraine
«Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute»;

R. Kvyetnyy, Doctor of Technical Science, Professor,
Head of department Vinnytsia national technical university.

Editorial board:

O. Himich, Corresponding Member of the NAS of Ukraine, Doctor
of Physical and Mathematical Sciences, Professor (*Executive Editor*);

A. F. Verlan, Corresponding Member of the NAPS of Ukraine,
Doctor of Technical Science, Professor (*Vice Executive Editor*);

V. Fedorchuk, Doctor of Technical Science,
Professor (*Responsible Secretary*);

T. Bokalrud, Associate Professor, Norway;

V. Boyun, Corresponding Member of the NAS of Ukraine,
Doctor of Technical Science, Professor;

I. Konet, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor;

B. Nesterenko, Doctor of Technical Science, Professor;

S. Polozhaenko, Doctor of Technical Science, Professor;

V. Vasiliev, Corresponding Member of the NAS of Ukraine,
Doctor of Technical Science, Professor;

D. Velez, Ph. D., Professor, Bulgaria;

A. A. Verlan, Ph. D., Professor, Norway;

V. Zadiraka, Academician of the NAS of Ukraine,
Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor.

Mathematical and computer modelling. Series: Technical sciences: scientific journal / V. M. Glushkov Institute of Cybernetics of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kamianets-Podilskyi National Ivan Ohiienko University ; [Editorial Board: O. Himich (*Executive Editor*) and others]. — Kamianets-Podilskyi : Kamianets-Podilskyi National Ivan Ohiienko University, 2019. — ISSUE 20. — 152 p.

The journal publishes results of studies on the mathematical models' application problems in various areas of human activity.

Joint with NTNU the journal has been included to the database of Norwegian Register for Scientific Journals, Series and Publishers.

Intended for scientific and engineering staff, researchers, undergraduate, graduate and Ph. D. students, post-graduates.

© V. M. Glushkov Institute of Cybernetics
of NAS of Ukraine, 2019

© Kamianets-Podilskyi National
Ivan Ohiienko University, 2019

ISSN 2308-5916

DOI: 10.32626/2308-5916.2019-20

УДК 519.87;53.08

DOI: 10.32626/2308-5916.2019-20.5-15

А. Ф. Верлань, д-р техн. наук, професор

Інститут проблем моделювання в енергетиці
імені Г. Є. Пухова НАН України, м. Київ

ІНВЕРСНО-ОБЧИСЛЮВАЛЬНИЙ ПІДХІД У ЗАДАЧІ ДИНАМІЧНОЇ КОРЕКЦІЇ ВИМІРЮВАЛЬНИХ СИСТЕМ ІЗ ЗАСТОСУВАННЯМ ІНТЕГРАЛЬНИХ МОДЕЛЕЙ

Розвиток сучасних систем вимірювання, контролю, управління і діагностики характеризується підвищенням вимог до якісних показників, розширенням функціональних можливостей, зростанням складності дослідних і проектних задач при їх створенні. Як правило, основою функціонування зазначених систем є методи і засоби обробки експериментальних даних і комп'ютерної реалізації математичних моделей. У багатьох практично важливих задачах оперативна оцінка досліджуваних процесів і явищ за показаннями вимірювальних приладів має першорядне значення. Подібні задачі на практиці відомі як задачі відновлення сигналів.

Застосування засобів обчислювальної техніки для відновлення сигналів дає принципову можливість використання в системах вимірювання та контролю маловитратних первинних вимірювальних перетворювачів з невисокою роздільною здатністю. Ефективність застосування обчислювальних пристроїв в системах вимірювання та контролю обумовлюється насамперед низькими витратами на їх розробку в порівнянні з вдосконаленням фізичної конструкції певних елементів цих систем. Більш того, в деяких випадках така можливість виявляється обмеженою не так економічними, скільки фізичними межами.

Розвиток методів оперативної обробки інформації характеризується збільшенням частки обернених задач в загальному переліку вирішуваних задач системами даного класу. При цьому мається на увазі, що принципово всі задачі математичного моделювання можна розділити на дві групи: прямі задачі, тобто задачі аналізу, коли відомі причини певних процесів і необхідно знайти слідства, а також зворотні задачі, коли відомі слідства і потрібно знайти причини. Однією з найважливіших задач відновлення сигналів є задача структурної корекції характеристик динамічних систем, яка полягає в побудові і використанні в перетворюючому каналі або контурі системи такого блоку, який завдяки своїм спеціально сформованим динамічним властивостям перетворює необхідним чином загальні динамічні властивості системи.

Ключові слова: *вимірювальна система, відновлення сигналу, структурна корекція, динамічні вимірювання, інверсний підхід.*

Вступ. Розвиток сучасних систем вимірювання, контролю, управління і діагностики характеризується підвищенням вимог до якісних показників, розширенням функціональних можливостей, зростанням складності дослідних і проектних задач при їх створенні. Як правило, основою функціонування зазначених систем є методи і засоби обробки експериментальних даних і комп'ютерної реалізації математичних моделей [13]. Зазначені типи технічних систем відносяться до класу комп'ютерно-інтегрованих систем, що включають в себе спільно функціонуючі об'єкти довільної фізичної природи і обчислювальні пристрої. Характерною особливістю даного виду систем є необхідність роботи в реальному часі і жорсткі вимоги до конструктивного виконання [17]. У підсумку це свідчить про те, що комп'ютерна частина системи повинна задовольняти вимогам до необхідної швидкодії і обмеженому ресурсу пам'яті. Звідси випливають відповідні вимоги до чисельних алгоритмів і програмних засобів, що забезпечують функціонування комп'ютерних засобів систем.

Задача динамічної корекції вимірювальних систем. У багатьох практично важливих задачах оперативна оцінка досліджуваних процесів і явищ за показаннями вимірювальних приладів має першорядне значення [14]. Подібні задачі на практиці відомі як задачі відновлення сигналів. Під відновленням сигналу мається на увазі така обробка вихідного сигналу вимірювального перетворювача з використанням відомостей про його динамічні характеристики, яка дозволяє отримати сигнал якомога ближчий до істинного вхідного сигналу. При виготовленні первинних вимірювальних перетворювачів і виконавчих елементів систем автоматичного керування [15] необхідні характеристики міцності, як правило, можна отримати виключно за рахунок погіршення якості їх динамічних характеристик, зокрема підвищення їх інерційності щодо сприйняття реєстрованих або керуючих сигналів, що зумовлює низьку точність таких систем. До речі, застосування засобів обчислювальної техніки для відновлення сигналів дає принципову можливість використання в системах вимірювання та контролю маловитратних первинних вимірювальних перетворювачів з невисокою роздільною здатністю.

Ефективність застосування обчислювальних пристроїв в системах вимірювання та контролю обумовлюється насамперед низькими витратами на їх розробку в порівнянні з вдосконаленням фізичної конструкції певних елементів цих систем. Більш того, в деяких випадках така можливість виявляється обмеженою не так економічними, скільки фізичними межами. Так, наприклад, знижувати інерційність датчика теплового потоку за рахунок зниження його теплоємності безмежно неможливо, тому що він просто згорить в потужному теп-

ловому потоці, особливо коли мова йде про роботу в агресивних середовищах, зокрема, при управлінні процесом спалювання палива в топках котлоагрегатів теплових електростанцій.

Розвиток методів оперативної обробки інформації характеризується збільшенням частки обернених задач в загальному переліку вирішуваних задач системами даного класу. При цьому мається на увазі, що принципово всі задачі математичного моделювання можна розділити на дві групи: прямі задачі, тобто задачі аналізу, коли відомі причини певних процесів і необхідно знайти сліdstва, а також зворотні задачі, коли відомі сліdstва і потрібно знайти причини. Теоретичний і практичний інтерес до створення, дослідження і застосування методів і засобів розв'язання обернених задач визначається необхідністю в розробках нових методів обробки сигналів, а також підвищеної, по відношенню до прямих задач, складністю обернених задач, оскільки останні не є коректними з математичної точки зору і володіють рядом особливостей. Труднощі, зокрема, полягають в необхідності вжиття заходів для забезпечення умов існування і єдиності розв'язку, також потрібно враховувати відсутність безперервної (регулярної) залежності розв'язку від вихідних даних, оскільки вхідною інформацією в зворотних задачах є експериментальні дані, які визначаються з деякою погрешністю, і одержуваний розв'язок може сильно відрізнятись від точного.

Однією з найважливіших задач відновлення сигналів є задача структурної корекції характеристик динамічних систем, яка полягає в побудові і використанні в перетворюючому каналі або контурі системи такого блоку, який завдяки своїм спеціально сформованим динамічним властивостям перетворює необхідним чином загальні динамічні властивості системи.

При організації системи управління досліджуваними процесами вимоги до продуктивності такого блоку за обсягом і швидкістю обробки інформації істотно ускладнюють або просто виключають можливість використання універсальних комп'ютерних засобів. Виникає необхідність побудови спеціалізованих обчислювальних пристроїв, що володіють високою швидкістю.

Інерційність вимірювальних каналів систем вимірювання призводить до динамічних помилок. Таким чином, використання засобів технологічного та прецизійного виготовлення вимірювальних перетворювачів (ВП), принципово не може привести до ідеальних перетворювачів з малою динамічною похибкою [1; 2].

Найбільш ефективним в цьому випадку підходом до підвищення динамічної точності як ВП, так і систем вимірювання в цілому, полягає в застосуванні принципу структурної корекції [16], коли вимірювальний канал доповнюється пристроєм вторинної обробки одержуваного сигнала

лу від ВП і шляхом математичної обробки вирішується задача відновлення вхідного сигналу з мінімальною динамічною похибкою [12].

Типовою системою з елементами структурної корекції є вимірювальний канал (ВК), структура якого наведена на рис. 1, де ВП — вимірювальний перетворювач, КП — коригуючий пристрій, РП — реєструючий прилад.



Рис. 1. Вимірювальний канал

Інерційними властивостями можуть володіти як ВП, так і РП. Так, наприклад, в задачі реєстрації теплового потоку основним інерційним (створюючим) елементом є ВП, а інерційністю РП можна знехтувати через малість значення. І, навпаки, в системі управління інерційним виконавчим механізмом (нагрівальним пристроєм) основна інерційність зосереджена в елементі типу РП (рис. 3, 4). В системі типу лінії зв'язку можливе використання двох КП як до, так і після спотворюючого елемента (рис. 2). Якщо всі елементи системи лінійні, то в силу принципу комутативності послідовно з'єднаних елементів КП можна міняти місцями з іншими елементами, а два послідовно з'єднаних КП об'єднати в один КП, в зв'язку з чим всі наведені приклади можна звести до першої типової системи.

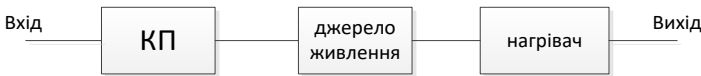


Рис. 2. Реєструючий прилад

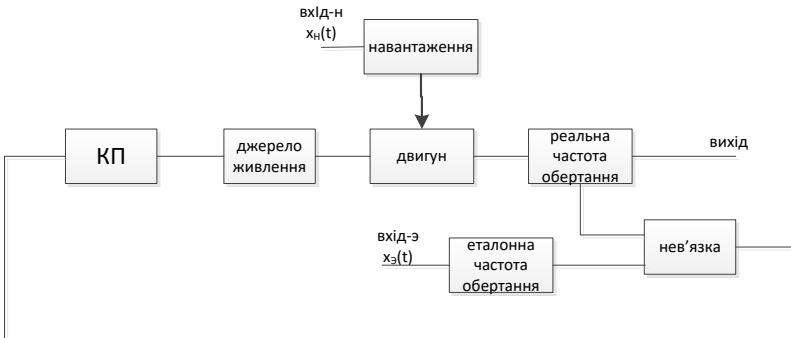


Рис. 3. Схема автоматичного регулювання частоти обертання двигуна

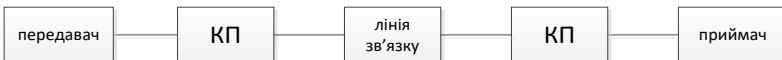


Рис. 4. Система типу лінії зв'язку

Задача структурної корекції (в лінійному випадку) полягає в тому, щоб побудувати КУ з такою функцією передачі $W_{КУ}(p)$, щоб передавальна функція всього вимірювального каналу була максимально близькою до одиниці ($W_{КУ}(p) \approx 1$), що відповідає мінімальному рівню динамічних спотворень реестрованого сигналу. Передавальна функція послідовно з'єднаних динамічних ланок дорівнює добутку передаточних функцій кожного з них:

$$W_{ВК}(p) = W_{ВЛ}(p) W_{КП}(p) W_{РП}(p),$$

звідки

$$W_{КП}(p) = \frac{W_{ВК}(p)}{W_{ВЛ}(p)W_{РП}(p)}. \quad (1)$$

В безінерційній системі $W_{ВЛ}(p) = 1$, $W_{РП}(p) = 1$, згідно (1) $W_{КП}(p) = 1$, що виключає необхідність застосування динамічного коригуючого пристрою.

Для типового вимірювального каналу $W_{ВЛ}(p) \neq 1$, $W_{РП}(p) = 1$, і відповідно до (1) $W_{КП}(p) = W_{ВЛ}^{-1}(p)$, тобто для синтезу КП необхідно знати математичну модель ВЛ. Однак не у всіх випадках така інформація є достатньою. Так, якщо функція $W_{ВЛ}(p)$ є дробово-раціональною, і порядок полінома чисельника менше порядку полінома знаменника, то $W_{ВЛ}^{-1}(p)$ фізично не реалізовується. Точного розв'язку в цьому випадку задача не має. Але це не означає, що задача нерозв'язна, оскільки достатньо отримати наближений розв'язок з похибкою, що не перевищує похибки вихідних даних.

На рис. 3 представлена схема системи автоматичного регулювання частоти обертання двигуна. Коригуючий пристрій в даному випадку використовується в якості регулятора і є узагальненням поняття пропорційно-інтегрально-диференціального регулятора (ПІД-регулятора). Застосування такого універсального регулятора дозволяє реалізувати більш складні закони управління в порівнянні з ПІД законом управління. І в даному випадку забезпечити потрібну точність стабілізації частоти обертання при швидкоплинних навантаженнях або швидкості стеження за швидкозмінним еталоном [9].

Динамічні вимірювання. Динамічні вимірювання отримують все більше поширення в техніці і наукових дослідженнях [3–6]. Роль динамічних вимірювань особливо велика, по-перше, в областях науки, пов'язаних з дослідженням структури матерії, аналізом і синтезом нових речовин і матеріалів, вивченням об'єктів в екстремальних умовах, і, по-друге, в галузях техніки і виробництва, для яких характерне створення нових технологічних процесів і техніч-

них об'єктів, зокрема, для технологічного контролю параметрів виробів в процесі виготовлення, для експлуатаційного контролю технічних пристроїв в процесі їх роботи, для випробування зразків нової техніки, в тому числі в нестационарних режимах, для дослідження нових фізичних об'єктів і явищ, для вивчення поведінки об'єктів в екстремальних умовах [8; 10; 11]. Друга тенденція — розвиток «вглиб», тобто підвищення точності вимірювань, обумовлене прагненням досліджувати все більш тонкі явища природи і створювати все більш досконалі технічні пристрої.

При проведенні динамічних вимірювань найбільший практичний інтерес представляє випадок, коли значну частину основної похибки становить динамічна похибка. Внаслідок цього в теорії динамічних вимірювань найбільше значення має проблема відновлення вимірюваного сигналу. Виділення статичної та динамічної похибок засобів вимірювань, як адитивних складових, допустимо в разі, коли засіб вимірювання являє собою лінійну динамічну ланку або сукупність лінійних динамічних ланок. Тоді приведена до виходу похибка первинного перетворювача при впливі на його вхід мінливого сигналу набуде вигляду:

$$\Delta_{вих} = \Delta_{ст} + \Delta_{дин}, \quad (2)$$

де $\Delta_{ст}$ — статична, а $\Delta_{дин}$ — динамічна похибка перетворювача.

Основною частиною структури вимірювальної системи, в якій виникає динамічна похибка, є первинний вимірювальний перетворювач, в якості якого може бути датчик, випробувальний стенд з датчиковою апаратурою або випробувані пристрій. Первинний вимірювальний перетворювач, доповнений коригуючих пристроєм або алгоритмом обробки інформації динамічних вимірювань, утворює найбільш важливу функціональну частину вимірювальної системи.

Будь-яка інформаційно-вимірювальна система (ІВС), незалежно від конкретного призначення, структурно складається з трьох основних частин: первинного пристрою, призначеного для збору, підготовки і передачі вимірювальної інформації; ліній зв'язку — дротових або бездротових; комплексу агрегатних засобів. На рис. 5 зображена типова структура ІВС, в якій блок обробки даних включає в себе комутатор імпульсних сигналів, обчислювач, накопичувача даних, алгоритм обробки динамічних вимірювань. На малюнку вказані сигнали: $x(t)$ — вимірюваний сигнал, $e(t)$ — похибка відновлення вимірюваного сигналу, обумовлена вхідними перешкодами первинного датчика, похибка взаємодії первинного перетворювача з об'єктом вимірювань, адитивними похибками вимірювальної системи, інерційністю первинного датчика.

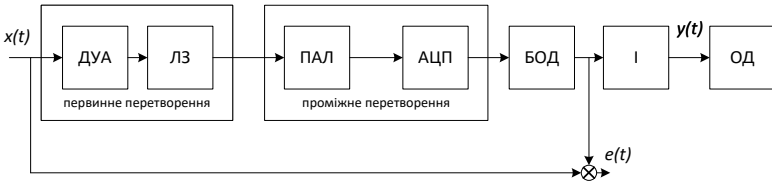


Рис. 5. Типова структура одноканальної інформаційно-вимірювальної системи: ДУА — аналоговий датчик з уніфікованим входним сигналом напруги або струму; ЛЗ — лінії зв'язку; ПАЛ — перетворювач уніфікованих сигналів аналогового безперервного в аналоговий безперервний; АЦП — аналого-цифровий перетворювач напруги, струму, періоду, частоти, інтервалу часу в код; БОД -блок обробки даних; ОД — засоби відображення; І — засіб узгодження; $x(t)$ — вимірюваний сигнал, $e(t)$ — похибка відновлення вимірюваного сигналу

Якщо об'єднати в поняття «датчик» всі засоби первинного і проміжного перетворення, аж до аналого-цифрового перетворювача, то розглянуту вимірювальну систему можна представити у вигляді рис. 6. При цьому вхідні перешкоди і шуми приведені до виходу датчика.

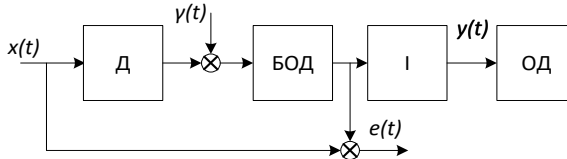


Рис. 6. Спрощена структура одноканальної ІВС

Вимірювальні функції ІВС — вимірювання значень фізичних величин, що впливають на вхід системи і характеризують окремі властивості об'єктів.

Визначення вхідного сигналу, динамічно спотвореного засобом вимірювань, розглядається в загальному випадку як зворотна задача вимірювальної техніки. Термін «зворотна задача» з'явився в математичній фізиці і відноситься до задачі відновлення вхідного сигналу за відомою інформацією про оператор фізичного приладу, що відображає відгук цього приладу на вхідний сигнал. Зворотна задача є характерною і традиційною задачею вимірювальної техніки. Ще в 1871 році Релей формулював цю задачу як «редукцію до ідеального приладу». У різних роботах зворотну задачу визначають як корекцію частотних характеристик засобів вимірювання, відновлення вхідного сигналу, корекцію сигналів, компенсацію динамічних похибок.

Задача визначення миттєвих значень вхідного сигналу засобів вимірювання може бути проілюстрована ланцюжком перетворень, зображених на рис. 1.7. На виході засобу вимірювання спостерігається процес:

$$y(t) = A[x(t) + \varepsilon(t) + \xi(t)] + \eta(t), \quad (3)$$

де $x(t)$ — вхідний вимірюваний сигнал; $\varepsilon(t)$ — завада, джерелом якої є об'єкт вимірювань; $\xi(t)$ — завада, викликана взаємодією засобів вимірювання з об'єктом вимірювання; $\eta(t)$ — адитивні похибки засобу вимірювання.

Задачею вимірювання є визначення невідомого процесу $x(t)$ за вихідним сигналом $y(t)$ і оператором A .

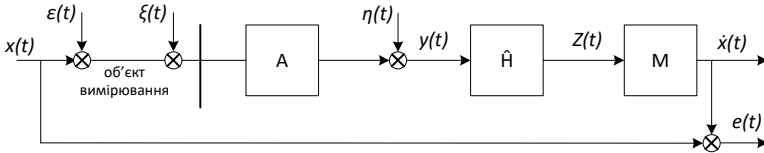


Рис. 7. Схема розв'язання оберненої задачі: $\varepsilon(t)$ — завади, джерелом яких є об'єкт вимірювань; $\xi(t)$ — завада, викликана взаємодією засоби вимірювання з об'єктом вимірювання; $\eta(t)$ — адитивні похибки засобу вимірювання; A — оператор перетворення процесу $x(t)$; $y(t)$ — вихідний сигнал; M — операція порівняння з одиницею виміру; $\hat{x}(t)$ — оцінка процесу $x(t)$; $e(t)$ — похибка розв'язання оберненої задачі

Розбіжність зворотного для A оператора \hat{A} з точним зворотним оператором відбувається з наступних причин: наявність похибок $\varepsilon(t)$, $\xi(t)$, $\eta(t)$ змушує надавати оператору \hat{A} фільтруючі властивості; оператор, точно зворотний, фізично не реалізується. Якщо прямий оператор — це оператор з післядією, тобто з пам'яттю, то зворотний йому повинен бути оператором з прогнозом, що фізично реалізувати неможливо. Прямий оператор є цілком безперервним, отже, зворотний оператор не є безперервним і обмеженим. У цьому полягає некоректність оберненої задачі. Якщо прямий оператор засобів вимірювання є добре згладжуваним оператором, то зворотний оператор повинен володіти зворотними властивостями — посилювати всі найменші швидкі процеси, наявні у відновленому сигналі, в тому числі і адитивні похибки, властиві вживаному засобу вимірювання.

Наведемо вхідні завади до виходу засобу вимірювання і представимо схему рис. 7 в спрощеному вигляді (рис. 8). Наведені похибки будуть мати вигляд:

$$y(t) = A[\varepsilon(t) + \xi(t)] + \eta(t). \quad (4)$$

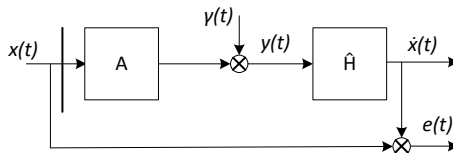


Рис. 8. Спрощена схема розв'язання оберненої задачі

Іншими словами, обернена задача зводиться до вирішення операторного рівняння

$$Ax(t) = y(t) \quad (5)$$

з неточно заданою правою частиною.

Розв'язок відшукується за критерієм мінімуму похибки або за критерієм мінімуму нев'язки. Оскільки точний зворотний оператор необмежений і втрачає безперервність, для розв'язання оберненої задачі застосовують спеціальні методи регуляризації.

Інверсний (інверсно-обчислювальний) підхід до організації процесів динамічної корекції вимірювальних систем, заснований на алгоритмічній інтерпретації результатів вимірювань, знаходиться на стадії активного розвитку. До появи цього підходу розглянута задача динамічних вимірювань вирішувалася на основі схемно-параметричного підходу для наступних двох випадків побудови вимірювального каналу.

У першому випадку розглядається канал, який представляє собою електричний ланцюг (однорідну фізичну систему). Для досягнення ефекту «ідеального вимірника» схема доповнюється елементами, що забезпечують відновлення вхідного сигналу на виході приладу, а параметри доповнюючої частини визначаються з умов виконання вимог до стійкості і максимального допустимої точності каналу. При цьому фактично вирішується задача синтезу електричного кола за заданими критеріями.

У другому випадку розглядається вимірювальний канал, що складається з фізично різнорідних блоків, об'єднаних в структуру, подібну структурі системи управління, яка синтезується як система моніторингу, що забезпечує як можна більш точне відтворення вхідного сигналу на виході з дотриманням необхідних умов стійкості.

Як видно, даний підхід має на увазі застосування методів синтезу, що відносяться або до теорії електричних ланцюгів, або до теорії управління. При цьому процес побудови вимірювального каналу супроводжується відомими труднощами і обмеженнями, що приводять до складних процедур проектування та принциповим проблемам досягнення необхідної якості, чого можна уникнути в рамках інверсного підходу. Проміжним між інверсним і схемно-параметричним підходами є застосування в якості коригуючого ланки аналогових обчислювальних блоків. Аналоговий підхід цілком реалізуемий і отримав певний розвиток, однак специфіка його застосування вимагає оцінки якісних і конструкторських рішень. Крім того, його структурна реалізація можлива в цифровому виконанні, наприклад, в системі Matlab/Simulink.

Як вже зазначалося, з математичної точки зору постановка оберненої задачі (рис. 8) є некоректною. Тому практичне розв'язування задачі відбувається з трансформацією її до коректної постановки та знаходженню регулярних (стійких до перешкод) розв'язків. При цьому більшість регуляризованих розв'язків отримано на основі методу регуляризації А. Н. Тихонова, що використовує мінімізацію регуляризуючої добавки.

Висновки. Інверсно-обчислювальний підхід, заснований на використанні інтегральних рівнянь, залишається менш дослідженим і, судячи з деякого досвіду розв'язання практичних задач [7], є досить ефективним і перспективним, тим паче, що цей підхід ґрунтується на реалізації детермінованих алгоритмів і потребує мінімального обсягу апріорної інформації.

Список використаних джерел:

1. Андриянов А. В. Способ коррекции выходного сигнала измерительных приборов / А. В. Андриянов, В. В. Крылов // Измерительная техника. — 1975. — № 4. — С. 59–61.
2. Аранов П. М. Метод оптимального линейного оценивания для определения динамических характеристик средств измерения / П. М. Аранов, Е. А. Лдяшенко, Л. Б. Ряшко // Измерительная техника. — 1991. — № 11. — С. 10–13.
3. Бабак В. П. Теоретические основы информационно-измерительных систем : учеб. / В. П. Бабак, С. В. Бабак, В. С. Еременко ; под. ред. чл.-кор. НАН Украины В. П. Бабака. — Киев, 2014. — 832 с.
4. Вашны Е. Динамика измерительных цепей / Е. Вашны ; пер. с нем. Е. Вашны ; пер. Р. Я. Сыропятова ; ред. Р. Р. Харченко. — Москва : Энергия, 1969. — 287 с.
5. Володарський С. Т. Метрологічне забезпечення вимірювань і контролю : навч. посіб. / [С. Т. Володарський, В. В. Кухарчук, В. О. Поджаренко, Г. В. Сердюк]. — Вінниця : ВДТУ, 2001. — 219 с.
6. Грановский В. А. Динамические измерения: Основы метрологического обеспечения / В. А. Грановский. — Л. : Энергоатомиздат, 1984. — 224 с.
7. Засядько А. А. Розв'язання задачі відновлення сигналів за допомогою однокритеріальної оптимізації / А. А. Засядько // Вісник Житомирського інженерно-технологічного інституту. Технічні науки. — 2002. — № 4. — С. 133–136.
8. Кухарчук В. В. Основи метрології та електричних вимірювань : підручник / [В. В. Кухарчук, В. Ю. Кучерук, С. Т. Володарський, В. В. Грабко]. — Вінниця : ВНТУ, 2012. — 522 с.
9. Матвійчук Я. М. Математичне моделювання динамічних систем: теорія і практика / Я. М. Матвійчук. — Львів : Видавничий центр ЛНУ ім. І. Франка, 2000. — 215 с.
10. Таланчук П. М. Математические модели первичных измерительных преобразователей для измерения парциальных давлений / П. М. Таланчук, М. Н. Фомин // Химическая технология. — 1983. — № 6. — С. 35–39.
11. Таланчук П. М. Основы теории и проектирования измерительных приборов : учеб. пособ. / П. М. Таланчук, В. Т. Рущенко. — Киев : Вища школа, 1989. — 454 с.
12. Belkhamza Z. Measuring Organizational Information System Success: New Technologies and Practices / Z. Belkhamza, A. Wafa. — Malaysia : University Malaysia Sabah, 2012.
13. Close Charles M. Modeling and Analysis of Dynamic Systems / M. Close Charles, K. Frederick Dean. C. Newell Jonathan. — 3th ed. — Wiley, 2001. — 592 p.

14. Patton R. J. Model-Based Fault Diagnosis in Dynamic Systems Using Identification Techniques / R. J. Patton, C. Fantuzzi, S. Simani. — New York : Springer-Verlag, 2003.
15. Pedersen S. From Calculus to Analysis / S. Pedersen. — 2015. — 342 p.
16. Verlan A. Advanced Structural Organization of the Signal Recovery Processes in Measuring Systems / A. Verlan, Jo Sterten // 7TH International Conference on Application of Information and Communication Technology and Statistics in Economy and Education (ICAICTSEE 2017). University of National and World Economy (UNWE). — Sofia, Bulgaria. November 3-4, 2017.
17. Yatsenko V. Measurement-computer system based on airborne hyperspectrometer / V. Yatsenko, V. Gnidenko, M. Nalyvaichuk // Наукові записки НАУКМА. Серія: Комп'ютерні науки. — 2012. — Т. 138. — С. 105–108.

INVERSE-COMPUTATIONAL APPROACH IN THE PROBLEM OF DYNAMIC CORRECTION OF MEASUREMENT SYSTEMS WITH APPLICATION OF INTEGRAL MODELS

The development of modern systems of measurement, control, management and diagnostics is characterized by an increase in requirements for quality indicators, an increase in functionality, an increase in the complexity of research and design tasks in their creation. As a rule, the basis for the functioning of these systems are the methods and means of processing experimental data and computer implementation of mathematical models. In many practically important tasks, prompt assessment of the processes and phenomena under testimony of measuring instruments is of paramount importance. Similar tasks are known in practice as signal recovery tasks

The use of computer equipment for signal recovery makes it possible to use low-cost primary measuring transducers with low resolution in systems of measurement and control. The efficiency of the use of computing devices in measurement and control systems is primarily due to the low cost of their development in comparison with the improvement of the physical design of certain elements of these systems. Moreover, in some cases, such a possibility is limited not just by physical boundaries, but more so by economic factors.

The development of methods of operational processing of information is characterized by an increase in the proportion of inverted tasks in the total list of solved problems by systems of this class. This implies that in principle, all the problems of mathematical modeling can be divided into two groups: direct problems, i.e. problems of analysis, when the known causes of certain processes and one has to find the consequences, and inverse problems, when the consequences are by physical boundaries and one has to find the reasons. One of the most important tasks of signal recovery is the task of structural correction of the characteristics of dynamic systems, which is constructing and using in the conversion channel or circuit of the system such blocks, which, due to their specially formed dynamic properties, transform in a necessary way the general dynamic properties of the system.

Key words: *measuring system, signal recovery, structural correction, dynamic measurements, inverse approach.*

Отримано: 15.08.2019

UDC 519.626, 519.6,004.942:519.876.2
DOI: 10.32626/2308-5916.2019-20.16-25

A. Verlan, PhD,
Jo Sterten, PhD

Norwegian University of Science and Technology, Gjøvik, Norway

METHODS OF COMPLEX DYNAMIC SYSTEMS' MODELS' EQUIVALENT CONVERSION

Proposed and considered the formal description of equivalent conversions which can be applied to obtain the various models of different kinds of complex dynamic systems (including electrical systems, power installations, etc.), as well as for transition from one representation to another. The set of basic operations which realize elementary conversions of models is described. The methods and algorithms for conversion of differential equations into integral or integro-differential are considered.

Key words: *Dynamic systems, model conversion, integral equations.*

Introduction. For investigation of dynamic systems their modeling on the base of differential equations is used in most cases. Appropriate models and methods of their solution are well known and widely applied in practice. At the same time, it is not always evident what kind of model is better to use for a particular system. Selection of the adequate and at the same time enough simple model is actually an art from many points of view. Besides differential equations, there are many other means for description of dynamic systems. Those are, primarily, integral and integro-differential equations. For many problems integral equations are preferable than differential ones. Thus, it is obviously important to create and develop mathematical methods and computer tools which would allow to convert one model description to another.

Formalization of equivalent conversions' description. Let us consider the formalized description of equivalent conversions which can be applied to obtain the various models of the researched dynamic system and for transition from one representation to another.

Let we have an operator model defined by the equation $\Phi_1(u) = \Phi_2(u)$. The basic operations realizing elementary conversions of the model are:

- the additive conversion

$$\Phi_1(u) = \Phi_2(u) \Rightarrow \Phi_1(u) + \Phi_3(u) = \Phi_2(u) + \Phi_3(u);$$

- the multiplicative conversion

$$\Phi_1(u) = \Phi_2(u) \Rightarrow \Phi_1(u) \Phi_3(u) = \Phi_2(u) \Phi_3(u);$$

- the additive splitting

$$\Phi_1(u) = \Phi_2(u) \Rightarrow \Phi_{11}(u) + \Phi_{12}(u) = \Phi_2(u);$$

- the multiplicative splitting

$$\Phi_1(u) = \Phi_2(u) \Rightarrow \Phi_{11}(u) \Phi_{12}(u) = \Phi_2(u);$$

- the partial additive inversion

$$\Phi_1(u) = \Phi_2(u) \Rightarrow u = \Phi_{11}^{-1}(u) (\Phi_2(u) - \Phi_{12}(u));$$

- the partial multiplicative inversion

$$\Phi_1(u) = \Phi_2(u) \Rightarrow \Phi_{12}(u) = \Phi_{11}^{-1}(u) (\Phi_2(u)).$$

Combining these basic operations, we can obtain more complex conversions of mathematical models.

Let's consider some realizations of algorithms of equivalent converting differential equations to integral or integro-differential ones [1, 2, 4]. In general case, it should be noted that precise reverse transition from integral to differential form of mathematical model is not always possible. The integral form of mathematical models representation is more universal than the differential one. It allows to describe much more physical objects, both with lumped and distributed parameters.

Method of analytical inversion with operator splitting. Let a model of the object is given in a form of the ordinary differential equation (ODE)

$$D[y] \equiv y^n(t) + \sum_{i=1}^n a_i y^{(n-i)}(t) = f(t), \quad y^{(i)}(0) = C_i, \quad i = \overline{0, n-1}, \quad (1)$$

or, in the functional form,

$$D[y] = f. \quad (2)$$

To obtain a series of equivalent integral dynamic models [3, 5, 6], i. e. relations containing integral operators, rather general method based on different versions of splitting the initial differential operator can be applied. Indeed, splitting the operator D into two operators, i. e. putting $D = D_1 + D_2$, we obtain the following differential equation

$$D_1[y] = \psi, \quad (3)$$

where $\psi(t) = f(t) - D_2[y]$. Choosing such form of decomposition which admits analytical solution (3) is available, can allow us to get the equation

$$y = D_1^{-1}[\psi], \quad (4)$$

The operator D_1^{-1} which is inverse to D_1 is in integral operator, therefore (4) is the integral or integro-differential equation.

The considered method of equivalent conversion can be applied both to linear and nonlinear problems. If for example the nonlinear differential equation $D_n[y] = f$ with a given nonlinear operator D_n , then for its decomposition it is reasonable to separate its linear part, i. e. to use the representation $D_n = D_1 + D_{2n}$, where D_1 is a linear operator. Then the initial equa-

tion is reduced to the form (4), which is generally the nonlinear integro-differential equation.

Let's consider this method in more details on the example of the equation (1), which can be rewritten as

$$y^{(n)}(t) + \sum_{i=1}^m a_i y^{(n-i)}(t) = f(t) - \sum_{i=m+1}^n a_i y^{(n-i)}(t). \quad (5)$$

After the substitution of variables

$$u(t) = y^{(n-m)}(t), u'(t) = y^{(n-m+1)}(t), \dots, u^{(m)}(t) = y^n(t), \quad (6)$$

we obtain the m -th order equation

$$u^{(m)}(t) + \sum_{i=1}^m a_i u^{(i-1)}(t) = \psi(t), \quad (7)$$

where

$$\psi(t) = f(t) - \sum_{i=m+1}^n a_i y^{(n-i)}(t). \quad (8)$$

Converting the equation (7) to an equivalent the 1st order ODEs system and building its solution, e. g. using fundamental solutions of this system, we obtain the equation with exponential kernel:

$$u(t) = e^{At} u_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} \Phi(a, u, \tau) d\tau, \quad (9)$$

where

$$u(t) = [u'(t), u''(t), \dots, u^{(m)}(t)], u_0(t) = [u'(0), u''(0), \dots, u^{(m)}(0)],$$

$$\Phi(a, u, t) = [0, 0, \dots, \psi(t)],$$

and we get the following m -th order matrix A :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -a_m & -a_{m-1} & -a_{m-2} & -a_1 \end{pmatrix}.$$

The unknown variables in the equations (1) and (9) are connected by the relation

$$y(t) = \underbrace{\int_0^t \dots \int_0^t}_{n-m} u(s) ds = \int_0^t \frac{(t-s)^{n-m-1}}{(n-m-1)!} u(s) ds. \quad (10)$$

The transition from one form of a model to another is carried by modifying value of m from 1 to n .

The method of sequential integration. If we put $m = n$ in the regarded method, decomposition of the operator D is reduced to solution of the ini-

tial equation with respect to the higher derivative. In this case the solution of the equation (3) is carried out by n sequential integrations. As the result we get the following integral equation:

$$y(t) + \int_0^t K(t-s)y(s)ds = F(t), \quad (11)$$

where

$$K(t-s) = \sum_{i=1}^n q_i \frac{(t-s)^{i-1}}{(i-1)!},$$

$$F(t) = \int_0^t \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!} f(s)ds + \sum_{i=1}^{n-1} C_i \frac{t^i}{i!} + C_0 \sum_{i=1}^{n-1} q_i \frac{t^i}{i!} + \dots +$$

$$+ C_1 \sum_{i=1}^{n-2} q_i \frac{t^{i+1}}{(i+1)!} + \dots + C_{n-2} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$$
(12)

The method of higher derivative. This method is usually considered in the literature. It represents a special case of the splitting method based on the substitution

$$u(t) = y^{(n)}(t), \int_0^t u(s)ds + c_1 = y^{(n-1)}(t), \dots$$

It allows to obtain the equivalent integral equation with respect to the higher derivative of the initial equation (1):

$$y^{(n)}(t) + \int_0^t \sum_{k=1}^n a_k \frac{(t-s)^{k-1}}{(k-1)!} y^{(n)}(s)ds = \varphi(t),$$

$$\varphi(t) = f(t) - C_{n-1}a_1 - (C_{n-1}t + C_{n-2})a_2 - \dots -$$

$$- \left(C_{n-1} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} + \dots + C_1 t + C_0 \right) a_n.$$
(14)

The analytical methods of equivalent transition from the ordinary differential equations to integral ones can be effectively implemented using the packages oriented to analytical conversions (Mathematica, Maple etc.).

The structure of the algorithm which allows to carry out the most general method of analytical inversion with operator splitting is shown in the Fig. 1.

This method at $m = n$ is reduced to the sequential integration method, and at $m = 0$ — to the higher derivative method. In general case it allows us to obtain an integro-differential equation, and in the two last special cases we obtain pure integral equations.

It is useful to develop intelligent program environments for selecting appropriate models oriented to simulation and modeling of dynamic systems. Some approaches to solving this problem were discussed in [3].

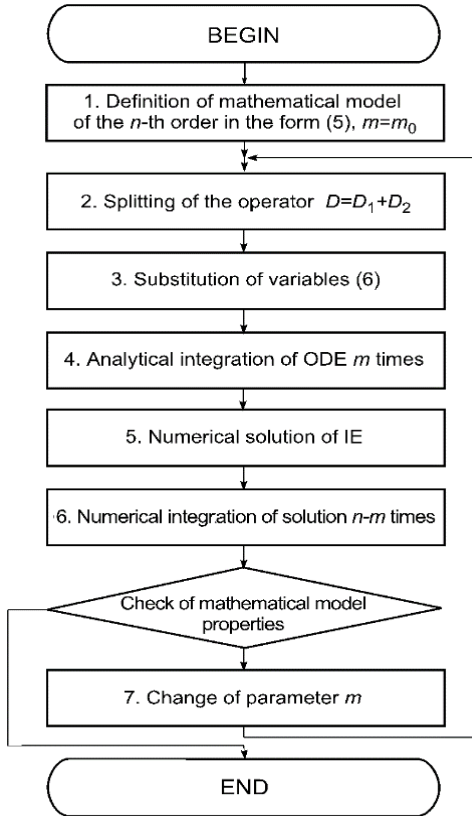


Fig. 1. Algorithm of analytical inversion with operator splitting

Comparing the sequential integration method and the higher derivative method, we have to note that only in the first respect to the required function $u(t) = y(t)$ is obtained. In the rest cases (at $m < n$) we obtain the equation with respect to derivative of required function, and obtained solution should be integrated $m - n$ times.

Continuing a comparison of the methods of transition from differential to integral form of mathematical models, we have to note that for the sequential integration method in algorithm in the Fig. 1 the item 6, and in the higher derivative method the item 4 are omitted. Anyway the problem of numerical integration remains. In the sequential integration method we have to integrate the right hand side of the differential equation, and in the higher derivative method — the obtained solution.

For an investigation of dynamic models with approximate initial data (for example, obtained by measurements) the sequential integration meth-

od is preferable. In this case approximate initial data are integrated on the first step of algorithm. In this case the influence of errors in initial data (especially if errors look like a white noise) can be considerably reduced.

Conversion of nonlinear models. Let's consider a possibility to obtain the equivalent integral equations for nonlinear object in the case when one of derivative is included into the initial differential equation under the sign of continuous nonlinear function, i. e. when the nonlinear differential equation has the form

$$\sum_{i=0}^n a_i(t) y^{(i)}(t) + F(y^{(m)}(t)) = f(t), \quad (15)$$

with the initial conditions $y^{(i)}(t_0) = C_i$, and continuous variable coefficients $a_i(t)$, $i = 0, \dots, n - 1$.

We suppose that $a_n = 1$, $a_m = 0$ and $m \neq n$.

An integral equation with respect to the m -th derivative can be obtained integrating the equation (15) $n - m$ times.

Let's consider at first the case of $m = 0$. Integrating the equation (15) $n + 1$ times, we reduce it to the following form that does not contain derivatives:

$$\int_{t_0}^t \left[1 + \int_s^t M_n(\xi, s) d\xi \right] y(s) ds + \int_{t_0}^t \frac{(t-s)^n}{n!} F(y(s)) ds = \int_{t_0}^t \Phi_n(s) ds. \quad (16)$$

Here

$$M_n(\xi, s) = \sum_{i=1}^n (-1)^i \sum_{j=1}^{n-1} C_{n-i}^j a_{n-i}^{(j)}(s) \frac{(s-\xi)^{i+j-1}}{(i+j-1)!},$$

$$\Phi_n(t) = \int_{t_0}^t \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!} f(s) ds + P_n(t),$$

$$P_n(t) = \sum_{k=1}^n \sum_{i=0}^{k-1} (1)^i a_k^{(i)} \sum_{j=1}^{k-i} C_{j-1} C_{k-j}^i \frac{(t-t_0)^{i+j-1}}{(i+j-1)!},$$

$$a_k^{(i)} = \left. \frac{d^i}{dt^i} a_k(t) \right|_{t=s}, \quad C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

In a special case when the higher derivative is included into the equation under the sign of continuous nonlinear function F , i. e. when the nonlinear differential equation has the form

$$F(y^{(n)}(t)) + \sum_{i=0}^{n-1} a_i(t) y^{(i)}(t) = f(t), \quad (17)$$

with the initial conditions $y^{(i)}(t_0) = C_i$ and continuous variable coefficients $a_i(t)$, $i = 0, \dots, n - 1$, the equivalent integral equation can be written as

$$F(Z_n(t)) - \int_{t_0}^t K_n(t, s) Z_n(s) ds = \varphi_n(t), \quad (18)$$

where

$$K_n(t, s) = - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(t-t_0)^{n-i-1}}{(n-i-1)!} a_i(t),$$

$$Z_n(t) = y^{(n)}(t),$$

$$\varphi_n(t) = y(t) - \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} a_i(t) \frac{(t-t_0)^{n-j-1}}{(n-j-1)!} C_{i-j-1}.$$

The equation (18) is obtained by substituting the derivatives $y^{(i)}(t)$, expressed in terms of $y^{(n)}(t)$, into (17):

$$y^{(i)}(t) = \int_{t_0}^t \frac{(t-s)^{n-i-1}}{(n-i-1)!} Z_n(s) ds + \sum_{j=1}^{n-i} \frac{(t-t_0)^{n-i-j}}{(n-i-j)!} C_{i+j-1}.$$

In the case $m \neq 0$ the equation (15) can be represented as

$$\sum_{i=m+1}^n a_i(t) y^{(i)}(t) + F(y^{(m)}(t)) + \sum_{i=0}^{m-1} a_i(t) y^{(i)}(t) = f(t).$$

Taking into account (18) it can be written in the following form:

$$\sum_{i=0}^{n-m-1} a_{m-1+i}(t) Z_m^{(i+1)}(t) + F(Z_m(t)) - \int_{t_0}^t K_m(t, s) Z_m(s) ds = \varphi_m(t). \quad (19)$$

Sequentially integrating (19) and considering (16), we obtain the nonlinear integral equation

$$\int_{t_0}^t \left[1 - \int_s^t M_{n-m-1}(\xi, s) d\xi \right] Z_m(s) ds + \int_{t_0}^t \frac{(t-s)^{n-m-1}}{(n-m-1)!} F(Z_m(s)) ds -$$

$$- \int_{t_0}^t I^{n-m-1} [K_m(t, s)] Z_m(s) ds = \psi(t),$$

where

$$\psi(t) = \int_{t_0}^t \left[\int_{t_0}^t \frac{(t-s)^{n-m-1}}{(n-m-1)!} \varphi_m(s) ds + P_{n-n-1}(t) \right] dt,$$

$I^{m-1}[K_m(t, s)]$ means the application of the operator

$$I[K_m(t, s)] = \int_s^t K_m(\xi, s) d\xi$$

$n - m - 1$ times. The operator I arises when the integration limits are changed:

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t ds \int_{t_0}^s K_m(s, \xi) Z_m(\xi) d\xi &= \int_{t_0}^t Z_m(\xi) d\xi \int_{\xi}^t K_m(s, \xi) ds = \\ &= \int_{t_0}^t Z_m(s) ds \int_s^t K_m(\xi, s) d\xi = \int_{t_0}^t Z_m(s) I [K_m(t, s)] ds. \end{aligned}$$

Thus, the integral equation equivalent to (15) has the following form

$$\int_{t_0}^t \frac{(t-s)^{n-m-1}}{(n-m-1)!} F(Z_m(s)) ds - \int_{t_0}^t Q(t, s) Z_m(s) ds = \psi(t), \quad (20)$$

where

$$Q(t, s) = -1 + \int_s^t M_{n-m-1}(\xi, s) d\xi + I^{n-m-1} [K_m(t, s)], \quad (m = \overline{0, n}).$$

It follows from the formulas (16), (18), (20), that the left-hand side of the integral equation, equivalent to the given nonlinear differential equation, in which one of derivatives is included nonlinearly, consists of two components. One of these components is the nonlinear with respect to the function $y^{(m)}(t)$, and the second one is an application of integral operator with the kernel $Q(t-s)$ to $y^{(m)}(t)$.

If a model is represented by a system of differential equations, we have more wide opportunities to transform it to integral or integro-differential form then in the case of a single equation. Every equation in the system can be transformed in different way, equations can be combined etc. We can also reduce the model dimension decreasing the number of governing equations. This can be done more flexible than if we use the differential approach: the higher derivatives demanding special treatment at numerical solution do not appear, and resulting integral equations are solved in usual way.

To illustrate these opportunities, we consider the following example. The simple quarter car model of automotive suspension (Fig. 2) is described by following system of ODEs:

$$\begin{aligned} m_b \ddot{x}_b &= -C_{s1}(x_b - x_w - x_{s2}) - m_b g, \\ m_w \ddot{x}_w &= C_{s1}(x_b - x_w - x_{s2}) - C_t(x_w - x_r) - \mu_t(\dot{x}_w - \dot{x}_r) - m_w g, \end{aligned} \quad (21)$$

where m_b and m_w are masses of the body and the wheel, x_b, x_w are their displacements, x_{s2} is a displacement in the second section used as the laminated spring model, C_i, μ_i are stiffnesses and viscosities in the models of the spring and the tire, F_{fr} is the friction force in the spring model.

Instead of the last equation in the system (21), on the stage when the second element of spring model is deformed we can use a differential equation with respect to the spring tension $F_s = C_{s1}(x_b - x_w - x_{s2})$:

$$\dot{F}_s + \frac{1}{n} F_s = C_{s1} \left(\dot{\bar{x}} + \frac{C_{s2} \bar{x} + F_f \operatorname{sgn}(\dot{x}_{s2})}{\mu_s} \right), \quad (22)$$

where $n = \frac{\mu_s}{C_{s1} + C_{s2}}$ is a characteristic relaxation time [1], and $\bar{x} = x_b - x_w$ is the spring deformation.

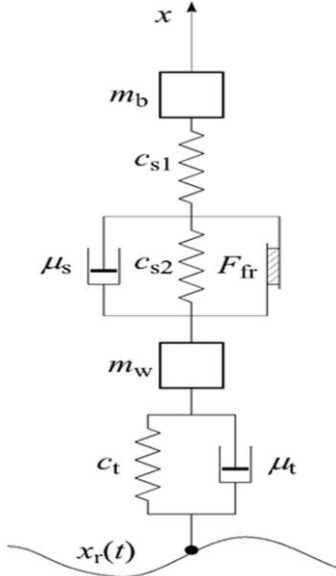


Fig. 2. Automotive suspension

Solving this equation analytically, we obtain the following relation which includes integral operators with the relaxation kernel $e^{-\frac{t-s}{n}}$:

$$F_s(t) = (F_{s0} - C_{s1} \bar{x}_0) e^{-\frac{t-t_0}{n}} + C_{s1} \left[\bar{x}(t) - \frac{C_{s1}}{\mu_s} \int_{t_0}^t e^{-\frac{t-s}{n}} \bar{x}(s) ds + \int_{t_0}^t \frac{F_{fr}}{\mu_s} \operatorname{sgn}(\dot{x}_{s2}(s)) e^{-\frac{t-s}{n}} \bar{x}(s) ds \right]. \quad (23)$$

The substitution of (23) into the dynamic equations (the first two ones in the system (21)) leads to a system of integro-differential equations. Integrating them twice, we obtain two Volterra integral equations of the 2nd kind [4].

Conclusions. Using the proposed approach, we can obtain integral equations for each of the variables x_b , x_w and x_{s2} or F_s by the sequential integration method. Also, we can obtain the simple system of integral equations (but with larger number of equations) by transition from (21) to

the 1st order ODEs system and integrating it. One integral equation with respect to a single governing function (e. g. the car's body displacement or acceleration) can be obtained instead of two dynamic equations.

Thus, the obtained equivalent conversions' formalized description along with the proposed conversion algorithms provide the possibility to create various models of different kind of complex dynamic systems and make convenient and effective conversion of the models from one representation to another, i.e. from differential equations to integral or integro-differential.

References:

1. Контрерас Д. Е. Методи і комп'ютерні засоби еквівалентного перетворення динамічних моделей / Д. Е. Контрерас, О. В. Козак, О. А. Дячук // Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації : зб. наук. праць за матеріалами між нар. наук.-метод. конф., 12-13 квітня 2006 р. — Київ ; Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський державний університет, редакційно видавничий відділ, 2006. — С. 175–183.
2. Дячук О. А. Перетворення моделей динамічних систем / О. А. Дячук // Наукові праці Донецького національного технічного університету. Серія «Інформатика, кібернетика і обчислювальна техніка» (ІКОТ-2007). — Донецьк : ДонНТУ, 2007. — Вип. 8 (120). — С. 99–106.
3. Пухов Г. Е. Дифференциальные преобразования и математическое моделирование физических процессов / Г. Е. Пухов. — К. : Наукова думка, 1986. — 160 с.
4. Верлань А. Ф. Методы и средства преобразования динамических моделей при исследовании и проектировании технических систем / А. Ф. Верлань, А. А. Дячук, М. В. Сагатов // Инновация-2007 : междунар. науч.-практ. конф. — Ташкент : Янги аср авлоди, 2007. — С. 31–33.
5. Hassan I. H. Comparison differential transformation technique with Adomian decomposition method for linear and nonlinear initial value problems / I. H. Hassan // Chaos, solitons and fractals. — 2008. — Vol. 36 (1). — P. 53–65.
6. Kurnaz A. N-dimensional differential transformation method for solving linear and nonlinear PDE's / A. Kurnaz, G. Otunaz, M. E. Kiris // Int J comput. math. — 2005.

МЕТОДИ ЕКВІВАЛЕНТНОГО ПЕРЕТВОРЕННЯ МОДЕЛЕЙ СКЛАДНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ

Запропоновано та розглянуто формальний опис еквівалентних перетворень, які можна застосувати для отримання різних моделей складних динамічних систем (включаючи електричні системи, енергоустановки тощо), а також для переходу від одного представлення до іншого. Описано набір основних операцій, які реалізують перетворення моделей. Розглянуто методи та алгоритми перетворення диференціальних рівнянь в інтегральні та інтегро-диференціальні.

Ключові слова: динамічні системи, перетворення моделі, інтегральні рівняння.

Отримано: 21.08.2019

УДК 517.946

DOI: 10.32626/2308-5916.2019-20.26-39

А. П. Громик, канд. техн. наук

Подільський державний аграрно-технічний університет,
м. Кам'янець-Подільський

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ КОЛИВНИХ ПРОЦЕСІВ У НЕОБМЕЖЕНОМУ КУСКОВО-ОДНОРІДНОМУ КЛИНОВИДНОМУ ПОРОЖНИСТОМУ ЦИЛІНДРІ

Актуальність теорії крайових задач для диференціальних рівнянь з частинними похідними, яка інтенсивно розвивається, обумовлена як значимістю її результатів для розвитку багатьох розділів математики, так і численними застосуваннями її досягнень при математичному моделюванні різних процесів і явищ фізики, механіки, біології, медицини, економіки, техніки.

Добре відомо, що складність досліджуваних крайових задач суттєво залежить від коефіцієнтів рівнянь та геометрії області в якій розглядається задача. На цей час досить детально вивчено властивості розв'язків крайових задач для лінійних, квазілінійних та певних класів нелінійних рівнянь в однозв'язних областях.

Водночас багато важливих прикладних задач теплофізики, термомеханіки, теорії пружності, теорії електричних кіл, теорії коливань приводять до крайових задач для диференціальних рівнянь з частинними похідними не тільки в однорідних областях, коли коефіцієнти рівнянь є неперервними, але й в кусково-однорідних та неоднорідних областях, коли коефіцієнти рівняння є кусково-неперервними.

У пропонованій роботі методом інтегральних і гібридних інтегральних перетворень у поєднанні з методом головних розв'язків (матриць впливу та матриць Гріна) за найбільш загальних припущень побудовано точні аналітичні розв'язки математичних моделей коливних процесів (гіперболічних початково-крайових задач спряження) в необмеженому кусково-однорідному клиновидному порожнистому циліндрі.

Одержані розв'язки мають алгоритмічний характер, неперервно залежать від параметрів і даних задачі та можуть бути використані як в подальших теоретичних дослідженнях, так і в практиці інженерних розрахунків реальних еволюційних процесів, які моделюються гіперболічними крайовими задачами (задачі акустики, гідродинаміки, теорії коливань механічних систем), які описуються циліндричною системою координат.

Ключові слова: математичне моделювання, коливний процес, гіперболічне рівняння, початкові та крайові умови, умови спряження, інтегральні та гібридні інтегральні перетворення, матриця впливу, матриця Гріна.

Вступ. Коливні процеси відіграють важливу роль у сучасній вібраційній техніці, новітніх технологіях, суттєво впливають на міцність і довговічність деталей машин і механізмів, будівельних конструкцій при врахуванні механічних і технологічних умов їх експлуатації. Найпростішою математичною моделлю такого процесу є добре і давно відоме лінійне диференціальне рівняння коливань (хвильове рівняння, рівняння Д'аламбера) гіперболічного типу 2-го порядку

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \Delta_3 u = f(t, P),$$

де Δ_3 — тривимірний оператор Лапласа у відповідній системі координат (декартовій, циліндричній, сферичній тощо) тривимірного евклідового простору, $a = \text{const}$, f — деяка наперед задана функція, P — точка простору.

Зрозуміло, що для адекватного моделювання коливного процесу до складу математичної моделі крім хвильового рівняння потрібно долучити ще певні початкові та крайові умови, а у випадку кусково-однорідних середовищ — умови контакту на поверхнях спряження. Таким чином, математичною моделлю коливного процесу є гіперболічна крайова задача математичної фізики [1]. На цей час досить детально вивчено одновимірні, двовимірні та тривимірні гіперболічні крайові задачі математичної фізики однорідних середовищ. Але у зв'язку з широким застосуванням композитних матеріалів (найпростіший композит має дві точки спряження) у будівництві, техніці, сучасних технологіях як математичні моделі певних процесів виникають крайові задачі для диференціальних рівнянь з частинними похідними різних типів (еліптичних, параболічних, гіперболічних) не тільки в однорідних областях, коли коефіцієнти модельних рівнянь є неперервними, але й в неоднорідних і кусково-однорідних середовищах, коли коефіцієнти рівнянь є кусково-неперервними, чи, зокрема, кусково-сталими [2–4].

Крім методу відокремлення змінних [1, 6] та його узагальнень [5], одним з важливих і ефективних методів дослідження лінійних математичних моделей (лінійних крайових задач математичної фізики) є метод інтегральних перетворень [6], який дає можливість будувати в аналітичному вигляді розв'язки тих чи інших математичних моделей (крайових задач) через їх інтегральне зображення у випадку однорідних середовищ. У той же час, для досить широкого класу задач у кусково-однорідних середовищах ефективним методом їх дослідження виявився метод гібридних інтегральних перетворень, які породжені відповідними гібридними диференціальними операторами, коли на кожній компоненті зв'язності кусково-однорідного середовища розглядаються або ж різні диференціальні оператори, або ж диференціальні оператори того ж самого вигляду, але з різними наборами коефіцієнтів [7–11].

У цій статті, яка є логічним продовженням [12-14], ми пропонуємо точний аналітичний розв'язок узагальненої математичної моделі коливного процесу в необмеженому кусково-однорідному клиновидному порожнистому циліндрі, побудований методом інтегральних і гібридних інтегральних перетворень при найбільш загальних обмеженнях на вихідні дані задачі.

Постановка задачі. Розглянемо задачу побудови обмеженого на множині

$$D = \{(t, r, \varphi, z) \mid t > 0; r \in I_n^+ = \bigcup_{j=1}^{n+1} I_j = \bigcup_{j=1}^{n+1} (R_{j-1}; R_j), R_0 > 0,$$

$$R_{n+1} \equiv R < +\infty; \varphi \in (0; \varphi_0), 0 < \varphi_0 < 2\pi; z \in (-\infty; +\infty)\}$$

класичного розв'язку лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними гіперболічного типу 2-го порядку [1, 6]

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} - \left[a_{rj}^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{a_{\varphi j}^2}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + a_{zj}^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] u_j + \\ + \chi_j^2 u_j = f_j(t, r, \varphi, z), r \in I_j; j = \overline{1, n+1} \end{aligned} \quad (1)$$

з початковими умовами

$$u_j \Big|_{t=0} = g_j^1(r, \varphi, z); \frac{\partial u_j}{\partial t} \Big|_{t=0} = g_j^2(r, \varphi, z); r \in I_j; j = \overline{1, n+1}, \quad (2)$$

крайовими умовами

$$\frac{\partial^s u_j}{\partial z^s} \Big|_{z=-\infty} = 0; \frac{\partial^s u_j}{\partial z^s} \Big|_{z=+\infty} = 0; s = 0, 1; j = \overline{1, n+1}; \quad (3)$$

$$\left(\alpha_{11}^0 \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{11}^0 \right) u_1 \Big|_{r=R_0} = g_0(t, \varphi, z); \left(\alpha_{22}^{n+1} \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{22}^{n+1} \right) u_{n+1} \Big|_{r=R} = g(t, \varphi, z); \quad (4)$$

$$\alpha_{11}^0 \leq 0, \beta_{11}^0 \geq 0; \left| \alpha_{11}^0 \right| + \beta_{11}^0 \neq 0; \alpha_{22}^{n+1} \geq 0, \beta_{22}^{n+1} \geq 0; \alpha_{22}^{n+1} + \beta_{22}^{n+1} \neq 0,$$

одними з крайових умов на гранях клина [7]

$$u_j \Big|_{\varphi=0} = g_{1j}(t, r, z); u_j \Big|_{\varphi=\varphi_0} = \omega_{1j}(t, r, z); j = \overline{1, n+1}, \quad (5)$$

$$u_j \Big|_{\varphi=0} = g_{2j}(t, r, z); \frac{\partial u_j}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=\varphi_0} = -\omega_{2j}(t, r, z); j = \overline{1, n+1}, \quad (6)$$

$$\frac{\partial u_j}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=0} = g_{3j}(t, r, z); u_j \Big|_{\varphi=\varphi_0} = \omega_{3j}(t, r, z); j = \overline{1, n+1}, \quad (7)$$

$$\frac{\partial u_j}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=0} = g_{4j}(t, r, z); \frac{\partial u_j}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=\varphi_0} = -\omega_{4j}(t, r, z); j = \overline{1, n+1} \quad (8)$$

та умовами спряження [12]

$$\left[\left(\alpha_{j1}^k \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j1}^k \right) u_k - \left(\alpha_{j2}^k \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j2}^k \right) u_{k+1} \right]_{r=R_k} = 0; \quad j = 1, 2; k = \overline{1, n}, \quad (9)$$

де

$a_{rj}, a_{\varphi j}, a_{zj}, \chi_j, \alpha_{js}^k, \beta_{js}^k$ — деякі сталі;

$$c_{jk} \equiv \alpha_{2j}^k \beta_{1j}^k - \alpha_{1j}^k \beta_{2j}^k \neq 0; \quad c_{1k} \cdot c_{2k} > 0;$$

$$f(t, r, \varphi, z) = \{f_1(t, r, \varphi, z), f_2(t, r, \varphi, z), \dots, f_{n+1}(t, r, \varphi, z)\},$$

$$g^1(r, \varphi, z) = \{g_1^1(r, \varphi, z); g_2^1(r, \varphi, z), \dots, g_{n+1}^1(r, \varphi, z)\};$$

$$g^2(r, \varphi, z) = \{g_1^2(r, \varphi, z); g_2^2(r, \varphi, z), \dots, g_{n+1}^2(r, \varphi, z)\};$$

$$g_{pj}(t, r, z), \quad \omega_{pj}(t, r, z); \quad (p = \overline{1, 4}; j = \overline{1, n+1}), \quad g_0(t, \varphi, z), \quad g(t, \varphi, z) \quad —$$

задані дійсні обмежені неперервні функції;

$$u(t, r, \varphi, z) = \{u_1(t, r, \varphi, z); u_2(t, r, \varphi, z), \dots, u_{n+1}(t, r, \varphi, z)\} \quad —$$

шукана дійсна двічі неперервно диференційовна функція.

Зауважимо, що:

- 1) у випадку $\chi_j = 0$ рівняння (1) є класичним тривимірним неоднорідним рівнянням коливань (хвильовим рівнянням, рівнянням Д'Аламбера) для ортотропного середовища у циліндричній системі координат;
- 2) якщо $\alpha_{11}^k = 0, \beta_{11}^k = 1; \alpha_{12}^k = 0, \beta_{12}^k = 1; \alpha_{21}^k = E_1^k, \beta_{21}^k = 0; \alpha_{22}^k = E_2^k, \beta_{22}^k = 0$, де E_1^k, E_2^k — модулі Юнга ($k = \overline{1, n}$), то умови спряження (9) збігаються з класичними умовами ідеального механічного контакту.

Отже, гіперболічні початково-крайові задачі спряження (1)–(4), (5), (9); (1)–(4), (6), (9); (1)–(4), (7), (9); (1)–(4), (8), (9) можна розглядати як узагальнені математичні моделі коливних процесів у необмеженому кусково-однорідному клиновидному порожнистому циліндрі.

Основна частина. Припустимо, що розв'язки задач (1)–(4), (5), (9); (1)–(4), (6), (9); (1)–(4), (7), (9); (1)–(4), (8), (9) існують і задані й шукані функції задовольняють умови застосовності залучених нижче прямих та обернених інтегральних і гібридних інтегральних перетворень [11, 15, 16].

Визначимо скінченні пряме $F_{m,ik}$ та обернене $F_{m,ik}^{-1}$ інтегральні перетворення Фур'є щодо кутової змінної $\varphi \in (0; \varphi_0)$ за формулами [15]:

$$F_{m,ik} [f(\varphi)] = \int_0^{\varphi_0} f(\varphi) U_{m,ik}(\varphi) d\varphi \equiv f_{m,ik}, \quad (10)$$

$$F_{m,ik}^{-1} [f_{m,ik}] = \frac{2}{\varphi_0} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m^{ik} f_{m,ik} U_{m,ik}(\varphi) \equiv f(\varphi), \quad (11)$$

де

$$\beta_{m,11} = \frac{\pi m}{\varphi_0}, U_{m,11}(\varphi) = \sin(\beta_{m,11}\varphi); \beta_{m,12} = \frac{\pi(2m+1)}{2\varphi_0}, U_{m,12}(\varphi) = \sin(\beta_{m,12}\varphi);$$

$$\beta_{m,21} = \beta_{m,12}, U_{m,21}(\varphi) = \cos(\beta_{m,21}\varphi); \beta_{m,22} = \beta_{m,11}, U_{m,22}(\varphi) = \cos(\beta_{m,22}\varphi);$$

$$\varepsilon_0^{ik} = 0, \varepsilon_m^{ik} = 1 \text{ при } ik = 11, 12, 21; m = 1, 2, 3, \dots ;$$

$$\varepsilon_0^{22} = \frac{1}{2}, \varepsilon_m^{22} = 1 \text{ при } m = 1, 2, 3, \dots .$$

Безпосередньо (інтегруванням частинами) перевіряється, що для оператора $F_{m,ik}$ виконується основна тотожність інтегрального перетворення диференціального перетворення Фур'є:

$$F_{m,ik} \left[\frac{d^2 f}{d\varphi^2} \right] = -\beta_{m,ik}^2 f_{m,ik} + \Phi_{m,ik}; i, k = 1, 2, \quad (12)$$

де

$$\Phi_{m,11} = \frac{\pi m}{\varphi_0} \left[f(0) + (-1)^{m+1} f(\varphi_0) \right]; \Phi_{m,12} = \frac{\pi(2m+1)}{2\varphi_0} f(0) + (-1)^m \frac{df}{d\varphi} \Big|_{\varphi=\varphi_0};$$

$$\Phi_{m,21} = -\frac{df}{d\varphi} \Big|_{\varphi=0} + (-1)^m \frac{\pi(2m+1)}{2\varphi_0} f(\varphi_0); \Phi_{m,22} = -\frac{df}{d\varphi} \Big|_{\varphi=0} + (-1)^m \frac{df}{d\varphi} \Big|_{\varphi=\varphi_0}.$$

Інтегральний оператор $F_{m,ik}$, який діє за формулою (10) внаслідок тотожності (12) тривимірним початково-крайовим задачам спряження (1)–(4), (5), (9); (1)–(4), (6), (9); (1)–(4), (7), (9); (1)–(4), (8), (9) ставить у відповідність задачу побудови обмеженого на множині

$$D' = \left\{ (t, r, z) \mid t > 0; r \in I_n^+, z \in (-\infty; +\infty) \right\}$$

розв'язку двовимірних диференціальних рівнянь

$$\frac{\partial^2 u_{jm,ik}}{\partial t^2} - \left[a_{rj}^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{v_{jm,ik}^2}{r^2} \right) + a_{zj}^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] u_{jm,ik} + \chi_j^2 u_{jm,ik} = G_{jm,ik}(t, r, z), r \in I_j; j = \overline{1, n+1} \quad (13)$$

з початковими умовами

$$u_{jm,ik} \Big|_{t=0} = g_{jm,ik}^1(r, z); \frac{\partial u_{jm,ik}}{\partial t} \Big|_{t=0} = g_{jm,ik}^2(r, z), \quad (14)$$

крайовими умовами

$$\left. \frac{\partial^s u_{jm,ik}}{\partial z^s} \right|_{z=-\infty} = 0; \left. \frac{\partial^s u_{jm,ik}}{\partial z^s} \right|_{z=+\infty} = 0; s = 0, 1; j = \overline{1, n+1}, \quad (15)$$

$$\left(\alpha_{11}^0 \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{11}^0 \right) u_{1m,ik} \Big|_{r=R_0} = g_{0m,ik}(t, z); \quad (16)$$

$$\left(\alpha_{22}^{n+1} \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{22}^{n+1} \right) u_{n+1,m,ik} \Big|_{r=R} = g_{m,ik}(t, z)$$

та умовами спряження

$$\left[\left(\alpha_{j1}^p \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j1}^p \right) u_{pm,ik} - \left(\alpha_{j2}^p \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j2}^p \right) u_{p+1,m,ik} \right] \Big|_{r=R_p} = 0; j = 1, 2; p = \overline{1, n}, \quad (17)$$

де

$$G_{jm,ik}(t, r, z) = f_{jm,ik}(t, r, z) + a_{\varphi j}^2 r^{-2} \Phi_{m,ik}(t, r, z); \quad v_{jm,ik} = a_{rj}^{-1} a_{\varphi j} \beta_{m,ik}.$$

До двовимірної початково-крайової задачі спряження (13)–(17) застосуємо інтегральне перетворення Фур'є на декартовій осі $(-\infty; +\infty)$ щодо змінної z [16]:

$$F[g(z)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(z) e^{-i\sigma z} dz \equiv \tilde{g}(\sigma), i = \sqrt{-1}, \quad (18)$$

$$F^{-1}[\tilde{g}(\sigma)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{g}(\sigma) e^{i\sigma z} d\sigma \equiv g(z), \quad (19)$$

$$F\left[\frac{d^2 g}{dz^2}\right] = -\sigma^2 F[g(z)] \equiv -\sigma^2 \tilde{g}(\sigma). \quad (20)$$

Інтегральний оператор F , який діє за формулою (18), внаслідок тотожності (20), задачі (13)–(17) ставить у відповідність задачу побудови обмеженого на множині $D'' = \{(t, r) | t > 0; r \in I_n^+\}$ розв'язку одновимірних диференціальних рівнянь В-гіперболічного типу

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}_{jm,ik}}{\partial t^2} - a_{rj}^2 B_{V_{jm,ik}}[\tilde{u}_{jm,ik}] + \left(a_{rj}^2 \sigma^2 + \chi_j^2 \right) \tilde{u}_{jm,ik} = \tilde{G}_{jm,ik}(t, r, \sigma); r \in I_j; j = \overline{1, n+1} \quad (21)$$

з початковими умовами

$$\tilde{u}_{jm,ik} \Big|_{t=0} = \tilde{g}_{jm,ik}^1(r, \sigma); \left. \frac{\partial \tilde{u}_{jm,ik}}{\partial t} \right|_{t=0} = \tilde{g}_{jm,ik}^2(r, \sigma), r \in I_j; j = \overline{1, n+1}, \quad (22)$$

крайовими умовами

$$\begin{aligned} \left(\alpha_{11}^0 \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{11}^0 \right) \tilde{u}_{1m,ik} \Big|_{r=R_0} &= \tilde{g}_{0m,ik}(t, \sigma); \\ \left(\alpha_{22}^{n+1} \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{22}^{n+1} \right) \tilde{u}_{n+1,m,ik} \Big|_{r=R} &= \tilde{g}_{m,ik}(t, \sigma), \end{aligned} \quad (23)$$

та умовами спряження

$$\left[\left(\alpha_{j1}^p \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j1}^p \right) \tilde{u}_{pm,ik} - \left(\alpha_{j2}^p \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j2}^p \right) \tilde{u}_{p+1,m,ik} \right] \Big|_{r=R_p} = 0; \quad j=1,2; \quad p=\overline{1,n}, \quad (24)$$

де $B_{V_{jm,ik}} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{V_{jm,ik}^2}{r^2}$ — класичний диференціальний оператор Бесселя.

До одновимірної початково-крайової задачі спряження (21)–(24) застосуємо скінченне гібридне інтегральне перетворення типу Ганкеля 2-го роду на кусково-однорідному сегменті I_n^+ з n точками спряження щодо радіальної змінної r [11]:

$$M_{sn} [f(r)] = \int_{R_0}^R f(r) V(r, \lambda_s) \sigma(r) r dr \equiv \tilde{f}(\lambda_s), \quad (25)$$

$$M_{sn}^{-1} [\tilde{f}(\lambda_s)] = \sum_{s=1}^{\infty} \tilde{f}(\lambda_s) \frac{V(r, \lambda_s)}{\|V(r, \lambda_s)\|^2} \equiv f(r), \quad (26)$$

$$\begin{aligned} M_{sn} [B_{(m,ik)} [f(r)]] &= -\lambda_s^2 \tilde{f}(\lambda_s) - \sum_{k=1}^{n+1} \gamma_k^2 \int_{R_{k-1}}^{R_k} f(r) V_k(r, \lambda_s) \sigma_k r dr + \\ &+ \left(-\frac{a_1^2 R_0 \sigma_1}{\alpha_{11}^0} \right) V_1(R_0, \lambda_s) \left(\alpha_{11}^0 \frac{df}{dr} + \beta_{11}^0 f \right) \Big|_{r=R_0} + \\ &+ \frac{a_{n+1}^2 R \sigma_{n+1}}{\alpha_{22}^{n+1}} V_{n+1}(R, \lambda_s) \left(\alpha_{22}^{n+1} \frac{df}{dr} + \beta_{22}^{n+1} f \right) \Big|_{r=R}. \end{aligned} \quad (27)$$

У формулах (25)–(27) беруть участь величини і функції, виписані в [11], $B_{(m,ik)} = \sum_{j=1}^{n+1} a_j^2 \Theta(r - R_{j-1}) \Theta(R_j - r) B_{V_{jm,ik}}$ — гібридний диференціальний оператор Бесселя, $\Theta(x)$ — одинична функція Гевісайда [17].

Запишемо диференціальні рівняння (21) та початкові умови (22) у матричній формі

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a_1^2 B_{V_{1m,ik}} + q_1^2(\sigma) \right) \tilde{u}_{1m,ik}(t, r, \sigma) \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a_2^2 B_{V_{2m,ik}} + q_2^2(\sigma) \right) \tilde{u}_{2m,ik}(t, r, \sigma) \\ \dots\dots\dots \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a_{n+1}^2 B_{V_{n+1,m,ik}} + q_{n+1}^2(\sigma) \right) \tilde{u}_{n+1,m,ik}(t, r, \sigma) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{G}_{1m,ik}(t, r, \sigma) \\ \tilde{G}_{2m,ik}(t, r, \sigma) \\ \dots\dots\dots \\ \tilde{G}_{n+1,m,ik}(t, r, \sigma) \end{bmatrix}, \quad (28)$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{u}_{1m,ik}(t, r, \sigma) \\ \tilde{u}_{2m,ik}(t, r, \sigma) \\ \dots\dots\dots \\ \tilde{u}_{n+1,m,ik}(t, r, \sigma) \end{bmatrix}_{t=0} = \begin{bmatrix} \tilde{g}_{1m,ik}^1(r, \sigma) \\ \tilde{g}_{2m,ik}^1(r, \sigma) \\ \dots\dots\dots \\ \tilde{g}_{n+1,m,ik}^1(r, \sigma) \end{bmatrix}, \quad (29)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \tilde{u}_{1m,ik}(t, r, \sigma) \\ \tilde{u}_{2m,ik}(t, r, \sigma) \\ \dots\dots\dots \\ \tilde{u}_{n+1,m,ik}(t, r, \sigma) \end{bmatrix}_{t=0} = \begin{bmatrix} \tilde{g}_{1m,ik}^2(r, \sigma) \\ \tilde{g}_{2m,ik}^2(r, \sigma) \\ \dots\dots\dots \\ \tilde{g}_{n+1,m,ik}^2(r, \sigma) \end{bmatrix},$$

де

$$q_j^2(\sigma) = a_{sj}^2 \sigma^2 + \chi_j^2; \quad j = \overline{1, n+1}.$$

Інтегральний оператор M_{sn} , який діє за формулою (25), зобразимо у вигляді операторної матриці-рядка

$$M_{sn} [\dots] = \begin{bmatrix} \int_{R_0}^{R_1} \dots V_1(r, \lambda_s) \sigma_1 r dr & \int_{R_1}^{R_2} \dots V_2(r, \lambda_s) \sigma_2 r dr \\ \dots \int_{R_{n-1}}^{R_n} \dots V_n(r, \lambda_s) \sigma_n r dr & \int_{R_n}^R \dots V_{n+1}(r, \lambda_s) \sigma_{n+1} r dr \end{bmatrix} \quad (30)$$

і застосуємо за правилом множення матриць до задачі (28), (29). Внаслідок тотожності (27) одержуємо задачу Коші для звичайних диференціальних рівнянь 2-го порядку

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{n+1} \left(\frac{d^2}{dt^2} + \lambda_s^2 + \gamma_j^2 + q_j^2(\sigma) \right) \tilde{u}_{jm,ik}(t, \lambda_s, \sigma) = \\ & = \sum_{j=1}^{n+1} \tilde{G}_{jm,ik}(t, \lambda_s, \sigma) + \left(-\frac{a_1^2 R_0 \sigma_1}{\alpha_{11}^0} \right) V_1(R_0, \lambda_s) \tilde{g}_{0m,ik}(t, \sigma) + \\ & \quad + \frac{a_{n+1}^2 R \sigma_{n+1}}{\alpha_{22}^{n+1}} V_{n+1}(R, \lambda_s) \tilde{g}_{m,ik}(t, \sigma), \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n+1} \tilde{u}_{jm,ik}(t, \lambda_s, \sigma) \Big|_{t=0} &= \sum_{j=1}^{n+1} \tilde{g}_{jm,ik}^1(\lambda_s, \sigma); \\ \frac{d}{dt} \sum_{j=1}^{n+1} \tilde{u}_{jm,ik}(t, \lambda_s, \sigma) \Big|_{t=0} &= \sum_{j=1}^{n+1} \tilde{g}_{jm,ik}^2(\lambda_s, \sigma), \end{aligned} \quad (32)$$

де

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{jm,ik}(t, \lambda_s, \sigma) &= \int_{R_{j-1}}^{R_j} \tilde{u}_{jm,ik}(t, r, \sigma) V_j(r, \lambda_s) \sigma_j r dr; \quad j = \overline{1, n+1}, \\ \tilde{G}_{jm,ik}(t, \lambda_s, \sigma) &= \int_{R_{j-1}}^{R_j} \tilde{G}_{jm,ik}(t, r, \sigma) V_j(r, \lambda_s) \sigma_j r dr, \quad j = \overline{1, n+1}, \\ \tilde{g}_{jm,ik}^p(\lambda_s, \sigma) &= \int_{R_{j-1}}^{R_j} \tilde{g}_{jm,ik}^p(r, \sigma) V_j(r, \lambda_s) \sigma_j r dr; \quad j = \overline{1, n+1}, \quad p = 1, 2. \end{aligned}$$

Припустимо, не зменшуючи загальності розв'язку задачі, що $\max \{q_1^2(\sigma), q_2^2(\sigma), \dots, q_{n+1}^2(\sigma)\} = q_1^2(\sigma)$ і покладемо всюди $\gamma_j^2 = q_1^2(\sigma) - q_j^2(\sigma); j = \overline{1, n+1}$. Задача Коші (31), (32) набуває вигляду

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \tilde{u}_{m,ik}}{dt^2} + \Delta^2(\lambda_s, \sigma) \tilde{u}_{m,ik} &= \tilde{G}_{m,ik}(t, \lambda_s, \sigma) + \\ + \left(-\frac{a_1^2 \sigma_1 R_0}{\alpha_{11}^0} \right) V_1(R_0, \lambda_s) \tilde{g}_{0m,ik}(t, \sigma) &+ \frac{a_{n+1}^2 \sigma_{n+1} R}{\alpha_{11}^0} V_{n+1}(R, \lambda_s) \tilde{g}_{m,ik}(t, \sigma), \end{aligned} \quad (33)$$

$$\tilde{u}_{m,ik}(t, \lambda_s, \sigma) \Big|_{t=0} = \tilde{g}_{m,ik}^1(\lambda_s, \sigma); \quad \frac{d}{dt} \tilde{u}_{m,ik}(t, \lambda_s, \sigma) \Big|_{t=0} = \tilde{g}_{m,ik}^2(\lambda_s, \sigma), \quad (34)$$

де

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{m,ik}(t, \lambda_s, \sigma) &= \sum_{j=1}^{n+1} \tilde{u}_{jm,ik}(t, \lambda_s, \sigma); \quad \tilde{G}_{m,ik}(t, \lambda_s, \sigma) = \sum_{j=1}^{n+1} \tilde{G}_{jm,ik}(t, \lambda_s, \sigma), \\ \tilde{g}_{m,ik}^s(\lambda_s, \sigma) &= \sum_{j=1}^{n+1} \tilde{g}_{jm,ik}^s(\lambda_s, \sigma); \quad \Delta^2(\lambda_s, \sigma) = \lambda_s^2 + a_{z1}^2 \sigma^2 + \chi_1^2; \quad s = 1, 2. \end{aligned}$$

Відомо [11], що єдиним розв'язком задачі (33), (34) є функція

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{m,ik}(t, \lambda_s, \sigma) &= N(t, \lambda_s, \sigma) \tilde{g}_{m,ik}^2(\lambda_s, \sigma) + \frac{d}{dt} N(t, \lambda_s, \sigma) \tilde{g}_{m,ik}^1(\lambda_s, \sigma) + \\ + \int_0^t N(t-\tau, \lambda_s, \sigma) &\left[\tilde{G}_{m,ik}(\tau, \lambda_s, \sigma) + \left(-\frac{a_1^2 \sigma_1 R_0}{\alpha_{11}^0} \right) V_1(R_0, \lambda_s) \tilde{g}_{0m,ik}(t, \sigma) + \right. \end{aligned} \quad (35)$$

$$+ \frac{a_{n+1}^2 \sigma_{n+1} R}{\alpha_{22}^{n+1}} V_{n+1}(R, \lambda_s) \tilde{g}_{m,ik}(t, \sigma) \Big] d\tau,$$

де функція Коші (розв'язуюча функція) $N(t, \lambda_s, \sigma) = \frac{\sin(\Delta(\lambda_s, \sigma)t)}{\Delta(\lambda_s, \sigma)}$.

Оскільки суперпозиція операторів M_{sn} та M_{sn}^{-1} є одиничним оператором ($M_{sn} \circ M_{sn}^{-1} = M_{sn}^{-1} \circ M_{sn} = I$), то оператор M_{sn}^{-1} , як обернений до оператора (30), зобразимо у вигляді операторної матриці-стовпця

$$M_{sn}^{-1} [\dots] = \begin{bmatrix} \int_0^{+\infty} \dots \frac{V_1(r, \lambda_s)}{\|V(r, \lambda_s)\|^2} \\ \int_0^{+\infty} \dots \frac{V_2(r, \lambda_s)}{\|V(r, \lambda_s)\|^2} \\ \dots \dots \dots \\ \int_0^{+\infty} \dots \frac{V_{n+1}(r, \lambda_s)}{\|V(r, \lambda_s)\|^2} \end{bmatrix} \quad (36)$$

і застосуємо за правилом множення матриць до матриці-елемента $[\tilde{u}_{m,ik}(t, \lambda_s, \sigma)]$, де функція $\tilde{u}_{m,ik}(t, \lambda_s, \sigma)$ визначена формулою (35). Одержуємо єдиний розв'язок одновимірної гіперболічної початково-крайової задачі спряження (21)-(24):

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{jm,ik}(t, r, \sigma) &= \sum_{s=1}^{\infty} N(t, \lambda_s, \sigma) \tilde{g}_{m,ik}^2(\lambda_s, \sigma) \frac{V_j(r, \lambda_s)}{\|V(r, \lambda_s)\|^2} + \\ &+ \frac{\partial}{\partial t} \sum_{s=1}^{\infty} N(t, \lambda_s, \sigma) \tilde{g}_{m,ik}^1(\lambda_s, \sigma) \frac{V_j(r, \lambda_s)}{\|V(r, \lambda_s)\|^2} + \\ &+ \sum_{s=1}^{\infty} \int_0^t N(t-\tau, \lambda_s, \sigma) \tilde{G}_{m,ik}(\tau, \lambda_s, \sigma) d\tau \frac{V_j(r, \lambda_s)}{\|V(r, \lambda_s)\|^2} + \\ &+ \left(-\frac{a_1^2 \sigma_1 R_0}{\alpha_{11}^0} \right) \sum_{s=1}^{\infty} \int_0^t N(t-\tau, \lambda_s, \sigma) V_1(R_0, \lambda_s) \tilde{g}_{0m,ik}(t, \sigma) d\tau \frac{V_j(r, \lambda_s)}{\|V(r, \lambda_s)\|^2} + \\ &+ \frac{a_{n+1}^2 \sigma_{n+1} R}{\alpha_{22}^{n+1}} \sum_{s=1}^{\infty} \int_0^t N(t-\tau, \lambda_s, \sigma) V_{n+1}(R, \lambda_s) \tilde{g}_{m,ik}(t, \sigma) d\tau \frac{V_j(r, \lambda_s)}{\|V(r, \lambda_s)\|^2}; j = \overline{1, n+1}. \end{aligned} \quad (37)$$

Застосувавши послідовно до функцій $\tilde{u}_{jm,ik}(t, r, \sigma)$, визначених формулами (37), обернені оператори F^{-1} та $F_{m,ik}^{-1}$, і виконавши нескладні перетворення, одержуємо функції

$$\begin{aligned}
 u_{j,ik}(t, r, \varphi, z) = & \sum_{p=1}^{n+1} \int_0^t \int_{R_{p-1}}^{R_p} \int_0^{\varphi_0} \int_{-\infty}^{+\infty} E_{jp}^{ik}(t-\tau, r, \rho, \varphi, \alpha, z-\xi) f_p(\tau, \rho, \alpha, \xi) \sigma_p \rho d\xi d\alpha d\rho d\tau + \\
 & + \frac{\partial}{\partial t} \sum_{p=1}^{n+1} \int_{R_{p-1}}^{R_p} \int_0^{\varphi_0} \int_{-\infty}^{+\infty} E_{jp}^{ik}(t, r, \rho, \varphi, \alpha, z-\xi) g_p^1(\rho, \alpha, \xi) \sigma_p \rho d\xi d\alpha d\rho + \\
 & + \sum_{p=1}^{n+1} \int_{R_{p-1}}^{R_p} \int_0^{\varphi_0} \int_{-\infty}^{+\infty} E_{jp}^{ik}(t, r, \rho, \varphi, \alpha, z-\xi) g_p^2(\rho, \alpha, \xi) \sigma_p \rho d\xi d\alpha d\rho + \\
 & + \sum_{p=1}^{n+1} a_{\varphi p}^2 \int_0^t \int_{R_{p-1}}^{R_p} \int_{-\infty}^{+\infty} Q_{jp}^{ik}(t, \tau, r, \rho, \varphi, z, \xi) \sigma_p \rho^{-1} d\xi d\rho d\tau + \\
 & + \int_0^t \int_0^{\varphi_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[W_{jr,ik}^1(t-\tau, r, \varphi, \alpha, z-\xi) g_0(\tau, \alpha, \xi) + \right. \\
 & \left. + W_{jr,ik}^2(t-\tau, r, \varphi, \alpha, z-\xi) g(\tau, \alpha, \xi) \right] d\xi d\alpha d\tau; \quad j = \overline{1, n+1},
 \end{aligned} \tag{38}$$

які визначають єдині розв'язки гіперболічних початково-крайових задач (1)–(4), (5), (9); (1)–(4), (6), (9); (1)–(4), (7), (9); (1)–(4), (8), (9) при відповідних значеннях ik (11, 12, 21, 22).

У формулах (38) застосовано компоненти

$$E_{jp}^{ik}(t, r, \rho, \varphi, \alpha, z) = \frac{2}{\pi\varphi_0} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m^{ik} P_{jp}^{m,ik}(t, r, \rho, z) U_{m,ik}(\varphi) U_{m,ik}(\alpha)$$

матриці впливу (функції впливу), функції Гріна

$$Q_{jp}^{ik}(t, \tau, r, \rho, \varphi, z, \xi) = \frac{2}{\pi\varphi_0} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m^{ik} P_{jp}^{m,ik}(t-\tau, r, \rho, z-\xi) \Phi_{m,ik}(\tau, \rho, \xi) U_{m,ik}(\varphi)$$

КОМПОНЕНТИ

$$W_{jr,ik}^1(t, r, \varphi, \alpha, z) = -\frac{a_1^2 \sigma_1 R_0}{\alpha_{22}^{n+1}} E_{j1}^{ik}(t, r, R_0, \varphi, \alpha, z)$$

лівої радіальної матриці Гріна (ліві радіальні функції Гріна) та компоненти

$$W_{jr,ik}^2(t, r, \varphi, \alpha, z) = \frac{a_{n+1}^2 \sigma_{n+1} R}{\alpha_{22}^{n+1}} E_{j,n+1}^{ik}(t, r, R, \varphi, \alpha, z)$$

правої радіальної матриці Гріна (праві радіальні функції Гріна) відповідних початково-крайових задач спряження, де

$$P_{jp}^{m,ik}(t, r, \rho, z) = \sum_{s=1}^{\infty} \int_0^t N(t, \lambda_s, \sigma) \cos(\sigma z) d\sigma \frac{V_j(r, \lambda_s) V_p(\rho, \lambda_s)}{\|V_j(r, \lambda_s)\|^2}.$$

Зауваження 1. Аналіз розв'язків (38) в залежності від типу крайових умов на гранях клина $\varphi = 0$ та $\varphi = \varphi_0$ повторює відповідний аналіз в [12].

Зауваження 2. У випадку $a_{rj} = a_{\varphi j} = a_{zj} \equiv a_j > 0$ формули (38) вказують структури розв'язків розглянутих задач в ізотропному необмеженому кусково-однорідному клиновидному порожнистому циліндрі.

Зауваження 3. Випадок зміни φ в межах $\varphi_1 < \varphi < \varphi_2$ зводиться до розглянутого нами заміною $\varphi' = \varphi - \varphi_1$ ($\varphi_0 = \varphi_2 - \varphi_1$).

Зауваження 4. Параметри $\alpha_{11}^0, \beta_{11}^0; \alpha_{22}^{n+1}, \beta_{22}^{n+1}$ дозволяють виділяти з формул (38) розв'язки крайових задач у випадках задання на радіальних поверхнях крайових умов 1-го, 2-го й 3-го роду та їх можливих комбінацій (1-1, 1-2, 1-3, 2-1, ..., 3-3).

Зауваження 5. Аналіз розв'язків (38) в залежності від аналітичного виду функцій $f_j(t, r, \varphi, z)$, $g_j^s(r, \varphi, z)$, $g_{kj}(t, r, z)$, $\omega_{kj}(t, r, z)$, $j = \overline{1, n+1}$, $s = \overline{1, 2}$; $k = \overline{1, 4}$, $g_0(t, \varphi, z)$, $g(t, \varphi, z)$ проводиться безпосередньо із загальних структур.

Висновки. Методом інтегральних і гібридних інтегральних перетворень у поєднанні з методом головних розв'язків (функцій впливу та функцій Гріна) вперше побудовано єдині точні аналітичні розв'язки узагальнених математичних моделей коливних процесів у необмеженому кусково-однорідному клиновидному порожнистому циліндрі. Одержані розв'язки носять алгоритмічний характер, неперервно залежить від параметрів і даних задачі й можуть бути використані як в теоретичних дослідженнях, так і в практиці інженерних розрахунків з використанням чисельних методів.

Список використаних джерел:

1. Перестюк М. О. Теорія рівнянь математичної фізики / М. О. Перестюк, В. В. Маринець. — Київ : Либідь, 2006. — 424 с.
2. Дейнека В. С. Модели и методы решения задач в неоднородных средах / В. С. Дейнека, И. В. Сергиенко. — Киев : Наук. думка, 2001. — 606 с.
3. Дейнека В. С. Модели и методы решения задач с условиями сопряжения / В. С. Дейнека, И. В. Сергиенко, В. В. Скопецкий. — Киев : Наук. думка, 1998. — 614 с.

4. Сергиенко И. В. Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах / И. В. Сергиенко, В. В. Скопецкий, В. С. Дейнека. — Киев : Наук. думка, 1991. — 432 с.
5. Каленюк П. И. Обобщенный метод разделения переменных / П. И. Каленюк, Я. Е. Баранецкий, З. Н. Нитребич. — Киев : Наук. думка, 1993. — 232 с.
6. Самойленко В. Г. Рівняння математичної фізики / В. Г. Самойленко, І. М. Конет. — Київ : ВПЦ «Київський університет», 2014. — 283 с.
7. Конет І. М. Стационарні та нестационарні температурні поля в циліндрично-кругових областях / І. М. Конет, М. П. Ленюк. — Чернівці : Прут, 2001. — 312 с.
8. Громик А. П. Температурні поля в кусково-однорідних просторових середовищах / А. П. Громик, І. М. Конет, М. П. Ленюк. — Кам'янець-Подільський : Абетка-Світ, 2011. — 200 с.
9. Конет І. М. Гіперболічні крайові задачі математичної фізики в кусково-однорідних просторових середовищах / І. М. Конет. — Кам'янець-Подільський : Абетка-Світ, 2013. — 120 с.
10. Конет І. М. Параболічні крайові задачі в кусково-однорідних середовищах / І. М. Конет, Т. М. Пилипюк. — Кам'янець-Подільський : Абетка-Світ, 2016. — 244 с.
11. Конет І. М. Гіперболічні крайові задачі в кусково-однорідних циліндрично-кругових середовищах / І. М. Конет, Т. М. Пилипюк. — Кам'янець-Подільський : Абетка-Світ, 2017. — 84 с.
12. Громик А. П. Математичне моделювання коливних процесів у кусково-однорідному клиновидному циліндрично-круговому просторі / А. П. Громик // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки : зб. наук. пр. — Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Поділ. нац. ун-т ім. І. Огієнка, 2017. — Вип. 16. — С. 36–52.
13. Громик А. П. Математичне моделювання коливних процесів у кусково-однорідному клиновидному циліндрично-круговому просторі з порожниною / А. П. Громик // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки : зб. наук. пр. — Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Поділ. нац. ун-т ім. І. Огієнка, 2018. — Вип. 17. — С. 26–39.
14. Громик А. П. Математичне моделювання коливних процесів у необмеженому кусково-однорідному клиновидному суцільному циліндрі / А. П. Громик // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки : зб. наук. пр. — Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Поділ. нац. ун-т ім. І. Огієнка, 2018. — Вип. 18. — С. 34–47.
15. Трантер К. Дж. Интегральные преобразования в математической физике / К. Дж. Трантер. — М. : Гостехтеориздат, 1956.-204 с.
16. Снеддон И. Преобразования Фурье / И. Снеддон. — М. : ИЛ, 1955. — 668 с.
17. Шварц Л. Математические методы для физических наук / Л. Шварц. — М. : Мир, 1965. — 408 с.
18. Гельфанд И. М. Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений / И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилев. — М. : Физматгиз, 1958. — 247 с.
19. Шилев Г. Е. Математический анализ. Второй специальный курс / Г. Е. Шилев. — М. : Наука, 1965. — 328 с.

MATHEMATICAL MODELING OF OSCILLATING PROCESSES IN UNLIMITED PIECEWISE-HOMOGENEOUS WEDGE-SHAPED HOLLOW CYLINDER

The theory of boundary value problems for differential equations with partial derivatives develops intensively and its results are important for the development of many sections of mathematics. Its achievements are applied in the mathematical modeling of various processes and phenomenon of physics, mechanics, biology, medicine, economics, engineering.

It is well known that the complexity of a boundary-value problem significantly depends on the coefficients of equations and the geometry of domain in which the problem is considered. Properties of solutions of boundary value problems for linear, quasilinear, and some classes of nonlinear equations in single-connected domains have been studied in enough detail.

However, many important applied problems of thermal physics, thermo-mechanics, theory of elasticity, theory of electrical circuits, theory of vibrations lead to boundary value problems for differential equations with partial derivatives not only in homogeneous domains when the coefficients of the equations are continuous, but also in piecewise homogeneous and inhomogeneous domains when the coefficients of the equations are piecewise continuous.

In this article the exact analytical solutions of mathematical models of oscillating processes (hyperbolic initial-boundary problem of conjugation) for unlimited piecewise-homogeneous wedge-shaped hollow cylinder are obtained by means of the method of integral and hybrid integral transforms, in combination with the method of main solutions (influence matrices and Green's matrices).

The obtained solutions are of algorithmic character, continuously depend on the parameters and data of problem and can be used in further theoretical research and in practical engineering calculations of real processes which are modeled by hyperbolic boundary-value problems that are described by a cylindrical coordinate system (problems of acoustics, hydrodynamics, the theory of vibrations of mechanical systems).

Keywords: *modelling, oscillating, hyperbolic equation, initial and boundary conditions, conditions of conjugation, integral transformation, the influence matrix, Green's matrix.*

Отримано: 7.08.2019

DC 004.94

DOI: 10.32626/2308-5916.2019-20.40-50

V. A. Ivanyuk, Ph. D., Associate Professor,
V. A. Fedorchuk, Doctor of Technical Sciences, Professor
Kamianets-Podilskyi Ivan Ohienko National University,
Kamianets-Podilskyi

VECTOR-MATRIX METHOD OF NUMERICAL IMPLEMENTATION OF THE POLYNOMIAL INTEGRAL VOLTERRA OPERATORS

The article deals with the quadrature method for the numerical implementation of polynomial integral operators. With the computer implementation of Volterra-type integral models, the typical problem is the accumulation of calculations at each step of the computational process. For its acceleration it is suggested to apply the vector-matrix approach. The suggested approach is based on quadrature methods: rectangles, trapezoids, and Simpson's. For homogeneous polynomial integral Volterra operators of the first-, second- and third-degree, respectively, the objects in the form of vectors, matrices, and three-dimensional structures containing the coefficients of the corresponding quadrature formulas have been constructed. The suggested vector-matrix approach involves the reduction of computational operations to the elementary multiplication of elements of the corresponding structures and allows efficient use of parallel algorithms, which significantly accelerates the execution of computational tasks for the implementation of integral operators. In the research work the complexity of implementation is estimated depending on the number of possible parallel flows. The estimation of the suggested approximations of integral representations is researched by model examples, in which there are models in the form of second- and third-degree polynomial integrals of Volterra. The results of computational experiments showed that among the considered quadrature methods, the trapezoidal method is optimal in terms of «precision — complexity of implementation». The accuracy of the numerical implementation of integral models depends on the chosen method, the simulation step, the type of kernel, and does not depend on the dimensionality of the operator. The vector-matrix approach allows building of efficient algorithms for the numerical implementation of integral models and greatly simplifies their software implementation, as it allows easy scaling to a multidimensional case. Such representation allows to use advantages of matrix-oriented packages of applications (Matlab, Octave, Scilab), the peculiarity of which is the high speed of execution of matrix operations.

Key words: *polynomial Volterra integral operators, quadrature method, vector-matrix method.*

Introduction. The constant extension of the scope of integrated models stimulates the development of methods and means of their numerical implementation [1, 3–8]. Moreover, depending on the objects studied and the tasks, the basic ones for modeling linear dynamic systems based on integral models are Volterra operators, and for nonlinear dynamic systems, polynomial Voltaire operators [4, 7, 8].

One of the effective methods of numerical implementation of integral models is the method of quadrature formulas, which includes replacing of the integral by an approximating system of algebraic representations with respect to the discrete values of the desired function [2, 6, 9]. At the same time, the upper bound of the integration is fixed in the Volterra models, and formulas are used for approximate calculation of the integral. There are many quadrature formulas. They include the formulas of Newton-Cotes (including rectangles, trapezoids, Simpson), Gauss, Chebyshev, and others. This gives rise to many approaches and methods for applying the quadrature method. Cubature formulas [2] are applied to approximate polynomial integral models, but there is no general approach and definite recommendations for their application, depending on the form of the integral model.

The key problem of applying the algorithms of the quadrature method in the numerical implementation of Volterra integral models with an arbitrary kernel is the accumulation of the number of calculations at each step of the computational process [2]. This especially becomes apparent in the numerical implementation of polynomial integral operators. Therefore, developing new approaches to the numerical implementation of Volterra polynomial integral models that will accelerate the execution of necessary operations at each step of the numerical implementation is an urgent task.

Algorithms for numerical implementation of the integral polynomial Volterra operator. Consider the possibility of using quadrature formulas of rectangles, trapezoids and Simpson for the numerical realization of a nonhomogeneous Volterra integral polynomial operator of the third degree

$$\begin{aligned}
 y(t) = & \int_0^t K_1(s)x(t-s)ds + \\
 & + \int_0^t \int_0^t K_2(s_1, s_2)x(t-s_1)x(t-s_2)ds_1ds_2 + \\
 & + \int_0^t \int_0^t \int_0^t K_3(s_1, s_2, s_3)x(t-s_1)x(t-s_2)x(t-s_3)ds_1ds_2ds_3.
 \end{aligned} \tag{1}$$

By entering a sustainable breaking down and replacing the integrals (1) by quadratic sums, we obtain [2, 9]:

$$\begin{aligned}
 y(t_i) = & \sum_{j=1}^i A_{1,j} K_1(t_j) x(t_i - t_j) + \\
 & + \sum_{j=1}^i \sum_{g=1}^i A_{2,jg} K_2(t_j, t_g) x(t_i - t_j) x(t_i - t_g) + \\
 & + \sum_{j=1}^i \sum_{g=1}^i \sum_{l=1}^i A_{3,jgl} K_3(t_j, t_g, t_l) x(t_i - t_j) x(t_i - t_g) x(t_i - t_l), i = \overline{1, n}.
 \end{aligned} \tag{2}$$

In this formulation, the problem of numerical implementation arises because of the complexity of describing multidimensional approximation representations of integral operators and the considerable number of computational actions. It is suggested to apply a vector-matrix approach with the reduction of all operations to elementwise multiplication.

Consider separately homogeneous operators of the first, second and third degrees. The coefficients A_1 , A_2 , A_3 are represented in vector-matrix form. In the case of a one-dimensional operator of the coefficient A_1 is determined by a vector that has a different view, depending on the method used:

- rectangles:

$$A_1^n = h(1 \ 1 \ 1 \ \dots \ 1 \ 1 \ 0);$$

- trapeze:

$$A_1^T = h \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix};$$

- Simpson:

$$A_1^c = h \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} & \dots & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

When approximating a two-dimensional operator, we obtain matrices that determine the coefficient A_2 :

- for the method of rectangles:

$$A_2^n = h^2 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

- for the method of trapeze:

$$A_2^T = h^2 \begin{pmatrix} 1/4 & 1/2 & 1/2 & \dots & 1/2 & 1/2 & 1/4 \\ 1/2 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1/2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1/2 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1/2 \\ 1/4 & 1/2 & 1/2 & \dots & 1/2 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix};$$

- for the Simpson method:

$$A_2^C = h^2 \begin{pmatrix} 1/9 & 4/9 & 2/9 & \dots & 2/9 & 4/9 & 1/9 \\ 4/9 & 16/9 & 8/9 & \dots & 8/9 & 16/9 & 4/9 \\ 2/9 & 8/9 & 4/9 & \dots & 4/9 & 8/9 & 2/9 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2/9 & 8/9 & 4/9 & \dots & 4/9 & 8/9 & 2/9 \\ 4/9 & 16/9 & 8/9 & \dots & 8/9 & 16/9 & 4/9 \\ 1/9 & 4/9 & 2/9 & \dots & 2/9 & 4/9 & 1/9 \end{pmatrix}.$$

Replacing the triple integral with (1), we obtain a three-dimensional structure containing the coefficients of quadrature formulas. It can be represented as a cube (Fig. 1). This structure can be determine as following:

$$A_3 = \{A_3^{M,1}; A_3^{M,2}; A_3^{M,3}; \dots A_3^{M,n-2}; A_3^{M,n-1}; A_3^{M,n}\}, \quad (3)$$

where $A_3^{M,1}; A_3^{M,2}; A_3^{M,3}; \dots A_3^{M,n-2}; A_3^{M,n-1}; A_3^{M,n}$ — matrices of coefficient, which determined by the basic quadrature methods applied to each dimension $A_{3,j}, A_{3,g}, A_{3,l}$.

Using the rectangles method, we get the following matrices:

$$A_3^{n,1} = A_3^{n,2} = \dots = A_3^{n,n-2} = A_3^{n,n-1} = \\ = h^3 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

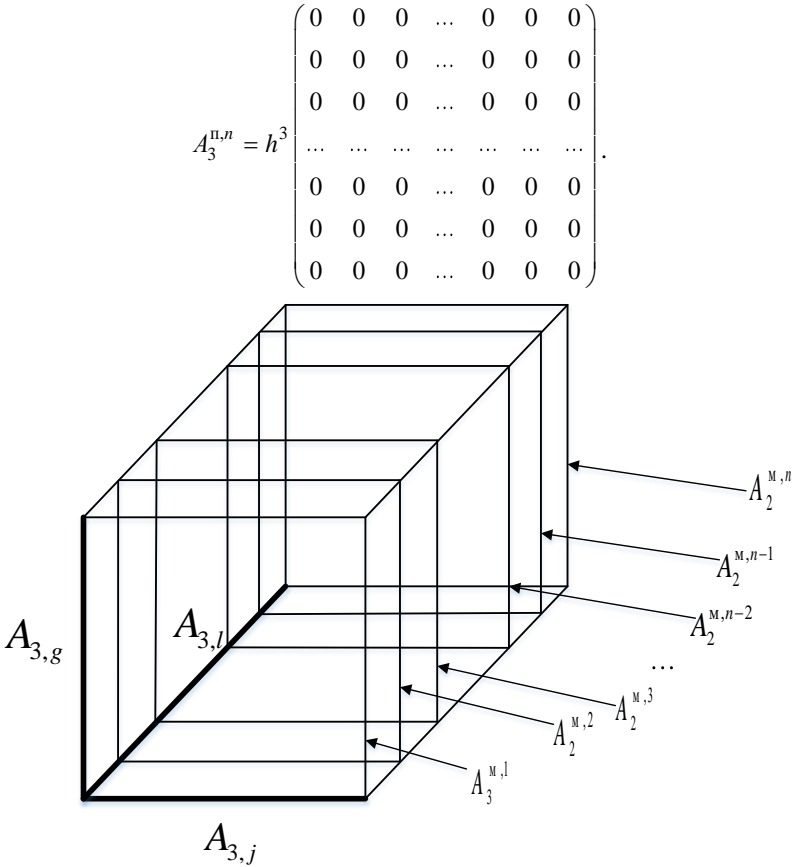


Fig. 1. Graphic representation of the structure (3)

Applying of the trapezoid method results in matrices:

$$A_3^{T,1} = A_3^{T,n} =$$

$$= h^3 \begin{pmatrix} 1/8 & 1/4 & 1/4 & \dots & 1/4 & 1/4 & 1/8 \\ 1/4 & 1/2 & 1/2 & \dots & 1/2 & 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 1/2 & 1/2 & \dots & 1/2 & 1/2 & 1/4 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1/4 & 1/2 & 1/2 & \dots & 1/2 & 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 1/2 & 1/2 & \dots & 1/2 & 1/2 & 1/4 \\ 1/8 & 1/4 & 1/4 & \dots & 1/4 & 1/4 & 1/8 \end{pmatrix};$$

$$A_3^{T,2} = A_3^{T,3} = \dots = A_3^{T,n-2} = A_3^{T,n-1} = h^3 \begin{pmatrix} 1/4 & 1/2 & 1/2 & \dots & 1/2 & 1/2 & 1/4 \\ 1/2 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1/2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1/2 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1/2 \\ 1/4 & 1/2 & 1/2 & \dots & 1/2 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

Applying the Simpson method, we have:

$$A_3^{c,1} = A_3^{c,2m+1} = h^3 \begin{pmatrix} 1/27 & 4/27 & 2/27 & \dots & 2/27 & 4/27 & 1/27 \\ 4/27 & 16/27 & 8/27 & \dots & 8/27 & 16/27 & 4/27 \\ 2/27 & 8/27 & 4/27 & \dots & 4/27 & 8/27 & 2/27 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2/27 & 8/27 & 4/27 & \dots & 4/27 & 8/27 & 2/27 \\ 4/27 & 16/27 & 8/27 & \dots & 8/27 & 16/27 & 4/27 \\ 1/27 & 4/27 & 2/27 & \dots & 2/27 & 4/27 & 1/27 \end{pmatrix};$$

$$A_3^{c,2} = A_3^{c,4} = \dots = A_3^{c,2m} =$$

$$= h^3 \begin{pmatrix} 4/27 & 16/27 & 8/27 & \dots & 8/27 & 16/27 & 4/27 \\ 16/27 & 64/27 & 32/27 & \dots & 32/27 & 64/27 & 16/27 \\ 8/27 & 32/27 & 16/27 & \dots & 16/27 & 32/27 & 8/27 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 8/27 & 32/27 & 16/27 & \dots & 16/27 & 32/27 & 8/27 \\ 16/27 & 64/27 & 32/27 & \dots & 32/27 & 64/27 & 16/27 \\ 4/27 & 16/27 & 8/27 & \dots & 8/27 & 16/27 & 4/27 \end{pmatrix};$$

$$A_3^{c,3} = A_3^{c,5} = \dots = A_3^{c,2m-1} =$$

$$= h^3 \begin{pmatrix} 2/27 & 8/27 & 4/27 & \dots & 4/27 & 8/27 & 2/27 \\ 8/27 & 32/27 & 16/27 & \dots & 8/27 & 32/27 & 8/27 \\ 4/27 & 8/27 & 8/27 & \dots & 8/27 & 8/27 & 4/27 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 4/27 & 8/27 & 8/27 & \dots & 8/27 & 8/27 & 4/27 \\ 8/27 & 32/27 & 8/27 & \dots & 8/27 & 32/27 & 8/27 \\ 2/27 & 8/27 & 4/27 & \dots & 4/27 & 8/27 & 2/27 \end{pmatrix}.$$

Fig. 2 shows the structural representation of the specified operations for different homogeneous operators and their programmatic analogy in the Matlab environment.

Structural representation and program implementation	
<i>Operator of the first degree</i>	
\sum	<div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> <div style="border: 1px solid black; padding: 2px 10px;">A</div> <div style="border: 1px solid black; padding: 2px 10px;">K</div> <div style="border: 1px solid black; padding: 2px 10px;">X1</div> </div>
sum(A.*K(1:j).*X1);	
<i>Operator of the second degree</i>	
$\sum \sum$	<div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> <div style="border: 1px solid black; padding: 2px 10px;">A</div> <div style="border: 1px solid black; padding: 2px 10px;">K</div> <div style="border: 1px solid black; padding: 2px 10px;">X1</div> <div style="border: 1px solid black; padding: 2px 10px;">X2</div> </div>
sum(sum(A.*K(1:j,1:j).*X1.*X2));	
<i>Operator of the third degree</i>	
$\sum \sum \sum$	<div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> <div style="border: 1px solid black; padding: 2px 10px;">A</div> <div style="border: 1px solid black; padding: 2px 10px;">K</div> <div style="border: 1px solid black; padding: 2px 10px;">X1</div> <div style="border: 1px solid black; padding: 2px 10px;">X2</div> <div style="border: 1px solid black; padding: 2px 10px;">X3</div> </div>
sum(sum(sum(A.*K(1:j,1:j,1:j).*X1.*X2.*X3)));	
<i>Operator of the n-th degree</i>	
sum(...(sum(A.*K(1:j,...,1:j).*X1.*...*Xn)));	

Fig. 2. Structural representation and program implementation of the vector-matrix approach

When implementing a first-degree operator: *A* — vector that defines the coefficients of the quadrature formula in accordance with the shown above; *K* — vector of kernel values according to the entered time variable partition; *X1* — vector of values of input influence. The programmatic analogy of such representation is: $\text{sum}(A.*K(1:j).*X1)$. When the implementation of operator of the second degree: *A* and *K* are matrices, *X1* is a matrix consisting of identical rows of vector *x*; *X2* is a matrix consisting of identical columns of vector *x*. Elementwise operations are used in software implementation. The general expression for calculating an operator is $\text{sum}(\text{sum}(A.*K(1:j,1:j).*X1.*X2))$. Similarly, when implementing an operator of the third degree, everything is reduced to element-by-element operations, but already of three-dimensional structures.

This approach greatly simplifies the software implementation of polynomial operators because it allows easy scaling to a multidimensional case, as shown in fig. 2.

Model experiments. The estimation of the suggested approximations of integral representations was investigated on model examples.

Consider the model in the form:

$$y(t) = \int_0^t \int_0^t \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}(s_1+s_2)} \sin\left(\frac{-\sqrt{2}}{2} s_1\right) \sin\left(\frac{-\sqrt{2}}{2} s_2\right) x(t-s_1)x(t-s_2) ds_1 ds_2. \quad (4)$$

Figure 3 shows graphs of the transient characteristic of an object, described by model (4), using the method of rectangles, trapezoids, Simpson, and exact transient characteristics. Figure 4 shows the calculation errors.

To analyze the numerical implementation of polynomial homogeneous Volterra operator of the third degree, consider the model

$$y(t) = \int_0^t \int_0^t \int_0^t \frac{\sqrt{2}}{4} e^{-\frac{1}{2}(s_1+s_2+s_3)} \sin\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}s_1\right) \sin\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}s_2\right) \sin\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}s_3\right) \times \quad (5)$$

$$\times x(t-s_1)x(t-s_2)x(t-s_3) ds_1 ds_2 ds_3.$$

The transient characteristic obtained by the considered methods and its exact value are presented in Fig. 5, calculation errors — in Fig. 6.

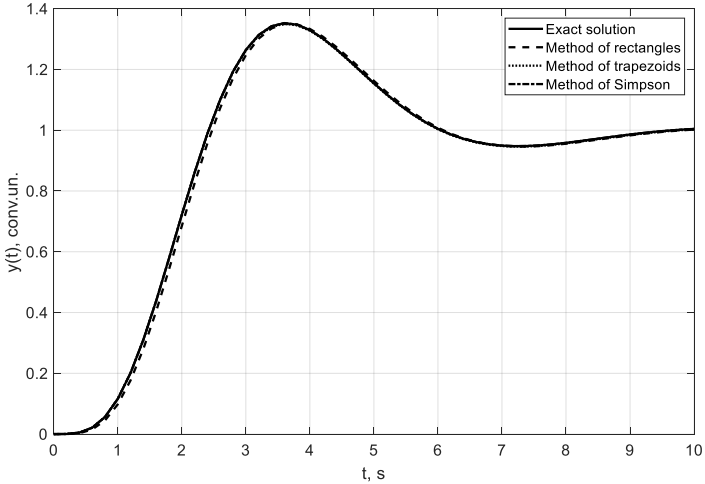


Fig. 3. Graphs of the transient characteristic (4) obtained by different methods

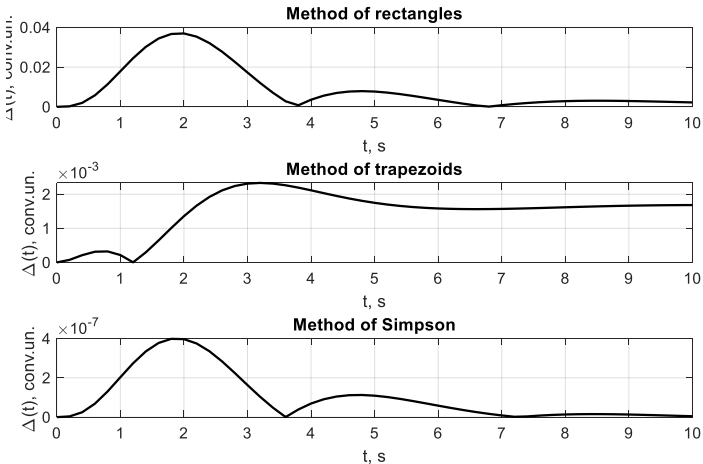


Fig. 4. Absolute errors of the calculation of transient characteristic for the model (4)

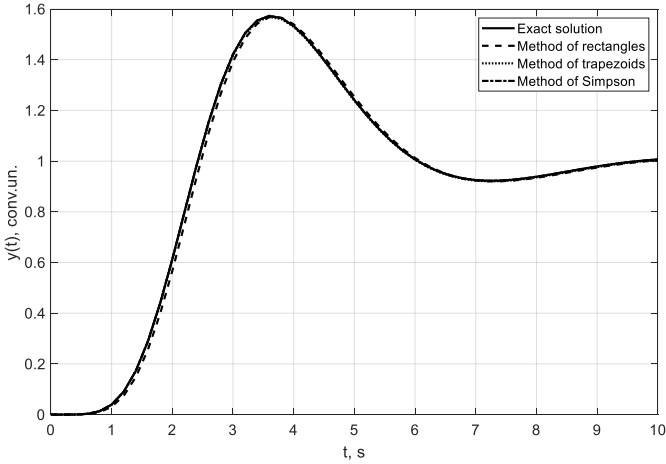


Fig. 5. Graphs of the transient characteristics (5) obtained by different methods

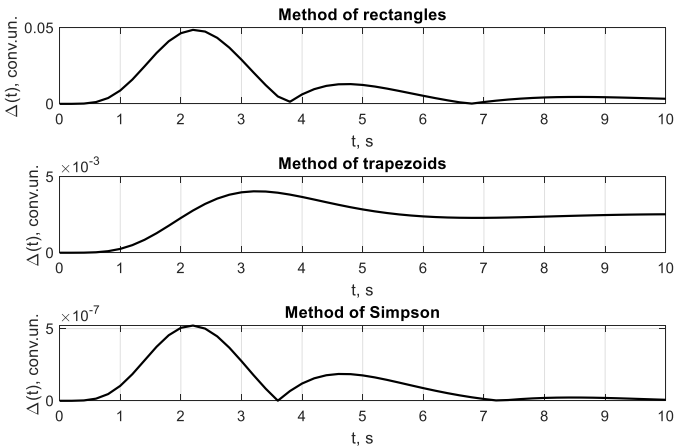


Fig. 6. Absolute errors of the calculation of transient characteristic for a model (5)

The obtained results of the computational experiments showed the effectiveness of the suggested methods, with the Simpsons method being the most accurate among the considered methods but applying of this method requires more computations that are associated with additional partitioning to find intermediate values at interpolation points. Optimal in terms of «accuracy — complexity of implementation» is the method of trapezoids, which allows obtaining solutions with a relative error of less than 1%, which is enough for engineering calculations.

It is important to note that the accuracy of implementation of integral models depends on the method chosen, the simulation step, and the type of

kernel and does not depend on the dimensionality of the operator. Therefore, the choice of the «best» method should be based, first, on the analysis of the kernel of the integral inhomogeneous polynomial Volterra operator.

Depending on the type of kernel, computational algorithms can be developed based on the use of different quadrature methods that are applied separately to each dimension. Moreover, not only the considered methods (of rectangles, trapezoids, Simpsons), but also methods based on the combination of Newton-Cotes quadrature formulas of higher order can be applied. Such approach will allow obtaining different cubature formulas and will expand the set of algorithms for approximation of integral models with finite sums and will allow choosing the best method depending on the set initial problem.

The suggested approach makes it possible to accomplish natural parallelism of computational algorithms, which greatly accelerates the numerical implementation of integral operators. Table 1 shows the complexity of the numerical implementation of polynomial integral operators depending on the number of possible parallel threads.

Table 1

The degree of complexity of the numerical implementation of polynomial integral operators

	Operator of the first degree	Operator of the second degree	Operator of the third degree
Usual approach	$O(n)$	$O^2(n)$	$O^3(n)$
Vector-matrix	$\frac{O(n)}{kp}$	$\frac{O^2(n)}{kp}$	$\frac{O^3(n)}{kp}$
n — number of partition points, kp — number of parallel threads			

Conclusions. Thus, the representation of quadrature and cubature formulas in vector-matrix form allows developing of effective algorithms and software means for numerical implementation of integral models. This representation allows taking advantages of matrix-oriented application packages (Matlab, Octave, Scilab), the peculiarity of which is a high speed of matrix operations.

References:

1. Apartsin A. S. On the mathematical modelling of nonlinear dynamical systems by Volterra series / A. S. Apartsin, S. V. Solodusha // Electronic modelling. — 1999. — № 2. — P. 3–12.
2. Verlan A. F. Integral equations: methods, algorithms, software / A. F. Verlan, V. S. Sizikov. — Kyiv, 1986. — 544 p.
3. Verlan A. F. Integral equation toolbox — software package for solving integral equations in the environment Matlab / A. F. Verlan, D. E. Contreras, B. C. Sizikov, S. T. Tykhonchuk, V. A. Fedorchuk. — Kyiv, 1997. — 44 p.
4. Verlan A. F., Fedorchuk V.A. Models of dynamics of electromechanical systems / A. F. Verlan, V.A. Fedorchuk. — Kyiv, 2013. — 221 p.

5. Ivaniuk V. A. Mathematical packages of applications : a tutorial / V. A. Ivaniuk. — Kamianets-Podilskyi, 2015. — 160 p.
6. Manzhurov A. V. Integral Equation Reference: Solution Methods / A. V. Manzhurov, A. D. Polianin. — Moscow, 2000. — 685 p.
7. Sidorov D. N. Methods of analysis of integral dynamic models. Theory and Applications / D. N. Sidorov. — Irkutsk, 2013. — 293 p.
8. Sytnyk O. O. Integral macro models of dynamic objects / O.O. Sytnyk, S. O. Protasov, V. A. Fedorchuk // Mat. and computer modelling. Tech. science. — 2013. — Issue 8. — P. 98-109.
9. Fedorchuk V. A. Integral equations in mathematical modelling problems : a tutorial / V. A. Fedorchuk, V. A. Ivaniuk, D. A. Verlan. — Kamianets-Podilskyi, 2014. — 144 p.

ВЕКТОРНО-МАТРИЧНИЙ МЕТОД ЧИСЛОВОЇ РЕАЛІЗАЦІЇ ПОЛІНОМІАЛЬНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ ОПЕРАТОРІВ ВОЛЬТЕРРИ

У статті розглядається метод квадратур для числової реалізації поліноміальних інтегральних операторів. При комп'ютерній реалізації інтегральних моделей типу Вольтерри характерною проблемою є накопичення кількості обчислень на кожному кроці обчислювального процесу. Для його пришвидшення пропонується застосовувати векторно-матричний підхід. В основі запропонованого підходу лежать методи квадратур: прямокутників, трапецій, Сімпсона. Для однорідних поліноміальних інтегральних операторів Вольтерри першого, другого та третього степеня побудовано, відповідно, у вигляді векторів, матриць та тривимірних структур об'єкти, які містять коефіцієнти відповідних квадратурних формул. Запропонований векторно-матричний підхід передбачає зведення обчислювальних операцій до поелементного множення елементів відповідних структур та дозволяє ефективно використовувати паралельні алгоритми, що значно пришвидшує виконання обчислювальних задач реалізації інтегральних операторів. В роботі оцінено складність реалізації в залежності від кількості можливих паралельних потоків. Оцінку запропонованих апроксимацій інтегральних представлень досліджено на модельних прикладах, в яких присутні моделі у вигляді поліноміальних інтегральних операторів Вольтерри другого та третього степеня. Результати обчислювальних експериментів показали, що серед розглянутих квадратурних методів оптимальним у відношенні «точність — складність реалізації» є метод трапецій. Точність числової реалізації інтегральних моделей залежить від вибраного методу, кроку моделювання, виду ядра, і не залежить від розмірності оператора. Векторно-матричний підхід дозволяє будувати ефективні алгоритми для числової реалізації інтегральних моделей та значно спрощує їх програмну реалізацію, оскільки дозволяє легке масштабування до багатовимірного випадку. Таке представлення дає змогу використовувати переваги матрично-орієнтованих пакетів прикладних програм (Matlab, Octave, Scilab), особливістю яких є висока швидкість виконання матричних операцій.

Ключові слова: *поліноміальні інтегральні оператори Вольтерри, метод квадратур, векторно-матричний метод.*

Отримано: 14.08.2019

УДК 517.95

DOI: 10.32626/2308-5916.2019-20.51-68

Ю. Є. Климюк*, канд. техн. наук,

А. Я. Бомба**, д-р техн. наук, професор

* Міжнародний економіко-гуманітарний університет
імені академіка Степана Дем'янчука, м. Рівне,

**Національний університет водного господарства
і природокористування, м. Рівне

КОМП'ЮТЕРНЕ ПРОГНОЗУВАННЯ АДСОРБЦІЙНОЇ ДООЧИСТКИ ВОДИ ВІД ДОМІШОК У ШВИДКИХ БАГАТОШАРОВИХ ФІЛЬТРАХ КОНУСОПОДІБНОЇ ФОРМИ

У статті сформовано математичну модель для комп'ютерного прогнозування процесу адсорбційної доочистки води від домішок у швидких багатошарових фільтрах при додержанні сталої швидкості фільтрування з урахуванням зворотного впливу характеристик процесу (концентрацій домішок відповідно у фільтраційному потоці і на поверхні адсорбенту завантаження, температури фільтраційного потоку) на характеристики завантаження (коефіцієнти фільтрації, активної пористості, адсорбції, десорбції). Відповідна модельна задача містить рівняння руху фільтраційного потоку згідно із законом Дарсі, рівняння нерозривності, рівняння балансу маси та тепла і рівняння для дослідження зміни характеристик кусково-однорідних пористих завантажень (коефіцієнтів фільтрації та активної пористості). За умови, що конвективні складові тепло- і масоперенесення й адсорбція переважають над вкладом дифузії й десорбції, отримано алгоритм числово-асимптотичного наближення розв'язку відповідної нелінійної сингулярно-збуреної крайової задачі для модельної області конусоподібної форми, обмеженої двома екіпотенціальними поверхнями і поверхнею течії та розділеної деякими заданими екіпотенціальними поверхнями на кілька підобластей. Запропонована модель дозволяє шляхом проведення комп'ютерних експериментів дослідити зміну характеристик кусково-однорідних пористих завантажень (коефіцієнтів фільтрації і активної пористості фільтрувальних матеріалів у кожному шарі), спрогнозувати оптимальні варіанти використання адсорбентів і збільшення тривалості роботи фільтрів за рахунок вибору їх форми та висоти шарів з урахуванням впливу на процес адсорбційної доочистки води не лише зміни швидкості фільтраційного потоку вздовж висоти фільтру, але й температури.

Ключові слова: *математична модель, комп'ютерне прогнозування, процес доочистки води, домішка, адсорбція, температура, кусково-однорідне пористе завантаження, швидкий багатошаровий фільтр, конусоподібна форма.*

Вступ. Адсорбцію широко застосовують для глибокої очистки води від різних домішок [1, 2]. Швидкі фільтри або колони для адсорбційної доочистки питної води зазвичай використовують на заключній стадії водопідготовки, коли з неї відстоюванням, фільтрацією, коагуляцією вже видалена основна частина домішок [3–7]. Принцип роботи швидких фільтрів заснований на напірній фільтрації води через один або кілька шарів зернистих матеріалів — адсорбентів, які служать для видалення як механічних домішок за рахунок сил адгезії–суфозії і інерційної взаємодії, так і розчинених домішок за рахунок адсорбції. Як адсорбенти використовують природні (бентоніт, монтморилоніт, торф), штучні (активоване вугілля, штучні цеоліти, полісорби) та синтетичні матеріали (наноструктуровані вуглецеві сорбенти) [8]. Безперервне регулювання швидкості фільтрування є основою для досягнення оптимального технологічного режиму роботи фільтрів. Підтримка постійної заданої швидкості фільтрування може бути досягнуто лише за допомогою автоматичного регулювання. Постійна швидкість фільтрування досягається збільшенням відкриття засувки на трубопроводі фільтрату в міру збільшення опору завантаження фільтра через накопичення в ньому частинок домішок. Коли засувка відкрита повністю, фільтр викидається з роботи для промивання. Імпульсом для збільшення відкриття засувки на трубопроводі фільтрату служить зміна рівня води на фільтрі (контролюється поплавковим пристроєм) або витрати води в трубопроводі фільтрату (контролюється за допомогою дроселюючого пристрою і дифманометра) [9].

Постійно зростаючі потреби у господарстві в очищеній воді та зростання вартості фільтрувальних матеріалів (адсорбентів) вимагають проведення досліджень їх більш оптимального використання і збільшення тривалості роботи фільтрів за рахунок вибору їх форми та висоти шарів, зокрема, з урахуванням впливу на процес адсорбційної доочистки води зміни температури фільтраційного потоку вздовж висоти фільтру.

Аналіз останніх досліджень. Швидкість процесу адсорбції залежить від концентрації, природи і структури домішок, швидкості фільтрування та температури фільтраційного потоку, виду і властивостей адсорбенту [10, 11]. У загальному випадку процес адсорбції складається з трьох стадій: переносу домішок до поверхні зерен адсорбенту (зовнішньо-дифузійна область), власне адсорбційного процесу, переносу домішок всередині зерен адсорбенту (внутрішньо-дифузійна область). Прийнято вважати, що швидкість власне адсорбції велика і не лімітує загальної швидкості процесу. Отже, лімітуючою стадією може бути зовнішня або внутрішня дифузія. У деяких випадках процес лімітується обома цими стадіями. У зовнішньо-дифузійній області швидкість масопереносу переважно визначається інтенсивністю фільтраційного

поток, що передусім залежить від швидкості фільтрації води. У середньо-дифузійній області інтенсивність масопереносу залежить від виду і розмірів пор адсорбенту, форм і розмірів його зерен, розміру молекул адсорбуючих речовин, коефіцієнта масопровідності.

Адсорбція — процес оборотний, тобто адсорбована домішка (адсорбат) може переходити з адсорбенту назад у фільтраційний потік. За інших рівних умов швидкості протікання прямого (сорбція) і зворотного (десорбція) процесів пропорційні концентрації домішок у фільтраційному потоці і на поверхні зерен адсорбенту.

Адсорбція — процес екзотермічний і, отже, зниження температури має сприяти швидкості його протікання. Підвищення температури сприяє десорбції, внаслідок чого кількість адсорбованої домішки зменшується. У процесі фізичної адсорбції зазвичай виділяється 8–40 кДж теплоти на 1 моль адсорбованої домішки. Теплота хемосорбції, як правило, перевищує 80 кДж / моль. Для кожної температури існує свій стан рівноваги. Чим вища концентрація адсорбата, тим більша адсорбція, а чим вища температура, тим менша фізична адсорбція.

Як показує аналіз літературних джерел, зокрема [12–19], суттєвий вклад у розробку теоретичних основ доочистки рідин від домішок шляхом їх фільтрування через пористі завантаження зробило багато як вітчизняних, так і зарубіжних вчених. Відмітимо, що в якості математичної моделі процесу доочистки рідини від домішок вітчизняними дослідниками найчастіше використовується модель Д. М. Мінца [13] при сталій швидкості фільтрування та температурі або деяка її модифікація (вдосконалена модель).

У [20] запропоновано її просторове узагальнення для прогнозування процесу доочистки води від домішок у швидких багатопористих фільтрах при додержанні сталої швидкості фільтрування, яка є більш ефективною для проведення теоретичних досліджень, націлених на оптимізацію параметрів процесу фільтрування (тривалості роботи, форми, розмірів фільтра, висоти шарів тощо) за рахунок введення додаткового рівняння для визначення зміни активної пористості завантаження вздовж висоти фільтру, врахування дифузії у фільтраційному потоці і на поверхні зерен завантаження. У [21] вона вдосконалена шляхом введення додаткового рівняння для визначення зміни коефіцієнта фільтрації завантаження вздовж висоти фільтру, зокрема, отримані у роботі результати числових експериментів підтвердили необхідність врахування у моделях зміни характеристик кусково-однорідних пористих завантажень. У [22] запропоновано просторове узагальнення моделі Д. М. Мінца для прогнозування процесу доочистки води від домішок у швидких фільтрах конусоподібної форми при додержанні сталої швидкості фільтрування. Актуальною задачею є узагальнення відповідної

моделі для комп'ютерного прогнозування процесу адсорбційної доочистки води від домішок у швидких багатошарових фільтрах з урахуванням зміни температури фільтраційного потоку вздовж висоти фільтру при додержанні сталої швидкості фільтрації, оскільки дозволить шляхом проведення комп'ютерних експериментів дослідити зміну характеристик кусково-однорідних пористих завантажень (коефіцієнтів фільтрації та активної пористості фільтрувальних матеріалів у кожному шарі), спрогнозувати оптимальні варіанти використання адсорбентів і збільшення тривалості роботи фільтрів за рахунок вибору їх форми та висоти шарів з урахуванням не лише зміни швидкості фільтраційного потоку вздовж висоти фільтру, але й температури.

Математична модель. Змодельовано процес адсорбційної доочистки води від домішок у швидкому багатошаровому фільтрі конусоподібної форми із кусково-однорідним пористим завантаженням — просторовій однозв'язній області G_z ($z = (x, y, z)$), обмеженій гладкими, ортогональними між собою по ребрах, двома еквіпотенціальними поверхнями S_* , S^* і поверхнею течії S^{**} та розділеній деякими заданими $p-1$ еквіпотенціальними поверхнями S_{*r}^* ($r = \overline{1, p-1}$) на p підобластей G_z^r ($r = \overline{1, p}$) (рис. 1, а). Вважаємо, що конвективні складові масоперенесення й адсорбція переважають над вкладом дифузії й десорбції. Крім того, у зв'язку зі зміною температури фільтраційного потоку за рахунок адсорбційних і десорбційних процесів враховується вплив температурних ефектів на внутрішню кінетику масопереносу. Таким чином, для області $G = G_z \times (0, \infty)$ відповідна просторова модельна задача з урахуванням зворотного впливу характеристик процесу (концентрацій домішок відповідно у фільтраційному потоці і на поверхні адсорбенту завантаження, температури фільтраційного потоку) на характеристики завантаження (коефіцієнти фільтрації, пористості, адсорбції, десорбції) складатиметься з систем рівнянь:

$$\left\{ \vec{v} = \kappa_0^0 \cdot \text{grad } \varphi, \text{div } \vec{v} = 0, (x, y, z) \in G_z^r, r = \overline{1, p}, \right. \quad (1)$$

$$\left\{ \begin{aligned} (\sigma \cdot C)'_t &= \text{div} (D \cdot \text{grad } C) - \vec{v} \cdot \text{grad } C - \alpha \cdot C + \beta \cdot U, \\ (\sigma \cdot U)'_t &= \text{div} (D^* \cdot \text{grad } U) + \alpha \cdot C - \beta \cdot U, \\ (\sigma \cdot T)'_t &= \text{div} (D^{**} \cdot \text{grad } T) - \vec{v} \cdot \text{grad } T + \gamma \cdot (\alpha \cdot C - \beta \cdot U), \\ \kappa'_t &= -\mu \cdot U, \sigma'_t = -\lambda \cdot U, (x, y, z) \in G_z^r, r = \overline{1, p}, \end{aligned} \right. \quad (2)$$

які доповнюються наступними крайовими умовами:

$$\left\{ \varphi|_{S_*} = \varphi_*, \varphi|_{S^*} = \varphi^*, \varphi'_n|_{S^{**}} = 0, \right. \quad (3)$$

$$\left\{ C|_{S_r} = C_r^*, C'_n|_{S_r} = 0, C'_n|_{S_r} = 0, \right. \quad (4)$$

$$\left\{ U|_{S_r} = u_r^*, U'_n|_{S_r} = 0, U'_n|_{S_r} = 0, \right. \quad (5)$$

$$\left\{ T|_{S_r} = T_r^*, T'_n|_{S_r} = 0, T'_n|_{S_r} = 0, \right. \quad (6)$$

початковими умовами:

$$\left\{ C|_{t=0} = c_0^0, U|_{t=0} = u_0^0, T|_{t=0} = T_0^0, \kappa|_{t=0} = \kappa_0^0, \sigma|_{t=0} = \sigma_0^0 \right. \quad (7)$$

та умов узгодженості на поверхнях розділу S_{*r}^* ($r = \overline{1, p-1}$):

$$\left\{ \varphi|_{S_{r-}} = \varphi|_{S_{r+}} = \varphi_{*r}^*, \kappa_r^0 \cdot \varphi'_n|_{S_{r-}} = \kappa_r^0 \cdot \varphi'_n|_{S_{r+}}, r = \overline{1, p-1}, \right. \quad (8)$$

$$\left\{ \begin{aligned} C|_{S_{r-}} &= C|_{S_{r+}}, D_r \cdot C'_n - v_{rn}^0 \cdot C|_{S_{r-}} = D_{r+1} \cdot C'_n - v_{rn}^0 \cdot C|_{S_{r+}}, \\ U|_{S_{r-}} &= U|_{S_{r+}}, D_r^* \cdot U'_n|_{S_{r-}} = D_{r+1}^* \cdot U'_n|_{S_{r+}}, \\ T|_{S_{r-}} &= T|_{S_{r+}}, D_r \cdot T'_n - v_{rn}^0 \cdot T|_{S_{r-}} = D_{r+1} \cdot T'_n - v_{rn}^0 \cdot T|_{S_{r+}}, \\ D_r \cdot C'_n - v_{rn} \cdot C + D_r^* \cdot U'_n|_{S_{r-}} &= D_{r+1, j} \cdot C'_n - v_{rn} \cdot C_j + D_{r+1}^* \cdot U'_n|_{S_{r+}}, \\ (\sigma \cdot (C + U))'_n|_{S_{r-}} &= (\sigma \cdot (C + U))'_n|_{S_{r+}}, r = \overline{1, p-1}, \end{aligned} \right. \quad (9)$$

де $\varphi = \varphi(x, y, z)$ і $\vec{v} = \vec{v}(v_x, v_y, v_z)$ — відповідно потенціал і вектор

швидкості фільтрації, $0 \leq \varphi_* = \varphi_{*0}^* < \varphi_{*1}^* < \dots < \varphi_{*p-1}^* < \varphi_{*p}^* = \varphi^* < \infty$, φ_*

і φ^* — задані дійсні числа, $\varphi_{*1}^*, \varphi_{*2}^*, \dots, \varphi_{*(p-1)}^*$ — невідомі значення

потенціалу, $v = |\vec{v}| = \sqrt{v_x^2(x, y, z) + v_y^2(x, y, z) + v_z^2(x, y, z)} \gg 0$, κ_0^0 —

початковий коефіцієнт фільтрації, $\kappa_0^0 = \{\kappa_r^0, (x, y, z) \in G_z^r, r = \overline{1, p}\}$,

$\kappa_r^0 > 0$ ($r = \overline{1, p}$), \vec{n} — зовнішня нормаль до відповідної поверхні,

$C = C(x, y, z, t)$ і $U = U(x, y, z, t)$ — концентрації домішок відповідно

у фільтраційному потоці і на поверхні адсорбенту завантаження,

$T = T(x, y, z, t)$ — температура фільтраційного потоку в точці (x, y, z)

у момент часу t , $\kappa = \kappa(x, y, z, t)$ — коефіцієнт фільтрації,

$\sigma = \sigma(x, y, z, t)$ — активна пористість, D і D^* — коефіцієнти дифу-

зії домішок відповідно у фільтраційному потоці і на поверхні адсор-

бенту завантаження, $D = \{D_r, (x, y, z) \in G_z^r, r = \overline{1, p}\}$, $D_r = \varepsilon \cdot d_{r,0}$,

$d_{r,0} > 0$ ($r = \overline{1, p}$), $D^* = \{D_r^*, (x, y, z) \in G_z^r, r = \overline{1, p}\}$, $D_r^* = \varepsilon \cdot d_{r,0}^*$,

$d_{r,0}^* > 0$ ($r = \overline{1, p}$), D^{**} — коефіцієнт температуропровідності фільтраційного потоку, $D^{**} = \{D_r^{**}, (x, y, z) \in G_z^r, r = \overline{1, p}\}$, $D_r^{**} = \varepsilon \cdot d_{r,0}^{**}$, $d_{r,0}^{**} > 0$ ($r = \overline{1, p}$), α і β — коефіцієнти, що характеризують відповідно обсяги домішок, адсорбованих на поверхні адсорбенту завантаження та десорбованих з поверхні адсорбенту у фільтраційний потік за одиницю часу, $\alpha = \{\alpha_r, (x, y, z) \in G_z^r, r = \overline{1, p}\}$,

$$\alpha_r = \alpha_{r,0,0} + \varepsilon \cdot \alpha_{r,1,0} \cdot v + \varepsilon^2 \cdot \alpha_{r,2,0} \cdot v^2 + \varepsilon \cdot \alpha_{r,0,1} \cdot T + \varepsilon^2 \cdot \alpha_{r,0,2} \cdot T^2 + \varepsilon^2 \cdot \alpha_{r,2,2} \cdot v \cdot T,$$

$$\alpha_{r,s_1,s_2} \in \mathbb{R} \quad (r = \overline{1, p}, s_1 = \overline{0, 2}, s_2 = \overline{0, 2}),$$

$$\beta = \{\beta_r, (x, y, z) \in G_z^r, r = \overline{1, p}\}, \beta_r = \varepsilon \cdot \bar{\beta}_r,$$

$$\bar{\beta}_r = \beta_{r,0,0} + \varepsilon \cdot \beta_{r,1,0} \cdot v + \varepsilon^2 \cdot \beta_{r,2,0} \cdot v^2 + \varepsilon \cdot \beta_{r,0,1} \cdot T + \varepsilon^2 \cdot \beta_{r,0,2} \cdot T^2 + \varepsilon^2 \cdot \beta_{r,2,2} \cdot v \cdot T, \beta_{r,s_1,s_2} \in \mathbb{R}$$

$$(r = \overline{1, p}, s_1 = \overline{0, 2}, s_2 = \overline{0, 2}),$$

γ — коефіцієнт, що характеризує швидкість зміни температури фільтраційного потоку за рахунок протікання адсорбційних і десорбційних процесів, $\gamma = \{\gamma_r, (x, y, z) \in G_z^r, r = \overline{1, p}\}$, $\gamma_r = \varepsilon \cdot \bar{\gamma}_r$ ($r = \overline{1, p}$), μ і λ — коефіцієнти, що характеризують відповідно швидкість зміни коефіцієнта фільтрації й активної пористості завантаження за рахунок адсорбції домішок, $\mu = \{\mu_r, (x, y, z) \in G_z^r, r = \overline{1, p}\}$, $\mu_r = \varepsilon \cdot \bar{\mu}_r$, $\bar{\mu}_r = \mu_{r,0} + \varepsilon \cdot \mu_{r,1} \cdot T + \varepsilon^2 \cdot \mu_{r,2} \cdot T^2$, $\mu_{r,s} \in \mathbb{R}$ ($r = \overline{1, p}, s = \overline{0, 2}$), $\lambda = \{\lambda_r, (x, y, z) \in G_z^r, r = \overline{1, p}\}$, $\lambda_r = \varepsilon \cdot \bar{\lambda}_r$ ($r = \overline{1, p}$), $\alpha_r = \alpha_r(x, y, z, t)$, $\bar{\beta}_r = \bar{\beta}_r(x, y, z, t)$, $\bar{\gamma}_r = \bar{\gamma}_r(x, y, z, t)$, $\bar{\mu}_r = \bar{\mu}_r(x, y, z, t)$, $\bar{\lambda}_r = \bar{\lambda}_r(x, y, z, t)$ — неперервні обмежені функції ($r = \overline{1, p}$), ε — малий параметр ($\varepsilon > 0$),

$$c_0^0 = \{c_r^0, (x, y, z) \in G_z^r, r = \overline{1, p}\}, u_0^0 = \{u_r^0, (x, y, z) \in G_z^r, r = \overline{1, p}\},$$

$$T_0^0 = \{T_r^0, (x, y, z) \in G_z^r, r = \overline{1, p}\}, \sigma_0^0 = \{\sigma_r^0, (x, y, z) \in G_z^r, r = \overline{1, p}\},$$

$$c_*^* = c_*^*(M, t), c_r^0 = c_r^0(x, y, z), u_*^* = u_*^*(M, t), u_r^0 = u_r^0(x, y, z),$$

$$T_*^* = T_*^*(M, t), T_r^0 = T_r^0(x, y, z), \sigma_r^0 = \sigma_r^0(x, y, z) \quad (r = \overline{1, p}) —$$

достатньо гладкі функції, узгоджені між собою на ребрах області G [23], $M \in S_*$, v_{rn}^0 і v_{rn} ($r = \overline{1, p-1}$) — відповідно початкові і поточні нормальні складові швидкості на поверхнях розділу S_{*r}^* ($r = \overline{1, p-1}$).

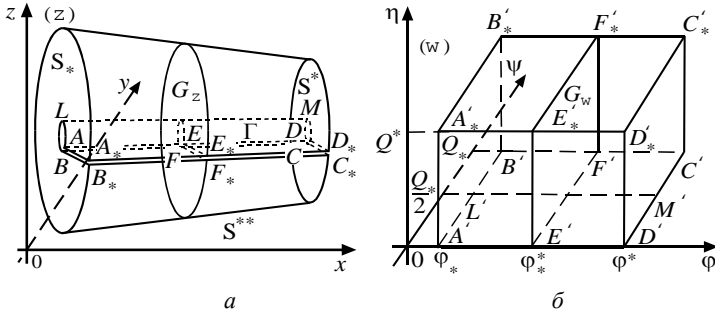


Рис. 1. Просторова двошарова модельна область:

a — область фільтрації G_z з умовним розрізом Γ (конусоподібний фільтр);
b — область комплексного потенціалу G_w

Аналогічно [23] шляхом фіксації на поверхні S_* деякої точки A ($A = B$) та послідовного виконання умовних розрізів $\Gamma_1 = ALMDBLMC$ і $\Gamma_2 = ADD_*A_*BCC_*D_*$ вздовж відповідних поверхонь течії (для зручності позначимо $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$) задача (1) — (9) зводиться до розв’язання в однозв’язній кусково-однорідній області $G_z \setminus \Gamma$ — криволінійному паралелепіпеді $ABCD_*A_*B_*C_*D_*$, обмеженому двома екіпотенціальними поверхнями ABB_*A_* , CDD_*C_* і чотирма поверхнями течії $ABCD = ALMD \cup BLMC$, $A_*B_*C_*D_*$, ADD_*A_* , BCC_*B_* та розділеному екіпотенціальними поверхнями $E_r F_r F_{*r} E_{*r}$ ($r = 1, p-1$) на деякі p підобластей

$$G_z^1 \setminus \Gamma^1 = ABF_1 E_1 A_* B_* F_{*1} E_{*1}, \dots,$$

$$G_z^p \setminus \Gamma^p = E_{p-1} F_{p-1} C D E_{*(p-1)} F_{*(p-1)} C_* D_*$$

$$(\Gamma^1 = AE_1 E_{*1} A_* BF_1 F_{*1} B_*, \dots, \Gamma^p = E_{p-1} DD_* E_{*(p-1)} F_{p-1} CC_* F_{*(p-1)})$$

(рис. 1, *a*), які є гладкими і ортогональними між собою в кутових точках та вздовж ребер, з додаванням умови непроникності $\varphi'_n|_{\Gamma} = 0$ вздовж розрізу Γ задачі, що описується системами рівнянь (1), (2) з наступними крайовими умовами:

$$\begin{cases} \varphi|_{ABB_*A_*} = \varphi_*, \varphi|_{CDD_*C_*} = \varphi^*, \\ \varphi'_n|_{ABCD \cup A_*B_*C_*D_* \cup ADD_*A_* \cup BCC_*B_*} = 0, \end{cases} \quad (10)$$

$$\begin{cases} C|_{ABB_*A_*} = c^*, C'_n|_{CDD_*C_*} = 0, \\ C'_n|_{ADD_*A_* \cup BCC_*B_* \cup ABCD \cup A_*B_*C_*D_*} = 0, \end{cases} \quad (11)$$

$$\begin{cases} U \Big|_{ABB,A_s} = u_*^*, U'_n \Big|_{CDD,C_s} = 0, \\ U'_n \Big|_{ADD,A_s \cup BCC,B_s \cup ABCD \cup A,B,C,D_s} = 0, \end{cases} \quad (12)$$

$$\begin{cases} T \Big|_{ABB,A_s} = T_*^*, T'_n \Big|_{CDD,C_s} = 0, \\ T'_n \Big|_{ADD,A_s \cup BCC,B_s \cup ABCD \cup A,B,C,D_s} = 0, \end{cases} \quad (13)$$

початковими умовами (7), умовами узгодженості на поверхнях розділу $E_r F_r F_{*r} E_{*r}$ ($r = 1, p-1$):

$$\begin{cases} \varphi \Big|_{E_r F_r F_{*r} E_{*r-}} = \varphi \Big|_{E_r F_r F_{*r} E_{*r+}} = \varphi_{*r}^*, \\ \kappa_r^0 \cdot \varphi'_n \Big|_{E_r F_r F_{*r} E_{*r-}} = \kappa_{r+1}^0 \cdot \varphi'_n \Big|_{E_r F_r F_{*r} E_{*r+}}, r = 1, p-1, \end{cases} \quad (14)$$

$$\begin{cases} C \Big|_{E_r F_r F_{*r} E_{*r-}} = C \Big|_{E_r F_r F_{*r} E_{*r+}}, \\ D_r \cdot C'_n - v_{rn}^0 \cdot C \Big|_{E_r F_r F_{*r} E_{*r-}} = D_{r+1} \cdot C'_n - v_{rn}^0 \cdot C \Big|_{E_r F_r F_{*r} E_{*r+}}, \\ U \Big|_{E_r F_r F_{*r} E_{*r-}} = U \Big|_{E_r F_r F_{*r} E_{*r+}}, \\ D_r^* \cdot U'_n \Big|_{E_r F_r F_{*r} E_{*r-}} = D_{r+1}^* \cdot U'_n \Big|_{E_r F_r F_{*r} E_{*r+}}, \\ T \Big|_{E_r F_r F_{*r} E_{*r-}} = T \Big|_{E_r F_r F_{*r} E_{*r+}}, \\ D_r^{**} \cdot T'_n - v_{rn}^0 \cdot T \Big|_{E_r F_r F_{*r} E_{*r-}} = D_{r+1}^{**} \cdot T'_n - v_{rn}^0 \cdot T \Big|_{E_r F_r F_{*r} E_{*r+}}, \\ D_r \cdot C'_n - v_{rn} \cdot C + D_r^* \cdot U'_n \Big|_{E_r F_r F_{*r} E_{*r-}} = \\ = D_{r+1} \cdot C'_n - v_{rn} \cdot C + D_{r+1}^* \cdot U'_n \Big|_{E_r F_r F_{*r} E_{*r+}}, \\ (\sigma \cdot (C + U))'_t \Big|_{E_r F_r F_{*r} E_{*r-}} = (\sigma \cdot (C + U))'_t \Big|_{E_r F_r F_{*r} E_{*r+}}, r = 1, p-1 \end{cases} \quad (15)$$

і подальшого «склеювання» берегів умовного розрізу Γ із використанням умов:

$$\begin{cases} \varphi \Big|_{ALMD} = \varphi \Big|_{BLMC}, \varphi'_n \Big|_{ALMD} = \varphi'_n \Big|_{BLMC}, \\ \varphi \Big|_{ADD,A_s} = \varphi \Big|_{BCC,B_s}, \varphi'_n \Big|_{ADD,A_s} = \varphi'_n \Big|_{BCC,B_s} \end{cases} \quad (16)$$

та узгодженості величин концентрацій домішки у фільтраційному потоці і на поверхні адсорбенту завантаження, значень температури на умовних поверхнях розрізу із використанням умов:

$$\begin{cases} C \Big|_{ALMD} = C \Big|_{BLMC}, C'_n \Big|_{ALMD} = C'_n \Big|_{BLMC}, \\ C \Big|_{ADD,A_s} = C \Big|_{BCC,B_s}, C'_n \Big|_{ADD,A_s} = C'_n \Big|_{BCC,B_s}, \end{cases} \quad (17)$$

$$\begin{cases} U \Big|_{ALMD} = U \Big|_{BLMC}, U'_n \Big|_{ALMD} = U'_n \Big|_{BLMC}, \\ U \Big|_{ADD,A_s} = U \Big|_{BCC,B_s}, U'_n \Big|_{ADD,A_s} = U'_n \Big|_{BCC,B_s}, \end{cases} \quad (18)$$

$$\begin{cases} T|_{ALMD} = T|_{BLMC}, T'_n|_{ALMD} = T'_n|_{BLMC}, \\ T|_{ADD,A_s} = T|_{BCC,B_s}, T'_n|_{ADD,A_s} = T'_n|_{BCC,B_s}. \end{cases} \quad (19)$$

Аналогічно [20–22] шляхом введення пари функцій $\psi = \psi(x, y, z)$, $\eta = \eta(x, y, z)$ (просторово комплексно спряжених із функцією $\varphi(x, y, z)$) таких, що $\kappa_0^0 \cdot \text{grad } \varphi = \text{grad } \psi \times \text{grad } \eta$ [24] і заміною останніх чотирьох з граничних умов (10) на умови: $\psi|_{ADD,A_s} = 0$, $\psi|_{BCC,B_s} = Q_*$, $\eta|_{ABCD} = 0$, $\eta|_{A,B,C,D_s} = Q^*$, задача (1), (10), (14), (16) замінюється більш загальною прямою задачею на знаходження просторового аналогу кусково-конформного відображення однозв'язної області $G_z \setminus \Gamma$ на відповідну область комплексного потенціалу — прямокутний паралелепіпед $G_w = A'B'C'D'A'_sB'_sC'_sD'_s$, який розділений поверхнями $E'_r F'_r E'_{*r} F'_{*r}$ ($r = \overline{1, p}$) на деякі p підобластей

$$\begin{aligned} G_w^1 &= A'B'E'_1 F'_1 A'_s B'_s E'_s F'_s, G_w^r = E'_r F'_r F'_{r+1} E'_{r+1} E'_{*r} F'_{*r} F'_{r+1} E'_{*r+1} \\ & \quad (r = \overline{2, p-2}), G_w^p = E'_{p-1} F'_{p-1} C'D'E'_{*p-1} F'_{*p-1} C'_s D'_s \end{aligned}$$

(рис. 1, б), де $G_w^r = \{w = (\varphi, \psi, \eta) : \varphi_{*(r-1)}^* < \varphi < \varphi_{*r}^*, 0 < \psi < Q_*, 0 < \eta < Q^*\}$ ($r = \overline{1, p}$), φ_{*r}^* ($r = \overline{1, p-1}$), Q_* , Q^* — невідомі параметри, $Q = Q_* \cdot Q^*$ — повна фільтраційна витрата, і наступного «склеювання» берегів умовного розрізу Γ . Алгоритм розв'язання цієї задачі отримано в [25], зокрема, знайдено поле швидкостей \tilde{v} , параметри Q_* , Q^* , Q та ряд інших величин. Здійснивши заміну змінних $x = x(\varphi, \psi, \eta)$, $y = y(\varphi, \psi, \eta)$, $z = z(\varphi, \psi, \eta)$ у рівнянні (2) та умовах (11)–(13), (7), (15), (17)–(19) отримаємо відповідну задачу для області $G_w \times (0, \infty)$:

$$\begin{cases} (\tilde{\sigma} \cdot c)'_t = D \cdot (b_1 \cdot c''_{\varphi\varphi} + b_2 \cdot c''_{\psi\psi} + b_3 \cdot c''_{\eta\eta} + b_4 \cdot c'_\psi + b_5 \cdot c'_\eta) - \frac{\tilde{v}^2}{\kappa} \cdot c'_\varphi - \tilde{\alpha} \cdot c + \tilde{\beta} \cdot u, \\ (\tilde{\sigma} \cdot u)'_t = D^* \cdot (b_1 \cdot u''_{\varphi\varphi} + b_2 \cdot u''_{\psi\psi} + b_3 \cdot u''_{\eta\eta} + b_4 \cdot u'_\psi + b_5 \cdot u'_\eta) + \tilde{\alpha} \cdot c - \tilde{\beta} \cdot u, \\ (\tilde{\sigma} \cdot \tilde{T})'_t = D^{**} \cdot (b_1 \cdot \tilde{T}''_{\varphi\varphi} + b_2 \cdot \tilde{T}''_{\psi\psi} + b_3 \cdot \tilde{T}''_{\eta\eta} + b_4 \cdot \tilde{T}'_\psi + b_5 \cdot \tilde{T}'_\eta) - \\ - \frac{\tilde{v}^2}{\kappa} \cdot \tilde{T}'_\varphi + \tilde{\gamma} \cdot (\tilde{\alpha} \cdot c - \tilde{\beta} \cdot u), \\ \tilde{\kappa}'_t = -\tilde{\mu} \cdot u, \tilde{\sigma}'_t = -\tilde{\lambda} \cdot u, (\varphi, \psi, \eta) \in G_w^r, r = \overline{1, p}, \end{cases} \quad (20)$$

$$\left\{ c \Big|_{\varphi=\varphi_*} = \tilde{c}_*^*, c'_\varphi \Big|_{\varphi=\varphi_*} = 0, c_\psi \Big|_{\psi=0} = c'_\psi \Big|_{\psi=Q_*} = c'_\eta \Big|_{\eta=0} = c'_\eta \Big|_{\eta=Q_*} = 0, \quad (21) \right.$$

$$\left\{ u \Big|_{\varphi=\varphi_*} = \tilde{u}_*^*, u'_\varphi \Big|_{\varphi=\varphi_*} = 0, u'_\psi \Big|_{\psi=0} = u'_\psi \Big|_{\psi=Q_*} = u'_\eta \Big|_{\eta=0} = u'_\eta \Big|_{\eta=Q_*} = 0, \quad (22) \right.$$

$$\left\{ \tilde{T} \Big|_{\varphi=\varphi_*} = \tilde{T}_*^*, \tilde{T}'_\varphi \Big|_{\varphi=\varphi_*} = 0, \tilde{T}'_\psi \Big|_{\psi=0} = \tilde{T}'_\psi \Big|_{\psi=Q_*} = \tilde{T}'_\eta \Big|_{\eta=0} = \tilde{T}'_\eta \Big|_{\eta=Q_*} = 0, \quad (23) \right.$$

$$\left\{ c \Big|_{t=0} = \tilde{c}_0^0, u \Big|_{t=0} = \tilde{u}_0^0, \tilde{T} \Big|_{t=0} = \tilde{T}_0^0, \tilde{\kappa} \Big|_{t=0} = \kappa_0^0, \tilde{\sigma} \Big|_{t=0} = \tilde{\sigma}_0^0, \quad (24) \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} \lim_{\varphi \rightarrow \varphi_{*r-0}^+} c &= \lim_{\varphi \rightarrow \varphi_{*r+0}^-} c, \lim_{\varphi \rightarrow \varphi_{*r-0}^-} (D_r \cdot c'_\varphi - \kappa_r^0 \cdot c) = \lim_{\varphi \rightarrow \varphi_{*r+0}^+} (D_{r+1} \cdot c'_\varphi - \kappa_{r+1}^0 \cdot c), \\ \lim_{\varphi \rightarrow \varphi_{*r-0}^+} u &= \lim_{\varphi \rightarrow \varphi_{*r+0}^-} u, \lim_{\varphi \rightarrow \varphi_{*r-0}^-} D_r^* \cdot u'_\varphi = \lim_{\varphi \rightarrow \varphi_{*r+0}^+} D_{r+1}^* \cdot u'_\varphi, \\ \lim_{\varphi \rightarrow \varphi_{*r-0}^-} \tilde{T} &= \lim_{\varphi \rightarrow \varphi_{*r+0}^+} \tilde{T}, \lim_{\varphi \rightarrow \varphi_{*r-0}^-} (D_r^{**} \cdot \tilde{T}'_\varphi - \kappa_r^0 \cdot \tilde{T}) = \lim_{\varphi \rightarrow \varphi_{*r+0}^+} (D_{r+1}^{**} \cdot \tilde{T}'_\varphi - \kappa_{r+1}^0 \cdot \tilde{T}), \\ \lim_{\varphi \rightarrow \varphi_{*r-0}^+} (D_r \cdot c'_\varphi - \tilde{\kappa}_r \cdot c + D_r^* \cdot u'_\varphi) &= \lim_{\varphi \rightarrow \varphi_{*r+0}^-} (D_{r+1} \cdot c'_\varphi - \tilde{\kappa}_{r+1} \cdot c + D_{r+1}^* \cdot u'_\varphi), \\ \lim_{\varphi \rightarrow \varphi_{*r-0}^-} (\tilde{\sigma} \cdot (c + u))'_t &= \lim_{\varphi \rightarrow \varphi_{*r+0}^+} (\tilde{\sigma} \cdot (c + u))'_t, \quad r = \overline{1, p-1}, \end{aligned} \quad (25) \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} c \Big|_{\eta=0, \psi=\tilde{\psi}} &= c \Big|_{\eta=0, \psi=Q_*-\tilde{\psi}}, c'_\eta \Big|_{\eta=0, \psi=\tilde{\psi}} = c'_\eta \Big|_{\eta=0, \psi=Q_*-\tilde{\psi}}, \\ c \Big|_{\psi=0} &= c \Big|_{\psi=Q_*}, c'_\eta \Big|_{\psi=0} = c'_\eta \Big|_{\psi=Q_*}, \end{aligned} \quad (26) \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} u \Big|_{\eta=0, \psi=\tilde{\psi}} &= u \Big|_{\eta=0, \psi=Q_*-\tilde{\psi}}, u'_\eta \Big|_{\eta=0, \psi=\tilde{\psi}} = u'_\eta \Big|_{\eta=0, \psi=Q_*-\tilde{\psi}}, \\ u \Big|_{\psi=0} &= u \Big|_{\psi=Q_*}, u'_\eta \Big|_{\psi=0} = u'_\eta \Big|_{\psi=Q_*}, \end{aligned} \quad (27) \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} \tilde{T} \Big|_{\eta=0, \psi=\tilde{\psi}} &= \tilde{T} \Big|_{\eta=0, \psi=Q_*-\tilde{\psi}}, \tilde{T}'_\eta \Big|_{\eta=0, \psi=\tilde{\psi}} = \tilde{T}'_\eta \Big|_{\eta=0, \psi=Q_*-\tilde{\psi}}, \\ \tilde{T} \Big|_{\psi=0} &= \tilde{T} \Big|_{\psi=Q_*}, \tilde{T}'_\eta \Big|_{\psi=0} = \tilde{T}'_\eta \Big|_{\psi=Q_*}, \end{aligned} \quad (28) \right.$$

де

$$\begin{aligned} c &= c(\varphi, \psi, \eta, t) = C(x(\varphi, \psi, \eta), y(\varphi, \psi, \eta), z(\varphi, \psi, \eta), t), \quad u = u(\varphi, \psi, \eta, t), \\ \tilde{T} &= \tilde{T}(\varphi, \psi, \eta, t), \quad \tilde{\kappa} = \tilde{\kappa}(\varphi, \psi, \eta, t), \quad \tilde{\sigma} = \tilde{\sigma}(\varphi, \psi, \eta, t), \quad \tilde{c}_*^* = \tilde{c}_*^*(\psi, \eta, t), \\ \tilde{u}_*^* &= \tilde{u}_*^*(\psi, \eta, t), \quad \tilde{T}_*^* = \tilde{T}_*^*(\psi, \eta, t), \quad \tilde{c}_0^0 = \{\tilde{c}_r^0, (\varphi, \psi, \eta) \in G_w^r, r = \overline{1, p}\}, \\ \tilde{u}_0^0 &= \{\tilde{u}_r^0, (\varphi, \psi, \eta) \in G_w^r, r = \overline{1, p}\}, \quad \tilde{T}_0^0 = \{\tilde{T}_r^0, (\varphi, \psi, \eta) \in G_w^r, r = \overline{1, p}\}, \\ \tilde{\sigma}_0^0 &= \{\tilde{\sigma}_r^0, (\varphi, \psi, \eta) \in G_w^r, r = \overline{1, p}\}, \quad \tilde{\alpha} = \{\tilde{\alpha}_r, (\varphi, \psi, \eta) \in G_w^r, r = \overline{1, p}\}, \\ \tilde{\beta} &= \{\tilde{\beta}_r, (\varphi, \psi, \eta) \in G_w^r, r = \overline{1, p}\}, \quad \tilde{\gamma} = \{\tilde{\gamma}_r, (\varphi, \psi, \eta) \in G_w^r, r = \overline{1, p}\}, \\ \tilde{\mu} &= \{\tilde{\mu}_r, (\varphi, \psi, \eta) \in G_w^r, r = \overline{1, p}\}, \quad \tilde{\lambda} = \{\tilde{\lambda}_r, (\varphi, \psi, \eta) \in G_w^r, r = \overline{1, p}\}, \\ \tilde{\nu} &= \{\tilde{\nu}_r, (\varphi, \psi, \eta) \in G_w^r, r = \overline{1, p}\}, \quad b_s = \{b_{r,s}, (\varphi, \psi, \eta) \in G_w^r, r = \overline{1, p}\} \\ & \quad (s = \overline{1, 5}), \quad \tilde{\alpha}_r = \alpha_{r,0,0} + \varepsilon \cdot \alpha_{r,1,0} \cdot \tilde{\nu} + \varepsilon^2 \cdot \alpha_{r,2,0} \cdot \tilde{\nu}^2 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & +\varepsilon \cdot \alpha_{r,0,1} \cdot \tilde{T} + \varepsilon^2 \cdot \alpha_{r,0,2} \cdot \tilde{T}^2 + \varepsilon^2 \cdot \alpha_{r,0,2} \cdot \tilde{v} \cdot \tilde{T}, \quad \tilde{\beta}_r = \varepsilon \cdot \tilde{\tilde{\beta}}_r, \\
 \tilde{\beta}_r & = \beta_{r,0,0} + \varepsilon \cdot \beta_{r,1,0} \cdot \tilde{v} + \varepsilon^2 \cdot \beta_{r,2,0} \cdot \tilde{v}^2 + \varepsilon \cdot \beta_{r,0,1} \cdot \tilde{T} + \varepsilon^2 \cdot \beta_{r,0,2} \cdot \tilde{T}^2 + \\
 & + \varepsilon^2 \cdot \beta_{r,2,2} \cdot \tilde{v} \cdot \tilde{T}, \quad \tilde{\gamma}_r = \varepsilon \cdot \tilde{\tilde{\gamma}}_r, \quad \tilde{\mu}_r = \varepsilon \cdot \tilde{\tilde{\mu}}_r, \\
 \tilde{\mu}_r & = \mu_{r,0} + \varepsilon \cdot \mu_{r,1} \cdot \tilde{T} + \varepsilon^2 \cdot \mu_{r,2} \cdot \tilde{T}^2, \quad \tilde{\lambda}_r = \varepsilon \cdot \tilde{\tilde{\lambda}}_r, \quad \tilde{c}_r^0 = \tilde{c}_r^0(\varphi, \psi, \eta), \\
 \tilde{u}_r^0 & = \tilde{u}_r^0(\varphi, \psi, \eta), \quad \tilde{T}_r^0 = \tilde{T}_r^0(\varphi, \psi, \eta), \quad \tilde{\sigma}_r^0 = \tilde{\sigma}_r^0(\varphi, \psi, \eta), \quad \tilde{\alpha}_r = \tilde{\alpha}_r(\varphi, \psi, \eta, t), \\
 \tilde{\beta}_r & = \tilde{\tilde{\beta}}_r(\varphi, \psi, \eta, t), \quad \tilde{\gamma}_r = \tilde{\tilde{\gamma}}_r(\varphi, \psi, \eta, t), \quad \tilde{\mu}_r = \tilde{\tilde{\mu}}_r(\varphi, \psi, \eta, t), \\
 \tilde{\lambda}_r & = \tilde{\tilde{\lambda}}_r(\varphi, \psi, \eta, t), \quad \tilde{v}_r = \tilde{v}_r(\varphi, \psi, \eta) \quad (r = \overline{1, p}), \quad b_{r,s} = b_{r,s}(\varphi, \psi, \eta) \\
 & \quad (r = \overline{1, p}, \quad s = \overline{1, 5}), \quad b_{r,1} = \varphi_x'^2 + \varphi_y'^2 + \varphi_z'^2 = \tilde{v}_r^2 / (\kappa_r^0)^2, \\
 b_{r,2} & = \psi_x''^2 + \psi_y''^2 + \psi_z''^2, \quad b_{r,3} = \eta_x''^2 + \eta_y''^2 + \eta_z''^2, \quad b_{r,4} = \psi_{xx}'' + \psi_{yy}'' + \psi_{zz}'', \\
 b_{r,5} & = \eta_{xx}'' + \eta_{yy}'' + \eta_{zz}'', \quad \tilde{\psi} \in [0, \frac{Q_*}{2}].
 \end{aligned}$$

Розв'язання задачі. Аналогічно до [19–23] знайдено числово-асимптотичне наближення розв'язку $c = \{c_r, (\varphi, \psi, \eta) \in G_w^r, r = \overline{1, p}\}$, $u = \{u_r, (\varphi, \psi, \eta) \in G_w^r, r = \overline{1, p}\}$, $\tilde{T} = \{\tilde{T}_r, (\varphi, \psi, \eta) \in G_w^r, r = \overline{1, p}\}$, $\tilde{\kappa} = \{\tilde{\kappa}_r, (\varphi, \psi, \eta) \in G_w^r, r = \overline{1, p}\}$, $\tilde{\sigma} = \{\tilde{\sigma}_r, (\varphi, \psi, \eta) \in G_w^r, r = \overline{1, p}\}$ задачі (20)–(28) з точністю $O(\varepsilon^{n+1})$ у вигляді таких рядів:

$$\begin{aligned}
 c_r & = \sum_{i=0}^n \varepsilon^i \cdot c_{r,i} + \sum_{i=0}^{n+1} \varepsilon^i \cdot (\tilde{P}_{r,i} + \tilde{\tilde{P}}_{r,i}) + \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^{i/2} \cdot (\hat{P}_{r,i} + \hat{\tilde{P}}_{r,i} + \check{P}_{r,i} + \check{\tilde{P}}_{r,i}) + \bar{R}_{r,n+1}, \\
 u_r & = \sum_{i=0}^n \varepsilon^i \cdot u_{r,i} + \sum_{i=0}^{n+1} \varepsilon^i \cdot (\tilde{H}_{r,i} + \tilde{\tilde{H}}_{r,i}) + \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^{i/2} \cdot (\hat{H}_{r,i} + \hat{\tilde{H}}_{r,i} + \check{H}_{r,i} + \check{\tilde{H}}_{r,i}) + \bar{R}_{r,n+1}, \\
 \tilde{T}_r & = \sum_{i=0}^n \varepsilon^i \cdot \tilde{T}_{r,i} + \sum_{i=0}^{n+1} \varepsilon^i \cdot (\tilde{B}_{r,i} + \tilde{\tilde{B}}_{r,i}) + \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^{i/2} \cdot (\hat{B}_{r,i} + \hat{\tilde{B}}_{r,i} + \check{B}_{r,i} + \check{\tilde{B}}_{r,i}) + \bar{R}_{r,n+1}, \\
 \tilde{\kappa}_r & = \sum_{i=0}^n \varepsilon^i \cdot \tilde{\kappa}_{r,i} + \sum_{i=0}^{n+1} \varepsilon^i \cdot (\tilde{q}_{r,i} + \tilde{\tilde{q}}_{r,i}) + \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^{i/2} \cdot (\hat{q}_{r,i} + \hat{\tilde{q}}_{r,i} + \check{q}_{r,i} + \check{\tilde{q}}_{r,i}) + \bar{R}_{r,n+1}, \\
 \tilde{\sigma}_r & = \sum_{i=0}^n \varepsilon^i \cdot \tilde{\sigma}_{r,i} + \sum_{i=0}^{n+1} \varepsilon^i \cdot (\tilde{h}_{r,i} + \tilde{\tilde{h}}_{r,i}) + \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^{i/2} \cdot (\hat{h}_{r,i} + \hat{\tilde{h}}_{r,i} + \check{h}_{r,i} + \check{\tilde{h}}_{r,i}) + \bar{R}_{r,n+1},
 \end{aligned}$$

де $c_{r,i} = c_{r,i}(\varphi, \psi, \eta, t)$, $u_{r,i} = u_{r,i}(\varphi, \psi, \eta, t)$, $\tilde{T}_{r,i} = \tilde{T}_{r,i}(\varphi, \psi, \eta, t)$, $\tilde{\kappa}_{r,i} = \tilde{\kappa}_{r,i}(\varphi, \psi, \eta, t)$, $\tilde{\sigma}_{r,i} = \tilde{\sigma}_{r,i}(\varphi, \psi, \eta, t)$ ($r = \overline{1, p}$, $i = \overline{0, n}$) — члени регулярних частин асимптотик,

$$\begin{aligned}
 \tilde{P}_{r,i} &= \tilde{P}_{r,i}(\tilde{\phi}_{r-1}, \psi, \eta, t), \quad \tilde{H}_{r,i} = \tilde{H}_{r,i}(\tilde{\phi}_{r-1}, \psi, \eta, t), \quad \tilde{B}_{r,i} = \tilde{B}_{r,i}(\tilde{\phi}_{r-1}, \psi, \eta, t), \\
 \tilde{q}_{r,i} &= \tilde{q}_{r,i}(\tilde{\phi}_{r-1}, \psi, \eta, t), \quad \tilde{h}_{r,i} = \tilde{h}_{r,i}(\tilde{\phi}_{r-1}, \psi, \eta, t), \quad \tilde{P}_{r,i} = \tilde{P}_{r,i}(\tilde{\phi}_r, \psi, \eta, t), \\
 \tilde{H}_{r,i} &= \tilde{H}_{r,i}(\tilde{\phi}_r, \psi, \eta, t), \quad \tilde{B}_{r,i} = \tilde{B}_{r,i}(\tilde{\phi}_r, \psi, \eta, t), \quad \tilde{q}_{r,i} = \tilde{q}_{r,i}(\tilde{\phi}_r, \psi, \eta, t), \\
 \tilde{h}_{r,i} &= \tilde{h}_{r,i}(\tilde{\phi}_r, \psi, \eta, t) \quad (r = \overline{1, p}, i = \overline{0, n+1}) —
 \end{aligned}$$

функції типу примежового шару відповідно в околах $\varphi = \varphi_{*r}^*$ ($r = \overline{0, p}$) (поправки на вході, виході і в околі поверхонь розділу шарів фільтру),

$$\begin{aligned}
 \hat{P}_{r,i} &= \hat{P}_{r,i}(\varphi, \tilde{\psi}, \eta, t), \quad \hat{H}_{r,i} = \hat{H}_{r,i}(\varphi, \tilde{\psi}, \eta, t), \quad \hat{B}_{r,i} = \hat{B}_{r,i}(\varphi, \tilde{\psi}, \eta, t), \\
 \hat{q}_{r,i} &= \hat{q}_{r,i}(\varphi, \tilde{\psi}, \eta, t), \quad \hat{h}_{r,i} = \hat{h}_{r,i}(\varphi, \tilde{\psi}, \eta, t), \quad \hat{P}_{r,i} = \hat{P}_{r,i}(\varphi, \tilde{\psi}, \eta, t), \\
 \hat{H}_{r,i} &= \hat{H}_{r,i}(\varphi, \tilde{\psi}, \eta, t), \quad \hat{B}_{r,i} = \hat{B}_{r,i}(\varphi, \tilde{\psi}, \eta, t), \quad \hat{q}_{r,i} = \hat{q}_{r,i}(\varphi, \tilde{\psi}, \eta, t), \\
 \hat{h}_{r,i} &= \hat{h}_{r,i}(\varphi, \tilde{\psi}, \eta, t), \quad \check{P}_{r,i} = \check{P}_{r,i}(\varphi, \psi, \tilde{\eta}, t), \quad \check{H}_{r,i} = \check{H}_{r,i}(\varphi, \psi, \tilde{\eta}, t), \\
 \check{B}_{r,i} &= \check{B}_{r,i}(\varphi, \psi, \tilde{\eta}, t), \quad \check{q}_{r,i} = \check{q}_{r,i}(\varphi, \psi, \tilde{\eta}, t), \quad \check{h}_{r,i} = \check{h}_{r,i}(\varphi, \psi, \tilde{\eta}, t), \\
 \check{P}_{r,i} &= \check{P}_{r,i}(\varphi, \psi, \tilde{\eta}, t), \quad \check{H}_{r,i} = \check{H}_{r,i}(\varphi, \psi, \tilde{\eta}, t), \quad \check{B}_{r,i} = \check{B}_{r,i}(\varphi, \psi, \tilde{\eta}, t), \\
 \check{q}_{r,i} &= \check{q}_{r,i}(\varphi, \psi, \tilde{\eta}, t), \quad \check{h}_{r,i} = \check{h}_{r,i}(\varphi, \psi, \tilde{\eta}, t) \quad (r = \overline{1, p}, i = \overline{0, 2n+1}) —
 \end{aligned}$$

функції типу примежового шару відповідно в околах $\psi = 0$, $\psi = Q_*$, $\eta = 0$, $\eta = Q^*$ (поправки на бічній стінці фільтру і берегах умовного

розрізу Γ), $\tilde{\phi}_r = \frac{\varphi - \varphi_{*r}^*}{\varepsilon} \quad (r = \overline{0, p-1})$, $\tilde{\phi}_r = \frac{\varphi_{*r}^* - \varphi}{\varepsilon} \quad (r = \overline{1, p})$,

$\tilde{\psi} = \frac{\psi}{\sqrt{\varepsilon}}$, $\tilde{\psi} = \frac{Q_* - \psi}{\sqrt{\varepsilon}}$, $\tilde{\eta} = \frac{\eta}{\sqrt{\varepsilon}}$, $\tilde{\eta} = \frac{Q^* - \eta}{\sqrt{\varepsilon}}$ — відповідні їм регуляри-

зуючі перетворення (розтяги), $R_{r,n+1}(\varphi, \psi, \eta, t, \varepsilon)$, $\tilde{R}_{r,n+1}(\varphi, \psi, \eta, t, \varepsilon)$, $\bar{R}_{r,n+1}(\varphi, \psi, \eta, t, \varepsilon)$, $\check{R}_{r,n+1}(\varphi, \psi, \eta, t, \varepsilon)$, $\hat{R}_{r,n+1}(\varphi, \psi, \eta, t, \varepsilon)$ ($r = \overline{1, p}$) —

залишкові члени. Зокрема, для знаходження $c_{r,i}$, $u_{r,i}$, $\tilde{T}_{r,i}$, $\tilde{K}_{r,i}$, $\tilde{\sigma}_{r,i}$

($r = \overline{1, p}$, $i = \overline{0, n}$) одержано формули:

$$c_{r,0} = \begin{cases} e^{-\tilde{\lambda}_{r,1}(\varphi, \psi, \eta, t)} \cdot (\hat{g}_{r,0}(\varphi, \psi, \eta, t) + \tilde{c}_*^*(\psi, \eta, t - \tilde{f}_r(\varphi, \psi, \eta))), & t \geq \tilde{f}_1, \\ e^{-\tilde{\lambda}_{r,1}(\varphi, \psi, \eta, t)} \cdot (\hat{g}_{r,0}(\varphi, \psi, \eta, t) + \tilde{c}_{r-1,0}^*(\psi, \eta, t - \tilde{f}_r(\varphi, \psi, \eta))), & t \geq \tilde{f}_r, \\ e^{-\tilde{\lambda}_{r,2}(\varphi, \psi, \eta, t)} \cdot (\hat{g}_{r,0}(\varphi, \psi, \eta, t) + \tilde{c}_0^0(\tilde{f}_r^{-1}(\tilde{f}_r(\varphi, \psi, \eta) - t, \psi, \eta), \psi, \eta)), & t < \tilde{f}_r, \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 u_{r,0} &= \frac{1}{\tilde{\sigma}_r^0} \cdot \int_0^t \tilde{g}_{r,i}(\varphi, \psi, \eta, \hat{t}) d\hat{t} + \tilde{u}_r^0, \\
 \tilde{T}_{r,0} &= \begin{cases} \tilde{T}_*^*(\psi, \eta, t - \tilde{f}_r(\varphi, \psi, \eta)), & t \geq \tilde{f}_1, \\ \tilde{T}_{r-1,0}^*(\psi, \eta, t - \tilde{f}_r(\varphi, \psi, \eta)), & t \geq \tilde{f}_r, \\ \tilde{T}_0^0(\tilde{f}_r^{-1}(\tilde{f}_r(\varphi, \psi, \eta) - t, \psi, \eta), \psi, \eta), & t < \tilde{f}_r, \end{cases} \\
 \tilde{\kappa}_{r,0} &= \kappa_r^0, \quad \tilde{\sigma}_{r,0} = \tilde{\sigma}_r^0 \quad (r = \overline{1, p}), \\
 c_{r,i} &= \begin{cases} e^{-\tilde{\lambda}_{r,1}(\varphi, \psi, \eta, t)} \cdot \hat{g}_{r,i}(\varphi, \psi, \eta, t), & t \geq \tilde{f}_r, \\ e^{-\tilde{\lambda}_{r,2}(\varphi, \psi, \eta, t)} \cdot \hat{g}_{r,i}(\varphi, \psi, \eta, t), & t < \tilde{f}_r, \end{cases} \\
 u_{r,i} &= \frac{1}{\tilde{\sigma}_r^0} \cdot \int_0^t \tilde{g}_{r,i}(\varphi, \psi, \eta, \hat{t}) d\hat{t}, \\
 \tilde{T}_{r,i} &= \begin{cases} \kappa_r^0 \cdot \int_{\varphi_{*(r-1)}}^{\varphi} \frac{\bar{g}_{r,i}(\hat{\varphi}, \psi, \eta, \tilde{f}_r(\hat{\varphi}, \psi, \eta) - \tilde{f}_r(\varphi, \psi, \eta) + t)}{\tilde{v}^2(\hat{\varphi}, \psi, \eta)} d\hat{\varphi}, & t \geq \tilde{f}_r, \\ \int_0^t \frac{\bar{g}_{r,i}(\tilde{f}_r^{-1}(\hat{t} + \tilde{f}_r(\varphi, \psi, \eta) - t, \psi, \eta), \psi, \eta, \hat{t})}{\tilde{\sigma}_r^0(\tilde{f}_r^{-1}(\hat{t} + \tilde{f}_r(\varphi, \psi, \eta) - t, \psi, \eta), \psi, \eta)} d\hat{t}, & t < \tilde{f}_r, \end{cases} \\
 \tilde{\kappa}_{r,i} &= \int_0^t \tilde{g}_{r,i}(\varphi, \psi, \eta, \hat{t}) d\hat{t}, \quad \tilde{\sigma}_{r,i} = \int_0^t \tilde{g}_{r,i}(\varphi, \psi, \eta, \hat{t}) d\hat{t} \quad (r = \overline{1, p}, i = \overline{1, n}), \\
 \text{де } \tilde{\lambda}_{r,1}(\varphi, \psi, \eta, t) &= \kappa_r^0 \cdot \alpha_{r,0} \cdot \int_{\varphi_{*(r-1)}}^{\varphi} \frac{d\hat{\varphi}}{\tilde{v}^2(\hat{\varphi}, \psi, \eta)}, \\
 \tilde{\lambda}_{r,2}(\varphi, \psi, \eta, t) &= \alpha_{r,0} \cdot \int_0^t \frac{d\hat{t}}{\tilde{\sigma}_r^0(\tilde{f}_r^{-1}(\hat{t} + \tilde{f}_r(\varphi, \psi, \eta) - t, \psi, \eta), \psi, \eta)}, \\
 \hat{g}_{r,i}(\varphi, \psi, \eta, t) &= \int_{\varphi_{*(r-1)}}^{\varphi} \frac{g_{r,i}(\hat{\varphi}, \psi, \eta, \tilde{f}_r(\hat{\varphi}, \psi, \eta) - \tilde{f}_r(\varphi, \psi, \eta) + t)}{\tilde{v}^2(\hat{\varphi}, \psi, \eta)} \cdot e^{\tilde{\lambda}_{r,1}(\hat{\varphi}, \psi, \eta, t)} d\hat{\varphi}, \\
 \hat{g}_{r,i}(\varphi, \psi, \eta, t) &= \int_0^t \frac{g_{r,i}(\tilde{f}_r^{-1}(\hat{t} + \tilde{f}_r(\varphi, \psi, \eta) - t, \psi, \eta), \psi, \eta, \hat{t})}{\tilde{\sigma}_r^0(\tilde{f}_r^{-1}(\hat{t} + \tilde{f}_r(\varphi, \psi, \eta) - t, \psi, \eta), \psi, \eta)} \cdot e^{\tilde{\lambda}_{r,2}(\varphi, \psi, \eta, \hat{t})} d\hat{t}, \\
 g_{r,i} &= I(i, 1) \cdot (d_{r,0} \cdot (b_{r,1} \cdot c_{(r,i-1)\varphi}'' + b_{r,2} \cdot c_{(r,i-1)\psi\psi}'' + b_{r,3} \cdot c_{(r,i-1)\eta\eta}'' + \\
 &+ b_{r,4} \cdot c_{(r,i-1)\psi}' + b_{r,5} \cdot c_{(r,i-1)\eta}') - \sum_{l=1}^i \alpha_{r,l,0} \cdot \tilde{v}_r^l \cdot c_{r,i-l} - \sum_{l=0}^{i-1} \alpha_{r,0,1} \cdot \tilde{T}_{r,l} \cdot c_{r,i-1-l} +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{l=0}^{i-1} \beta_{r,l,0} \cdot \tilde{v}_r^l \cdot u_{r,i-1-l} - \sum_{l=1}^i (\tilde{\sigma}_{r,l} \cdot c'_{(r,i-l)t} + \tilde{\sigma}'_{r,l,t} \cdot c_{r,i-l}) - I(i,2) \times \\
 & \quad \times \left(\sum_{l=0}^{i-2} \sum_{k=0}^l \alpha_{r,0,2} \cdot \tilde{T}_{r,k} \cdot \tilde{T}_{r,l-k} \cdot c_{r,i-2-l} + \right. \\
 & \quad \left. + \sum_{l=0}^{i-2} \alpha_{r,2,2} \cdot \tilde{v}_r \cdot \tilde{T}_{r,l} \cdot c_{r,i-2-l} - \sum_{l=0}^{i-2} \beta_{r,0,1} \cdot \tilde{T}_{r,l} \cdot u_{r,i-2-l} \right) + \\
 & + I(i,3) \cdot \left(\sum_{l=0}^{i-3} \sum_{k=0}^l \beta_{r,0,2} \cdot \tilde{T}_{r,k} \cdot \tilde{T}_{r,l-k} \cdot u_{r,i-3-l} + \sum_{l=0}^{i-3} \beta_{r,2,2} \cdot \tilde{v}_r \cdot \tilde{T}_{r,l} \cdot u_{r,i-3-l} \right), \\
 \tilde{g}_{r,i} = & \sum_{l=0}^i \alpha_{r,l,0} \cdot \tilde{v}_r^l \cdot c_{r,i-l} + I(i,1) \cdot (d_{r,0}^* \cdot (b_{r,1} \cdot u_{(r,i-1)\varphi\varphi}'' + b_{r,2} \cdot u_{(r,i-1)\psi\psi}'' + \\
 & + b_{r,3} \cdot u_{(r,i-1)\eta\eta}'' + b_{r,4} \cdot u_{(r,i-1)\psi}'' + b_{r,5} \cdot u_{(r,i-1)\eta}'') + \sum_{l=0}^{i-1} \alpha_{r,0,1} \cdot \tilde{T}_{r,l} \cdot c_{r,i-1-l} - \\
 & - \sum_{l=0}^{i-1} \beta_{r,l,0} \cdot \tilde{v}_r^l \cdot u_{r,i-1-l} - \sum_{l=1}^i (\tilde{\sigma}_{r,l} \cdot u'_{(r,i-l)t} + \tilde{\sigma}'_{r,l,t} \cdot u_{r,i-l}) + I(i,2) \times \\
 & \quad \times \left(\sum_{l=0}^{i-2} \sum_{k=0}^l \alpha_{r,0,2} \cdot \tilde{T}_{r,k} \cdot \tilde{T}_{r,l-k} \cdot c_{r,i-2-l} + \right. \\
 & \quad \left. + \sum_{l=0}^{i-2} \alpha_{r,2,2} \cdot \tilde{v}_r \cdot \tilde{T}_{r,l} \cdot c_{r,i-2-l} - \sum_{l=0}^{i-2} \beta_{r,0,1} \cdot \tilde{T}_{r,l} \cdot u_{r,i-2-l} \right) - \\
 & - I(i,3) \cdot \left(\sum_{l=0}^{i-3} \sum_{k=0}^l \beta_{r,0,2} \cdot \tilde{T}_{r,k} \cdot \tilde{T}_{r,l-k} \cdot u_{r,i-3-l} + \sum_{l=0}^{i-3} \beta_{r,2,2} \cdot \tilde{v}_r \cdot \tilde{T}_{r,l} \cdot u_{r,i-3-l} \right), \\
 \tilde{g}_{r,i} = & I(i,1) \cdot (d_{r,0}^{**} \cdot (b_{r,1} \cdot \tilde{T}_{(r,i-1)\varphi\varphi}'' + b_{r,2} \cdot \tilde{T}_{(r,i-1)\psi\psi}'' + b_{r,3} \cdot \tilde{T}_{(r,i-1)\eta\eta}'' + b_{r,4} \cdot \tilde{T}_{(r,i-1)\psi}'' + \\
 & + b_{r,5} \cdot \tilde{T}_{(r,i-1)\eta}'') + \tilde{\gamma} \cdot \sum_{l=0}^{i-1} \alpha_{r,l,0} \cdot \tilde{v}_r^l \cdot c_{r,i-1-l} - \sum_{l=1}^i (\tilde{\sigma}_{r,l} \cdot \tilde{T}'_{(r,i-l)t} + \tilde{\sigma}'_{r,l,t} \cdot \tilde{T}'_{r,i-l}) + \\
 & + I(i,2) \cdot \tilde{\gamma} \cdot \left(\sum_{l=0}^{i-2} \alpha_{r,0,1} \cdot \tilde{T}_{r,l} \cdot c_{r,i-2-l} - \sum_{l=0}^{i-2} \beta_{r,l,0} \cdot \tilde{v}_r^l \cdot u_{r,i-2-l} \right) + I(i,3) \cdot \tilde{\gamma} \times \\
 & \quad \times \left(\sum_{l=0}^{i-3} \sum_{k=0}^l \alpha_{r,0,2} \cdot \tilde{T}_{r,k} \cdot \tilde{T}_{r,l-k} \cdot c_{r,i-3-l} + \right. \\
 & \quad \left. + \sum_{l=0}^{i-3} \alpha_{r,2,2} \cdot \tilde{v}_r \cdot \tilde{T}_{r,l} \cdot c_{r,i-3-l} - \sum_{l=0}^{i-3} \beta_{r,0,1} \cdot \tilde{T}_{r,l} \cdot u_{r,i-3-l} \right) - \\
 & - I(i,4) \cdot \tilde{\gamma} \cdot \left(\sum_{l=0}^{i-4} \sum_{k=0}^l \beta_{r,0,2} \cdot \tilde{T}_{r,k} \cdot \tilde{T}_{r,l-k} \cdot u_{r,i-4-l} + \sum_{l=0}^{i-4} \beta_{r,2,2} \cdot \tilde{v}_r \cdot \tilde{T}_{r,l} \cdot u_{r,i-4-l} \right),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{g}_{r,i} &= -I(i,1) \cdot \mu_{r,0} \cdot u_{r,i-1} - I(i,2) \cdot \sum_{l=0}^{i-2} \mu_{r,1} \cdot \tilde{T}_{r,l} \cdot u_{r,i-2-l} - \\ &\quad - I(i,3) \cdot \sum_{l=0}^{i-3} \sum_{k=0}^l \mu_{r,2} \cdot \tilde{T}_{r,k} \cdot \tilde{T}_{r,l-k} \cdot u_{r,i-3-l}, \\ \tilde{g}_{r,i} &= -I(i,1) \cdot \tilde{\lambda}_r \cdot u_{r,i-1}, \\ \tilde{f}_r &= \tilde{f}_r(\varphi, \psi, \eta) = \kappa_r^0 \cdot \int_{\varphi_{*(r-1)}}^{\varphi} \frac{\tilde{\sigma}_r^0(\tilde{\varphi}, \psi, \eta)}{\tilde{v}_r^2(\tilde{\varphi}, \psi, \eta)} d\tilde{\varphi} \end{aligned}$$

час проходження вздовж відповідної лінії течії відповідними частинками домішки шляху від точки

$$(x(\varphi_{*(r-1)}^*, \psi, \eta), y(\varphi_{*(r-1)}^*, \psi, \eta), z(\varphi_{*(r-1)}^*, \psi, \eta)) \in G_z^{r-1}$$

до точки

$$(x(\varphi, \psi, \eta), y(\varphi, \psi, \eta), z(\varphi, \psi, \eta)) \in G_z^r,$$

\tilde{f}_r^{-1} — функція, обернена відповідно до \tilde{f}_r відносно змінної φ ,

$$I(a,b) = \begin{cases} 1, & a \geq b, \\ 0, & a < b. \end{cases}$$

Висновки. Сформовано математичну модель для прогнозування процесу адсорбційної доочистки води від домішок у швидких багатошарових фільтрах конусоподібної форми з кусково-однорідними пористими завантаженнями з урахуванням зміни температури фільтраційного потоку вздовж висоти фільтру при додержанні сталої швидкості фільтрації. За умови, що конвективні складові тепло- і масоперенесення й адсорбція переважають над вкладом дифузії й десорбції, отримано алгоритм числово-асимптотичного наближення розв'язку відповідної нелінійної сингулярно-збуреної крайової задачі для модельної області конусоподібної форми, обмеженої двома еквіпотенціальними поверхнями і поверхнею течії та розділеної деякими заданими еквіпотенціальними поверхнями на кілька підобластей. Запропонована модель аналогічно [20, 21] для заданої сталої швидкості фільтрації дозволяє шляхом проведення комп'ютерних експериментів спрогнозувати не лише зміну характеристик кусково-однорідних пористих завантажень (коефіцієнтів фільтрації й активної пористості), але й визначити оптимальні варіанти використання адсорбентів і збільшення тривалості роботи фільтрів за рахунок вибору їх форми та висоти шарів з урахуванням як зміни швидкості фільтраційного потоку вздовж висоти фільтру, так і температури.

Список використаних джерел:

1. Дваденко М. В. Адсорбционная очистка сточных вод / М. В. Дваденко, Н. М. Привалова, И. Ю. Кудасва, А. Г. Степура // Современные наукоемкие технологии. — 2010. — № 10. — С. 214–215.

2. Корнева Д. А. Адсорбционная очистка — эффективный метод очистки сточных вод и подготовки воды для хозяйственно-питьевого водопользования / Д. А. Корнева, Л. Н. Куров // Успехи современного естествознания. — 2011. — № 7. — С. 129.
3. Орлов В. О. Водоочисні фільтри із зернистою засипкою / В. О. Орлов. — Рівне : НУВГП, 2005. — 163 с.
4. Cheremisinoff N. P. Handbook of water and wastewater treatment technologies / N. P. Cheremisinoff. — Boston : Butterworth-Heinemann, 2002. — 645 p.
5. Edzwald J. Water Quality & Treatment. A Handbook on Drinking Water / J. Edzwald. — McGraw-Hill Professional, 2010. — 1996 p.
6. Hendricks D. W. Fundamentals of water treatment unit processes : physical, chemical, and biological / D. W. Hendricks. — Boca Raton : CRC Press, 2011. — 883 p.
7. Quevauviller Ph. Analytical methods for drinking water: advances in sampling and analysis / Ph. Quevauviller, K. C. Thompson. — John Wiley & Sons Ltd, 2006. — 188 p.
8. Сакалова Г. В. Дослідження ефективності очищення стічних вод від іонів важких металів з використанням природних адсорбентів: монографія / Г. В. Сакалова, Т. М. Василінич. — Вінниця: ТОВ «Твори», 2019. — 92 с.
9. Невзорова А. Б. Основы автоматизации систем водоснабжения и водоотведения : пособие / А. Б. Невзорова. — Гомель: УО «БелГУТ», 2005. — 115 с.
10. Макаревич Н. А. Теоретические основы адсорбции: учебное пособие / Н. А. Макаревич, Н. И. Богданович; Сев. (Арктич.) федер. ун-т им. М.В. Ломоносова. — Архангельск: САФУ, 2015. — 362 с.
11. Зеленцов В. И. Влияние температуры на равновесие и кинетику адсорбции фторид-ионов термообработанными оксигидратами Al / В. И. Зеленцов, Т. Я. Дацко, Е. Е. Дворникова // Электронная обработка материалов, 2008, № 3. — С. 50–58.
12. Бомба А. Я. Моделювання нелінійно-збурених процесів очищення рідин від багатокомпонентних забруднень: монографія / А. Я. Бомба, А. П. Сафоник. — Рівне: НУВГП, 2017. — 296 с.
13. Минц Д. М. Теоретические основы технологии очистки воды / Д. М. Минц. — М. : Стройиздат, 1964. — 156 с.
14. Бомба А. Я. Методи теорії збурень прогнозування процесів тепломасопереення в пористих та мікропористих середовищах : монографія / А. Я. Бомба, І. М. Присяжнюк, О. В. Присяжнюк. — Рівне : О. Зень, 2017. — 291 с.
15. Ives K. J. Deep-bed water filters / K. J. Ives // New developments. Filtr. And Sepa. — 1969. — Vol. 6, № 1. — P. 42–48.
16. Kalteh A. M. Review of the self-organizing map (SOM) approach in water resources: analysis, modelling and application / A. M. Kalteh, P. Hjorth and R. Berndtsson // Environmental Modelling and Software. — 2008. — Vol. 23, № 7. — P. 835–845.
17. Maier H. R. Neural networks for the prediction and forecasting of water resources variables: a review of modelling issues and applications / H. R. Maier, G. C. Dandy // Environmental Modelling and Software. 2000. — Vol. 15, № 1. — P. 101–124.
18. Self-organizing maps in the analysis of an industrial wastewater treatment process / M. Heikkinen, H. Poutiainen, M. Liukkonen, T. Heikkinen and

- Y. Hiltunen // *Mathematics and Computers in Simulation*. — 2011. — Vol. 82, № 3. — P. 450–459.
19. Safonyk A. P. Modelling the filtration processes of liquids from multicomponent contamination in the conditions of authentication of mass transfer coefficient / A. P. Safonyk // *International Journal of Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*. — 2015. — Vol. 9. — P. 189–192.
 20. Бомба А. Я. Прогнозування зміни характеристик кусково-однорідних пористих завантажень швидких багатошарових фільтрів / А. Я. Бомба, Ю. С. Климяк // *Вісник НТУ «ХП»*. Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. — Харків : НТУ «ХП», 2018. — № 27 (1303). — С. 8–15.
 21. Бомба А. Я. Прогнозування оптимального використання фільтруючих матеріалів у швидких багатошарових фільтрах із кусково-однорідними пористими завантаженнями / А. Я. Бомба, Ю. С. Климяк // *Журнал обчислювальної та прикладної математики : наук. журн. Київ. нац. ун-т ім. Тараса Шевченка*. — Київ: ТВіМС, 2017. — Вип. 1 (124). — С. 3–14.
 22. Klimjuk Ju. Je. Prediction of changes in the characteristics of filter materials in rapid cone-shaped waterpurifying filters / Ju. Je. Klimjuk // *Innovative solutions in modern science*. — No. 8 (27). — Dubai, 2018. — P. 72–84. doi: 10.26886/2414-634X.8(27)2018.5
 23. Бомба А. Я. Математичне моделювання просторових сингулярно-збурених процесів типу фільтрація-конвекція-дифузія: монографія / А. Я. Бомба, Ю. С. Климяк. — Рівне : ТзОВ фірма «Ассоль», 2014. — 273 с.
 24. Рауз Х. Механика жидкости / Х. Рауз. — М. : Стройиздат, 1967. — 390 с.
 25. Klimjuk Ju. Je. Modelling of spatial filtration fields for one class of rapid multilayer filters of cone-shaped form with piecewise-homogeneous porous loads / Ju. Je. Klimjuk // *Proceedings of III International scientific conference «Science: new goals»*. — London : SI Universum, 2017. — P. 4–10.

COMPUTER PREDICTION OF ADSORPTION PURIFICATION OF WATER FROM IMPURITIES IN RAPID MULTILAYER FILTERS OF CONE-SHAPED FORM

In the paper a mathematical model for computer predicting of the process of adsorption purification of water from impurities in rapid multilayer filters while maintaining a constant filtration rate, taking into account the reverse influence of process characteristics (the concentrations of impurities respectively in the filtration flow stream and on the surface of the adsorbent load, the temperature of the filtration flow) on characteristics load (coefficients of filtration, active porosity, adsorption, desorption) is formulated. The corresponding model problem contains the equation of motion of the filtration flow according to Darcy's law, the continuity equation, the equation of mass and heat balance, and the equation to study the change in the characteristics of piecewise-homogeneous porous loads (filtration coefficients and active porosity). Provided that the convective components of heat and mass transfer and adsorption predominate over the contribution of diffusion and desorption, an algorithm for numerically-asymptotic approximation of solution of the corresponding nonlinear singularly perturbed

boundary value problem for a model region of a conical shape, bounded two equipotential surfaces and a surface flow, separated by some given specified of the equipotential surfaces on several subdomains, is developed. The proposed model allows through computer experiments to investigate changes in the characteristics of piecewise homogeneous porous loads (coefficients of filtration and active porosity of filter materials in each layer), to predict the optimal use of adsorbents and increase the duration of operation of filters by selecting their shape and height influence on the process of adsorption purification of water not only changes in the filtration flow rate along the height of the filter, but also the temperature.

Key words: *mathematical model, computer prediction, process of water purification, impurity, adsorption, temperature, piecewise-homogeneous porous load, rapid multilayer filter, cone-shaped form.*

Отримано: 22.08.2019

UDC 621.391

DOI: 10.32626/2308-5916.2019-20.68-78

V. O. Kuzminykh, Ph. D., Associate Professor,

O. V. Koval, Ph. D., Associate Professor,

S. I. Otrokh, D. Sc., Associate Professor

National Technical University of Ukraine «Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute», Kyiv

REFINING THE TYPICAL SCENARIOS BY ADDITIONAL FACTORS

The problems in the quality assessment modeling scenarios collecting information flow on an extensive network of the example of the problem of building and further optimization scenarios to analyze the budget process on an extensive network. Shown use structured approach to the ontology as considered most appropriate to the task of presenting the structure as a graph. Moved assessment of the effect of the use of partial information previously obtained by constructing scenarios collecting information flow on the network, described the count, with further refinement information. An formalized description of the hierarchical structure of the system. An example of the structure of the interaction of ontology elements for the problem of budget analysis is presented.

The use of an integrated approach based on finding the shortest path in the graph and model ontology as a graph that realizes the possibility of using algorithms based on traversing vertices in layers of hierarchy.

An approach to building breadth-first search algorithm that significantly reduces the time to find ways of building scenarios collect information on streaming extensive network. Described in

the article approach to building quality assessment algorithm simulation scenarios collect information on flow tested an extensive network in the development of pilot systems, financial analysis of regional budgets. The algorithm allows to develop a set of software tools that provides plenty full and holistic problem solving refinement and optimization scenarios searching and collecting information flow on an extensive network. One of the promising areas of application of this approach to assessing the quality of the simulation scenarios are used to build its capacity information and analytical systems. This will significantly reduce the time and improve the quality of finding the necessary flow of information.

Key words: *quality assessment, modeling, data collection, ontology graph analysis, budget analysis.*

Introduction. Today many methods to select the appropriate quality and efficiency of the plurality of possible scenarios or acceptable scenarios based on analysis of the nature and the factors that affect the planning scenario. In practice, the planning situation stands, different number of factors on which the decision and determine the fundamental differences between the procedures necessary formation scenarios. One of the very complex and pressing problems today that require building effective scenarios for its decision, the task of building and further optimization scenarios to analyze the budget process on a branched network. The problem of optimization scenarios collect information on streaming branched network is one of the most important tasks of handling large amounts of data [1, p. 29–30; 2, p. 78–80; 3, p. 29; 4, p. 20–25].

The most important tool to address the budget process is the financial analysis of regional budgets. In the conditions of crisis of the economy and regions of the country, strengthening the role of regions and regional budgets in solving economic and social problems, problems of stability of regional budgets are very relevant [5, p. 103; 6, p.39–45].

Financial analysis allows the state budget to sum up over time, to determine the effectiveness of budget spending, predict the state budget for the next quarter or year and make decisions that will improve the financial condition of the state budget. One measure of financial condition is considered to be the level of financial stability budget. Resistance budget allows conclusions about the possibility of the normal functioning of public power and the strength of its financial base of operations.

The main result of the analysis of financial stability is to get the budget estimates of stability analysis for each subject over time and opinion on the state budget stability for this subject. Based on these results, you can make general conclusions about the financial condition of the state budget, to make predictions about the state forward and decide on actions to improve the economic situation to achieve stability and independence of the state budget [7, p. 103].

Software development for financial analysis of the state budget and determine the stability of the budget can significantly reduce the time of analysis and facilitates the work of state institutions and authorities [8, p. 300].

The overall structure of the network, determines the ontological analysis features for solving the problem of the budget process on an branched network rather complicated structure and a large number of elements for which it includes.

One of the most common solutions to such problems is characterized in that at build script based on a particular ontology that describes the space provided in determining benefits when evaluating the quality and effectiveness of scenarios considered only one factor. However, other factors are not taken into account. Another common approach is determined that the required scenario is determined taking into account two or more factors may be taken into account in varying degrees.

Determining the required quality and performance scenarios for situations where the planning is based on one factor may be using these strategies, using hierarchical graph describing the relevant ontology.

You can select the following basic quality assessment scenarios:

- on the vector of priorities, according to the hierarchy of the ontology;
- assessment of income and expenses from the sale of each scenario;
- subject to peer review;
- the results of the impact of implementation scenarios.

Determining the necessary quality and effectiveness of scenarios in accordance with the second situation where planning controls a number of factors, a number of features that require the selection of two different planning procedures in hierarchical systems of several factors.

An important element of consideration of the impact of a number of factors to determine the necessary quality and effectiveness of scenarios is a method taking into account the benefits of the effects of certain factors on the value assessment scenario. The choice can be built as one of the strengths of the factors and on the basis of the trade-offs between several or all factors

Automation solve such problems needs to build algorithms that can enable unambiguous choice scenario based on a hierarchical structure describing ontology data on which to construct scenarios [9, p. 29–35; 10, p. 260–262; 11, p. 262–265].

The purpose is to develop models and algorithms determine on the basis of the constructed ontology defined some real hierarchical storage network and the formation of the current data. This problem concerns the choice of the most efficient scenarios by identifying and using the most appropriate scenarios to the terms of a specific request.

Constructing scenarios based on ontology network storage. There are many models for solving the problem of constructing scenarios based on ontologies describe the subject area, which are based on various math-

ematical methods. Among them are fairly common model for constructing scenarios based on the structure data storage on an branched network, which is typical analysis problems of regional budgets. Based on these models and their various modifications built modern information-analytical and information retrieval systems [12, p. 504].

This notion of ontology is considered as follows and defined as:

$$O = \{T, A, R, D\}, \quad (1)$$

T — set of terms that denotes objects and concepts of a domain, A — set of attributes of concepts, R — set of relationships (links) between terms, D — set of concepts and relationships.

In ontology graphically represented as a network, which peaks labeled domain concepts, and edges indicate the connection between them. The base is such hierarchical relationships of the «class — the class» and «part — whole» that define the structure of the branched structure of the network storage. Thus, ontology is a description of the structure of the subject area, providing insight together concepts and relationships between them.

To describe ontologies for tasks to select the appropriate quality and efficiency of the plurality of possible scenarios or acceptable scenarios widely used methods for describing and mapping are based on graph theory. The most widely descriptions in a hierarchical graph tend to estimate both the weight and the number included in the scenario description edges of the graph.

There are many methods to assess the number of ontology, but there is no comprehensive approach to this issue. These methods examine some specific aspects, but most do so incompletely. An important factor for assessing ontology is perspective from which it is viewed. It depends on which domain it is applied and that is a priority for the user. It is therefore necessary to determine which of the methods is most appropriate for a particular case.

Today has models which were to quantitative and qualitative advantages of one over the other. Therefore, the development of new algorithms and methods based on the combination of the advantages of different approaches in building models is very relevant and needs to develop new solutions.

Evaluation of scenario models based on network storage ontology. The structural approach to the ontology is most appropriate to the task, because the presentation as a graph structure makes it possible to measure its properties using the metrics by which you can determine its quality and form recommendations for its improvement.

An important aspect of the structural approach is the need to assess the effectiveness of building ontological model-based estimation cost reduction finder graph describing ontology, compared with non-directional search path, which corresponds to a script that is based on ontology described as a graph.

To estimate the reduction of search costs by the graph describing the ontology, one can conduct an assessment of the effectiveness based on assumptions, which is quite simple and can accurately assess the value

selected for comparison characteristics. These estimates can be built on the difference between full and partial passage through the column, which is a graphical representation of ontology analyzed in describing the scenario.

The basis for such procedures can be obtained before passing on information about the count in the implementation of other requests that overlap with current that the information obtained in the previous passage through the column. This information is stored in the appropriate knowledge base for each ontology, and hence for a the corresponding graph. In addition, for the measurement of the efficiency of the approach as a whole, reducing the degree of generality, we can consider some typical types of graphs for describing ontologies. This makes it possible to determine the boundary for efficiency assessment approach in general.

In general, this situation can be seen that search query data for ontology that consists of n levels already known based on the analysis of previous requests stored in the knowledge base, the results of the passage (ie, partial search) form levels where

$$m < n. \quad (2)$$

Then the effect of using previously obtained information for this case will be

$$E_{\min} = 2^n / (2^n - 2^{n-m}) \quad (3)$$

Thus the number of inspections during the passage of the count be reduced to E again.

As shown in the Miller ontology evaluation suggest that the number of ties in one concept in fully connected graph describing ontology should not exceed 9 [13, p. 81–90]. Thus, we can assume that in most cases the actual total number of incoming and outgoing edges do not exceed 9.

Based on this assumption the maximum benefit from the use of previously received information possible way to construct a scenario for this case can reach

$$E_{\max} = 9^n / (9^n - 9^{n-m}) \quad (4)$$

To assess the effectiveness of building ontology model can be used methods are based on finding the shortest path in the graph that describes it.

In general, we can write that implementation choices to count the ways to achieve the goal T according to the request:

$$T = \{x | A(x)\}, \quad (5)$$

x — where all possible avenues on the graph. $A(x)$ — the characteristic feature that captures the essence of a specific request and will lead to results.

Then

$$\forall a \exists x \forall c (c \in x \Leftrightarrow c \leq a), \quad (6)$$

c — all paths in the graph leading to the goal, a — the minimum distance on the column corresponding to the target.

Thus, there is always a minimum distance on the column corresponding to the goals that demand, then there is always

$$T_{\min} = \min(a) \quad (7)$$

Problem finding the shortest path in the graph (Single Source Shortest Path — SSSP) [14, p. 370–385] are formed based on common characteristics graph model describing ontology.

Let a given graph with weights arcs and dedicated source of top — u . The sequence of arcs called by that goes from the top u to the top v .

It is necessary for each vertex v , accessible from the top source u , specify the path that has the smallest possible total weight: $P^*(u, v)$

$$f^*(v) = f(P^*(u, v)) = \min f(P(u, v)). \quad (8)$$

Objectives can be set for both targeted and for an undirected graph. This kind of problem can apply in both cases. The problem satisfies the principle of optimality if the path is part of the shortest path, that is the shortest path from the source to the top u w. The principle of optimality means that for each vertex v shortest path instead of just enough to keep it past the arc.

Consider the weighted graph with n vertices and m arcs with weights. For it is necessary to construct the shortest path from vertex u (initial) to top v (final).

The shortest path from u to v can be restored if the time starting from the top v , place ribs in the opposite direction until, until the top has u . Ribs can be restored bust curves for each vertex:

$$e_v^* \in \{(u, v) \in E \mid f^*(v) = f^*(u) + f(u, v)\} \quad (9)$$

To find the shortest distance (v) on a set of curves, it is necessary to build a tree on which to search with the ability to parallelize. The most common processing tasks to streaming information on the network is branched breadth-first search algorithm [15, p. 285–292; 16, p. 350–360].

This algorithm can be used to solve the problem of finding the shortest path for all pairs of vertices. For this algorithm should run for each vertex.

For optimization problem scenario analysis of the budget process on a branched network based ontologies describe the structure of storing data in a hierarchical graph search algorithm in width allows us to calculate the shortest distance from the selected vertex directed graph all the other nodes. In addition, the breadth-first search can solve the problem of checking range, ie, whether there are ways between the top of the source and the other vertices of the graph. The algorithm is based on the vertices traversing the levels of hierarchy. The idea of breadth-first search algorithm allows to develop different versions of the algorithm according to the specific tasks to be solved with desired properties and actions that it should include.

To solve the problem of optimization scenarios analysis of the budget process on an branched network based ontologies describe the structure of storing data in a hierarchical graph, offered the following modified breadth-first search algorithm that significantly reduces the time to find ways of building scenarios collect information on streaming branched network.

Let a given graph without weights with a dedicated source of top u . In this way $P(u, v)$ between vertices u and v is the set of arcs

$$(U, v_1), (v_1, v_2), \dots, (v_{n-1}, v). \quad (10)$$

Path length $d(u, v)$ denote the number of arcs in this way between vertices u and v . Breadth-first search finds the shortest path from vertex u to all other vertices.

At the beginning of the algorithm, the distance to the top of the source

$$d(u) = 0, \quad (11)$$

for other peaks

$$d(v) = \infty, \forall v \neq u. \quad (12)$$

Computing core algorithm is circumvention of vertices adjacent to the selected vertex v , followed by the addition of not yet visited peaks in the set P . This operation is performed at each step for each vertex, such that $v \in V$.

The algorithm consistently clarifies the function $d(v)$. To take into account the features of construction problems scenario based on a hierarchical ontology introduce an additional function as the process of forming a scenario with desired properties and actions, that it should come in the form: $F(v_j, v_i) = 1$, if v_j corresponds to the implementation of at least one of the actions that are a part of the script actions under construction. $F(v_j, v_i) = 0$, if v_j is not responsible enforcement is not one of the actions that are a part of the script actions under construction.

Number of levels in the column is r , and the number of items in each level e .

The sequence of actions to assess the quality of the modeling of the analysis of information on the network can be as follows:

1. Selection on the lower layer of the vertices of the graph corresponding to the quality function.
2. Analysis of the links of the selected vertices with the vertices of the next level, which is located higher in the model hierarchy.
3. Saving the edges of the graph corresponding to the found relationships, for subsequent analysis and use in search operations.
4. Repetition of iterations to the exit to the search source at the top level.
5. Consolidation of all collected edges and vertices of the graph, which is built on the basis of the quality function, that is, the request for information search.

Then the process is repeated with the transition to a single layer and find your way back repeated. This excludes from consideration arc, poorly chosen. If any condition layer generally cannot be done, it means that the scenario cannot be built on this column. Then it is necessary to make changes and rebuild ontology graph that describes it, and then to re-build script on a new ontology.

As result of actions described algorithm we get a script that meets these criteria, in accordance with the basic ontology that describes the graph. The algorithm reflects the sequential process of identifying a sequence of arcs connecting the vertices of the bottom layer to the top of the parameters of life.

When you search for information on loved ones in the form requested, we use an existing model script, which significantly reduces construction time by reducing the number of layers in question, but does not preclude the need to revise the ontology and its restructuring.

Conclusions. In the paper the problem of optimization, scenarios streaming collection of information on branched network of the example of the problem of building and further optimization scenarios to analyze the budget process. Shown use structured approach to the ontology as considered most appropriate to the task of presenting the structure as a graph. Moved assessment of the effect of the use of partial information previously obtained by constructing scenarios collecting information flow on the network, described the count, with further refinement information.

The use of an integrated approach based on finding the shortest path in the graph (SSSP) and model ontology as a graph that realizes the possibility of using algorithms based on traversing the vertices in the hierarchy, i.e. layers.

An approach to the construction of a modified breadth-first search algorithm that significantly reduces the time to find ways of building scenarios collect information on streaming branched network. Described in the article optimization algorithm approach for constructing scenarios collect information on flow tested on branched network in the development of pilot systems, financial analysis of regional budgets. The algorithm allows to develop a set of software tools that provides plenty full and complete optimization problem solving scenarios searching and collecting information flow on an branched network. One of the promising areas of application of the algorithm is used to build its capacity information and analytical systems.

References:

1. Koval O. V. Using stochastic automaton for data consolidation / O. V. Koval, V. A. Kuzminykh, D. V. Khaustov // Наукові вісті НТУУ «КПІ». — Київ, 2017. — № 2. — С. 29–36.
2. Коваль О. В. Реалізація сценарного підходу в управлінні проектами на основі типових задач / О. В. Коваль, В. О. Кузьмич // Реєстрація, зберігання і обробка даних. — Київ, 2015. — Т. 17, № 1. — С. 77–87.

3. Koval A. V. Developmen Of A Scenario-Based Project Management System Construction In Enterpries With The Functional Organizational Structure / A. V. Koval, V. A. Kuzminykh, M. P. Voronko, D. V. Khaustov // *Informatyka Automatyka Pomiary w Gospodarce i Ochronie Środowiska*. — 2013. — № 4. — P. 26–30.
4. Koval O. V. Formation of Analytical activity Scenarios / O. V. Koval, K. A. Zaytseva, Yu. D. Boyko // *Системні дослідження та інформаційні технології*. — Київ, 2014. — № 1. — С. 20–25.
5. Зайцева Е. А. Комп'ютерне моделювання соціально-економічного розвитку регіону / Е. А. Зайцева, А. В. Коваль // *Системный анализ и информационные технологии : сб. тезисов 15-ой междунар. науч.-техн. конф.* (Київ, 31 мая 2013). — Киев : ННК «ІПСА», НТУУ «КПІ», 2013. — С. 103.
6. Сенченко В. Р. Система моніторингу державного бюджету України / В. Р. Сенченко, О. О. Діденко, О. В. Коваль // *Наукові вісті НТУУ «КПІ»*. — Київ. 2013. — № 6. — С. 37–48.
7. Коваль О. В. Формування та реалізація сценаріїв для вирішення задач забезпечення сталого розвитку : монографія / О. В. Коваль, К. А. Волкова, В. В. Дричик. — Черкаси : Видавець Чабаненко Ю. А., 2015. — 540 с.
8. Chernov V. A. *The Economic Theory analysis: Textbook* / V. A. Chernov. — Moscow : Prospect, 2017. — 384 p. — ISBN 978-5-392-24867-4
9. Novograduska R. L. *Ontology for Applications Development. Ontology in Information Science : monographs* / R. L. Novograduska, L. S. Globa, O. V. Koval, V. R. Senchenko. — 2018. — Chapter 2. — P. 29–53. — DOI: 10.5772/intechopen.74042
10. Novograduska R. L., Globa L. S., Koval O. V., Senchenko V. R. *Examples of Ontology Model Usage in Engineering Fields. Ontology in Information Science: monographs* / / R. L. Novograduska, L. S. Globa, O. V. Koval, V. R. Senchenko. — 2018. — Chapter 3. — P. 254–281.
11. Глоба Л. С. Створення сценаріїв обробки даних на основі онтологій / Л. С. Глоба, О. В. Коваль, Р. Л. Новогрудська, В. Р. Сенченко // *SAIT–2016 «Системний аналіз та інформаційні технології»: матеріали 18-й міжнар. наук.-техн. конф.* (Київ, 30 травня 2016). — Київ : ІПСА КПІ, 2016. — С. 262–265.
12. Christopher J. Manning, Prabhakar Rahavan, Heinrich Schütz. *Introduction Consumer Information Search* / J. Christopher ; (trans. with Eng.) — М. : ООО «Y. D. Williams», 2011 — P. 504.
13. Miller G. *The Magical Number Seven, Plus or Minus Two: Some Limits on Our Capacity for Processing Information* / G. Miller // *The Psychological Review*. — 1956. — Vol. 63. — P. 81–97.
14. Thorup M. *Undirected Single-Source Shortest Paths with Positive Integer Weights in Linear Time* / M. Thorup // *Journal of the ACM* 46. — 1999. — № 3. — P. 362–394
15. Moore E. F. *The Shortest Path Through a Maze* / E. F. Moore // *International Symposium on the Theory of Switching*. — 1959. — P. 285–292.
16. Lee C Y. *An Algorithm for Path Connections and Its Applications* / C Y. Lee // *IEEE Transactions on Electronic Computers* 10. — 1961. — № 3. — P. 346–365.

УТОЧНЕННЯ ТИПОВОГО СЦЕНАРІЮ ЗА ДОДАТКОВИМИ ПОКАЗНИКАМИ

У роботі розглянуті задачі оцінки якості моделювання сценаріїв збору потокової інформації на розгалуженій мережі на прикладі задачі побудови та подальшої оптимізації сценаріїв для аналізу бюджетного процесу на розгалуженій мережі. Показано використання структурного підходу до розгляду онтології, як найбільш відповідного до розглянутої задачі, з представленням структури у вигляді графу. Переведено оцінку ефекту від використання раніше отриманої часткової інформації по побудові сценаріїв збору потокової інформації на мережі, що описується графом, при подальшому уточненні інформації. Наведено формалізований опис ієрархічної структури системи. Представлено приклад структури взаємодії елементів онтології для задачі бюджетного аналізу.

Запропоновано використання комплексного підходу на основі пошуку найкоротших шляхів по графу та моделі онтології у вигляді графу, що реалізує можливість використання алгоритмів, що засновані на обході вершин графа по шарах ієрархії.

Запропоновано підхід до побудови алгоритму пошуку в ширину, що значно зменшує час пошуку шляхів для побудови сценаріїв збору потокової інформації на розгалуженій мережі. Описаний у статті підхід до побудови алгоритму оцінки якості моделювання сценаріїв збору потокової інформації на розгалуженій мережі апробований при розробці пілотного проекту системи фінансовий аналіз регіональних бюджетів. Розроблений алгоритм дозволяє розробити комплекс програмних засобів, що забезпечує достатньо повне і цілісне рішення задач уточнення та оптимізації сценаріїв, що здійснюють пошук та збір потокової інформації на розгалуженій мережі. Одним з перспективних напрямків застосування описаного підходу до оцінки якості моделювання сценаріїв, є використані його можливостей для побудови інформаційно-аналітичних систем. Це дасть можливість значно скоротити час та підвищити якість пошуку необхідної потокової інформації.

Ключові слова: *оцінка якості, моделювання, збір інформації, онтологія, аналіз графу, бюджетний аналіз.*

Отримано: 27.08.2019

Ю. В. Москаленко, аспірант

Національний технічний університет України

«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», м. Київ

СЕРЕДОВИЩЕ МОДЕЛЮВАННЯ НЕЙРОННИХ МЕРЕЖ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ КЛАСТЕРИЗАЦІЇ

Задача кластеризації розв'язується в багатьох прикладних галузях. Досягнути її швидкого та достатньо точного розв'язання можна за допомогою спеціальних нейронних мереж — карт самоорганізації Кохонена. Цей тип нейронних мереж постійно вдосконалюється як на рівні алгоритмів, так і на рівні програмного забезпечення. Тому доцільно створювати спеціальні програмні інструменти, що дозволяють в однакових умовах провести навчання та безпосередньо обчислювальні експерименти з розв'язання задачі кластеризації для коректного порівняльного аналізу отриманих результатів. Другим завданням такого середовища є визначення оптимального програмного інструментарію розв'язання прикладних задач технічної діагностики, наприклад, пошуку аномалій, класифікації сигналу з втратами.

У роботі обґрунтовано обрання існуючих програмних реалізацій карт самоорганізації SOM (self-organizing map) та відповідних їм багатосарових перцептронів MLP (multilayer perceptron) для розв'язання саме задачі класифікації. Всі обрані програмні реалізації є вільнодоступними та розповсюджуються з відкритою ліцензією.

Визначено параметри SOM та MLP, на які може впливати експериментатор. Обрано критерії порівняння реалізацій SOM.

Наведено архітектуру середовища моделювання і представлено функціонал його компонентів.

Для демонстрації застосування запропонованого середовища приведено розв'язання класичних тестових задач машинного навчання. Це дозволило провести коректне порівняння результатів обчислювальних експериментів, а також ефективності програмних реалізацій як за базовим, так і за оптимізованим алгоритмами.

Ключові слова: нейронні мережі, карти самоорганізації Кохонена, SOM, GSOM, ESOINN.

Вступ. Безперервний автоматичний аналіз сигналів необхідний для штатного функціонування технічних систем. Для його реалізації широко використовуються спеціальні засоби розпізнавання, насамперед, нейронні мережі. Для розв'язання в реальному часі задач класте-

ризації сигналу, наприклад, при розпізнаванні передаварійних режимів роботи обладнання, доцільно використовувати нейронні мережі Кохонена — SOM (Self-organizing map). Ці мережі дозволяють розпізнавати вхідний сигнал змінного розміру і проводити навчання на обмеженій вибірці. Розв'язання кожної практичної задачі потребує пошуків архітектури нейронної мережі SOM та налаштування її параметрів, тому створення фреймворка для порівняння якості кластеризації актуальне та має практичну значущість.

Основні вдосконалення SOM можна умовно поділити на оптимізацію за критеріями швидкості навчання та точності роботи. Оскільки в робочому режимі контролю обладнання використовується навчена мережа, подальші дослідження були спрямовані на підвищення долі коректної кластеризації SOM. Найвідомішими сучасними оптимізаціями за критерієм точності є алгоритми: GSOM (Growing Self-Organizing Maps) [1], SOINN (Self-Organizing Incremental Neural Network) [2], ESOINN (Enhanced self-organizing incremental neural network) [3].

Програмні реалізації мереж вищезазначених алгоритмів є вільнодоступними та розповсюджуються за відкритою ліцензією. Вони представлені на ресурсі Github [4]. Всі ці реалізації розраховані на кластеризацію неперервного сигналу за дискретними значеннями через сталі проміжки часу. Однак в технічній діагностиці є задачі, в яких неможливо отримати такий сигнал, наприклад, при розв'язанні задач пошуку аномалій або розпізнаванні сигналу з втратами. Для подібних задач необхідно розробити нові алгоритми, доповнені відносно базового алгоритму SOM, і, відповідно, провести їх валідацію. Приклад такої розробки наведено в статті [5] для задачі класифікації за характеристичним сигналом з випадковими втратами на основі карт самоорганізації.

Апробування нових розробок SOM потребує створення умов для їх навчання і проведення коректного порівняльного аналізу результатів тестування з існуючими програмними реалізаціями. Крім цього для розв'язання кожної прикладної задачі доцільно проводити моделювання за параметрами їх алгоритмів для обрання оптимального в кожному поточному випадку. Для розробки вдосконалених алгоритмів SOM та оптимізацій розв'язання прикладних задач на основі існуючих розробок необхідно створити середовище моделювання карт самоорганізації Кохонена з вбудованими апробованими реалізаціями алгоритмів SOM і можливістю підключення нових розробок.

Мета: розробити середовище моделювання нейронних мереж Кохонена для порівняльного аналізу існуючих програмних реалізацій SOM при розв'язанні задачі кластеризації та доведення коректності нових модифікованих алгоритмів.

Для досягнення поставленої мети вирішено такі **задачі:**

- 1) визначити критерії моделювання в середовищі;

- 2) розробити архітектуру середовища моделювання SOM, інтерфейси та інший допоміжний функціонал, зокрема бази даних та відповідну програмну реалізацію;
- 3) провести обчислювальні експерименти в запропонованому середовищі моделювання.

Постановка задачі моделювання для нейронної мережі SOM.

При створенні середовища необхідно врахувати, що SOM виконує тільки задачу кластеризації. Для кінцевого визначення належності сигналу до певного класу необхідно додатково розв'язувати задачу розділення класів. Найчастіше для цього застосовують додаткову нейронну мережу — багатошаровий перцептрон — MLP (multilayer perceptron).

Таким чином задача розпізнавання розв'язується поетапно. Спочатку SOM навчається за поданими характеристиками. Після цього двовірна матриця значень решітки W_{som} перетворюється в одноірний вектор-стовпчик \bar{X}_{mlp} , який далі подається на вхід MLP. Навчання MLP проводиться за прикладами, отриманими на заздалегідь навченій SOM. На рисунку 1 зображено етапи розв'язання задачі класифікації з визначенням вхідної і вихідної інформації.

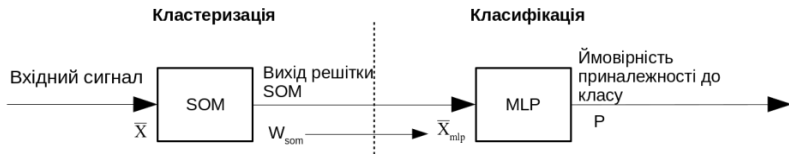


Рис. 1. Етапи навчання комплексу нейромереж

Середовище моделювання SOM може бути застосоване у двох випадках:

- 1) для обрання оптимальної реалізації карти самоорганізації при розв'язанні поточної прикладної задачі;
- 2) для верифікації та коректного порівняння нових розробок SOM з існуючими.

Тому при проектуванні середовища моделювання було проведено аналіз існуючих реалізацій SOM, як з традиційними так і з оптимізованими алгоритмами функціонування.

Середовище повинно мати можливість використовувати існуючі та зручно додавати нові розробки нейромереж Кохонена та інших типів.

Для вбудови нових мереж передбачено обгортки — wrappers, які взаємодіють з усіма мережами, в тому числі і з тими реалізаціями, які імплементовано на інших мовах програмування.

В середовище вбудовано такі різновиди SOM: GSOM [6], SOINN [7], ESOINN [8], SOMbase, SOMmod [5], Encog [9], NeuroPH [10].

Мережі Encog, NeuroPH є апробованими реалізаціями базового алгоритму SOM. Мережі GSOM, SOINN, ESOINN є одними з найефективніших алгоритмів оптимізованих карт самоорганізації. Мережі SOMbase та SOMmod є прикладами доданих мереж з відповідно базовим та оптимізованим алгоритмом. Ці мережі використано для розв'язання задачі розпізнавання вхідного сигналу з втратами.

В таблиці 1 наведено назви всіх SOM, які включені в систему моделювання, та відповідні їм MLP.

Для середовища було розроблено власний багатоваріантний перцептрон — MLPbase. Однак завдяки різним програмним реалізаціям SOM, цю мережу не можна використовувати на всіх картах самоорганізації. Тому для реалізацій Encog та NeuroPH використано MLP з їхніх бібліотек.

Таблиця 1

Відповідність нейромереж SOM та MLP в середовищі

№	Мережа SOM	Мережа MLP
1	GSOM	MLPbase
2	SOINN	MLPbase
3	ESOINN	MLPbase
4	Encog	Мережа із Encog
5	NeuroPH	Мережа із NeuroPH
6	SOMbase	MLPbase
7	SOMmod	MLPbase

Для навчання комплексу передбачено задання таких параметрів:

- 1) коефіцієнт швидкості навчання (learning rate) для SOM;
- 2) коефіцієнт швидкості навчання (learning rate) для MLP;
- 3) кількість епох до зменшення коефіцієнту швидкості навчання для SOM;
- 4) коефіцієнт зменшення швидкості навчання для SOM;
- 5) величина зменшення коефіцієнта навчання MLP при виході його на плато (Learning Rate Scheduler).

Перші два параметри впливають на швидкість навчання. Третій та четвертий — потрібні для більш точного навчання SOM, п'ятий — для коректного навчання MLP. Для визначення третього та четвертого параметру необхідно проводити експерименти з дослідження помилки на тестовій вибірці при повному циклі навчання.

Ефективність реалізації SOM для розв'язання поточної задачі визначається за такими критеріями:

- час навчання SOM (T_{SOM});
- частка коректної класифікації на комплексі SOM та MLP (D);
- час роботи на певному наборі даних (T).

Архітектура середовища. Основна проблема полягає в тому, що потрібно поєднувати існуючі реалізації нейронних мереж на різних мовах програмування. Тому в архітектурі використано модулі — обгортки (wrappers) для кожної завантаженої SOM.

На рисунку 2 відображено архітектуру середовища. На рисунку виокремлено курсивом всі компоненти, які реалізовано в даному проєкті. Реалізації нейронних мереж реалізованих на інших мовах програмування, виокремлено сірим кольором. Середовище реалізовано на мові C++ з використанням бібліотеки Qt для взаємодії з базами даних та JNI для взаємодії з мовою Java.

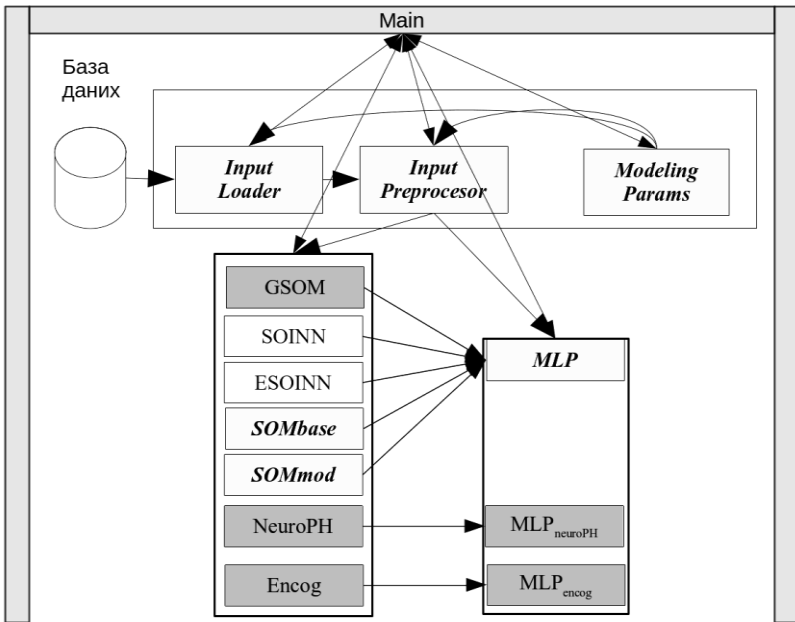


Рис. 2. Архітектура середовища моделювання карт самоорганізації

Середовище реалізовано у вигляді застосунку, який складається з таких основних модулів:

- база даних — містить тестові та навчальні вибірки;
- модуль InputLoader — завантажує навчальну вибірку з бази даних або файлової системи. Модуль після завантаження передає всю вибірку в модуль InputPreprocessor;
- модуль InputPreprocessor — обробляє навчальну вибірку. Модуль дозволяє проводити експерименти з втрат, спотворення сигналу, внесення аномалій в сигнал а також формує постановки задачі

класифікації та кластеризації в робочому режимі. При навчанні приклади подаються безпосередньо на обрану реалізацію SOM;

- модуль NNComplex — реалізує інтерфейси над різними реалізаціями нейромереж (SOM та MLP). Для мереж GSOM, NeuroPH, Encog зроблено обгортки для взаємодії додатку з реалізаціями цих мов;
- модуль ModelingParams — містить параметри навчання, такі як швидкість навчання MLP та SOM та інші;
- модуль main — реалізує основний функціонал, який безпосередньо взаємодіє з усіма модулями, проводить навчання та збір статистики.

Кожна з реалізацій SOM має відповідну їй реалізацію MLP, яка використовується автоматично.

Обчислювальні експерименти. Апробацію розробленого середовища проведено на таких задачах:

- класифікація ірисів Фішера [11];
- розпізнавання рукописних цифр за базою даних MNIST [12].

Ці задачі є класичними тестами для нейронних мереж.

Іриси Фішера — це задача класифікації ірисів трьох видів по чотирьом характеристикам:

- довжина зовнішньої частки оцвітини;
- ширина зовнішньої частки оцвітини;
- довжина внутрішньої частки оцвітини;
- ширина внутрішньої частки оцвітини.

Набір даних з класифікації ірисів містить 150 прикладів.

MNIST — база даних рукописних цифр розмірністю 28x28 пікселів. Цей набір даних містить 70000 прикладів.

В даних обчислювальних експериментах ставилася задача порівняння ефективності реалізації базових та оптимізованих SOM.

Для розв'язання було послідовно навчено всі нейронні мережі за такою послідовністю:

1. Завантаження вибірки з файлу або бази даних.

Завантажується з розподіленням на тренувальну та валідаційну вибірки.

2. Навчання SOM.

SOM навчається з початковим кроком навчання. Через певну кількість епох проводиться зменшення кроку навчання та повторення цього циклу до кінця навчання SOM.

3. Навчання MLP.

Після завершення навчання SOM, відбувається навчання MOR. Після кожної епохи відбувається перевірка точності роботи MLP. У випадку, якщо точність на валідаційній вибірці не зростає 5 епох поспіль, зменшується коефіцієнт швидкості навчання та процес продо-

вжується з новими параметрами. Якщо точність на валідаційній вибірці не зростає 12 епох — навчання MLP завершується.

В таблиці 2 зведено параметри навчального комплексу, які застосовувалися у задачах.

Таблиця 2

Параметри навчання комплексу

Параметри навчання комплексу	Набори даних	
	Іриси Фішера	MNIST
Коефіцієнт швидкості навчання SOM	0.2	0.2
Коефіцієнт швидкості навчання MLP	0.2	0.2
Кількість епох до зменшення коефіцієнту швидкості навчання для SOM2	50	30
Коефіцієнт зменшення швидкості навчання для SOM	5	5
Коефіцієнт зменшення коефіцієнта навчання MLP при виході його на плато	5	5

Для оцінювання результатів експериментів було обрано такі критерії:

- частка коректної класифікації;
- час навчання;
- час обробки набору даних.

Останні два критерії визначають ефективність розв'язання задачі. Результати експериментів зведено до таблиці 3.

Таблиця 3

Результати розв'язання задач

Реалізація SOM	GSOM	SOINN	ESOINN	SOMbase	SOMmode	ENCOG	NeuroPH
Критерій оцінювання							
Класифікація ірисів Фішера							
Час навчання SOM (T_{SOM}), сек.	3,2	3,1	3,1	1,2	1,2	1,3	1,3
Точність класифікації (D), %	92	91	92	86	86	86	86
Час роботи (T), сек.	5,5	6,1	5,4	3,1	3,1	3,3	3,3
MNIST							
Час навчання SOM (T_{SOM}), сек.	211	197	195	173	169	175	178
Точність класифікації (D), %	95.4	95.6	96.1	90.1	90.1	90.2	90.1
Час роботи (T), сек.	270	220	210	140	140	152	154

Оскільки іриси Фішера мають обмежений набір даних, представлення всіх прикладів цього набору здійснювалось 10000 разів.

Результати експериментів за класичними тестовими задачами підтверджують те, що модифіковані мережі, такі як і, ESOINN, GSOM є ефективнішими за реалізацію базового алгоритму функціонування.

Висновки:

1. Запропоновано концепцію порівняльного аналізу алгоритмів і відповідних реалізацій карт самоорганізації Кохонена для доведення коректності нових модифікованих алгоритмів SOM.
2. Представлено програмну реалізацію середовища моделювання нейронних мереж для розв'язання задачі кластеризації.
3. Наведено приклад обчислювальних експериментів з доведенням ефективності відомих реалізацій за базовим та модифікованими алгоритмами.

Список використаних джерел:

1. Cao M. Growing self-organizing map approach for semantic acquisition modeling / M. Cao, A. Li, Q. Fang, B. J. Kroger // 2013 IEEE 4th International Conference on Cognitive Infocommunications (CogInfoCom). — 2013.
2. Furoo S. An incremental network for on-line unsupervised classification and topology learning / S. Furoo, O. Hasegawa // Neural Networks. — 2016. — Vol. 19. — P. 90–106.
3. Furoo S. An enhanced self-organizing incremental neural network for online unsupervised learning / S. Furoo, T. Ogura // Neural Networks. — 2007. — Vol. 20. — P. 893–903.
4. Github. — Access mode: <https://github.com>.
5. Shapovalova S. Increasing the share of correct clustering of characteristic signal with random losses in self-organizing maps / S. Shapovalova, Yu. Moskalenko // Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. — 2019. — № 2/4 (98). — P. 13–21.
6. Growing Self-Organizing Map. — Access mode: <https://github.com/philippludwig/pygsom>.
7. Self-Organizing Incremental Neural Network. — Access mode: <https://github.com/fukatani/soinn>.
8. An enhanced self-organizing incremental neural network for online unsupervised learning. URL: <https://github.com/BeIBES/ESOINN>.
9. Encog Machine Learning Framework. — Access mode: <https://github.com/encog/encog-java-core>.
10. Neuroph — Java Neural Network Platform Neuroph. — Access mode: <https://github.com/neuroph/neuroph>.
11. Iris Data Set. — Access mode: <http://archive.ics.uci.edu/ml/datasets/Iris>
12. Handwritten digit database. — Access mode: <http://cis.jhu.edu/~sachin/-digit/digit.html>.

AN ARTIFICIAL NEURAL NETWORKS MODELING ENVIRONMENT FOR SOLVING A CLUSTERING TASK

The task of clustering is solving in various fields of application. In order to achieve a fast and sufficiently accurate clustering solution, it is possible to use special neural networks like Kohonen's self-organization card. This type of neural network is always improved both at the algorithm level and at the software level. So, it is necessary to create special software tools that provide the opportunity of training in the same conditions and quickly computational experiments to solve the clustering problem. And also to carry out a comparative analysis of the received results.

The second task of such software is to create examples of tasks in technical diagnostics, such as: search of abnormality, classification of signal with losses, and others.

This paper include such existing software implementations of SOM (self-organization map) and their respective MLP (multilayer perceptron) to solve precisely the classification problem.

All selected software implementations are freely available and spread under free license.

SOM and MLP parameters have been defined that may be influenced by the researcher.

Criteria for comparing SOM implementations have been selected.

This paper presents the architecture of the modeling environment and functionality of its components.

For the demonstration is taken the solution of classical problems of machine learning. It helps properly compare the results of computational experiments and to implement the effectiveness of software implementations on both basic and optimized algorithms.

Key words: *neural networks, self-organizing map, SOM, GSOM, ESOINN.*

Отримано: 14.08.2019

УДК 539.3

DOI: 10.32626/2308-5916.2019-20.88-98

Р. С. Мусій, д-р. фіз.-мат. наук, професор,
А. Й. Наконечний, д-р. техн. наук, професор
Б. Й. Бандирський, канд. фіз.-мат. наук,
В. К. Шиндер, канд. фіз.-мат. наук,
О. Г. Орищин, канд. фіз.-мат. наук

Національний університет «Львівська політехніка», м. Львів

ВИЗНАЧЕННЯ ДЖОУЛЕВОГО ТЕПЛА ТА ПОНДЕРОМОТОРНОЇ СИЛИ У ПЛАСТИНЧАСТОМУ ЕЛЕКТРОПРОВІДНОМУ ЕЛЕМЕНТІ ЗА ДІЇ ЗОВНІШНЬОГО НЕУСТАЛЕНОГО ЕЛЕКТРОМАГНІТНОГО ПОЛЯ

Сформульовано одновимірну початково-крайову задачу електродинаміки для електропровідного неферромагнітного шару з плоскопаралельними межами за дії зовнішнього неусталеного електромагнітного поля. Електромагнітне поле задане значеннями однорідної дотичної до основ шару компоненти вектора напруженості магнітного поля на його основах. Дія неусталеного електромагнітного поля на розглядуваний шар проявляється двома фізичними чинниками — джоулевим теплом і пондеромоторними силами, які відповідно до зовнішньої електромагнітної дії мають також неусталений характер зміни в часі. Отримано загальний розв'язок сформульованої початково-крайової задачі за довільної однорідної нестационарної електромагнітної дії. Для побудови розв'язку використано кубічну апроксимацію ключової функції — дотичної до основ шару компоненти вектора напруженості магнітного поля за товщинною координатою. Коефіцієнти апроксимаційного полінома подано через інтегральні характеристики ключової функції та задані її значення на основах шару як відповідні функції часу. У результаті вихідна початково-крайова задача електродинаміки на ключову функцію зведена до задачі Коші на інтегральні (залежні лише від часу) характеристики цієї функції. Загальні розв'язки задачі Коші знайдено з використанням інтегрального перетворення Лапласа і отримано у вигляді згортки функцій, що описують задані граничні значення ключової функції на основах шару та однорідні розв'язки задачі Коші. На основі отриманих загальних розв'язків записано розв'язок вихідної задачі електродинаміки за дії неусталеного електромагнітного поля та вирази джоулевого тепла і пондеромоторної сили. Результати числового аналізу виразів розглядуваних величин залежно від параметрів неусталеного електромагнітного поля радіочастотного діапазону наведено у вигляді відповідних графіків. Встановлено, що за тривалостей перехідного режиму зовнішньої неусталеної електромагнітної дії менших за чверть періоду несучих електромагнітних коливань максимальні значення джоулевого

тепла і пондеромоторної сили можуть бути суттєво більшими за їх значення в усталеному режимі електромагнітного поля.

Ключові слова: електропровідний шар, неусталене електромагнітне поле, джоулеве тепло, пондеромоторні сили, кубічна апроксимація, інтегральні характеристики.

Вступ. Електропровідні пластини постійної товщини є конструктивними елементами багатьох приладів і пристроїв, в процесі функціонування яких вони зазнають впливу зовнішніх нестационарних електромагнітних полів (ЕМП) [1, с. 57–83]. Ці ЕМП часто мають неусталений характер зміни в часі. У літературі відомі методи визначення індукованого у пластині зовнішньою електромагнітною дією усталеного ЕМП та зумовлених ним джоулевих тепловиділень і пондеромоторних сил [2, с. 36–42]. Однак, недостатньо вивчено вплив зовнішнього неусталеного ЕМП на закономірності зміни джоулевих тепловиділень і пондеромоторних сил, які є важливими для розрахунку температурно-силових режимів функціонування електропровідних пластинчастих елементів.

У роботі з використанням апроксимації кубічним поліномом розподілу за товщинною координатою дотичної до основ електропровідного шару з плоскопаралельними межами компоненти вектора напруженості магнітного поля знайдено загальний розв'язок початково-крайової задачі електродинаміки, сформульованої стосовно цієї компоненти, за однорідної нестационарної електромагнітної дії. На основі цього розв'язку записано вирази даної компоненти вектора напруженості магнітного поля та джоулевого тепла і пондеромоторних сил за дії зовнішнього неусталеного ЕМП. Чисельно проаналізовано закономірності зміни джоулевого тепла і пондеромоторних сил залежно від параметрів зовнішнього неусталеного ЕМП.

Математична постановка задачі. Розглядаємо описаний вище електропровідний шар за однорідної нестационарної електромагнітної дії (рис. 1).

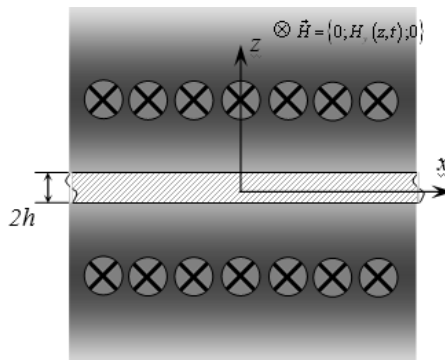


Рис. 1.

У цьому випадку ЕМП задане лише залежними від часу t значеннями відмінної від нуля дотичної компоненти $H_y(z, t)$ вектора напруженості магнітного пол. я $\vec{H}(z, t) = \{0; H_y(z, t); 0\}$ на основах шару $z = \pm h$.

За дії такого ЕМП ключова функція H_y залежить лише від товщинної координати z і часу t та описується рівнянням [3, с. 57–59]

$$\frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2} - \sigma \mu \frac{\partial H_y}{\partial t} = 0, \quad (1)$$

крайовими

$$H_y(\pm h, t) = H_y^\pm(t) \quad (2)$$

та нульовою початковою

$$H_y(z, 0) = 0 \quad (3)$$

умовами.

Тут $H_y^\pm(t)$ — задані функції часу, σ — коефіцієнт електропровідності, μ — магнітна проникність матеріалу шару.

За знайденою функцією H_y питомі густини джоулевих тепловиділень Q і пондеромоторної сили \vec{F} записуються виразами:

$$Q = \frac{1}{\sigma} \left(\frac{\partial H_z}{\partial z} \right)^2, \quad \vec{F} = \left\{ 0; 0; F_z = -\mu \frac{\partial H_z}{\partial z} H_z \right\}. \quad (4)$$

Методика побудови розв'язку. Для побудови розв'язку початково-крайової задачі (1)–(3) апроксимуємо розподіл ключової функції H_y за товщинною координатою z кубічним поліномом, тобто подаємо ці функції у вигляді [3, с. 109]

$$H_y(z, t) = \sum_{i=0}^3 a_i(t) z^i. \quad (5)$$

Коефіцієнти $a_i(t)$ апроксимаційного полінома (5) виражаються через інтегральні за товщинною координатою z характеристики шуканої функції

$$H_{ys}(t) = \int_{-h}^h H_y(z, t) z^{s-1} dz, \quad s = 1, 2 \quad (6)$$

і задані на основах шару $z = \pm h$ граничні значення $H_y^\pm(t)$ функції $H_y(z, t)$, тобто подаються у вигляді

$$a_i(t) = a_{i1}H_{y1}(t) + a_{i2}H_{y2}(t) + a_{i3}H_y^+(t) + a_{i4}H_y^-(t). \quad (7)$$

Для отримання системи рівнянь на інтегральні характеристики $H_{ys}(t)$ шуканої ключової функції $H_y(z, t)$ вихідне рівняння (1) на функцію $H_y(z, t)$ інтегруємо відповідно співвідношенню (6) і використовуємо при перетвореннях співвідношення (5) і (7). У результаті для компоненти $H_y(z, t)$ вектора \vec{H} отримуємо подання

$$H_y(z, t) = \frac{3}{4}H_{y1}(t) \left(1 - \left(\frac{z}{h} \right)^2 \right) + \frac{15}{4}H_{y2}(t) \left(\frac{z}{h} - \left(\frac{z}{h} \right)^3 \right) - \frac{1}{4} \left[H_y^+(t) + H_y^-(t) \right] \left(1 - 3 \left(\frac{z}{h} \right)^2 \right) + \frac{1}{4} \left[H_y^+(t) - H_y^-(t) \right] \left(3 \frac{z}{h} - 5 \left(\frac{z}{h} \right)^3 \right), \quad (8)$$

де інтегральні характеристики $H_{ys}(t)$ визначаються зі системи рівнянь

$$\begin{aligned} \frac{dH_{y1}}{dt} + \frac{3}{\sigma\mu h^2} H_{y1} &= \frac{3}{\sigma\mu h^2} (H_y^+ + H_y^-), \\ \frac{dH_{y2}}{dt} + \frac{15}{\sigma\mu h^2} H_{y2} &= \frac{5}{\sigma\mu h^2} (H_y^+ - H_y^-). \end{aligned} \quad (9)$$

Систему (9) розв'язуємо за врахування нульової початкової умови (3) на функцію $H_y(z, t)$, тобто за нульових початкових умов

$$H_{ys}(z, 0) = 0. \quad (10)$$

Для побудови розв'язків сформульованої вище задачі Коші (9)–(10) на інтегральні характеристики компоненти $H_y(z, t)$ вектора \vec{H} застосовуємо інтегральне перетворення Лапласа за часовою змінною t .

Використовуючи теорему розкладу і теорему про згортку функцій, записуємо вирази шуканих інтегральних характеристик $H_{ys}(t)$ ($s = 1, 2$) дотичної компоненти $H_y(z, t)$ вектора \vec{H}

$$\begin{aligned} H_{y1}(t) &= 3 \int_0^t e^{\frac{3}{\sigma\mu h^2}(t-\tau)} \left[H_y^+(\tau) + H_y^-(\tau) \right] d\tau, \\ H_{y2}(t) &= 5 \int_0^t e^{\frac{15}{\sigma\mu h^2}(t-\tau)} \left[H_y^+(\tau) - H_y^-(\tau) \right] d\tau \end{aligned} \quad (11)$$

Розв'язок задачі за дії неусталеного ЕМП. Зовнішнє неусталене ЕМП перехідного типу задане значеннями однорідної дотичної складової $H_y(z, t)$ вектора \vec{H} поля на поверхнях $z = \pm 1$ виразом

$$H_y^\pm(\tau) = H_y(\pm 1, \tau) \equiv H_0(1 - e^{-\beta\tau})e^{ib\tau}. \quad (12)$$

Тут H_0 — задана величина амплітуди напруженості магнітного поля, β — параметр, що характеризує час виходу неусталених електромагнітних коливань на усталений режим, $b = 1/(2\delta_0^2)$, $\delta_0 = (2\omega\sigma\mu h^2)^{-1/2}$ — параметр, що характеризує відносну до півтовщини шару h глибину проникання індукційних струмів, ω — частота несучих електромагнітних коливань, $\tau = t/(\sigma\mu h^2)$ — безрозмірний характерний для електромагнітних процесів час, $z = z/h$.

Підставляючи вираз (12) у формули (11) та (8), а також (4), запишемо вирази функції $H_y(z, \tau)$ та зумовлених нею джоулевих тепловиділень і пондеромоторних сил за розглядуваної неусталеної електромагнітної дії. Отримуємо:

$$H_y(z, \tau) = H_0 \left\{ \frac{1}{2} e^{ib\tau} \left[\frac{6 - ib + 3ibz^2}{ib + 3} - e^{-\beta\tau} \frac{6 - ib + \beta + 3(ib - \beta)z^2}{ib + 3 - \beta} \right] + \frac{9}{2} \beta \frac{1 - z^2}{(ib + 3)^2 - \beta(ib + 3)} e^{-3\tau} \right\}; \quad (13)$$

Для доданків питомої потужності джоулевого тепла $Q = \sum_{j=1}^4 Q^{(j)}$

запишемо вирази:

$$H_0^{-2} Q^{(1)}(z) = \frac{1}{4\sigma_0 h^2} \left[(q_5^2 + q_6^2) z^2 - 2(q_5 q_7 + q_6 q_8) z^4 + (q_7^2 + q_8^2) z^6 \right];$$

$$H_0^{-2} Q^{(2)}(z, \tau) = \frac{1}{4\sigma_0 h^2} \left\{ [G_1(z) + iG_2(z)] e^{i2b\tau} + [G_1(z) - iG_2(z)] e^{-i2b\tau} \right\};$$

$$H_0^{-2} Q^{(3)}(z, \tau) = \frac{q_9}{\sigma_0 h^2} e^{-\frac{5}{2}\tau} \left\{ [G_3(z, \tau) + iG_4(z, \tau)] e^{ib\tau} + \right.$$

$$\left. + \left[[G_3(z, \tau) - iG_4(z, \tau)] \right] e^{-ib\tau} \right\} +$$

$$+ \frac{1}{4\sigma_0 h^2} \left\{ [G_5(z, \tau) + iG_6(z, \tau)] e^{i2b\tau} + [G_5(z, \tau) - iG_6(z, \tau)] e^{-i2b\tau} \right\};$$

$$H_0^{-2} Q^{(4)}(z, \tau) = \frac{1}{\sigma_0 h^2} q_9^2 e^{-5\tau} (9z^2 - 6z^4 + z^6) + \frac{1}{4\sigma_0 h^2} G_7(z, \tau). \quad (14)$$

Для доданків питомої густини $F_z = \sum_{j=1}^4 F^{(j)}$ відмінної від нуля складової $F_z(z, \tau) \equiv F(z, \tau)$ пондеромоторної сили будемо мати вирази:

$$\begin{aligned}
 H_0^{-2} F^{(1)}(z, \tau) &= \frac{1}{2} \frac{\mu}{h} (z q_{24} + z^3 q_{25} - z^5 q_{26}); \\
 H_0^{-2} F^{(2)}(z, \tau) &= \frac{1}{4} \frac{\mu}{h} \left\{ [G_8(z) + i G_9(z)] e^{i2b\tau} + [G_8(z) - i G_9(z)] e^{i2b\tau} \right\}; \\
 H_0^{-2} F^{(3)}(z, \tau) &= \frac{\mu}{h} \left\langle \frac{1}{2} [G_{10}(z, \tau) (e^{ib\tau} + e^{-ib\tau}) + G_{11}(z, \tau) (e^{ib\tau} + e^{-ib\tau})] + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{4} [G_{12}(z, \tau) + i G_{13}(z, \tau)] e^{i2b\tau} + [G_{12}(z, \tau) - i G_{13}(z, \tau)] e^{-i2b\tau} \right\rangle; \\
 H_0^{-2} F^{(4)}(z, \tau) &= \frac{\mu}{h} \left\{ q_9 q_{17} e^{-\frac{11}{2}\tau} (z^5 - 4z^3 + 3z) + G_{14}(z, \tau) \right\}. \quad (15)
 \end{aligned}$$

Тут:

$$\begin{aligned}
 G_1(z) &= (q_5^2 - q_6^2) z^2 - 2(q_5 q_7 - q_6 q_8) z^4 + (q_7^2 - q_8^2) z^6; \\
 G_2(z) &= q_5 q_6 z^2 - (q_6 q_7 + q_5 q_8) z^4 + q_7 q_8 z^6; \\
 G_3(z, \tau) &= e^{-\beta\tau} [3q_1 z^2 - (q_1 + 3q_3) z^4 + q_2 z^6] + \\
 &\quad + [3q_5 z^2 - (3q_7 + q_5) z^4 + q_7 z^6]; \\
 G_4(z, \tau) &= e^{-\beta\tau} [3q_2 z^2 - (3q_4 + q_2) z^4 + q_4 z^6] + \\
 &\quad + [3q_6 z^2 - (3q_8 + q_6) z^4 + q_8 z^6]; \\
 G_5(z, \tau) &= e^{-\beta\tau} [(q_1^2 - q_2^2) z^2 + 2(q_2 q_4 - q_1 q_3) z^4 + (q_3^2 - q_4^2) z^6] + \\
 &\quad + 2e^{-\beta\tau} [(q_1 q_5 - q_2 q_6) z^2 - (q_1 q_8 + q_3 q_5 - q_2 q_8 - q_4 q_6) z^4 + (q_3 q_7 - q_4 q_8) z^6]; \\
 G_6(z, \tau) &= 2 \left\{ e^{-2\beta\tau} [q_1 q_2 z^2 - (q_1 q_4 + q_2 q_3) z^4 + q_3 q_4 z^6] + 2e^{-\beta\tau} \times \right. \\
 &\quad \left. \times [(q_1 q_6 + q_2 q_5) z^2 - (q_1 q_8 + q_3 q_6 + q_6 q_5 + q_2 q_7) z^4 + (q_3 q_8 + q_4 q_7) z^6] \right\}; \\
 G_7(z, \tau) &= e^{-2\beta\tau} [(q_1^2 + q_2^2) z^2 - 2(q_1 q_3 + q_2 q_4) z^4 + (q_3^2 + q_4^2) z^6] + \\
 &\quad + 2e^{-\beta\tau} [(q_1 q_5 + q_2 q_6) z^2 - (q_1 q_7 + q_3 q_5 + q_2 q_8 + q_4 q_6) z^4 + (q_3 q_7 + q_4 q_8) z^6]; \\
 G_8(z) &= q_{33} + z^3 q_{34} + z^5 q_{35}; \quad G_9(x_3) = z q_{42} + z^3 q_{43} - z^5 q_{44};
 \end{aligned}$$

$$G_{10}(z, \tau) = q_9 \left(3z - z^3 \right) \left[e^{-5/2\tau} \left(q_{10} + z^2 q_{11} \right) - e^{-(\beta+5/2)\tau} \left(q_{14} + z^2 q_{15} \right) \right] + \\ + q_{17} \left(1 - z^2 \right) \left[e^{-(\beta+3)\tau} \left(q_2 z - q_3 z^3 \right) + e^{-3\tau} \left(q_5 z - q_7 z^3 \right) \right];$$

$$G_{11}(z, \tau) = q_{17} \left(1 - z^2 \right) \left[e^{-(\beta+3)\tau} \left(q_2 z - z^3 q_4 \right) + e^{-3\tau} \left(q_6 z - z^3 q_8 \right) \right] - \\ - q_9 \left(3z - z^3 \right) \left[e^{-(\beta+5/2)\tau} q_{16} \left(1 + z^2 \right) + e^{-5/2\tau} \left(q_{12} - q_{13} z^2 \right) \right];$$

$$G_{12}(z, \tau) = e^{-2\beta\tau} \left(z q_{27} + z^3 q_{28} + z^5 q_{29} \right) + e^{-\beta\tau} \left(z q_{30} + z^3 q_{31} + z^5 q_{32} \right);$$

$$G_{13}(z, \tau) = e^{-\beta\tau} \left(z q_{39} + z^3 q_{40} + z^5 q_{41} \right) - e^{-2\beta\tau} \left(z q_{36} + z^3 q_{37} - z^5 q_{38} \right);$$

$$G_{14}(z, \tau) = \frac{1}{2} \left[e^{-2\beta\tau} \left(z^5 q_{20} - z^3 q_{19} - z q_{18} \right) + e^{-\beta\tau} \left(z q_{21} + z^3 q_{22} + z^5 q_{23} \right) \right];$$

$$q_1 = 3 \left[\frac{(5/2 - \beta)\beta - b^2}{q_0} - \frac{1}{12} \beta \right]; \quad q_2 = 3 \left(\frac{b}{12} - \frac{5/2b}{q_0} \right);$$

$$q_3 = \frac{(5/2 - \beta)\beta - b^2}{q_0} - \frac{5}{12} \beta; \quad q_4 = \frac{5}{12} b - \frac{5/2b}{q_0}; \quad q_5 = \frac{25}{8} \frac{b^2}{q_{0*}}$$

$$q_6 = \frac{125}{16} \frac{b}{q_{0*}} - \frac{b}{4}; \quad q_7 = \frac{25}{24} \frac{b^2}{q_{0*}}; \quad q_8 = \frac{125}{48} \frac{b}{q_{0*}} - \frac{5}{12} b;$$

$$q_9 = \frac{25}{24} \left[\frac{(5/2 - \beta)\beta - b^2}{q_0} - \frac{b^2}{q_{0*}} \right]; \quad q_0 = \left(\frac{5}{2} - \beta \right)^2 + b^2;$$

$$q_{0*} = \frac{25}{4} + b^2; \quad q_{10} = \frac{1}{2} \frac{18 - b^2}{9 + b^2};$$

$$q_{11} = \frac{3}{2} \frac{b^2}{9 + b^2}; \quad q_{12} = \frac{9}{2} \frac{b^2}{9 + b^2}; \quad q_{13} = \frac{1}{6} q_{11}; \quad q_{14} = \frac{1}{2} \frac{(3 - \beta)(6 + \beta) - b^2}{(3 - \beta)^2 + b^2};$$

$$q_{15} = \frac{1}{2} \frac{3b^2 - 3\beta(3 - \beta)}{(3 - \beta)^2 + b^2}; \quad q_{16} = -\frac{9}{2} \frac{b}{(3 - \beta)^2 + b^2};$$

$$q_{17} = \frac{9}{2} \beta \frac{9 - b^2 - 3\beta}{(9 - b^2 - 3\beta)^2 + b^2 (6 - \beta)^2};$$

$$q_{18} = q_1 q_{14} + q_2 q_{16}; \quad q_{19} = q_1 q_{15} - q_3 q_{14} + q_2 q_{16} - q_4 q_{16};$$

$$q_{20} = q_3 q_{15} + q_4 q_{16};$$

$$q_{21} = q_1 q_{10} - q_5 q_{14} - q_6 q_{16} - q_2 q_{12};$$

$$\begin{aligned}
q_{22} &= q_1q_{11} - q_3q_{10} + q_7q_{14} - q_5q_{15} - q_6q_{16} + q_8q_{16} + q_2q_{13} + q_4q_{12}; \\
q_{23} &= q_7q_{15} - q_3q_{11} + q_8q_{16} - q_4q_{13}; \quad q_{24} = q_5q_{10} - q_6q_{12}; \\
q_{25} &= q_5q_{11} - q_7q_{10} + q_6q_{13} + q_8q_{12}; \\
q_{26} &= q_8q_{13}; \quad q_{27} = q_2q_{16} - q_1q_{14}; \quad q_{28} = q_2q_{16} - q_4q_{16} - q_1q_{15} + q_3q_{14}; \\
q_{29} &= q_3q_{15} - q_4q_{16}; \\
q_{30} &= q_1q_{10} - q_5q_{14} + q_6q_{16} + q_2q_{12}; \\
q_{31} &= q_1q_{11} - q_3q_{10} - q_5q_{15} + q_7q_{14} + q_6q_{16} - q_8q_{16} - q_2q_{13} - q_4q_{12}; \\
q_{32} &= q_7q_{15} - q_3q_{11} - q_8q_{16} + q_4q_{13}; \quad q_{33} = q_5q_{10} + q_6q_{12}; \\
q_{34} &= q_5q_{11} - q_7q_{10} - q_6q_{13} - q_{12}q_{18}; \\
q_{35} &= q_8q_{13} - q_7q_{11}; \quad q_{36} = q_2q_{14} + q_1q_{16}; \\
q_{37} &= q_2q_{15} - q_4q_{14} + q_1q_{16} - q_3q_{16}; \\
q_{38} &= q_4q_{15} + q_3q_{16}; \quad q_{39} = q_2q_{10} - q_6q_{14} - q_5q_{16} - q_1q_{12}; \\
q_{40} &= q_2q_{11} - q_4q_{10} - q_6q_{15} + q_8q_{14} - q_5q_{16} + q_7q_{16} + q_1q_{13} + q_3q_{12}; \\
q_{41} &= q_8q_{15} - q_4q_{11} - q_{13}q_3 + q_7q_{15}; \\
q_{42} &= q_6q_{10} - q_5q_{12}; \quad q_{43} = q_6q_{11} - q_8q_{10} + q_5q_{13} + q_7q_{12}.
\end{aligned}$$

Зауважимо, що у виразах (14)–(15) складові $Q^{(1)}$, $F^{(1)}$ відповідають усередненим за період електромагнітних коливань $f = \frac{2\pi}{\omega}$ значенням Q і F ; складові $Q^{(2)}$, $F^{(2)}$ відповідають усталеним коливним в часі з періодом $2f$ значенням Q і F ; складові $Q^{(3)}$, $F^{(3)}$ відповідають затухаючим коливним в часі з періодом f значенням Q і F ; складові $Q^{(4)}$, $F^{(4)}$ відповідають аперіодично змінним у часі значенням Q і F .

Числовий аналіз. Результати числових досліджень виконано для складової E_x напруженості електричного поля $\vec{E}(z, t) = \{E_x(z, t); 0; 0\}$ та неперіодичних складових джоулевого тепла $Q = Q^{(1)} + Q^{(4)}$ і пондеромоторної сили $F = F^{(1)} + F^{(4)}$ у розглядуваному шарі товщиною 3 мм, виготовленому зі нержавної сталі Х18Н9Т. На рис. 2 кривими 1 показаний розподіл миттєвих значень напруженості електричного поля на поверхні шару при безрозмірному часі $\tau_0 = 18$ ($\beta = 0.26$). Суцільні лінії

відповідають виходу на усталений режим за $\frac{1}{50}$ періоду $f = \frac{2\pi}{\omega}$ ($\tau_0 = \frac{1}{50}f$; $\delta_0^2 = 8.3$), штрихові — за $\frac{1}{10}$ періоду ($\tau_0 = \frac{1}{10}f$;

$\delta_0^2 = 20.8$) і штрих-пунктирні — за $\frac{1}{4}$ періоду ($\tau_0 = \frac{1}{4} f$; $\delta_0^2 = 104.2$).

Кривими 2 для тих же величин δ_0 приведені амплітудні значення. Отримано, що при зменшенні часу виходу порівняно з періодом суттєво збільшується різниця між максимальним значенням напруженості на перехідному режимі порівняно зі значенням в усталеному режимі. Так,

для $\tau_0 = \frac{1}{50} f$ відношення максимального значення напруженості на перехідному режимі E_{\max} до значення в усталеному режимі $E_{\text{уст}}$ дорівнює

$n = \frac{E_{\max}}{E_{\text{уст}}} \approx 42$; для $\tau_0 = \frac{1}{10} f$ — $n = 8$, а для $\tau_0 = \frac{1}{4} f$ — $n = 3$.

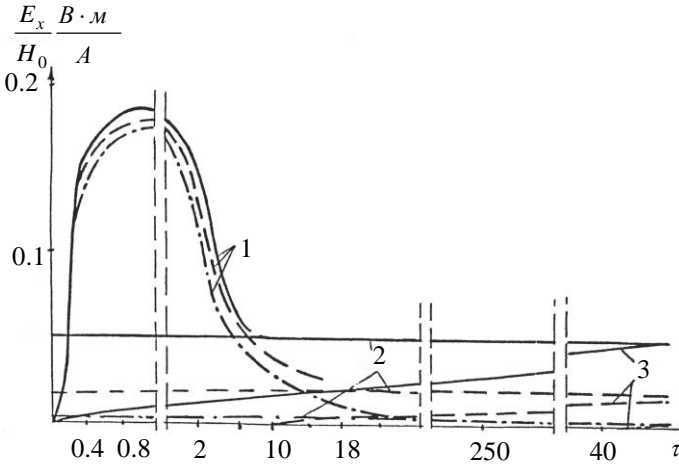


Рис. 2.

Зауважимо, що у джоулевих тепловиділеннях аналогічні відношення $n_* = \frac{Q_{\max}}{Q_{\text{уст}}}$ будуть складати $n_* = n^2$.

Кривими 3 на рисунку показані залежності амплітудних значень напруженості електричного поля від часу τ при тих же значеннях параметра δ_0 і часах τ_0 — виходу на усталений режим рівних $\tau_0 \approx 5 \div 7 f$. Отримано, що за таких співвідношень між часом τ_0 і періодом f вже настає квазіусталений режим.

Аналогічні залежності для неперіодичних складових пондеромоторної сили $F = F^{(1)} + F^{(4)}$ наведені на рис. 3.

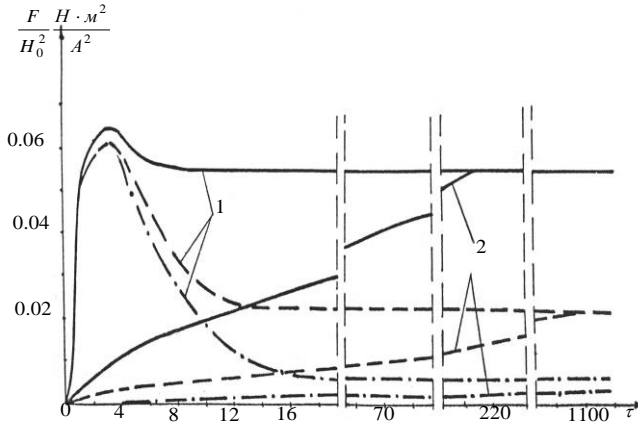


Рис. 3.

Висновки. Запропонована методика визначення джоулевого тепла і пондеромоторної сили у пластинчастому електропровідному елементі за дії зовнішнього неусталеного ЕМП дає змогу оцінити вплив неусталеного характеру ЕМП на максимальні значення розглядуваних величин. Дослідження, проведені із застосуванням даної методики показали, що тривалість перехідного режиму порівняно з періодом несучих електромагнітних коливань суттєво впливає на тепловий і силовий режими функціонування електропровідного пластинчастого елемента. Це має важливе значення при прогнозуванні надійності роботи і часу експлуатації багатьох пристроїв, що містять такі елементи.

Список використаних джерел:

1. Батыгин Ю. В. Импульсные магнитные поля для прогрессивных технологий / Ю. В. Батыгин, В. И. Лавинский, Л. Т. Хименко. — Харьков : МОСТ., 2003. — 288 с.
2. Подстригач Я. С. Термоупругость электропроводных тел / Я. С. Подстригач, Я. И. Бурак, А. Р. Гачкевич, Л. В. Чернявская. — К. : Наук. думка, 1977. — 248 с.
3. Мусій Р. С. Динамічні задачі термомеханіки електропровідних тіл канонічної форми : монографія / Р. С. Мусій. — Львів : Вид-во «Растр-7», 2010. — 216 с.

DETERMINATION OF JOULE HEAT AND PONDEROMOTOR FORCE IN A PLATE ELECTROCONDUCTIVE ELEMENT UNDER THE ACTION OF AN EXTERNAL NONSTATIONARE ELECTROMAGNETIC FIELD

A one-dimensional initial-boundary value problem of electrodynamics for an electroconductive non-ferromagnetic layer with plane-parallel boundaries is formulated under the action of an external nonstationare elec-

tromagnetic field. The electromagnetic field is given by the values of the homogeneous tangent to the bases of the layer components of the magnetic field intensity vector at its bases. The effect of the nonstationare electromagnetic field on the considered layer is manifested by two physical factors — Joule heat and ponderomotor forces, which in accordance with the external electromagnetic action also have an nonstationare nature of change over time. The general solution of the formulated initial boundary value problem with an arbitrary homogeneous non-stationary electromagnetic action is obtained. A cubic approximation of a key function, tangential to the base of the layer, is a component of the magnetic field intensity vector in thickness coordinate. The coefficients of the approximation polynomial are given through the integral characteristics of the key function and given its values on the basis of the layer as corresponding functions of time. As a result, the initial initial boundary value problem of electrodynamics for a key function is reduced to a Cauchy problem for the integral (time-dependent) characteristics of this function. Common solutions of the Cauchy problem are found using the Laplace integral transform and are obtained as a convolution of functions describing the set boundary values of a key function on the bases of the layer and homogeneous solutions of the Cauchy problem. Based on the obtained common solutions, we write down the solution of the original electrodynamics problem by the action of an nonstationare electromagnetic field and the expression of Joule heat and ponderomotor force. The results of numerical analysis of the expressions of the considered values, depending on the parameters of the nonstationare electromagnetic field of the radio frequency range, are presented in the form of corresponding graphs. It is established that the maximum values of Joule heat and ponderomotor force can be significantly higher than their values in the stationare state mode of electromagnetic field during the transient mode of external nonstationare electromagnetic action of less than a quarter of the period of bearing electromagnetic oscillations.

Key words: *conductive layer, nonstationare electromagnetic field, Joule heat, ponderomotor forces, cubic approximation, integral characteristics.*

Отримано: 9.08.2019

UDC 519.626

DOI: 10.32626/2308-5916.2019-20.99-103

S. Soloviov, PhD,

O. Bandurka

National Technical University of Ukraine

«Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute», Kyiv

MODELLING THE OPTIMAL SCHEMES OF POPULATION VACCINATION USING EPIDEMIOLOGICAL DATA

Considered creation of a mathematical and computer model of the various infectious diseases and epidemics' spread problem. The developed system uses an epidemiological SISV computer model. The proposed model gives an opportunity to determine the optimal individual and social costs for vaccine prophylaxis. The article analyses the positivity of such a model under the proposed vaccination strategy. SISV (Susceptible-Infectious-Susceptible-Vaccinated)-model, where infection does not confer immunity (or there is waning immunity) with inclusion of vaccination. The software uses epidemiological models that allow us to explore the process of spreading infectious diseases, to make a forecast for the future, to determine the effectiveness of vaccine prophylaxis, to select optimal vaccination schemes using epidemiological data. Due to the use of epidemiological models a timely prevention of infectious diseases epidemics is possible.

Keywords: *computer modelling of the optimal schemes, epidemiological model, SISV-model.*

Introduction. The problem of the spread of various infectious diseases and epidemics is important for all humanity. Rotavirus infection (RVI) is the leading cause of acute viral gastroenteritis among young children and high infant morbidity and mortality worldwide. To reduce the rate of infection, vaccine prophylaxis is used. In the context of limited resources, it is not possible to carry out vaccination of the entire population, therefore the problem of determination of the optimal social and individual costs for vaccination and treatment remains relevant.

Considering that, there are many approaches to solving vaccine-related problems at the moment, but various diseases have some peculiarities that need to be taken into account when developing epidemiological models. That is why modern practice has not developed universal software or computer model for monitoring the effectiveness of vaccine prophylaxis. Because of the considerable variety and complexity of the parameters none of the existing software products is a universal means.

The developed computer modelling system uses an epidemiological SISV model (Susceptible-Infectious-Susceptible-Vaccinated-model).

Constructing an epidemiological model. The basic principle of constructing an epidemiological model for RVI: the whole population is

divided into several categories; the model is a dynamical system that changes in time, therefore, when passing a certain time period, a part of the population moves from one category to another. In epidemiological models there are the following categories:

- S — susceptible individuals: susceptible to infection;
- I — infected persons: infected with an infectious disease being of interest, capable of infecting others;
- V — vaccinated persons who have received immunity, are inaccessible to infection.

The transition of persons from one category of population to another is characterized by parameters, for example: the power of the infection, speed of healing, birthrate, mortality, migration rate, etc. The power of infection λ is the probability of a certain person's being infected at a certain time. The speed of healing γ is the probability of a certain person's being cured at a certain time.

The use of the SIS computer model presupposes that infected individuals (I) recover when some time passes and become susceptible to the disease again (Figure 1).

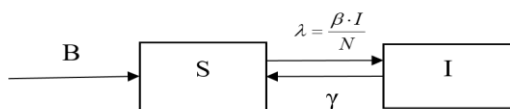


Fig. 1. SIS-model

where: B — birthrate, N — the whole population, S — susceptible persons, I — infected persons, λ — infection power, β — parameter of the pathogen transmission, γ — speed of healing (loss of infectiousness).

Parameters of the model, like the system as a whole, can be dynamic. The SIS mathematical model can be described using the system of difference equations [2]:

$$\begin{cases} S_{t+1} = B_t + S_t - \frac{\beta_t \cdot I_t}{N_t} \cdot S_t + \gamma_t \cdot I_t; \\ I_{t+1} = I_t + \frac{\beta_t \cdot I_t}{N_t} \cdot S_t - \gamma_t \cdot I_t, \end{cases} \quad (1)$$

where: t — period of time.

If vaccination being added to the SIS-model, we will get the SISV-model (Figure 2)

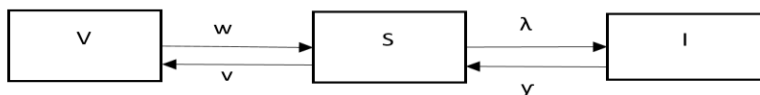


Fig 2. SISV-model

where: V — vaccinated persons, v — population coverage by vaccination, w — decrease of immunity.

Mathematical model can be described by the system of equations:

$$\begin{cases} S_{t+1} = S_t - v_t \cdot S_t + w_t \cdot V_t - \lambda_t \cdot S_t + \gamma_t \cdot I_t; \\ I_{t+1} = I_t + \lambda_t \cdot S_t - \gamma_t \cdot I_t; \\ V_{t+1} = V_t + v_t \cdot S_t - w_t \cdot V_t. \end{cases} \quad (2)$$

Thus, using the SISV-model, one can determine the optimal scheme of vaccination for the population to prevent from the spreading of infectious diseases.

The software uses epidemiological models that allow us to explore the process of spreading infectious diseases, to make a forecast for the future, to determine the effectiveness of vaccine prophylaxis, to select optimal vaccination schemes using epidemiological data [1]. Due to the use of epidemiological models a timely prevention of infectious diseases epidemics is possible.

The system consists of three software modules: data access module, business logic module and presentation module. The data access module is in charge of reading, processing and storing of incoming epidemiological data. The processing of incoming epidemiological data is necessary to eliminate the excess data and to automate the process of collecting and calculating statistics [3].

The module of business logic carries out the construction of epidemiological models, making a forecast for the future. The module defines optimal vaccination schemes depending on incoming epidemiological data.

The presentation module uses a graphical user interface to output the obtained results of the system work (Figure 3).

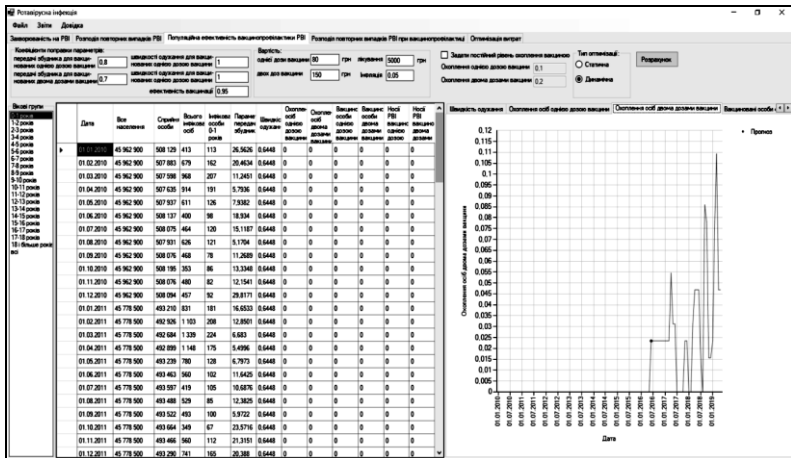


Fig. 3. The main window of the developed system

The developed system gives an opportunity to determine the optimal individual and social costs for vaccine prophylaxis (Figure 4).

Дата	Оптимальне особ. значення показу	Індивідуальне середнє значення показу, грн	Кількісний витрат на вакцинацію одного людини, грн	Оптимальне особ. значення показу	Індивідуальне середнє значення показу, грн	Кількісний витрат на вакцинацію одного людини, грн	Сумарне значення показу на вакцинацію	Середнє значення на вакцинацію одного людини, грн	Сумарне значення показу на вакцинацію	Середнє значення на вакцинацію одного людини, грн	Значення критерію показу, грн
01.08.2016	0.00375	31.91	48.76	0.0234375	3.93	147.33	28838.97	13276.95	26381.39	12138.44	48727.91
01.09.2016	0.00375	31.72	49.29	0.0234375	3.9	147.36	28948.11	13279.36	26381.11	12138.44	48727.91
01.10.2016	0.00375	31.58	48.76	0.0234375	3.89	146.63	28794	13269.89	26380.2	12138.44	48727.91
01.11.2016	0.00375	31.13	50.55	0.0234375	3.83	145.32	29190.69	13283.68	26381.26	12138.44	48727.91
01.12.2016	0.00375	30.84	51.18	0.0234375	3.8	145.99	29241.72	13290.65	26383.17	12138.44	48727.91
01.01.2017	0.00375	29.86	52.5	0.0234375	3.68	150.75	294136.23	132878.89	263798.32	12138.44	48727.91
01.02.2017	0.00375	32.59	58.11	0.0234375	4.01	151.96	29520	133403.12	264020.41	12138.44	48727.91
01.03.2017	0.00375	31.9	51.99	0.0234375	3.88	151.84	29631.24	133228.71	263951.41	12138.44	48727.91
01.04.2017	0.00325	38.34	53.09	0.046875	3.73	152.63	99171.51	325406.51	411978.99	83675.01	48727.91
01.05.2017	0.0546875	29.6	54.15	0.03125	3.64	153.38	174209.15	186652.66	206163.62	56705.63	48727.91
01.06.2017	0.0546875	29.1	54.99	0.03125	3.58	154.09	174675.24	187396.32	206122.66	60934.22	48727.91
01.07.2017	0.117875	28.78	55.89	0	3.54	154.79	276156.49	0	206114.4	174209.15	48727.91
01.08.2017	0.117875	28.48	56.31	0	3.51	155.49	375373.75	0	276080.81	174209.15	48727.91
01.09.2017	0.117875	28.24	56.93	0	3.48	156.18	379087.28	0	183044.2	174209.15	48727.91
01.10.2017	0.117875	28.03	57.48	0	3.45	156.87	380446.2	0	276227.72	174209.15	48727.91
01.11.2017	0.00375	27.62	58.24	0.0234375	3.4	157.59	380912.42	343008.95	206110.97	80632.34	48727.91
01.12.2017	0.00375	27.29	58.96	0.0234375	3.36	158.3	380912.23	343763.81	121427.69	164709.29	48727.91
01.01.2018	0.117875	26.12	60.46	0	3.21	159.12	343766.5	0	88678.62	127949.23	48727.91
01.02.2018	0.117875	21.9	65.94	0	2.7	160.31	386296.93	0	88414.23	127949.23	48727.91
01.03.2018	0.0546875	28.73	66.57	0.03125	2.95	161.14	18975.29	193902.1	91834.74	129173.13	48727.91
01.04.2018	0.01625	19.57	68.1	0.046875	3.41	161.96	51891.61	291980.39	30906.88	72952.96	48727.91
01.05.2018	0.01625	18.66	69.37	0.046875	3.3	162.76	52198.76	293117.77	30668.05	54186.58	48727.91

Fig. 4. Optimization of costs

UML use case diagram shows the possible options available to users of the system (Figure 5).

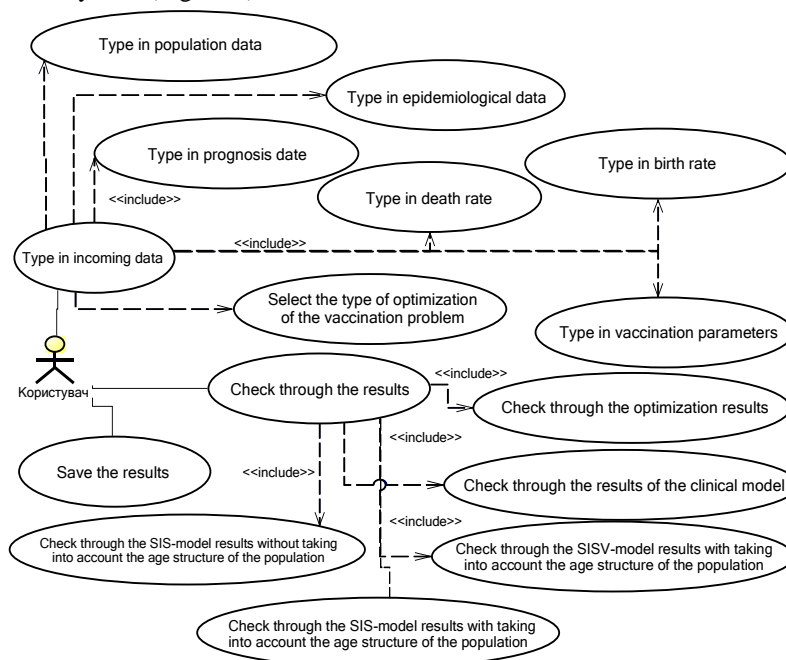


Fig. 5. Diagram of the precedents of the developed system

The developed computer modelling system can be used for the study of RVI, the compilation of morbidity prognosis, the selection of optimal

vaccination schemes, as well as the determination of the costs for treatment and vaccine prophylaxis.

Conclusions. Thus, in the article, considered the developed computer modelling system can be used for the study of RVI, the compilation of morbidity prognosis, the selection of optimal vaccination schemes, as well as the determination of the costs for treatment and vaccine prophylaxis.

References:

1. Tassier T. The Economics of Epidemiology / T. Tassier. — Berlin : Springer Science & Business Media, 2013. — P. 3–24.
2. Hethcote W. Three Basic Epidemiological Models / W. Hethcote. — Berlin : Springer, 1989. — P. 119–137.
3. Brauer F. Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology / F. Brauer. — New York : Springer, 2001. — P. 3–120.

МОДЕЛЮВАННЯ ОПТИМАЛЬНИХ СХЕМ ВАКЦИНАЦІЇ НАСЕЛЕННЯ З ВИКОРИСТАННЯМ ЕПІДЕМІОЛОГІЧНИХ ДАНИХ

Розглянуто створення математичної та комп'ютерної моделі в проблемі поширення різних інфекційних захворювань та епідемій. Розроблена система комп'ютерного моделювання використовує епідеміологічну SISV-модель. Ця модель визначає оптимальну схему вакцинації населення. У статті проаналізовано позитивність такої моделі у запропонованій стратегії вакцинації. SISV (сприйнятливий-інфекційний, сприйнятливий до вакцинації)-модель, де інфекція не надає імунітету (або є зменшенням до імунітету) з виключенням вакцинації. У програмному забезпеченні використовуються епідеміологічні моделі, які дозволяють дослідити процес поширення інфекційних захворювань, зробити прогноз на майбутнє, визначити ефективність вакцинопрофілактики, вибрати оптимальні схеми вакцинації з використанням епідеміологічних даних. Завдяки використанню епідеміологічних моделей можлива своєчасна профілактика епідемій інфекційних захворювань.

Ключові слова: *комп'ютерне моделювання оптимальної схеми, епідеміологічна модель, SISV-модель.*

Отримано: 28.08.2019

UDC 536.248.2

DOI: 10.32626/2308-5916.2019-20.104-113

I. E. Furtat, PhD, Associate Professor

National Technical University of Ukraine

«Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute», Kyiv

CONDENSATION HEAT AND MASS TRANSFER AT DIRECT CONTACT OF THE REACTING PHASES

Condensation upon direct contact of the phases can be divided into the following types: condensation of the steam stream in the volume of unheated liquid; condensation of vapor bubbles in liquid; condensation of steam by liquid droplets (dispersed liquid); vapor condensation on a jet of liquid.

In visual experiments, the study of the process of condensation of the jet of steam in space was noted by the presence of a white emulsion at the collision of steam with liquid, due to the crushing of a jet of steam into small bubbles. The high intensity of the heat transfer process was explained by the sharp increase in the contact surface. When considering the structure of the flow taking into account the two-phase region, it can be noted that there is a smooth conical surface of the separation between the phases and the formation of dispersed bubbles and droplets in the flow. This allows to determine the dependence of the geometry of the contact zone of the phases on the temperature head.

An increase in the surface area of the contact phase can be achieved by dispersing one of the contacting phases. Existing liquid spraying machines have significant energy costs as a result of doing some work to overcome the surface tension that causes the liquid to reduce the free surface. So the heat transfer between a liquid drop and a saturated vapor is determined by the heat distribution along the drop radius. The vapor condenses on the surface of the liquid droplet, and the released heat condensation must be discharged inside the droplet. According to the equation of thermal conductivity under the relevant conditions of the problem under consideration, the intensity of condensation is determined by the rate of heat runoff per drop. Studies of heat exchange on dispersed jets of liquid have proven high intensity of the process.

Condensation on a jet of liquid is used in many industrial devices (deaerators, condensers of mixing type, jet heaters).

Theoretical and experimental studies of this type of condensation are scarce. Studies of heat exchange during condensation of a dispersed steam stream on a swirling stream of water are absent at all.

The results of the experiments of heat exchange at the contact condensation of steam on jets of water, consisting of a continuous section and a section that falls into drops, are represented by the

criterion equation. Recent studies are related to the development of a mathematical model for the calculation of jet condensation and analysis of past developments with its application.

Key words: *condensation, steam, liquid, jet, phase contact, heat exchange.*

Introduction. By analyzing the condensation in direct contact of the phases, it can be divided into the following types:

- condensation of steam stream in the volume of underheated liquid;
- condensation of vapor bubbles in the liquid;
- condensation of steam on liquid droplets (dispersed liquid);
- condensation of steam on a liquid jet.

Note that during the condensation the non-condensing gas contained in vapor leads to a decrease in the heat transfer coefficient due to the additional diffusional thermal resistance.

The first studies of the condensation process of a steam jet in a liquid filled space are based on visual experiments [1; 2]. The presence of a white emulsion was noted when the vapor collides with the liquid, due to the crushing of a steam jet into small bubbles. The high intensity of the heat transfer process was explained by the sharp increase in the contact surface.

Earlier researches of the steam penetration into water. As stated in [3], the penetration of steam into water due to the difference of partial pressures of steam in the vapor medium and in the liquid causes the leakage of steam at high speed, which explains the presence of the emulsion. Studies [4; 5] determined the theoretically obtained and experimentally confirmed position of the condensation surface depending on the parameters of the vapor and the liquid. The condensation process is said to end on the surface of the «condensation cone». This is due to the high intensity of turbulent mixing. On the basis of previous studies, [6] obtained a relation that determines the position of the condensation surface, and presents the dependence of the change in the full angle of the «condensation cone» β_0 depending on the temperature of the liquid t_{liq} .

Later publications [7–9] consider the structure of the flow taking into account the two-phase region. The presence of a smooth conical surface between the phases and the formation of dispersed bubbles and droplets in the flow are noted. The result of these recent studies [9] is to determine the dependence of the phase contact zone geometry on the temperature head Δt . The condensation process ends at the height of the contact zone, which is equal to the penetration depth h of the steam stream. In addition, the condensation cone pulsations were noted [8; 9], as a consequence of the use of stabilizing screens in heaters of the mixing type. According to [10], the heat transfer equation has the form:

$$Nu = 6,5 \cdot Re^{0,6} \cdot Pr' \quad (1)$$

Describing the features of the mechanism of vapor bubbles condensation in liquid volume, one distinguishes the first stage of bubbles collapsing (large radius bubble), which is due to the intensity of heat exchange, and the second stage — (small radius) with the influence of inertial forces [11].

In publications [12] analytical and experimental material was obtained, characterizing the condensation of fixed steam bubbles. The intensification of the destruction of steam bubbles under the influence of their translational motion has been studied [13–16].

Models of steam-water interaction with condensation. Under conditions of mass bubbling [17], with the number N_3 of steam jets, the studied temperature fields along the length and height of the two-phase layer are exponential in nature. The formula of the coefficient of heat transfer from steam to liquid is obtained:

$$\alpha = 6,05 \cdot 10^3 \cdot C'_p \cdot \rho' \cdot \sqrt{\frac{a' \cdot U_0}{N_3 \cdot L_\varphi}}, \quad (2)$$

where C'_p is the specific heat of the liquid; ρ' — liquid density; a' — coefficient of thermal conductivity of the liquid; L — length of free run of the bubble (jet); φ is the steam content of the layer.

In [18; 19], a model of periodic renewal of turbulent surface moles is used to calculate the intensity of heat transfer through an interfacial surface, and a universal dependence is obtained, which determines the coefficient of interphase heat exchange in a turbulent flow:

$$Nu = 0,23 \cdot Re^{0,7} \cdot Pr^{0,5} \cdot A^{0,25}, \quad (3)$$

where A is the correction that characterizes the steam content in the stream.

Formula (3) is applicable to sufficiently large bubbles in the region $Pr \geq 0,3 \div 0,5$; $A \leq 0,04 \cdot (d_n/D) \cdot Re^{0,7} \cdot Pr^{0,5}$.

It is known that there are no experiments, calculations for the detection of theoretical laws of heat and mass transfer when mixing a dispersed jet of steam with a jet of liquid. This process is complex enough, so there is a need for experimental studies. An increase in the surface area of the phases contact can be achieved by dispersing one of the contacting phases. Existing liquid spraying machines have significant energy costs as a result of doing some work to overcome the surface tension that causes the liquid to reduce the free surface. It is known that for spraying liquid energy consumption of most existing dispersants is in the range of $3,5 \div 10$ (kW·h)/t. Liquid dispersion also has the disadvantage of having an additional thermal drop resistance. So the heat transfer between the liquid droplet and the saturated vapor is determined by the heat distribution along the droplet radius. The vapor condenses on the surface of the liquid droplet, and the

released heat of condensation must be discharged inside the droplet. According to the equation of thermal conductivity under the relevant conditions of the problem under consideration, the intensity of condensation is determined by the rate of heat runoff per drop.

The coefficient of heat transfer from steam to a drop of liquid [10] is determined by the formula:

$$Nu = 2 + 0,74 \cdot Re^{0,7} \cdot Pr^{0,33}. \quad (4)$$

Studies [20] of heat transfer on dispersed jets of liquid have proven the high intensity of the process and have recommended the following formulas:

$$\frac{Q_v(x)}{r \cdot G} = 1,75 \cdot Re_{03,n}^{0,33} \cdot X^{-0,27} \cdot K^{-1} \cdot \left[1 - \exp\left(-\frac{\pi^2}{Pe_{03,liq}}\right) \right], \quad (5)$$

where $Q_v(x)$ is the local density of heat, W; G — mass flow rate of liquid, kg/s; $K = 7.62 \div 17.80$; $Re_{03,n} = 2.0 \div 167.0$; $Pe_{03,liq} = 2740 \div 15800$; $X = 6 \div 412$.

The experimental data is described by the equation:

$$\Theta = 1,25 \cdot 10^{-4} \cdot Lp^{0,62} \cdot K^{-0,45} \cdot A^{-0,59} \cdot \varepsilon^{-0,08} \cdot We^{0,02} \cdot Z^{0,03} \cdot X^{0,26}, \quad (6)$$

when changing values are within: $We = 6.6 \div 28.6$; $Lp = (6.6 \div 29.3) \cdot 10^5$; $K = 7.6 \div 18.7$; $A = 1.13 \div 1.70$; $\varepsilon = (0.1 \div 84.0) \cdot 10^{-4}$; $Z = 0.42 \div 9.37$; $X = 4.65 \div 47.40$; while $\Theta = 0.20 \div 0.98$.

Condensation on the jet of liquid is used in many industrial devices (deaerators, condensers of mixing type, jet heaters).

Theoretical and experimental studies of this type of condensation are scarce. The recommended calculation formulas for estimating the heat transfer during condensation of steam on a liquid jet differ by the methods of determining the basic parameters and components.

In experimental studies of I. V. Vasilyev in CCTU [21] a formula is obtained when water flows out of holes with diameter $d = 3 \div 7$ mm ; jet height $H = 0.2 \div 0.55$ m; initial velocity of water $w = 0.2 \div 1.4$ m/s and temperature $t = 20 \div 90$ °C:

$$\lg \frac{t_s - t_1}{t_2 - t_1} = 0,029 \cdot \left(\frac{g \cdot d_1}{w^2} \right)^{0,2} \cdot \left(\frac{H}{d} \right)^{0,7}, \quad (7)$$

at $Re > 1500$; $1 < Fr = \frac{g \cdot d_1}{w^2} < 40$; $40 < \frac{H}{d} < 100$.

The formula theoretically obtained in [22] to determine the heat transfer coefficient has the form:

$$\alpha = 377 \cdot C_{p\,pid} \cdot \rho_{pid} \cdot w_0 \cdot \Phi(K), \quad (8)$$

where $\Phi(K)$ is the function of the parameter $K = r / [C_{p\,pid} \cdot (t_u - t_0)]$.

The theoretical formulas are proposed in [23; 24] according to the hypothesis that the coefficient of turbulence is proportional to the cross section and the absolute flow velocity:

$$\bar{\Theta} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{4}{\beta_i^2} \cdot \exp(-\beta_i^2 \cdot f(x)),$$

$$f(x) = \frac{4 \cdot a \cdot x}{w_0 \cdot d_0^2} + \frac{4 \cdot \varepsilon_* \cdot w_0^2}{5 \cdot \varphi^{2.5} \cdot g \cdot d_0} \cdot \left[\left(1 + \frac{2 \cdot \varphi^2 \cdot g \cdot x}{w_0^2} \right)^{1.25} - 1 \right], \quad (9)$$

where φ is the factor of the jet narrowing; $\varepsilon_* = 0.0005$; $\bar{\Theta}$ — relative underheating of the jet.

Studying of the jet heaters. Valuable experimental studies of the external thermal and hydraulic characteristics of the jet heater were conducted in VTI [25; 26]. The effect on the heat exchanger design and mode factors was investigated. It is known that the shape of the nozzle does not affect the water heating and pressure value renewal Δp_c . The operation of the jet heater under the influence of mode factors was analyzed depending on the flow of working water, water temperature, injected steam pressure. In [28], the dependences of the underheating of water on the saturation temperature and the heating steam on the jet length are given. They prove that at high flow rates, the main heating occurs at a short initial jet section, at lower ones — over the entire jet length. The experiments were conducted using the formulas given above.

On the basis of theoretical developments [22], the process of condensation at the outflow of a cold jet of liquid with velocity w_0 from an aperture of radius R into the vapor space was studied in [27] with the assumption that «the molecular heat flow is less intense than turbulent». The dependence of the dimensionless temperature Θ and the criterion St on the geometric relation $\zeta = x / R$ and the dynamic parameter α_d is thus obtained:

$$St = f(\alpha_d) = f\left(\frac{2 \cdot g \cdot R}{w_0^2}\right), \quad (10)$$

where $St = \frac{\bar{\alpha}}{C_{pliq} \cdot \rho_{liq} \cdot w_0}$.

Experimental studies [28] for water jets in the transverse stream of steam in the region $p = 1 \div 100$ kPa; $w_0 = 0.8 \div 1.7$ m/s; $\rho_n \cdot w_n^2 = 4 \div 60$ kPa; $d = 2 \div 15$ mm ; $l = 0.2 \div 0.5$ m are described by the criterion equation:

$$\lg \frac{t_n - t_0}{t_n - t_1} = 0,085 \cdot \frac{l}{d} \cdot Lap^{0,33} \cdot K^{-0,13} \cdot Pr^{-0,62} \cdot Fr^{-0,33} \cdot (1 - \pi)^2, \quad (11)$$

where $Lap = \frac{\rho \cdot w_n^2 \cdot d}{\sigma}$ is the Laplace criterion; $\pi = \frac{G_{air}}{G_{mix}}$ — the ratio of the mass of air to the total amount of mixture of air and steam.

Experimental studies [29] of the operation of the jet capacitor were performed depending on the design features of the apparatus and the operating conditions. Later, experimental data [30] for vertical jets in vacuum conditions are described by the dependence:

$$Nu = 0,02 \cdot m \cdot Re^{1,2} \cdot Pr^{0,43} \cdot K^{0,1} \cdot \left(\frac{l}{d_0} \right)^{-0,75}, \quad (12)$$

where $m = \frac{\Delta t_{avg}}{\Delta t_{log}}$; under conditions $p = 15 \div 100$ kPa; $w_0 = 9 \div 26$ m/s; $w_n = 10 \div 30$ m/s; $d_0 = 3 \div 20$ mm; $l = 0.2 \div 1.2$ m; number of jets $1 \div 46$.

The results of the experiments of heat exchange at contact condensation of steam on jets of water, consisting of a solid section and a section that splits into droplets, [31] are represented by the criterion equation:

$$Nu = 2,7 \cdot Re_{liq}^{0,6} \cdot Pr_{liq}^{0,45} \cdot K^{0,11} \cdot We^{0,4} \cdot \left(\frac{l}{d} \right)^{-0,75}, \quad (13)$$

in the range $Re_{liq} = (1,4 \div 9,0) \cdot 10^5$; $Pr_{liq} = 2,5 \div 4,0$; $K = 9 \div 60$; $We = 1,6 \cdot 10^2 \div 3,0 \cdot 10^3$; $l/d = 12 \div 60$.

In the conditions of cross-motion of coolants for a large number of nozzles from which water flows, the formula is obtained:

$$\overline{Nu} = 1,57 \cdot Gz_{liq}^{0,5} \cdot K^{0,5} \cdot We_n^{0,28} \cdot \left(\frac{s_2}{d} \right)^{0,75}, \quad (14)$$

where $Gz = \frac{C \cdot z_{liq} \cdot \gamma_{liq} \cdot w_{liq} \cdot d^2}{\lambda_{liq} \cdot l}$ is the Gretz criterion; $\frac{s_2}{d}$ — relative pitch of the jet.

The total surface of the condensation was equal to the surface of a single jet of liquid (lateral surface of a cylinder with a nozzle diameter d_s and height equal to the length of the jet, l) multiplied by the total number of jets.

Relative heating Θ of a laminar jet in liquid [32] depends on the Fourier number Fo and dimensionless radius ε_i :

$$\overline{\Theta} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{4}{\varepsilon_i^2} \cdot \exp\left(-\varepsilon_i^2 \cdot Fo\right), \quad (15)$$

where $Fo = \frac{0,5 \cdot \varepsilon \cdot l}{d}$.

From the thermal balance of the jet it was obtained that:

$$4 \cdot St = \frac{d_0}{l} \cdot \ln \frac{1}{\Theta}. \quad (16)$$

In the following experiments, the dependences of heat exchange for a continuous jet flowing from the nozzle from top to bottom into a large volume of steam are described [33]:

$$4 \cdot \overline{St} = 0,134 \cdot \left(\frac{l}{d_c} \right)^{-0,42} \cdot \text{Re}^{-0,17} \cdot \text{Pr}^{-0,09} \cdot K^{0,13} \cdot \text{We}^{0,35}, \quad (17)$$

$$4 \cdot \overline{St} = 0,133 \cdot \left(\frac{l}{d_c} \right)^{-0,41} \cdot \text{Re}^{-0,18} \cdot \text{Pr}^{0,05} \cdot K^{0,11} \exp(0,16 \cdot \text{We}), \quad (18)$$

where $\frac{l}{d_c} = 4 \div 180$; $\text{Re} = (1.5 \div 10.0) \cdot 10^4$; $\text{Pr} = 1.8 \div 6.4$; $K = 6 \div 50$;

$\text{We} = 0.4 \div 5.5$.

Equation (17) is recommended for $\text{We} \geq 2.7$ and equation (18) for $\text{We} \leq 2.7$.

The influence of the criterion We on the heat exchange is revealed [34]:

$$\text{at } \frac{l}{d} \leq 95 \quad 4 \cdot St = 5,15 \cdot 10^{-2} \exp(0,135 \cdot \text{We}) \cdot \left(\frac{l}{d} \right)^{-0,54}, \quad (19)$$

$$\text{at } \frac{l}{d} \geq 95 \quad 4 \cdot St = 1,5 \cdot 10^{-2} \exp(0,135 \cdot \text{We}) \cdot \left(\frac{l}{d} \right)^{-0,27} \quad (20)$$

for $\text{Re} = (1.5 \div 10.0) \cdot 10^4$; $\text{We} = 1.1 \div 4.1$; $k = (4.2 \div 17.4) \cdot 10^{-2}$; $\frac{l}{d_c} = 12 \div 178$.

In the accompanying motion of the vapor with a pressure $p = 0,196 \div 0,245$ MPa and a current of liquid flowing from the cylindrical nozzle from top to bottom:

$$4 \cdot St = 0,33 \cdot \left(\frac{l}{d_c} \right)^{-0,59} \cdot \text{Re}^{-0,17} \cdot \text{Pr}^{0,09} \cdot K^{0,13} \cdot \text{We}^{0,33}, \quad (21)$$

at $\text{We} = 2.7 \div 7.4$; $\frac{l}{d_c} = 4.5 \div 120.0$; $d_c = 2.18; 4; 6$ mm; $l \geq 50$ d; $\text{Re} > 10^4$.

The publications [35; 36] present the data of studies of heat exchange under condensation on laminar [35] and turbulent [36] jets of liquid, taking into account the initial inlet section:

$$St = f_1 \cdot f_2 \cdot f_3 \cdot \left(\frac{x}{2 \cdot R_0} \right)^{-0,8}, \quad (22)$$

where f_1, f_2, f_3 , are the functions of the numbers Re , Pr , We and the complex $\frac{x}{2R_0}$, obtained by changing We from 10^{-3} to 5; Re from 200 to 1000; Pr from 1 to 50.

In [37] the formula is obtained:

$$St = 0,047 \cdot \left(\frac{1}{2 \cdot R_0} \right)^{-0,52} \cdot \text{Re}^{-0,033} \cdot \text{Pr}^{-0,074} \cdot Fr^{-0,064}. \quad (23)$$

The calculation of formulas (22) and (23) was consistent with previous experiments by Kutateladze S. S., Isachenko V. P., Dementyeva K. V.

Recent studies [38] have been associated with the development of a mathematical model for the calculation of jet condensation and the analysis of past developments with its application.

As is known, there is no study of heat transfer during condensation of a dispersed steam stream on a swirling stream of water. With regard to the above dependencies, we can conclude about their individuality due, firstly, to the method of obtaining, and secondly, to the differences in the method of determining the input parameters.

Conclusions. Formula (8) is obtained for a flat turbulent jet of liquid according to the statement that a turbulent mixing layer develops at the boundary. Formulas (9, 10, 15, 16) have the same theoretical origin under the same conditions at the boundary of the two phases. Formulas (11, 12) describe experimental studies of condensation under vacuum conditions.

The determination of the physical parameters of the liquid by temperature also differs:

- for formulas (10–14) it is the average liquid temperature $t_{avg} = (t_1 + t_0) / 2$;
- for formulas (9, 15–21) it is the liquid temperature at the inlet t_0 ;
- for formula (14) it is the saturation temperature t_s .

The quantities ρ_n , σ , r were determined by the saturation temperature t_s of the vapor.

References:

1. Дульнев Г. Н. Принцип местного влияния в методе поэтапного моделирования / Г. Н. Дульнев, Е. В. Сахова, А. В. Сигалов // ИФЖ. — 1983. — Т. 45, № 6. — С. 831–836.
2. Таубман Е. И. Изв. АН СССР. Сер. Энергетика и транспорт / Е. И. Таубман. — 1965. — № 5. — С. 121–130.
3. Исаченко В. П. Теплопередача / В. П. Исаченко, В. А. Осипова, А. С. Сукомел. — М.: Энергия, 1975. — 481 с.
4. Кутателадзе С. С. Теплоотдача при конденсации и кипении / С. С. Кутателадзе. — М.; Л.: Машгиз, 1952. — 232 с.
5. Исаченко В. П. Теплообмен при конденсации / В. П. Исаченко. — М.: Энергия, 1977. — 239 с.
6. Кутепов А. М. Гидродинамика и теплообмен при парообразовании / А. М. Кутепов, Л. С. Стерман, Н. Г. Стюшин. — М.: Высшая школа, 1977. — 352 с.
7. Вопросы физики кипения. — М.: Мир, 1964. — С. 443.
8. Григорьев В. А. Кипение криогенных жидкостей / В. А. Григорьев, Ю. М. Павлов, Е. В. Аметистов. — М.: Энергия, 1977. — 289 с.
9. Берман Л. Д. Испарительное охлаждение циркуляционной воды / Л. Д. Берман. — М.: Энергия, 1957. — 319 с.
10. Соснин Ю. П. Контактные водонагреватели / Ю. П. Соснин. — М.: Стройиздат, 1974. — 359 с.

11. Федоткин И. М. Теплогидродинамические процессы в выпарных аппаратах / И. М. Федоткин, С. И. Ткаченко. — Киев : Техніка, 1975. — 212 с.
12. Чернобыльский И. И. Выпарные установки / И. И. Чернобыльский. — Киев : Изд-во КГУ, 1960. — 260 с.
13. Черный Г. Г. ДАН СССР / Г. Г. Черный. — 1955. — Т. 101, № 1. — С. 39–42.
14. Иса И. Теплопередача / И. Иса, Цзинь-Жань Чжень. — 1972. — № 1. — С. 54–58.
15. Shekrladze I. G. Int. J. Heat and Mass Transfer / I. G. Shekrladze, V. I. Gometauri. — 1966. — V. 9, № 6. — P. 581–591.
16. Бойко Л. Д. Теплообмен в элементах энергетических установок / Л. Д. Бойко. — М. : Наука, 1966. — С. 197–212.
17. Волков Д. И. Теплообмен при конденсации и кипении / Д. И. Волков // Труды ЦКТИ. — Л. : Изд. ОНТИ ЦКТИ, 1965. — Вып. 57. — С. 149–159.
18. Кутателадзе С. С. Вопросы теплоотдачи и гидравлики двухфазных сред / С. С. Кутателадзе. — М. ; Л. : Госэнергоиздат, 1966. — С. 138–156.
19. Исаченко В. П. Теплообмен и гидродинамика / В. П. Исаченко, С. А. Сотсков, Е. В. Якушева // Труды МЭИ. — М., 1975. — Вып. 235. — С. 145–152.
20. Труб И. А. Теплофизика и теплотехника / И. А. Труб. Киев : Наукова думка, 1964. — С. 33–39.
21. Труб И. А. Каскадные конденсаторы смешения / И. А. Труб. — М. : Пищевая промышленность.
22. Толубинский В. И. Теплообмен при кипении / В. И. Толубинский. — Киев : Наукова думка, 1980. — 315 с.
23. Ильин И.Н., Турлайс Д.П., Ротбаум Я.М. Кипение и конденсация / И. Н. Ильин, Д. П. Турлайс, Я. М. Ротбаум. — Рига, 1979. — С. 60–67.
24. Тананайко Ю.М. Методы расчета и исследования пленочных процессов / Ю. М. Тананайко, Е. Г. Воронцов. — Киев : Техніка, 1975. — 311 с.
25. Федоткин И.М., Фирисюк В.Р. Тепло-массообмен / И. М. Федоткин, В. Р. Фирисюк. — Киев : Наукова думка, 1968. — С. 181–191.
26. Чжунь Ч. Труды американского общества инж.-механиков, Сер. С. Теплопередача / Ч. Чжунь, Р. Себан. — 1972. — № 4. — С. 106–110.
27. Чанг П. ЭИ. Сер. Теплоэнергетика / П. Чанг. — 1963. — Вып. 9. — С. 1–20.
28. Агафонов В. А. Судовые конденсационные установки / В. А. Агафонов, В. Г. Ермилов, Е. В. Панков. — Л. : Судпромгиз, 1963. — 490 с.
29. Таубман Е.И. Тепло- и массоперенос / Е. И. Таубман. — Минск, 1966. — Т. 6. — С. 306–315.
30. Рабинович Г. Д. ЖТФ / Г. Д. Рабинович. — 1953. — Т. 23. — Вып. 3. — С. 541–549.
31. Шумская Л. С. Вопросы теплоотдачи и гидравлики двухфазных сред / Л. С. Шумская. — М. : Госэнергоиздат, 1961. — С. 350–392.
32. Коченов И. С. Доклады АН СССР / И. С. Коченов. — 1956. — Т. 107. — № 5. — С. 689–692.
33. Стренч П. Вопросы физики кипения / П. Стренч, А. Орел, Дж. Аэстуотер. — М. : Мир, 1964. — С. 331–353.
34. Фритц В. Вопросы физики кипения / В. Фритц, В. Энде. — М. : Мир, 1964. — С. 162–188.
35. Флоршюц Л. Труды американского общества инж.-механиков. Сер. С. Теплопередача / Л. Флоршюц, Б. Чао. — 1965. — Т. 87. — № 2. — С. 58–72.

36. Ладиев Р. Я. Теплообмен и гидродинамика в двухфазных средах / Р. Я. Ладиев. — Киев : Наукова думка, 1967. — С. 63–72.
37. Гаусбрандт Э. Выпаривание, конденсация и охлаждение / Э. Гаусбрандт, М. Гирш. — М. : ОНТИ Главн. ред. хим. лит-ры, 1936. — 380 с.
38. Зингер Н. И. Вопросы теплообмена при изменении агрегатного состояния вещества / Н. И. Зингер. — М. ; Л. : Госэнергоиздат, 1963. — С. 81–91.

КОНДЕНСАЦІЙНИЙ ТЕПЛОМАСОБМІН ПРИ ПРЯМОМУ КОНТАКТІ РЕАГУЮЧИХ ФАЗ

Конденсацію при прямому контакті фаз умовно можна розділити на такі види: конденсація струменю пари в об'ємі недогрітої рідини; конденсація бульбашок пари в рідині; конденсація пари на краплях рідини (диспергована рідина); конденсація пари на струмені рідини.

При візуальних експериментах дослідження процесу конденсації струменя пари у просторі відмічалася наявність білої емульсії при зіткненні пари з рідиною, за рахунок дроблення струменю пари на маленькі бульбашки. Висока інтенсивність процесу теплообміну пояснювалась різким збільшенням поверхні контакту. Якщо розглядати структуру потоку з урахуванням двофазної області, можна відмітити наявність як гладкої кінчної поверхні розділу між фазами, так і утворення дисперсних бульбашок та крапель в потоці. Це дозволяє визначити залежність геометрії зони контакту фаз від температурного напору.

Збільшення площі поверхні контакту фаз може бути досягнуто внаслідок диспергування однієї з контактуючих фаз. Існуючі апарати з розпиленням рідини мають значні енерговитрати як наслідок виконання деякої роботи для подолання поверхневого натягу, який примушує рідину зменшувати вільну поверхню. Так тепломасообмін між краплиною рідини і насиченою парою визначається розподілом теплоти вздовж радіуса краплі. Пара конденсується на поверхні краплі рідини, при цьому теплота конденсація, що вивільнюється, має відводитись всередину краплі. Згідно з рівнянням теплопровідності при відповідних умовах розглянутої задачі, інтенсивність конденсації визначається швидкістю стоку теплоти у краплю. Дослідження теплообміну на диспергованих струменях рідини довело високу інтенсивність процесу.

Конденсація на струмені рідини використовується в багатьох промислових апаратах (деаератори, конденсатори змішувального типу, струменеві нагрівачі).

Теоретичні та експериментальні дослідження цього виду конденсації небагаточисельні. Дослідження теплообміну при конденсації диспергового струменя пари на закрученому струмені води взагалі відсутні.

Результати дослідів теплообміну при контактній конденсації пари на струменях води, що складається з суцільної ділянки та ділянки, що розпадається на краплини, представляються критеріальним рівнянням. Останні дослідження пов'язані з розробкою математичної моделі розрахунку струминної конденсації та аналізу минулих розробок з її застосуванням.

Ключові слова: конденсація, пара, струмінь, рідина, контакт фаз, теплообмін.

УДК 519.87;53.08

DOI: 10.32626/2308-5916.2019-20.114-120

Ю. О. Фуртат, канд. техн. наук.Інститут проблем моделювання в енергетиці
імені Г. Є. Пухова НАН України, м. Київ

ВЛАСТИВОСТІ ІНТЕГРАЛЬНИХ ДИНАМІЧНИХ МОДЕЛЕЙ У ВИГЛЯДІ ОПЕРАТОРІВ І РІВНЯНЬ ТИПУ ВОЛЬТЕРРА

Точність результатів моделювання динамічних об'єктів залежить від похибок різних типів: похибки вихідних даних, похибки обчислень та похибки моделі, що описує об'єкт. Вплив похибок первинних даних на точність результату здійснюється шляхом використання та чисельної реалізації математичної моделі. Існують різні форми динамічних моделей, в тому числі звичайні диференціальні рівняння, інтегральні рівняння та оператори, передатні функції, рівняння в частинних похідних. Найбільш розповсюдженими динамічними моделями для опису процесів вимірювання є звичайні диференціальні рівняння. Але математичні моделі у вигляді інтегральних рівнянь мають перевагу за рахунок того, що, на відміну від диференціальних рівнянь, включають в себе повну постановку задачі разом з початковими (граничними) умовами, допускають однотипний підхід при числовому розв'язку.

Складовою частиною будь-якого інтегрального рівняння, що визначає його основні властивості, є інтегральний оператор. Множина задач аналізу динамічних систем призводить до математичних моделей, що містять лінійний інтегральний оператор Вольтерра, нелінійні оператори Вольтерра-Гаммерштейна та оператори Вольтерра-Урисона. Інтегральними рівняннями Вольтерра II роду, як лінійними так і нелінійними, описуються задачі аналізу динамічної системи з явно вираженою однонапрямленою зміною незалежної змінної, наприклад часу. Характерним прикладом таких задач є системи зі зворотнім зв'язком.

Аналіз особливостей інтегрального методу математичного моделювання динамічних об'єктів свідчить про те, що певні переваги динамічних моделей у вигляді інтегральних рівнянь та операторів забезпечують позитивні можливості побудови ефективних методів та засобів створення, дослідження, проектування та функціонування вимірювальних систем з вбудованими засобами динамічної корекції точності.

Ключові слова: *динамічна модель, інтегральне рівняння, інтегральний оператор, інтегральне рівняння Вольтерра, вроджене ядро.*

Вступ. Точність результатів моделювання будь-якого динамічного об'єкту залежить від таких складових як похибка вихідних даних, похибка обчислень та похибка моделі, що описує об'єкт. Всі ці

складові обов'язково мають місце на практиці. При цьому вплив похибок первинних даних на точність результату здійснюється шляхом використання та чисельної реалізації математичної моделі. Якість математичної моделі визначається як її адекватністю, так і її можливостями для ефективної чисельної і комп'ютерної реалізації. З цієї точки зору значна роль належить вибору форми (виду) моделі.

Існують різні форми динамічних моделей, в тому числі звичайні диференціальні рівняння, інтегральні рівняння та оператори, передавні функції, рівняння в частинних похідних. При цьому майже всі вони можуть бути аналітично еквівалентними між собою і застосовуватися для опису динаміки конкретного динамічного об'єкту. Тобто має місце принцип альтернативності при виборі тої чи іншої форми опису задач динаміки. Але слід мати на увазі, що ці моделі, як правило, не є рівноцінними при чисельній реалізації, оскільки розв'язки відповідних рівнянь отримуються різними за своїми властивостями чисельними процедурами (алгоритмами).

Альтернативність вибору динамічної моделі. Найбільш розповсюдженими динамічними моделями для опису процесів вимірювання є звичайні диференціальні рівняння, які в загальному випадку мають вигляд:

$$\begin{aligned} F(x, u(x), u'(x), \dots, u^{(n)}(x)) &= 0, \\ u(0) = C_1, u'(0) = C_2, \dots, u^{(n-1)}(0) &= C_n, \end{aligned} \quad (1)$$

де F — деяка функція, що визначає залежність (в загальному випадку нелінійну) між незалежною змінною x , шуканою функцією $u = u(x)$ і її похідними до n -го порядку включно, C_1, \dots, C_n — відомі значення початкових умов.

На відміну від диференціальних рівнянь, математичні моделі у вигляді інтегральних рівнянь включають в себе повну постановку задачі разом з початковими (граничними) умовами, допускають однотипний підхід при числовому розв'язку [1; 2].

В достатньо загальному (нелінійному) випадку інтегральна модель може бути представлена у вигляді

$$\int_Q K(x, y, u(y)) dy = F(x, u(x)), \quad (2)$$

де інтеграл береться по області Q , $u(x)$ — шукана функція; функції K (ядро) і F — задані.

Складовою частиною будь-якого інтегрального рівняння, що визначає його основні властивості є інтегральний оператор. Множина задач аналізу динамічних систем призводить до математичних моделей, що містять лінійний інтегральний оператор Вольтерра, нелінійні оператори Вольтерра-Гаммерштейна та оператори Вольтерра-Урисона.

Інтегральними рівняннями Вольтерра II роду, як лінійними так і нелінійними, описуються задачі аналізу динамічної системи з явно вираженою однонапрямленою зміною незалежної змінної, наприклад часу. Характерним прикладом таких задач є системи зі зворотнім зв'язком.

До рівнянь Вольтерра відносять інтегральні рівняння, що містять оператор Вольтерра, включаючи в цей клас і різні види нелінійних рівнянь. До найбільш поширених рівнянь цього типу відносяться наведені нижче рівняння [5; 6].

Лінійне одномірне (скалярне) рівняння Вольтерра II роду має вигляд

$$y(x) - \int_a^x K(x, s) y(s) ds = f(x), \quad x \in [a, b]. \quad (3)$$

З різними обмеженнями на ядро рівняння $K(x, s)$ і праву частину $f(x)$ пов'язані певні умови існування та єдиності знаходження розв'язку. Зокрема, розв'язок існує і єдиний, якщо ядро безперервно всередині і на сторонах трикутника, обмеженого прямими $s = a$, $x = b$, $x = s$ (при $b > a$), а функція $f(x)$ на проміжку $[a, b)$ має кінцеву кількість точок розриву,

причому вона може бути і необмеженою, якщо $\int_a^b |f(s)| ds$ має кінцеве

значення. Ядро задовольняє умові $K(x, s) \equiv 0$ при $s > x$. Замінюючи в (3) інтеграл квадратурною формулою, можна отримати апроксимуючу систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно значень шуканої функції у фіксованих вузлах з трикутною матрицею коефіцієнтів.

Рівняння (3) вміщує інтегральний оператор

$$A_B \varphi(x) \equiv \int_a^x K(x, s) \varphi(s) ds, \quad x \leq s, \quad (4)$$

важлива властивість якого полягає в тому, що значення функції $\psi(x) = A_B \varphi(x)$ при будь-якому x визначаються значеннями функції φ тільки при $s \leq x$. Інтегральні оператори, що характеризуються цією властивістю, в тому числі і нелінійні, називаються операторами Вольтерра і широко застосовуються при описі процесів з післядією. Дана властивість інтегрального оператора дозволяє застосовувати прийом розв'язання рівняння (3), що полягає в тому, що розв'язок може бути побудовано тільки на частинах проміжку $[a, b)$, наприклад, на деякому інтервалі $a \leq x \leq x_1$, користуючись виразом

$$y(x) = \left[\int_a^{x_1} K(x, s) y(s) ds + f(x) \right] + \int_{x_1}^x K(x, s) y(s) ds.$$

Важливим для практики числового розв'язку є випадок виродженого ядра (ядра, що розділяється):

$$K(x, s) = \sum_{i=1}^m \alpha_i(x) \beta_i(s), \quad (5)$$

де $\alpha_i(x)$, $\beta_i(s)$ — відомі функції однієї змінної, якому відповідає рівняння

$$y(x) - \sum_{i=1}^m \alpha_i(x) \int_a^x \beta_i(s) y(s) ds = f(x). \quad (6)$$

Розповсюдженням на практиці є рівняння Вольєрра II роду типу згортки (одностороннє):

$$y(x) - \int_0^x K(x-s) y(s) ds = f(x), \quad x \in [0, \infty), \quad (7)$$

або рівняння Вольєрра II роду типу згортки (двохстороннє)

$$y(x) - \int_{-\infty}^x K(x-s) y(s) ds = f(x), \quad x \in (-\infty, \infty). \quad (8)$$

Рівняння Вольєрра II роду з оператором Гаммерштейна (рівняння Вольєрра-Гаммерштейна):

$$y(x) - \int_a^x K(x, s) F[s, y(s)] ds = f(x), \quad x \in [a, b]. \quad (9)$$

Рівняння Вольєрра-Гаммерштейна II роду типу згортки:

$$y(x) - \int_0^x K(x-s) F[s, y(s)] ds = f(x), \quad x \in [0, \infty),$$

або

$$y(x) - \int_{-\infty}^x K(x-s) F[s, y(s)] ds = f(x), \quad x \in (-\infty, \infty) \quad (10)$$

Рівняння Вольєрра II роду з оператором Урисона (рівняння Вольєрра-Урисона):

$$y(x) - \int_a^x K[x, s, y(s)] ds = f(x), \quad x \in [a, b]. \quad (11)$$

Базовою формою математичної моделі процесів динамічної корекції є інтегральні рівняння Вольєрра I роду.

Лінійне одномірне інтегральне рівняння Вольєрра I роду має вигляд

$$Ay \equiv \int_a^x K(x, s) y(s) ds = f(x), \quad x \in [a, b]. \quad (12)$$

Важливий і широко розповсюджений в додатках різновид рівнянь (12) — рівняння типу згортки, в тому числі рівняння вигляду (двостороннє):

$$\int_{-\infty}^x K(x-s)y(s)ds = f(x), \quad -\infty < x < \infty, \quad (13)$$

а також (односторонні):

$$\int_0^x K(x-s)y(s)ds = f(x), \quad x \in [0, b]. \quad (14)$$

Рівняння Вольтерра I роду з оператором Гаммерштейна (рівняння Вольтера-Гаммерштейна I роду):

$$\int_a^x K(x,s)F[s,y(s)]ds = f(x), \quad x \in [a, b]. \quad (15)$$

Рівняння Вольтерра-Гаммерштейна I роду типу згортки двостороннє:

$$\int_{-\infty}^x K(x-s)F[s,y(s)]ds = f(x), \quad -\infty < x < \infty, \quad (16)$$

або одностороннє (на піввісі)

$$\int_0^x K(x-s)F[s,y(s)]ds = f(x), \quad x \in [0, b]. \quad (17)$$

Нелінійне рівняння Вольтерра I роду (рівняння Вольтерра-Урисона I роду):

$$\int_a^x K[x,s,y(s)]ds = f(x), \quad x \in [a, b]. \quad (18)$$

Інтегральні оператори. Визначальною складовою частиною будь-якого інтегрального або інтегро-диференціального рівняння є інтегральний оператор. Завдяки широкому застосуванню на практиці поняття вагової (апаратної) функції, лінійні інтегральні оператори мають і велике самостійне значення як явні моделі лінійних динамічних об'єктів. Нелінійні інтегральні оператори, природно, представляють собою моделі нелінійних об'єктів, хоча задача формування цього виду моделей значно складніша лінійного випадку [3;4]. Зазначимо коротко деякі основні відомості про інтегральні оператори, що являють собою найбільш розповсюджений вид динамічних макромоделей.

Інтегральне перетворення

$$u(t) = \int_{t_0}^T K(t,s)\varphi(s)ds, \quad (19)$$

в якому $\varphi(t) \in C[t_0, T]$, а ядро $K(t, s)$ — задана функція, що належить області (квадрату) $P\{t_0 \leq t, s \leq T\}$, є інтегральним оператором Фредгольма, окремим випадком якого є оператор Вольтерра

$$u(t) = \int_{t_0}^t K(t, s)Y(s) ds. \quad (20)$$

Поняття безперервності лінійної системи в повній мірі узгоджується з поняттям безперервності інтегрального оператора, що її описує.

Якщо в інтегральному операторі ядро $K(t, s)$ в області $P\{t_0 \leq t, s \leq T\}$ задовольняє умові

$$\int_{t_0}^T \int_{t_0}^T K^2(t, s) dt ds = B^2 < \infty, \quad (21)$$

тоді інтеграл (19) існує для довільної функції $\varphi(t) \in L_2[t_0, T]$.

Для дослідження асимптотичних властивостей динамічних моделей, з'ясування умов збіжності та стійкості наближених, в тому числі числових методів аналізу, важливим і досить складним є питання визначення норм інтегральних операторів. У таких випадках часто використовують оцінки норм.

Лінійність моделі (18) показується завдяки властивій їй адитивності:

$$\int_{t_0}^T K(t, s)[\varphi_1(s) + \varphi_2(s)] ds = \int_{t_0}^T K(t, s)\varphi_1(s) ds + \int_{t_0}^T K(t, s)\varphi_2(s) ds,$$

та властивості однорідності

$$\int_{t_0}^T K(t, s)\alpha\varphi(s) ds = \alpha \int_{t_0}^T K(t, s)\varphi(s) ds.$$

Інтегральний оператор безпосередньо відповідає розповсюдженій моделі «вхід-вихід» як опису зв'язку вхідних і вихідних сигналів динамічної системи. Необхідність в такому описі з'являється при розгляданні поведінки як окремих блоків об'єкта так і всього об'єкта в цілому. Математичні моделі «вхід-вихід» по суті представляють собою макромоделі і отримуються експериментально.

Висновки. Таким чином, аналіз особливостей інтегрального методу математичного моделювання динамічних об'єктів свідчить про те, що певні переваги динамічних моделей у вигляді інтегральних рівнянь та операторів забезпечують позитивні можливості побудови ефективних методів та засобів створення, дослідження, проектування та функціонування вимірювальних систем з вбудованими засобами динамічної корекції точності.

Список використаних джерел:

1. Верлань А. Ф. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы / А. Ф. Верлань, В. С. Сизиков. — Киев : Наукова думка, 1986. — 544 с.
2. Мороз В. І. Інтегральні рівняння в моделюванні керованих електромеханічних систем / В. І. Мороз // Електротехніка і електромеханіка. — 2007. — № 3. — С. 39–43.
3. Franz M. O. A unifying view of Wiener and Volterra theory and polynomial kernel regression / M.O. Franz, B. Scholkopf // Neural Computation. — 2006. — Vol. 18 (12). — P. 3097-3118 — Режим доступу: <http://www.mitpressjournals.org/doi/pdf/10.1162/neco.2006.18.12.3097>.
4. Guo Yuzhu. Volterra Series Approximation of a Class of Nonlinear Dynamical Systems Using the Adomian Decomposition Method / Yuzhu Guo, L. Z. Guo, S. A. Billings, Daniel Coca, Z. Q. Lang // Nonlinear Dynamics. — 2013. — Vol. 74. — Issue 1–2. — P. 359–371.
5. Kress R. Linear Integral Equations / R. Kress. — 3rd ed. — 2014. — 412 p.
6. Pearson R. K. Identification of structurally constrained second-order Volterra models / R. K. Pearson, B. A. Ogunnaike, F. J. Doyle // IEEE Trans. on Signal Processing. — 1996. — Vol. 44, № 11. — P. 2837-2846.

PROPERTIES OF INTEGRAL DYNAMIC MODELS IN THE FORM OF OPERATORS AND EQUATIONS OF THE VOLTERRA TYPE

Accuracy of dynamic object modeling results depends on the errors of different types: source data errors, calculation errors and model error. Errors of the primary data influence the accuracy of the result through the use and numerical implementation of the mathematical model. There are various forms of dynamic models, including ordinary differential equations, integral equations and operators, transfer functions, partial differential equations. The most common dynamic models for describing measurement processes are ordinary differential equations. But mathematical models in the form of integral equations have the advantage over them because, unlike differential equations, include the complete formulation of the problem together with the initial (boundary) conditions, they allow a one-size-fits-all approach to numerical solutions.

An integral operator is an integral part of any integral equation that defines its basic properties. Many dynamical systems analysis problems result in mathematical models containing a linear integral Volterra operator, nonlinear Volterra-Hammerstein operators and Volterra-Uriason operators. Volterra II-type integral equations, both linear and nonlinear, describe the problems of analyzing a dynamic system with a pronounced unidirectional change in an independent variable, such as time. A typical example of such tasks is feedback systems.

The analysis of the peculiarities of the integral method of mathematical modeling of dynamic objects shows that certain advantages of dynamic models in the form of integral equations and operators provide positive possibilities for constructing effective methods and means of creation, research, design and operation of measurement systems with integrated means of dynamic correction.

Key words: *dynamic model, integral equation, integral operator, Volterra integral equation, degenerate nucleus.*

Отримано: 9.08.2019

УДК 004.032.26:004.832

DOI: 10.32626/2308-5916.2019-20.121-130

С. І. Шаповалова, канд. техн. наук,

О. М. Бараніченко, аспірант

Національний технічний університет України

«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», м. Київ

РОЗВ'ЯЗАННЯ ЛОГІЧНИХ ЗАДАЧ НА ОСНОВІ МАШИННОГО НАВЧАННЯ

У статті запропоновано спосіб розв'язання логічних задач-головоломок на основі машинного навчання. Спосіб розраховано на попередню формалізацію задач у вигляді опису властивостей та відношень між ними. Оскільки кожна властивість має множину можливих значень, розв'язання задачі методами перебору має комбінаторну складність. При великій кількості властивостей та їх значень час розв'язання стрімко зростає.

В останні роки окремим напрямом досліджень з машинного навчання стало розв'язання логічних задач такого типу. Однак існуючі рішення цього напрямку мають ряд недоліків, насамперед вони не завжди гарантують коректне розв'язання.

У роботі представлено спеціальну мережу зв'язків для навчання розв'язанню логічних задач, а також їх формалізацію для представлення цій мережі. Мережа містить обчислювальні вузли, які відображають відношення між властивостями, та вузли вхідних шарів, які задають значення цих відношень.

Розв'язання кожної задачі відбувається шляхом автоматичного створення мережі зв'язків з її подальшим навчанням до отримання розв'язку. Приведено геометричну інтерпретацію n -мірної мережі зв'язків та її $(n - 1)$ -мірних шарів. Наведено формалізацію представлення навчальної вибірки та алгоритм навчання. Представлено механізм розв'язання логічних комбінаторних задач.

Наведено приклади задач, які є традиційними тестами в системах логічного програмування та продукційних (експертних) системах, а також задач з ресурсу bAbI таких класів: two supporting facts, two arguments relations, positional reasoning.

Експериментально доведено ефективність запропонованого способу.

Визначено перспективи подальших досліджень, які пов'язані зі створенням лексико-синтаксичного аналізатора для автоматичного представлення властивостей, їх значень та відношень між ними.

Запропонований спосіб є універсальним і не залежить від характеристик поточної задачі, таких як кількості властивостей та їх значень.

Ключові слова: логічні головоломки, машинне навчання.

Вступ. В сучасних прикладних програмних системах часто виникає необхідність у розв'язанні логічних задач. Різновидом таких задач є задача підбору значень властивостей на основі опису об'єктів і зв'язків між ними. В таких задачах кожен об'єкт має набір властивостей. Кожна властивість має множину можливих значень. Задача полягає у визначенні такої комбінації значень властивостей всіх об'єктів, що не суперечать заданим умовам. Прикладами таких задач є створення розкладів, логістика, розподіл ресурсів. Як правило, алгоритми розв'язання мають комбінаторну складність, завдяки перебору значень аргументів задач. Зі збільшенням кількості аргументів на порядки зростає час розв'язання. Зі стрімким розвитком нейронних мереж з'явилися дослідження з розв'язання цих задач на основі машинного навчання. Однак існуючі рішення цього напрямку мають ряд недоліків, насамперед вони не завжди гарантують коректне розв'язання. Тому задача автоматичного розв'язання логічних задач на основі машинного навчання є актуальною.

Аналіз останніх досліджень. Розв'язання комбінаторних логічних задач відноситься до одного з історично перших напрямів штучного інтелекту. Для їх розв'язання були створені спеціальні механізми. Одним з найбільш відомих механізмів логічного висновування є Prolog. Для перевірки ефективності його реалізації використовуються тестові задачі (benchmarks), якими є саме логічні задачі зазначеного типу. Колекції таких задач представлено на ресурсах [1, 2].

Інший підхід представлено в роботі [3]. Автор запропонував представлення логічної задачі у вигляді набору булевих виразів. На їх основі будуються і заповнюються таблиці властивостей. Однак метод не дозволяє реалізовувати складні відношення значень властивостей логічної задачі.

У роботі [4] задача представляється таблицею зв'язків між значеннями властивостей. Автори запропонували універсальний алгоритм розв'язання логічних задач на основі розрахунків сум існуючих значень таких зв'язків. Однак цей метод враховує лише наявність зв'язку між атрибутами і не дозволяє призначити додаткові умови.

Сучасною тенденцією досліджень зі штучного інтелекту є спроби розв'язання таких задач на основі машинного навчання. В роботі [5] було представлено систему Sherlock, яка вирішує логічні задачі на основі парадигми об'єднання індуктивного навчання і логічного програмування. Для спрощення логічного висновування як правило задача формалізується в представлення, пристосоване для комп'ютерної обробки. В цій роботі задача представляється за допомогою запропонованої авторами мови з синтаксисом, схожим на Prolog. Одним з недоліків даної системи є залежність від умов задачі.

В роботі [6] наведено результати розв'язання логічних задач проекту bAbI [1] за допомогою нейронних мереж. Однак для деяких різновидів задач відсоток коректних відповідей є досить низьким, зокрема для задач Counting, Lists/Sets, Positional Reasoning, Path Find.

Тому необхідно розробити універсальний механізм автоматичного розв'язання логічних задач на основі машинного навчання.

Мета і задачі. Метою роботи є створення обчислювальної структури, яка розв'язує логічні задачі на основі навчання за їх формалізованим описом. Для виконання даної мети необхідно було вирішити такі завдання:

1. Виконати формалізацію логічних комбінаторних задач.
2. Розробити спеціальну мережу для навчання розв'язанню логічних задач.
3. Розробити алгоритм навчання.
4. Провести обчислювальні експерименти на тестових задачах.

Формалізація логічної задачі. Логічна задача складається з набору властивостей, кожна з яких має набір можливих значень. Нехай задача складається з n властивостей, кожна з яких має m значень. Наприклад, для задачі Ейнштейна: $n = 6$ (номер будинку, його колір, національність мешканця, його улюблені напої, цигарки та тварина), $m = 5$ для всіх властивостей (номери будинків — 1, 2, 3, 4, 5; кольори будинків — білий, жовтий, зелений, червоний, синій; національності — англієць, данець, німець, норвежець, швед; напої — вода, кава, молоко, пиво, чай; цигарки — Dunhill, Marlboro, Pall-Mall, Philip Morris, Rothmans; тварини — кішка, кінь, пташка, риба, собака).

Таким чином, кожному властивості P_i (property) можна представити множиною її значень v_i^j (value):

$$P_i = \{v_i^j\},$$

де P_i — i -та властивість, $i = 1..n$, v_i^j — значення j властивості i , $i = 1..n$, $j = 1..m$.

Для задачі Ейнштейна: P_1 — номер будинку, P_2 — колір будинку, ... , P_6 — тварина. Наприклад, $P_3 = \{\text{англієць, данець, німець, норвежець, швед}\}$.

Кожна k -та можлива комбінація значень властивостей C_k (combination), матиме вид:

$$C_k = (x_k^1, x_k^2, \dots, x_k^n), \quad (1)$$

де k — номер поточної комбінації, v_i^k — можливе значення i -ї властивості, $v_i^k \in P_i$.

Наприклад, $C_1 = (1, \text{білий, англієць, вода, Dunhill, кішка})$, $C_2 = (1, \text{білий, англієць, вода, Dunhill, кінь})$, та інші.

Максимальна кількість комбінацій без урахування додаткових умов:

$$q = m^n, \quad (2)$$

де n — кількість властивостей задачі, m — кількість значень властивостей задачі

Рішенням задачі буде множина комбінацій, що не суперечать всім умовам задачі:

$$S = \{C_1, C_2, \dots, C_o\}, \quad (3)$$

де o — кількість коректних комбінацій значень властивостей, $o \leq q$.

Для вирішення задачі використовуються умови відношень між двома значеннями властивостей:

$$v_{i_1}^{j_1} \prec rel \succ v_{i_2}^{j_2} \quad (4)$$

де $v_{i_1}^{j_1}$ — значення j_1 властивості i_1 , $j_1 \in 1..m$, $i_1 \in 1..n$, $v_{i_2}^{j_2}$ — значення j_2 властивості i_2 , $j_2 \in 1..m$, $i_2 \in 1..n$, $\prec rel \succ$ — визначене відношення між властивостями з зазначеними значеннями.

При формалізації задачі всі зв'язки предметної області зводяться до тверджень про наявність/відсутність відповідного зв'язку, що позначається $\prec \epsilon \succ$ / $\prec ne \epsilon \succ$. Наприклад: $1 \prec \epsilon \succ$ білий, $2 \prec ne \epsilon \succ$ зелений.

Обчислювальна структура розв'язання логічних задач. Для розв'язання логічних задач було розроблено спеціальну структуру — мережу зв'язків. Мережа представляє собою n -мірну «решітку» вузлів. Розмірність мережі n дорівнює кількості властивостей задачі.

Приклад мережі в початковому стані для 2-х властивостей, кожна з яких має по 3 значення, зображено на рисунку 1. Цей приклад відображає частину задачі Ейнштейна для трьох будинків з номерами: 1, 2, 3, та можливими кольорами: синім, червоним, зеленим.

Вхідним шаром мережі зв'язків є вузли, які представляють собою значення властивостей задачі. На рисунку 1 властивість «номер будинку» зі значеннями 1, 2, 3 представляється вузлами $v_1^1 - v_1^3$ відповідно, а властивість «колір будинку» зі значеннями синій, червоний, зелений — вузлами $v_2^1 - v_2^3$.

Після визначення вхідних шарів необхідно побудувати внутрішню структуру мережі, яка містить обчислювальні вузли.

Кожен обчислювальний вузол фактично представляє C_k комбінацію значень всіх властивостей (2). Загальна кількість вузлів складає q (3). На кожному етапі обчислювальний вузол містить власне значення Nv (Node value), отримане при ініціалізації, або внаслідок навчання. Вузол може приймати значення 1, тобто комбінація C_k можлива, або 0 — комбінація неможлива.

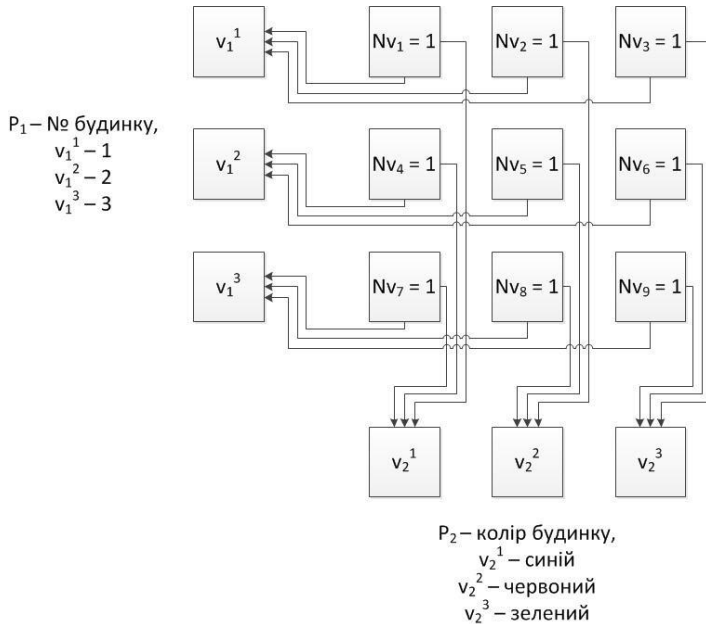


Рис. 1. Приклад мережі зв'язків

Приклад наведено для двомірної мережі зв'язків для наочності графічного представлення. Але принципи побудови можна розповсюдити на n -мірну мережу.

В алгоритмі використовується поняття $(n - 1)$ -мірного шару. Такий шар представляє деякий зріз з фіксованим значенням однієї властивості. В наведеному прикладі $(n - 1)$ -мірним шаром для фіксованого значення v_1^2 буде набір вузлів зі значеннями Nv_4, Nv_5, Nv_6 , для v_1^1 — зі значеннями Nv_1, Nv_4, Nv_7 . Виходячи з геометричних представлень $(n - 1)$ -мірний шар мережі при:

- 1) $n = 2$, є рядком або стовбцем;
- 2) $n = 3$, є площиною;
- 3) $n = 4$, є паралелепіпедом.

Запропонована мережа може мати будь-яку розмірність, однак для випадків $n > 3$ це важко інтерпретувати геометрично.

Для отримання розв'язку задачі побудована мережа повинна пройти навчання.

Навчання мережі зв'язків. Навчання полягає у встановленні значень Nv для всіх вузлів мережі. Критерієм закінчення навчання є відсутність змін значень Nv всіх вузлів по відношенню до поперед-

ної епохи. Епохою вважається представлення мережі всіх навчальних прикладів з подальшим уточненням значень вузлів. Навчальним прикладом є відношення між значеннями двох властивостей (4).

Представлення прикладу полягає в послідовному перерахунку значень всіх вузлів мережі. Перерахунок значення поточного вузла здійснюється за таким алгоритмом:

1. Визначення кількості збігів значень властивостей в поточній комбінації C_k з поточним прикладом.
2. Оновлення значення вузла:

$$N_v^i = N_v \times F(S, R),$$

де N_v^i — нове значення вузла, N_v — значення, встановлене після представлення попереднього прикладу, S — кількість збігів значень властивостей, R — відношення між значеннями властивостей, $F(S, R)$ — функція, яка залежить від кількості збігів значень властивостей і визначається в таблиці 1.

Таблиця 1

Значення функції оновлення

Вхідні параметри		Значення функції
R	S	F
$\langle \epsilon \rangle$	0	1
$\langle \epsilon \rangle$	1	0
$\langle \epsilon \rangle$	2	1
$\langle \text{не } \epsilon \rangle$	0	1
$\langle \text{не } \epsilon \rangle$	1	1
$\langle \text{не } \epsilon \rangle$	2	0

Після представлення всіх прикладів здійснюється *уточнення значень мережі* за таким алгоритмом:

1. Виокремлення всіх можливих $(n - 1)$ -мірних шарів.
2. Обчислення суми встановлених значень всіх вузлів поточного s -го шару Sl_s (Sum of layer).
3. Оновлення значень за схемою:

3.1. Якщо сума $Sl=1$ — формується додаткова навчальна вибірка зі всіх відношень « ϵ », які відображають поточний вузол:

$$x_k^i \langle \epsilon \rangle x_k^j, i = 1..n, j = 1..n, i \neq j,$$

де k — номер поточного вузла, n — кількість властивостей задачі.

Після цього здійснюється представлення всіх цих прикладів за вищеописаним алгоритмом.

- 3.2. Якщо $SI \neq 1$ — здійснюється обробка наступного $(s + 1)$ -го шару поточного вузла.
4. Перевірка закінчення алгоритму уточнення:
 - 4.1. Якщо є необроблені шари поточного вузла, здійснюється обробка наступного шару — повернення до пункту 2 поточного алгоритму.
 - 4.2. Якщо всі шари поточного вузла оброблено, здійснюється перехід до обробки наступного вузла — повернення до пункту 1.

Навчання відбувається за схемою:

1. Ініціалізація вузлів мережі: в кожному вузлі встановлюється значення 1.
2. Навчання за поточною епохою: представлення всіх навчальних прикладів з подальшим уточненням мережі за кожним з них.
3. Перевірка закінчення навчання: якщо умова закінчення навчання не виконується — перехід до наступної епохи. В іншому випадку — отримання розв'язку задачі у вигляді (5).

Обчислювальні експерименти. Для апробації запропонованого алгоритму було використано представлення n -мірної мережі зв'язків у вигляді одновимірного масиву. Представлення n -мірності організовано за допомогою вирахування індексів.

На рисунку 2 наведено фрагмент інтерфейсу програмної системи з формалізацією задачі Ейнштейна за властивостями та їх значеннями.

Номер будинку	
Колір	
Напій	
Тварина	
Цигарки	
Національність	
Назва значення	
	Зелений
Створити	
Редагувати	
Видалити	
Білий	
Жовтий	
Зелений	
Червоний	
Синій	
Створити	
Редагувати	

Рис. 2. Формалізація задачі Ейнштейна

Навчальна вибірка для задачі Ейнштейна представлена на рисунку 3.

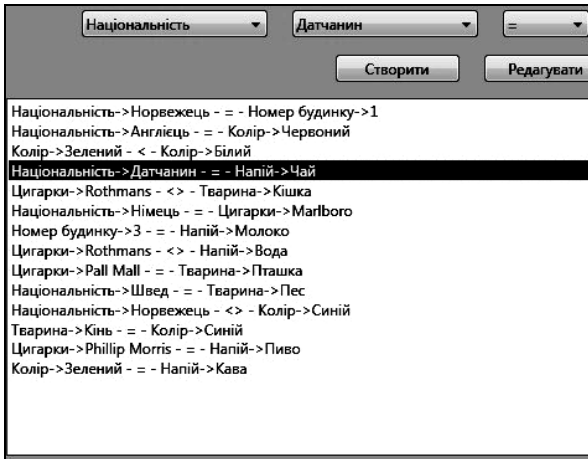


Рис. 3. Навчальна вибірка для задачі Ейнштейна

Розв'язок задачі представлено на рисунку 4.

Номер будинку	Колір	Напій	Тварина	Цигарки	Національність
1	Жовтий	Вода	Кішка	Dunhill	Норвежець
2	Синій	Чай	Кінь	Rothmans	Датчанин
3	Червоний	Молоко	Пташка	Pall Mall	Англієць
4	Зелений	Кава	Риби	Marlboro	Німець
5	Білий	Пиво	Пес	Phillip Morris	Швед

Рис. 4. Розв'язок задачі Ейнштейна

У випадку, якщо задача має декілька розв'язків, система видає рішення як перелік коректних комбінацій значень параметрів S_k . Такий приклад з варіантами розв'язання задачі Ейнштейна при видавленні першої умови наведено на рисунку 5.

Номер будинку	Колір	Напій	Тварина	Цигарки	Національність
1	Жовтий	Вода	Кішка	Dunhill	Норвежець
1	Жовтий	Вода	Риби	Dunhill	Норвежець
1	Жовтий	Вода	Пес	Dunhill	Швед
1	Жовтий	Чай	Кішка	Dunhill	Датчанин
1	Жовтий	Чай	Риби	Dunhill	Датчанин
1	Зелений	Кава	Кішка	Marlboro	Німець
1	Зелений	Кава	Кішка	Rothmans	Норвежець
1	Зелений	Кава	Пташка	Pall Mall	Норвежець
1	Зелений	Кава	Риби	Marlboro	Німець
1	Зелений	Кава	Риби	Rothmans	Норвежець
1	Зелений	Кава	Пес	Rothmans	Швед
1	Червоний	Вода	Кішка	Rothmans	Англієць
1	Червоний	Вода	Пташка	Pall Mall	Англієць

Рис. 5. Можливі комбінації для задачі Ейнштейна з неповною навчальною вибіркою

Розроблене програмне забезпечення реалізовано на платформі .Net Framework 4.6, мовою C#. Тестування та апробація системи відбувалися під керуванням операційної системи Windows 10 x64.

Для експериментів було обрано задачі, які є традиційними тестами в системах логічного програмування та продукційних системах: задача Ейнштейна, розміщення за столом. Крім того, було розв'язано задачі з ресурсу bAbI [1] таких класів: two supporting facts, two arguments relations, positional reasoning.

В таблицю 2 зведено інформацію з тестових задач, а також характеристики їх розв'язання.

Таблиця 2

Результати обчислювальних експериментів

№	Назва задачі	Параметри задачі		Час розв'язання, с	Кількість епох	Кількість коректних комбінацій o
		Кількість властивостей n	Кількість значень m			
1	Задача Ейнштейна	6	5	5.71	6	5
2	Розміщення за столом	3	4	1.12	3	4
3	Розміщення за столом	4	3	1.53	3	3
4	bAbI, two supporting facts	2	3	0.76	3	3
5	bAbI, two arguments relations	2	3	0.83	3	3
6	bAbI, positional reasoning	3	4	1.78	4	4

Таким чином, представлено механізм розв'язання логічних комбінаторних задач. Розв'язання кожної задачі відбувається шляхом автоматичного створення мережі зв'язків з її подальшим навчанням до отримання розв'язку.

Висновки.

1. Розроблено формалізацію логічних комбінаторних задач як набору властивостей та їх значень.
2. Розроблено представлення задачі у вигляді мережі зв'язків для навчання розв'язанню логічних задач.
3. Розроблено алгоритм навчання.
4. Експериментально доведено ефективність запропонованого способу.

Перспективою подальших досліджень є створення системи з лексико-синтаксичним аналізатором для автоматичного представлення властивостей, їх значень та відношень між ними.

Список використаних джерел:

1. bAbI — Facebook research // Facebook research. — 2015. — Access mode: <https://research.fb.com/downloads/babi/>.

2. Einstein's riddle and grid puzzles. — 2012. — Access mode: <http://brainden.com/einsteins-riddles.htm>.
3. Filho W. Solving the Zebra Puzzle with Boolean Algebra / W. Filho. — 2017. — Access mode: <https://code.energy/solving-zebra-puzzle/>.
4. Application of «Einstein's riddle» in solving construction machine allocation problems / B. Dasović, M. Čorak, M. Galić, U. Klanšek // E-gfos. — 2016. — P. 12–22.
5. Zhang Q. Sherlock — A Neural Network Software for Automated Problem Solving. — 2011. — Access mode: <http://www.macs.hw.ac.uk/~ek19/QK.pdf>.
6. Towards AI-complete question answering: a set of prerequisite toy tasks / [J. Weston, A. Bordes, S. Chopra a.o.] // arXiv. — 2015. — Access mode: <https://arxiv.org/pdf/1502.05698.pdf>.

LOGICAL PUZZLES SOLVING BASED ON MACHINE LEARNING

The article proposes a method of solving logical puzzles on the basis of machine learning. The method is designed for the preliminary formalization of tasks in the form of description of properties and relations between them. Because each property has a set of possible values, the solution of the puzzle by the methods of search has a combinatorial complexity. With a large number of properties and their values, the time of the solving is rapidly increasing.

In recent years, a separate area of research in machine learning has been the solution to logical tasks of this type. However, existing solutions to this area have a number of shortcomings, first and foremost, they do not always guarantee a correct solution.

The paper presents a special network of connections for learning the solution of logical puzzles, as well as their formalization for the representation of this network. The network contains computing nodes that represent the relationship between properties, and the nodes of the input layers that specify the values of these relationships.

Every task is solved by automatically creating a network of links with its further training until the solution is obtained. The geometric interpretation of the n -dimensional network of bonds and its $(n-1)$ -dimensional layers is given. The formalization of the presentation of the study sample and the learning algorithm are presented. The mechanism of solving logical combinatorial problems is presented.

The article presents examples of tasks that are traditional tests in systems of logical programming and production (expert) systems, as well as tasks from the resource bAbI of such classes: two supporting facts, two argument relations, positional reasoning.

The efficiency of the proposed method has been experimentally proved.

The prospects of further researches, which are connected with the creation of a lexical-syntactic analyzer for automatic representation of properties, their values and relations between them, are determined.

The proposed method is universal and does not depend on the characteristics of the current task, such as the number of properties and their values.

Key words: *logical puzzles, machine learning.*

Отримано: 13.08.2019

УДК 004.94

DOI: 10.32626/2308-5916.2019-20.131-145

Д. А. Верлань*, канд. техн. наук,

В. В. Понеділок**, канд. техн. наук

* ТОВ «Науково-виробниче підприємство «ІНФОТЕХ», м. Київ

** Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

ЧИСЕЛЬНА РЕАЛІЗАЦІЯ ІНТЕГРАЛЬНИХ ДИНАМІЧНИХ МОДЕЛЕЙ НА ОСНОВІ МЕТОДУ ВИРОДЖЕНИХ ЯДЕР

Використання математичних моделей динамічних об'єктів у вигляді інтегральних рівнянь типу Вольтерри дозволяє ефективно розв'язувати широкий клас теоретичних та практичних дослідницьких задач. Традиційним підходом щодо розв'язання цих рівнянь є застосування квадратурних алгоритмів різного порядку точності, яка залежить від вигляду ядра Вольтерри та кроку дискретизації, що часто призводить до значної кількості обчислювальних операцій та труднощів програмної реалізації в загальному випадку. Перспективним є використання алгоритмів методу вироджених ядер для розв'язання рівнянь Вольтерри II роду, які мають суттєву перевагу за обсягом обчислювальних операцій по відношенню до традиційних алгоритмів прямого методу квадратур. Розглянуто алгоритми побудови резольвенти, що дозволяє забезпечити ефективність резольвентного методу розв'язування рівнянь даного класу. Задача застосування даного методу до розв'язування рівнянь Вольтерри (або рівнянь іншого типу) призводить до отримання низки нових чисельних алгоритмів, властивості яких повинні бути дослідженими. Практична цінність алгоритмів, що розробляються, полягає у можливості створення на їх основі відповідних програмних засобів, які не містяться у існуючих серійних пакетах комп'ютерного моделювання. При цьому з'являється можливість порівнювати отримані алгоритми з відомими квадратурними алгоритмами за швидкодією, як найбільш важливому показнику для динамічних моделей систем керування.

Ключові слова: *інтегральне рівняння Вольтерри II роду, квадратурний метод, метод вироджених ядер, резольвента.*

Вступ. Традиційним призначенням методу вироджених ядер є розв'язок лінійних інтегральних рівнянь типу Фредгольма II роду. Тому задача застосування даного методу до розв'язування рівнянь Вольтерри (або рівнянь іншого типу) приводить до отримання низки нових чисельних алгоритмів, властивості яких повинні бути дослідженими. При цьому з'являється можливість порівнювати отримані алгоритми з відомими квадратурними алгоритмами за швидкодією,

як найбільш важливому показнику для динамічних моделей систем керування [1].

Практична цінність алгоритмів, що розробляються, полягає у можливості створення на їх основі відповідних програмних засобів, які не містяться у існуючих серійних пакетах комп'ютерного моделювання.

Основна частина. При чисельній реалізації інтегрального рівняння Вольтерри II роду

$$\varphi(x) - \int_a^x K(x, s)\varphi(s) ds = f(x) \quad (1)$$

перехід до дискретних обчислювальних схем здійснюється за допомогою виразу

$$\varphi(x_i) - \int_a^{x_i} K(x_i, s)\varphi(s) ds = f(x_i). \quad (2)$$

Беручи значення x_i в якості вузлів квадратурної формули і замінюючи інтеграл скінченною сумою, отримаємо систему алгебраїчних рівнянь [2–5]

$$\tilde{\varphi}(x_i) - \sum_{j=1}^i A_j K(x_i, x_j) \tilde{\varphi}(x_j) \cong f(x_i), \quad (3)$$

де $x_j = j \cdot h$, h — крок квадратури, $\tilde{\varphi}(x_i)$ — наближені значення функції $\varphi(x_i)$ в вузлах x_i . Для побудови ефективного алгоритму доцільно отримати рекурентний вираз, користуючись тим, що це можна зробити саме для рівнянь Вольтерри, на відміну від рівнянь Фредгольма. Застосовуючи, наприклад, формулу трапецій можна записати наступні розрахункові вирази:

для змінного кроку (*загальний випадок*):

$$\tilde{\varphi}(x_1) = f(x_1), \quad \tilde{\varphi}(x_2) = \frac{\left(f(x_2) + \frac{h_2}{2} K(x_2, x_1) \cdot \varphi(x_1) \right)}{1 - \frac{h_2}{2} K(x_2, x_2)},$$

$$\tilde{\varphi}(x_i) = \frac{\left(f(x_i) + \frac{h_2}{2} K(x_i, x_1) \cdot \varphi(x_1) + \sum_{j=2}^{i-1} \frac{h_j + h_{j+1}}{2} K(x_i, x_j) \cdot \varphi(x_j) \right)}{1 - \frac{h_i}{2} K(x_i, x_i)}, \quad (4)$$

де $i = 3, 4, \dots, n$; $h_j = x_j - x_{j-1}$; для постійного кроку ($h = const$):

$$\tilde{\varphi}(x_1) = f(x_1),$$

$$\tilde{\varphi}(x_i) = \frac{\left(f(x_i) + \frac{h}{2} K(x_i, x_1) \cdot \varphi(x_1) + h \sum_{j=2}^{i-1} K(x_i, x_j) \cdot \varphi(x_j) \right)}{1 - \frac{h}{2} K(x_i, x_i)}. \quad (5)$$

Слід відзначити, що при використанні традиційного розрахункового виразу (5) час обчислення шуканої функції залежить від кількості кроків дискретизації, збільшення яких призводить до збільшення кількості обчислювальних операцій. Розрахунковий вираз, отриманий у випадку ядра, що розділяється, із застосуванням формули трапецій, має вигляд: при змінному кроці дискретизації (загальний випадок):

$$\tilde{\varphi}(x_1) = f(x_1),$$

$$\tilde{\varphi}(x_2) = \frac{f(x_2) + \frac{h_2}{2} \sum_{l=1}^m a_l(x_2) \cdot \beta_l(x_1) \cdot \varphi(x_1)}{1 - \frac{h_2}{2} \sum_{l=1}^m a_l(x_1) \cdot \beta_l(x_1)},$$

$$\tilde{\varphi}(x_i) = \frac{f(x_i) + \frac{h_2}{2} \sum_{l=1}^m \alpha_l(x_i) \beta_l(x_1) \varphi(x_1) + \sum_{l=1}^m \alpha_l(x_i) \cdot \sum_{j=2}^{i-1} \frac{h_j + h_{j+1}}{2} \beta_l(x_j) \varphi(x_j)}{1 - \frac{h_i}{2} \sum_{l=1}^m \alpha_l(x_i) \cdot \beta_l(x_i)}, \quad (6)$$

де $i = 3, 4, \dots, n$; $h_j = x_j - x_{j-1}$; при постійному кроці дискретизації ($h = \text{Const}$):

$$\tilde{\varphi}(0) = f(0),$$

$$\tilde{\varphi}(x_i) = \frac{f(x_i) + h \sum_{l=1}^m \alpha_l(x_i) \cdot \sum_{j=1}^{i-1} A_j \beta_l(x_j) \cdot \varphi(x_j)}{1 - \frac{h}{2} K(0)}, \quad (7)$$

де $i = 2, 3, \dots, n$; $A_j = \begin{cases} 0,5, & \text{при } j = 1, \\ 1, & \text{при } j > 1. \end{cases}$

Аналогічно можуть бути отримані розрахункові вирази для розв'язання систем інтегральних рівнянь Вольтерри II роду.

Приклад 1. Розв'язується інтегральне рівняння Вольтерри II роду

$$\varphi(x) = x \cdot 3^x - \int_0^x 3^{x-s} \cdot \varphi(s) \cdot ds \quad (8)$$

в інтервалі від 0 до 0,4 з кроком дискретизації $h = 0,02$. Використовуючи традиційний алгоритм (5), отримуємо співвідношення відносно $\varphi_T(x_i)$

$$\varphi_T(0) = (0),$$

$$\varphi_T(x_i) = \frac{x_i \cdot 3^{x_i} - h \sum_{j=1}^{i-1} A_j 3^{x_i - x_j} \cdot \varphi_n(x_j)}{1 - \frac{h}{2}}, \quad (9)$$

а при використанні властивостей виродженості ядра модифіковане розрахункове співвідношення маємо відносно $\varphi_M(x_i)$

$$\varphi_M(0) = (0),$$

$$\varphi_M(x_i) = \frac{\left[3^{x_i} \cdot \left(x_i - h \sum_{j=1}^{i-1} A_j 3^{-x_j} \cdot \varphi_m(x_j) \right) \right]}{\left(1 - \frac{h}{2} \right)}. \quad (10)$$

У таблиці 1. представлені результати обчислень за розрахунковими співвідношеннями (9) і (10), а також точний розв'язок $\varphi_0(x_i)$. Як видно з таблиці 1. по точності обидва алгоритми збігаються; похибка отриманого розв'язку не перевищує 0,0008.

Таблиця 1

Результати дослідження для прикладу 1

x_i	$\varphi_T(x_i)$	$\varphi_0(x_i)$	$\varepsilon(x) = \varphi_T(x_i) - \varphi_0(x_i) $	$\varphi_M(x_i)$	$\varepsilon(x) = \varphi_T(x_i) - \tilde{\varphi}_0(x_i) $
0	0,0000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
0,02	0,0202	0,02024	0,00004	0,02024	0,00004
0,04	0,0409	0,04097	0,00007	0,04097	0,00007
0,06	0,0622	0,06221	0,00001	0,06221	0,00001
0,08	0,0839	0,08395	0,00005	0,08395	0,00005
0,1	0,1062	0,10622	0,00002	0,10622	0,00002
0,12	0,1290	0,12902	0,00002	0,12902	0,00002
0,14	0,1523	0,15237	0,00007	0,15237	0,00007
0,16	0,1762	0,17628	0,00008	0,17628	0,00008
0,18	0,2007	0,20076	0,00006	0,20076	0,00006

Час розв'язання за алгоритмом (9) при кроці $h = 0,02$ становить 0,08 секунди, а за алгоритмом (10) — становить 0,06 секунди, тобто алгоритми, отримані на основі використання роздільності ядра є більш швидкодіючими, ніж традиційні алгоритми.

Резольвентний метод. Резольвента. Загальною аналітичною формою розв'язання рівняння Вольтерри II роду є вираз [4, 6]

$$y(x) = f(x) + \int_a^x R(x,s) f(s) ds, \quad (11)$$

де функція $R(x,s)$ є резольвентою (резольвентним або розв'язуючим ядром).

Ітеровані ядра. Резольвента рівняння (11) визначається виразом

$$R(x,s) = \sum_{n=0}^{\infty} K_{n+1}(x,s), \quad (12)$$

де $K_n(x,s)$ — ітеровані (повторні) ядра, які визначаються рекурентними співвідношеннями

$$K_1(x,s) = K(x,s),$$

$$K_{n+1}(x,s) = \int_s^x K(x,t) K_n(t,s) dt, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (13)$$

Визначення резольвенти і чисельна або аналітична реалізація виразу (12) означає, по суті, операцію обернення оператора об'єкта, що моделюється, представленого лівою частиною рівняння (11). Крім того, такий підхід до пошуку розв'язку відкриває можливості отримання ряду нових чисельних алгоритмів моделювання, що реалізують явне подання оберненого оператора задачі.

Приклад 2. Техніку дій з ітерованими ядрами можна проілюструвати на прикладі визначення резольвенти ядра $K(x,s) = K_1(x,s) = e^{x-s}$.

Згідно (13)

$$K_2(x,s) = \int_s^x e^{x-z} e^{z-s} dz = e^{x-s} \int_s^x dz = e^{x-s} (x-s),$$

$$K_3(x,s) = \int_s^x e^{x-z} e^{z-s} (z-s) dz = e^{x-s} \frac{(x-s)^2}{2},$$

$$K_4(x,s) = \frac{1}{2} \int_s^x e^{x-z} e^{z-s} (z-s)^2 dz = e^{x-s} \frac{(x-s)^3}{3!},$$

або в загальному вигляді

$$K_{n+1}(x,s) = e^{x-s} \frac{(x-s)^n}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Тепер за виразом (12) можна знайти

$$R(x, s) = \sum_{n=0}^{\infty} K_{n+1}(x, s) = e^{x-s} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-s)^n}{n!} = e^{x-s} e^{x-s} = e^{2(x-s)}.$$

Рівняння відносно резольвенти. Для резольвенти може бути отримано інтегральне рівняння, яке її визначає:

$$R(x, s) = K(x, s) + \int_s^x K(x, t) R(s, t) dt. \quad (14)$$

Структура отриманого рівняння (14) збігається зі структурою рівняння (12), яке розв'язується, причому вихідною інформацією, що породжує резольвенту, є задане ядро $K(x, s)$. Використання резольвенти виявляється виключно корисним при якісному аналізі задач і виконанні різного роду еквівалентних і спрощуючих перетворень. Можливі також випадки, коли головною задачею дослідження є саме знаходження резольвенти, тобто аналітичного або чисельного розв'язку рівняння (14), що має значний практичний сенс. Велике значення має знаходження резольвенти в задачах, які доводиться розв'язувати багато разів при різних варіантах правої частини $f(x)$ і при одному і тому ж ядрі. Наявність виразу для резольвенти у багатьох випадках дозволяє отримати розв'язок вихідного рівняння в аналітичному вигляді.

Метод виродженої резольвенти. Розглянемо інтегральне рівняння

$$y(x) = f(x) + \int_0^x K(x, s) f(s) ds \quad (15)$$

Введемо поняття виродженої резольвенти

$$R(x, s) = \sum_{i=1}^m \alpha_{Ri}(x) \beta_{Ri}(s), \quad (16)$$

тоді рівняння (11) матиме вигляд

$$y(x) = f(x) + \int_0^x \sum_{i=1}^m \alpha_{Ri}(x) \beta_{Ri}(s) f(s) ds \quad (17)$$

або

$$y(x) = f(x) + \sum_{i=1}^m \alpha_{Ri}(x) \int_0^x \beta_{Ri}(s) f(s) ds. \quad (18)$$

Таким чином, при розв'язанні інтегрального рівняння немає необхідності знаходити інтеграл від функції двох змінних, а лише інтеграл від функцій однієї змінної. При чисельній реалізації методу виродженої резольвенти маємо співвідношення $m \ll n$ (n - кількість

дискретизуючих алгебраїчних рівнянь для методу квадратур), тобто маємо відповідне скорочення кількості операцій при задіянні методу виродженої резольвенти.

Є два наступні способи отримання виродженої резольвенти за допомогою методу ітерованих ядер [7–10].

Перший спосіб. Апроксимуємо вхідне ядро інтегрального рівняння (15) $K(x, s) = \sum_{i=1}^{m_1} \alpha_i(x) \beta_i(s)$, а потім застосується метод ітерованих ядер до виродженого ядра. У такому випадку маємо:

$$\begin{aligned} K_{n+1}(x, s) &= \int_s^x \sum_{i=1}^{m_1} \alpha_i(x) \beta_i(z) \sum_{j=1}^{m_2} \alpha_{K_{n,j}}(z) \beta_{K_{n,j}}(z) dz = \\ &= \sum_{i=1}^{m_1} \sum_{j=1}^{m_2} \alpha_i(x) \beta_{K_{n,j}}(z) \int_s^x \beta_i(z) \alpha_{K_{n,j}}(z) dz \end{aligned} \quad (19)$$

Враховуючи співвідношення

$$\int_s^x \beta_i(z) \alpha_{K_{n,j}}(z) dz = \int_s^x \gamma_{iK_{n,j}}(z) dz = \gamma_{iK_{n,j}}(x) - \gamma_{iK_{n,j}}(s), \quad (20)$$

рівняння (19) запишемо наступним чином:

$$\begin{aligned} K_{n+1}(x, s) &= \sum_{i=1}^{m_1} \sum_{j=1}^{m_2} \alpha_i(x) \beta_{K_{n,j}}(s) (\gamma_{iK_{n,j}}(x) - \gamma_{iK_{n,j}}(s)) = \\ &= \sum_{i=1}^{m_1} \sum_{j=1}^{m_2} [\alpha_i(x) \gamma_{iK_{n,j}}(x)] \beta_{K_{n,j}}(s) - \alpha_i(x) [\beta_{K_{n,j}}(s)] \gamma_{iK_{n,j}}(s). \end{aligned} \quad (21)$$

Отже, після проведених перетворень ітероване ядро приймає вигляд виродженого:

$$K_{n+1}(x, s) = \sum_{i=1}^{m_3} \alpha_{K_{n+1,i}}(x) \beta_{K_{n+1,i}}(s), \quad (22)$$

де $m_3 = 2m_1m_2$. Це свідчить про істотні витрати ресурсів пам'яті і процесорного часу на кожному кроці обчислення ітерованого ядра.

Другий спосіб. Будемо резольвенту $R(x, s)$ за допомогою методу ітерованих ядер згідно з (13). Далі використовуємо метод апроксимації резольвенти у вигляді білінійного ряду [10] (наприклад, ітераційно-варіаційним або градієнтним методом) і отримаємо резольвенту у вигляді $R(x, s) = \sum_{i=1}^m \alpha_{Ri}(x) \beta_{Ri}(s)$. Оскільки при цьому безпосередньо отримуємо співвідношення $m \ll n$, то даний варіант мето-

ду виродженої резольвенти буде ефективним щодо використання пам'яті та комп'ютерного часу.

Отримані висновки підтверджуються багатьма обчислювальними експериментами, в тому числі при розв'язуванні наступного прикладу.

Приклад 3. Інтегральне рівняння Вольтерри 2-го роду

$$y(x) - \int_0^x e^{-(x-s)} y(s) ds = e^x,$$

з точним розв'язком $y = 1$ у квадраті $[0, 0.1] \times [0, 0.1]$ (квadrатури за формулами трапецій при постійному кроці $h=0,005$) розв'язувалось із застосуванням наступних методів.

1. Методом квадратур: знадобилося $0,2369 \cdot 10^{-2}$ с.
2. Резольвентний метод: резольвента визначається методом ітеративних ядер, потрібно було 5 ітеративних ядер. Витрати часу — $0,2567 \cdot 10^{-2}$ с.
3. Метод вироджених ядер: знадобилося $0,1859 \cdot 10^{-2}$ с.
4. Метод виродженої резольвенти, резольвента отримана методом ітеративних ядер (2-й спосіб), знадобилося 5 ітеративних ядер, потрібно було $0,1859 \cdot 10^{-2}$ с.

Графіки похибок використаних методів наведені на рис. 1. Результати розв'язування прикладу достатньо об'єктивно характеризують властивості методів, які застосовувались, в тому числі перевагу методів вироджених ядер і методу виродженої резольвенти.

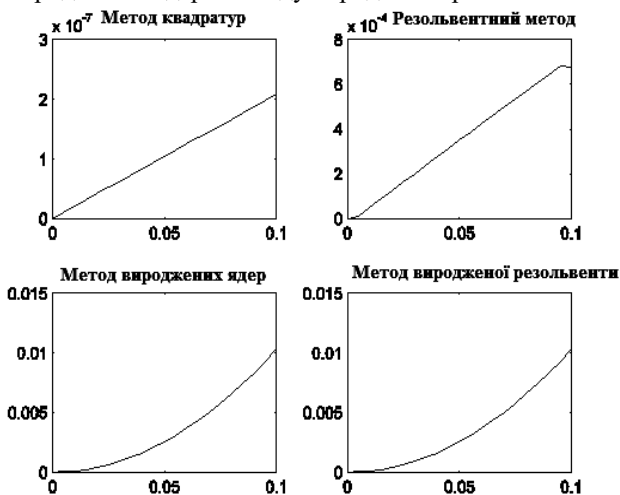


Рис. 1. Графіки похибок до прикладу 3

Суттєве практичне значення мають задачі моделювання з табличним поданням вихідних даних. Цей випадок розглянемо на наступному прикладі.

Приклад 4. Ядро $K(x, s)$ і права частина $f_T(x)$ рівняння

$$y(x) + \int_0^x K_T(x, s)y(s) = f_T(x)$$

подаються таблично відповідно до таблиці 2 і таблиці 3.

Розв'язки отримані: методом квадратур за $0,9353 \cdot 10^{-2}$ с, резольвентним методом (19 ітерованих ядер) за $0,7945 \cdot 10^{-2}$ с, методом вироджених ядер за $0,9924 \cdot 10^{-2}$ с, методом виродженої резольвенти за $0,6399 \cdot 10^{-2}$ с.

Результати розв'язків рівняння наведені в таблиці 4, а похибки розв'язків представлені в таблиці 5.

Графіки апроксимуючих функцій для ядра наведені на рис. 2. Можна бачити, що у функціях $\alpha_3(x)$ і $\beta_3(s)$ проявляється кусково-лінійний вигляд. Графіки похибок, отриманих вказаними методами, наведені на рис. 3. Приклад ілюструє працездатність алгоритмів при табличному поданні вихідних даних.

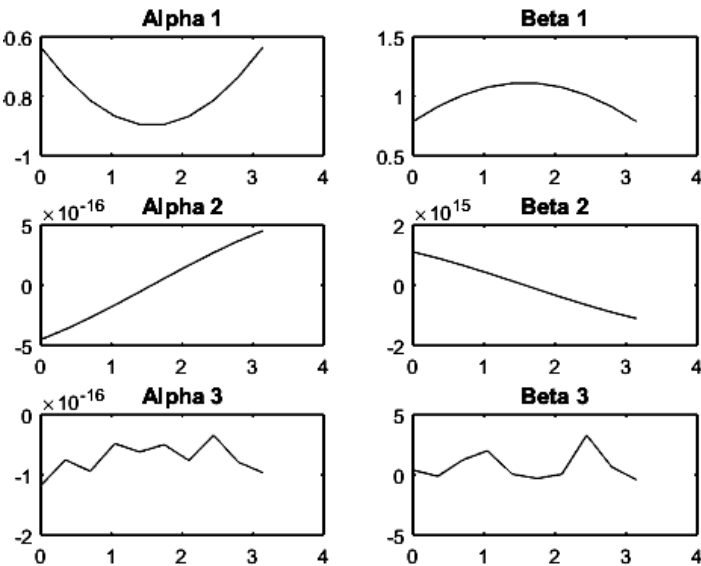


Рис. 2. Графіки апроксимуючих функцій

Таблиця 2

Таблицне подання ядра $K(x, s)$

$K(x, s)$	0,0000	0,3491	0,6981	1,0472	1,3963	1,7453	2,0944	2,4435	2,7925	3,1416
0,0000	-1,0000	-0,9848	-0,9397	-0,8660	-0,7660	-0,6428	-0,5000	-0,3420	-0,1736	0,0000
0,3491	-0,9848	-1,0000	-0,9848	-0,9397	-0,8660	-0,7660	-0,6428	-0,5000	-0,3420	-0,1736
0,6981	-0,9397	-0,9848	-1,0000	-0,9848	-0,9397	-0,8660	-0,7660	-0,6428	-0,5000	-0,3420
1,0472	-0,8660	-0,9397	-0,9848	-1,0000	-0,9848	-0,9397	-0,8660	-0,7660	-0,6428	-0,5000
1,3963	-0,7660	-0,8660	-0,9397	-0,9848	-1,0000	-0,9848	-0,9397	-0,8660	-0,7660	-0,6428
1,7453	-0,6428	-0,7660	-0,8660	-0,9397	-0,9848	-1,0000	-0,9848	-0,9397	-0,8660	-0,7660
2,0944	-0,5000	-0,6428	-0,7660	-0,8660	-0,9397	-0,9848	-1,0000	-0,9848	-0,9397	-0,8660
2,4435	-0,3420	-0,5000	-0,6428	-0,7660	-0,8660	-0,9397	-0,9848	-1,0000	-0,9848	-0,9397
2,7925	-0,1736	-0,3420	-0,5000	-0,6428	-0,7660	-0,8660	-0,9397	-0,9848	-1,0000	-0,9848
3,1416	0,0000	-0,1736	-0,3420	-0,5000	-0,6428	-0,7660	-0,8660	-0,9397	-0,9848	-1,0000

Таблиця 3

Таблицне подання правої частини $f_T(x)$

x	0,0000	0,3491	0,6981	1,0472	1,3963	1,7453	2,0944	2,4435	2,7925	3,1416
$f(x)$	1,0000	0,7053	0,4975	0,3509	0,2475	0,1746	0,1231	0,0869	0,0613	0,0432

Таблиця 4

Отримані результати

x	0	0,3491	0,6981	1,0472	1,3963	1,7453	2,0944	2,4435	2,7925	3,1416
у точне	1	0,4605	0,15861	0,0054	-0,0578	-0,0691	-0,053	-0,0244	0,00746	0,03762
<i>М.</i> Квад- ратур	1	0,45419	0,15101	-0,001	-0,0619	-0,0708	-0,0524	-0,022	0,01129	0,04239
<i>М.</i> ре- зольв.	1	0,41001	0,08849	-0,0666	-0,1223	-0,1218	-0,0927	-0,0517	-0,0088	0,03061
<i>М.</i> вир. ядер	1	0,45419	0,15101	-0,001	-0,0619	-0,0708	-0,0524	-0,022	0,01129	0,04239
<i>М.</i> вир. рез.	1	0,46144	0,16036	0,00764	-0,0554	-0,067	-0,0512	-0,0232	0,00804	0,03758

Таблиця 5

Похибки розв'язків

<i>М.</i> Квад- ратур	0	-0,0063	-0,0076	-0,0064	-0,0041	-0,0016	0,00063	0,00247	0,00383	0,00476
<i>М.</i> ре- зольв.	0	-0,0505	-0,0701	-0,072	-0,0645	-0,0527	-0,0397	-0,0273	-0,0162	-0,007
<i>М.</i> вир. ядер	0	-0,0063	-0,0076	-0,0064	-0,0041	-0,0016	0,00063	0,00247	0,00383	0,00476
<i>М.</i> вир. рез.	0	0,00094	0,00175	0,00224	0,00236	0,00218	0,00177	0,00121	0,00058	-5E-05

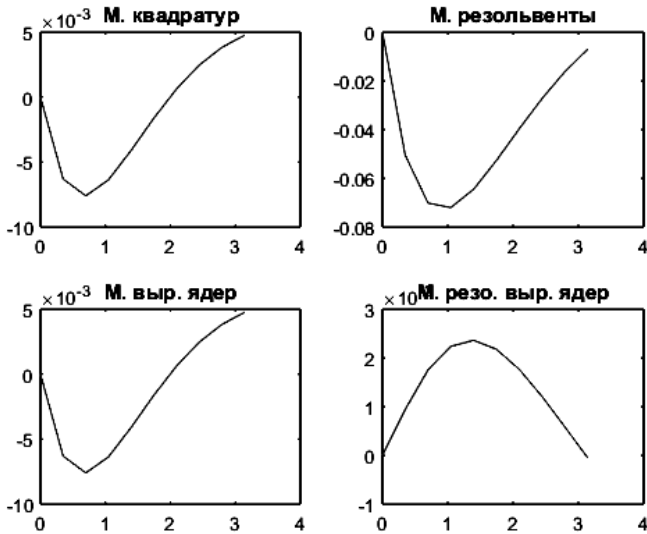


Рис. 3. Графіки отриманих похибок

Випадок різницевого степеневого ядра. Для знаходження резольвенти можна скласти та розв'язати визначальне диференціальне рівняння. Це можливо в одному з важливих для практики випадків, коли ядро рівняння (1) є різницевим і має вигляд

$$K(x, s) = a_0(x) + a_1(x)(x-s) + \dots + \frac{a_{n-1}(x)}{(n-1)!}(x-s)^{n-1}. \quad (15)$$

За умови безперервності коефіцієнтів $a_k(x), k = 0, n-1$ в $(a, b]$ резольвента для (15) визначається виразом

$$R(x, s) = \frac{d^n g(x, s)}{dx^n}, \quad (16)$$

де функція $g(x, s)$ є розв'язком рівняння

$$\frac{d^n g}{dx^n} - \left[a_0(x) \frac{d^{n-1} g}{dx^{n-1}} + a_1(x) \frac{d^{n-2} g}{dx^{n-2}} + \dots + a_{n-1}(x) g \right] = 0 \quad (17)$$

при

$$g|_{x=s} \frac{dg}{dx}|_{x=s} = \dots = \frac{d^{n-2} g}{dx^{n-2}}|_{x=s} = 0, \quad \frac{d^{n-1} g}{dx^{n-1}}|_{x=s} = 1. \quad (18)$$

Приклад 5. Знайдемо резольвенту рівняння з ядром $K(x, s) = x - s$, яке є окремим випадком ядра (15) при $a_1(x) = 1$ і рівних нулю інших коефіцієнтах. Рівняння (17) приймає вигляд

$$\frac{d^2 g}{dx^2} - g(x, s) = 0,$$

звідки

$$g(x, s) = C_1(s)e^x + C_2(s)e^{-x}.$$

Умови (18) приводять до системи

$$C_1(s)e^s + C_2(s)e^{-s} = 0,$$

$$C_1(s)e^s - C_2(s)e^{-s} = 0,$$

розв'язок якої $C_1(s) = \frac{1}{2}e^{-s}$, $C_2(s) = \frac{1}{2}e^s$, що дозволяє записати

$$g(x, s) = \frac{1}{2} \left[e^{x-s} - e^{-(x-s)} \right] = sh(x-s).$$

Згідно (16) остаточно маємо

$$R(x, s) = [sh(x-s)]_{x^2}^n = sh(x-s).$$

Незважаючи на обмеженість аналітичних способів знаходження резольвенти, її застосування виявляється доцільним для побудови наближених і чисельних алгоритмів розв'язання інтегральних рівнянь. Розрахункові вирази для чисельного отримання резольвенти можуть бути отримані з виразів (13) і (14), якщо в них покласти $s = s_i$, $i = 0, 1, \dots, S$, тобто розбити проміжок $[a, b]$ зміни змінної s на S відрізків. Тоді згідно (13) і (14) отримаємо

$$K_{n+1}(x, s_i) = \int_{s_i}^x K(x, t) K_n(t, s_i) dt, \quad (19)$$

$$R(x, s_i) = K(x, s_i) + \int_{s_i}^x K(x, t) R(t, s_i) dt. \quad (20)$$

Вираз (19) зводить задачу отримання ітерованих ядер до обчислення інтегрального оператора Вольтерри, а вираз (20) являє собою рівняння Вольтерри II роду, де ядро є функцією однієї змінної і збігається з правою частиною.

Деяко інший шлях застосування резольвенти має місце при такій апроксимації ядра, коли можна визначити наближену резольвенту аналітично. Прикладом застосування такого підходу є наступний метод.

Якщо для рівняння (12) розбити проміжок зміни змінної x точками $x = x_i = a + ih, i = \overline{0, n}$, з кроком $h = \frac{b-a}{n}$ на n однакових проміжків X_i , де $x_{i-1} \leq x < x_i$ і X_n — закритий проміжок, тоді прямі

$x = x_i, i = \overline{1, n}, s = s_j = x_j, j = \overline{0, n-1}$, розділять основний трикутник $D(a \leq s \leq x \leq b)$ на n трикутників $D_i(x_{i-1} \leq x \leq x_i, s_{i-1} \leq s \leq s_j)$. Після заміни $K(x, s)$ і $f(x)$ в рівнянні (1) функціями:

$$k(x, s) = \begin{cases} K(\bar{x}_i, \bar{s}_i) K_i, & x, s \in D_i, i = \overline{1, n} \\ K(\bar{x}_i, \bar{s}_i) K_{ij}, & x, s \in D_{ij}, i = \overline{2, n}, j = \overline{0, n-1} \end{cases}, \quad (21)$$

$\tilde{f}(x) = f(\bar{x}_i) = f_i, x \in X_i, i = \overline{1, n}, \bar{x}_i = x_{i-1} + \frac{h}{2}, \bar{s}_j = \bar{x}_j$, отримаємо рівняння

$$\bar{y}(x) - \int_0^x k(x, s) \bar{y}(s) ds = \bar{f}(x). \quad (22)$$

Резольвента ядра (21) має вигляд

$$r(x, s) = \begin{cases} K_i e^{K_i(x-s)}, & x, s \in D_i, i = \overline{1, n} \\ L_{ij} e^{K_i(x-x_{i-1}) + K_j(s_j-s)}, & x, s \in D_{ij}, i = \overline{2, n}, j = \overline{0, n-1}, \end{cases}$$

де

$$L_{i,i-1} = K_{i,i-1}, i = \overline{2, n}, \\ L_{ij} = K_{ij} + \sum_{l=j+1}^{i-1} K_{il} \frac{e^{K_l h} - 1}{K_l} L_{il}, i = \overline{3, n}, j = 2$$

(при $K_l = 0$ дріб $\frac{e^{K_l h} - 1}{K_l}$ замінюється на h).

Розв'язок наближеного рівняння (22) має вигляд

$$\bar{y}(x) = C_i e^{K_i(x-x_{i-1})}, x \in X_i, i = \overline{1, n}, \quad (23)$$

де

$$C_1 = f_1, C_i = f_i + \sum_{j=1}^{i-1} K_{ij} \frac{e^{K_j h} - 1}{K_j}, i = \overline{2, n}.$$

Функція $\bar{y}(x)$ має розриви в точках $x = x_i, j = \overline{1, n-1}$, зі стрибком $\varepsilon_i = |C_{i+1} - C_i e^{K_i h}|$.

Висновок. Вдосконалено алгоритм методу вироджених ядер для розв'язання рівнянь Вольтерри II роду, які мають суттєву перевагу за обсягом обчислювальних операцій по відношенню до традиційних алгоритмів прямого методу квадратур; розроблено алгоритми

побудови резольвенти, що дозволяє забезпечити ефективність резольвентного методу розв'язування рівнянь даного класу.

Таким чином, можливість ефективної апроксимації ядер довільного вигляду дозволяє задіяти продуктивний потенціал резольвентного методу розв'язування інтегральних рівнянь чисельними методами з побудовою відповідних програмних засобів комп'ютерного моделювання динамічних об'єктів. Крім того, даний підхід дозволяє в багатьох випадках використовувати аналітичні перетворення з отриманням спрощених шляхів розв'язання задач моделювання.

Список використаних джерел:

1. Беллман Р. Некоторые вопросы математической теории процессов управления / Р. Беллман, И. Гликсберг, О. Гросс. — М. : Изд-во иностранной литературы, 1962. — 336 с.
2. Верлань А. Ф. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы / А. Ф. Верлань, В. С. Сизиков. — К. : Наукова думка, 1986. — 543 с.
3. Никольский С. М. Квадратурные формулы / С. М. Никольский. — М. : Наука, 1974. — 223 с.
4. Baker С. Т. Н. Volterra Equations and their Numerical Treatment / С. Т. Н. Baker // MCCM Technical Report. — 2000. — №366.
5. Pupkov K. A. Functional series in the theory of nonlinear systems / К. А. Pupkov, V. I. Kapalin, A.S. Yushchenko. — М. : Nauka, 1976. — 448 р.
6. Brunner Н. Open problems in the discretization of Volterra integral equations / Н. Brunner // Numer. Funct. Anal. Optim. — 1996. — № 17. — Р. 717–736.
7. Полянин А. Д. Справочник по интегральным уравнениям / А. Д. Полянин, А. В. Манжиров — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2003. — 608 с.
8. Іванюк В.А. Аналітичне подання рядів Вольтерри на основі експериментальних даних [Текст] / В.А. Іванюк, В.В. Понеділок // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки : зб. наук. — Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2014. — Вип. 11. — С. 43–50.
9. Верлань Д.А. Апроксимація функції двох змінних у задачах керування / Д. А. Верлань // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки : зб. наук. пр. — Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський нац. ун-т ім. І. Огієнка, 2011. — Вип. 5. — С. 62–70.
10. Верлань Д. А. Гладка апроксимація функції двох змінних білінійним рядом / Д. А. Верлань // Тези доповідей річної звітної конференції ІПМЕ імені Г. Є. Пухова (м. Київ, 15–16 січня 2012 р.). — К. : ІПМЕ НАНУ, 2012. — С. 15.
11. Верлань Д. А. Методи білінійної апроксимації ядер інтегральних рівнянь Вольтери 2-го роду / Д. А. Верлань // Тези доповідей річної звітної конференції ІПМЕ імені Г. Є. Пухова (м. Київ, 13-14 січня 2013 р.). — К. : ІПМЕ НАНУ, 2013. — С. 8.

NUMERICAL REALIZATION OF INTEGRAL DYNAMIC MODELS BASED ON THE METHOD OF DEGRADE KERNELS

The use of mathematical models of dynamic objects in the form of Volterra-type integral equations enables us to effectively solve a wide range of theoretical and practical research problems. The traditional approach to solving these equations is to use quadrature algorithms of different order of accuracy, which depends on the form of the Volterra kernel and the sampling step, which often leads to a lot of computational operations and software implementation problems in the general case. It is promising to use degenerate-kernels method algorithms to solve Volterra II kind equations, which have a significant advantage over the volume of computational operations over traditional direct-square algorithms. Algorithms for resolvent construction are considered, which helps to ensure the efficiency of the resolvent method of solving equations of this class. Therefore, the task of applying this method to solving Volterra equations (or equations of another type) leads to several new numerical algorithms whose properties need to be investigated. The practical value of the algorithms under development is the ability to build on them based software that is not contained in existing serial computer simulation packages. This gives the opportunity to compare the obtained algorithms with the known quadrature algorithms for performance, as the most important indicator for dynamic models of control systems.

Keywords: *Volterra integral equation II kind, quadrature method, degenerate kernels method, resolvent.*

Отримано: 19.08.2019

ВІДОМОСТІ ПРО АВТОРІВ

Бандирський Богдан Йосипович — кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри прикладної математики Національного університету «Львівська політехніка», м. Львів, imfn.dept@lpnu.ua

Бандурко Олена Іванівна — старший викладач Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», м. Київ, o.i.bandurka@ukr.net

Бараніченко Олексій Миколайович — аспірант Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», м. Київ, baranichenko.work@gmail.com

Бомба Андрій Ярославович — доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри інформатики та прикладної математики Рівненського державного гуманітарного університету, м. Рівне, abomba@ukr.net

Верлань Анатолій Федорович — доктор технічних наук, професор, член кореспондент НАПН України, Інститут проблем моделювання в енергетиці імені Г. Є. Пухова НАН України, м. Київ, a.f.verlan@gmail.com

Verlan Andriy — Ph. D., Associate Professor, Norwegian University of Science and Technology, Gjøvik, Norway, verlandr@gmail.com

Верлань Дмитро Анатолійович — кандидат технічних наук, ТОВ «Науково-виробниче підприємство «ІНФОТЕХ», м. Київ

Громик Андрій Петрович — кандидат технічних наук, доцент, завідувач кафедри математичних дисциплін і моделювання Подільського державного аграрно-технічного університету, м. Кам'янець-Подільський, garon74@gmail.com

Іванюк Віталій Анатолійович — кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри інформатики Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський, wivanyuk@gmail.com

Климюк Юрій Євгенійович — кандидат технічних наук, доцент, завідувач кафедри інформаційних систем та обчислювальних методів Міжнародного економіко-гуманітарного університету імені академіка Степана Дем'янчука, м. Рівне, klimyuk@ukr.net

Коваль Олександр Васильович — кандидат технічних наук, доцент Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», м. Київ, avkovalgm@gmail.com

Кузьмініх Валерій Олександрович — кандидат технічних наук, доцент, доцент Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», м. Київ, vak0202@ukr.net

Москаленко Юрій Володимирович — аспірант Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», м. Київ, yuramuv@gmail.com

Мусій Роман Степанович — доктор фізико-математичних наук, професор, професор кафедри вищої математики Національного університету «Львівська політехніка», м. Львів, musiy@polynet.lviv.ua

Наконечний Адріян Йосипович — доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри комп'ютерних систем в автоматичній Національного університету «Львівська політехніка», м. Львів, ksa.dept@lpnu.ua

Орищин Оксана Григорівна — кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри вищої математики Національного університету «Львівська політехніка», м. Львів, oksana.orushchun@lpnu.ua

Отрох Сергій Іванович — доктор технічних наук, доцент, професор Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», м. Київ, 2411197@ukr.net

Понеділок Вадим Віталійович — кандидат технічних наук, старший викладач кафедри інформатики Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський, ponedilok@gmail.com

Соловйов Сергій Олександрович — кандидат біологічних наук, доцент, доцент Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», м. Київ, Solovyov.nmape@gmail.com

Sterten Jo — Ph. D., Assistant Professor, Norwegian University of Science and Technology, Gjøvik, Norway

Федорчук Володимир Анатолійович — доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри інформатики Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський, fedvld@ukr.net

Фуртат Ірина Едуардівна — кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри теоретичної і промислової теплотехніки теплоенергетичного факультету Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», м. Київ, i.e.furtat@gmail.com

Фуртат Юрій Олегович — кандидат технічних наук, науковий співробітник Інституту проблем моделювання в енергетиці імені Г. Є. Пухова НАН України, м. Київ, saodhar@ipme.kiev.ua

Шаповалова Світлана Ігорівна — кандидат технічних наук, доцент, доцент Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», м. Київ, lanashape@gmail.com

Шиндер Валентин Костянтинівич — кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри опору матеріалів та будівельної механіки Національного університету «Львівська політехніка», м. Львів, ombm.dept@lpnu.ua

АЛФАВІТНИЙ ПОКАЖЧИК АВТОРІВ**Б**

Бандирський Б. Й.	88
Бандурко О. І.	99
Бараніченко О. М.	121
Бомба А. Я.	51

В

Верлань А. Ф.	5
Verlan A.	16
Верлань Д. А.	131

Г

Громик А. П.	26
--------------	----

І

Іванюк В. А.	40
--------------	----

К

Климюк Ю. Є.	51
Коваль О. В.	68
Кузьмініх В. О.	68

М

Москаленко Ю. В.	79
Мусій Р. С.	88

Н

Наконечний А. Й.	88
------------------	----

О

Орищин О. Г.	88
Отрох С. І.	68

П

Понеділок В. В.	131
-----------------	-----

С

Соловійов С. О.	99
Sterten Jo	16

Ф

Федорчук В. А.	40
Фуртат І. Е.	104
Фуртат Ю. О.	114

Ш

Шаповалова С. І.	121
Шиндер В. К.	88

ЗМІСТ

Верлань А. Ф.

Інверсно-обчислювальний підхід у задачі динамічної корекції
вимірювальних систем із застосуванням інтегральних моделей..... 5

Verlan A., Sterten Jo

Methods of Complex Dynamic Systems'
Models' Equivalent Conversion..... 16

Громик А. П.

Математичне моделювання коливних процесів у необмеженому
кусково-однорідному клиновидному порожнистому циліндрі 26

Ivanyuk V. A., Fedorchuk V. A.

Vector-Matrix Method of Numerical Implementation
of the Polynomial Integral Volterra Operators..... 40

Климюк Ю. Є., Бомба А. Я.

Комп'ютерне прогнозування адсорбційної
доочистки води від домішок у швидких
багатошарових фільтрах конусоподібної форми 51

Kuzminykh V. O., Koval O. V., Otrokh S. I.

Refining the Typical Scenarios by Additional Factors 68

Москаленко Ю. В.

Середовище моделювання нейронних мереж
для розв'язання задачі кластеризації..... 79

Мусій Р. С., Наконечний А. Й.,

Бандирський Б. Й., Шиндер В. К., Орищин О. Г.

Визначення джоулевого тепла та пондеромоторної сили
у пластинчастому електропровідному елементі
за дії зовнішнього неусталеного електромагнітного поля 88

Soloviov S., Bandurka O.

Modelling the Optimal Schemes of Population
Vaccination Using Epidemiological Data 99

Furtat I. E.

Condensation heat and mass transfer
at direct contact of the reacting phases 104

Фургат Ю. О.

Властивості інтегральних динамічних моделей
у вигляді операторів і рівнянь типу Вольтерра 114

Шаповалова С. І., Бараніченко О. М.

Розв'язання логічних задач на основі машинного навчання 121

Верлань Д. А., Понеділок В. В.

Чисельна реалізація інтегральних динамічних моделей
на основі методу вироджених ядер 131

Відомості про авторів 146

Алфавітний покажчик авторів 149

Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова
Національної академії наук України
Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка

НАУКОВЕ ВИДАННЯ

МАТЕМАТИЧНЕ ТА КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ

Серія: Технічні науки

Збірник наукових праць

Випуск 20

Підписано до друку 20.09.2019 р. Гарнітура «Таймс».
Папір офсетний. Друк різнографічний.
Формат 60х84/16. Умовн. друк. арк. 8,9. Обл.-вид. арк. 9,6.
Тираж 60. Зам. № 870.

Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка,
вул. Огієнка, 61, м. Кам'янець-Подільський, 32300.
Свідоцтво серії ДК № 3382 від 05.02.2009 р.

Надруковано в Кам'янець-Подільському національному
університеті імені Івана Огієнка,
вул. Огієнка, 61, м. Кам'янець-Подільський, 32300.
Свідоцтво серії ДК № 3382 від 05.02.2009 р.