

Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова
Національної академії наук України
Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка

МАТЕМАТИЧНЕ ТА КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ

Серія: Фізико-математичні науки

Збірник наукових праць

Випуск 20

Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка
2019

УДК 519.6:519.7
ББК 22
М34

Свідoctво про державну реєстрацію друкованого засобу масової інформації:
Серія КВ № 14521-3492Р від 25.06.2008 р.

Збірник наукових праць включено до Переліку наукових фахових видань ДАК Міністерства освіти і науки України з фізико-математичних наук (наказ №1021 від 07 жовтня 2015 р.)

Друкується згідно з рішенням вченої ради Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка, протокол №8 від 28 серпня 2019 року.

Рецензенти:

М. Р. Петрик, доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри програмної інженерії Тернопільського національного технічного університету імені Івана Пулюя;

І. М. Червко, доктор фізико-математичних наук, професор, професор кафедри математичного моделювання, декан факультету математики та інформатики Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича.

Редакційна колегія:

О. М. Хіміч, член-кореспондент НАНУ, доктор фізико-математичних наук, професор (*відповідальний редактор*);

А. Ф. Верлянь, член-кореспондент НАПНУ, доктор технічних наук, професор (*заст. відповідального редактора*);

І. Б. Ковальська, кандидат фізико-математичних наук, доцент (*відповідальний секретар*);

А. П. Голуб, доктор фізико-математичних наук, старший науковий співробітник;

В. К. Задірака, академік НАНУ, доктор фізико-математичних наук, професор;

В. П. Клименко, доктор фізико-математичних наук, професор;

І. М. Конет, доктор фізико-математичних наук, професор;

М. О. Перестюк, академік НАНУ, доктор фізико-математичних наук, професор;

А. С. Сердюк, доктор фізико-математичних наук, старший науковий співробітник;

В. М. Старков, доктор фізико-математичних наук, старший науковий співробітник;

Ю. В. Теплінький, доктор фізико-математичних наук, професор;

М. К. Усаров, доктор фізико-математичних наук, старший науковий співробітник, Узбекистан;

А. О. Чикрій, академік НАНУ, доктор фізико-математичних наук, професор.

Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки : зб. наук. праць / Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова Національної академії наук України, Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка ; [редкол.: О. М. Хіміч (відп. ред.) та ін.]. — Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2019. — Вип. 20. — 112 с.

У збірнику друкуються результати досліджень вітчизняних та закордонних науковців, що стосуються проблем застосування математичних моделей в різних галузях людської діяльності.

Для наукових та інженерно-технічних працівників, аспірантів, студентів.

УДК 519.6:519.7

ББК 22

ISSN 2308-5878
DOI: 10.32626/2308-5878.2019-20

© Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова НАН України, 2019

© Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2019

V. M. Glushkov Institute of Cybernetics
of National Academy of Sciences of Ukraine
Kamianets-Podilskyi National Ivan Ohiienko University

MATHEMATICAL AND COMPUTER MODELLING

Series: Physical and mathematical sciences

Scientific journal

ISSUE 20

Kamianets-Podilskyi National Ivan Ohiienko University
2019

Critics:

M. Petryk, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor,
Head of Department Program Engineering Ternopil Ivan Pil'uj
National Technical University;

I. Cherevko, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor,
Professor at Department Mathematical Modeling, Dean of Faculty
Mathematics and Informatics Yurii Fedkovych Chernivtsi National University.

Editorial board:

O. Himich, Corresponding Member of the NAS of Ukraine,
Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor (*Executive Editor*);

A. Verlan, Corresponding Member NAPS of Ukraine,
Doctor of Technical Science, Professor (*Vice Executive Editor*);

I. Kovalska, Candidate of Physical and Mathematical Sciences,
Docent (*Responsible Secretary*);

A. Golub, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Senior Scientific Researcher;

V. Zadiraka, Academician NAS of Ukraine,

Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor;

V. Klimenko, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor;

I. Konet, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor;

M. Perestjuk, Academician NAS of Ukraine,

Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor;

A. Serdyuk, Doctor of Physical and Mathematical Sciences,
Senior Scientific Researcher;

V. Starkov, Doctor of Physical and Mathematical Sciences,
Senior Scientific Researcher;

Yu. Teplinsky, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor;

M. Usarov, Doctor of Physical and Mathematical Sciences,
Senior Scientific Researcher, Uzbekistan;

A. Chikriy, Academician NAS of Ukraine,
Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor.

Mathematical and computer modelling. Series: Physical and mathematical sciences : scientific journal / V. M. Glushkov Institute of Cybernetics of National Academy of Sciences of Ukraine, Kamianets-Podilskyi National Ivan Ohiienko University ; [Editorial Board: O. Himich (Executive Editor) and others]. — Kamianets-Podilskyi : Kamianets-Podilskyi National Ivan Ohiienko University, 2019. — ISSUE 20. — 112 p.

There are printed results of investigation of national and foreign scientists that concern to problems of practice mathematical models in different spheres of human activity.

For scientific and technical staff, postgraduate students.

© V. M. Glushkov Institute of Cybernetics
of NAS of Ukraine, 2019

ISSN 2308-5878

DOI: 10.32626/2308-5878.2019-20

© Kamianets-Podilskyi National
Ivan Ohiienko University, 2019

УДК 517.9

DOI: 10.32626/2308-5878.2019-20.5-12

С. М. Бак, канд. фіз.-мат. наук

Вінницький державний педагогічний університет
імені Михайла Коцюбинського, м. Вінниця

ПРО ОБМЕЖЕНІСТЬ ГЛОБАЛЬНОГО РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ НЕСКІНЧЕННОЇ СИСТЕМИ НЕЛІНІЙНИХ ОСЦИЛЯТОРІВ НА ДВОВИМІРНІЙ ҐРАТЦІ

Стаття присвячена вивченню нескінченновимірної гамільтонової системи, яка описує нескінченну систему лінійно зв'язаних нелінійних осциляторів на двовимірній ґратці. Ця система представляє собою зчисленну систему звичайних диференціальних рівнянь. Цю систему зручно розглядати як диференціально-операторне рівняння у гільбертовому просторі двохсторонніх послідовностей. Розглядається задача Коші для таких рівнянь у даному просторі. Раніше було доведено, що ця задача за певних умов має єдиний локальний і глобальний розв'язки. Локальна розв'язність впливає зі стандартних результатів для диференціальних рівнянь у банахових просторах. Основними умовами тут є просторова періодичність коефіцієнтів оператора лінійної взаємодії осциляторів та неперервність за Коші нелінійності (яка визначається як похідна зовнішнього потенціалу системи осциляторів). Для встановлення глобальної розв'язності було використано подання даної системи у гамільтоновому вигляді. Нагадаємо, що з фізичної точки зору гамільтоніан представляє собою повну енергію системи, тобто суму кінетичної і потенціальної енергії. Основними умовами, крім згаданих вище, тут є недостатність оператора лінійної взаємодії між осциляторами та напівобмеженість знизу їх потенціалів. Однак, залишилось відкритим питання, чи є глобальний розв'язок обмеженим. У цій статті встановлено, що за тих самих умов існування глобального розв'язку, якщо оператор лінійної взаємодії недостатній, а зовнішній потенціал на нескінченності є нескінченно великим (рівномірно за обома просторовими змінними), або ж оператор лінійної взаємодії є від'ємно визначеним, то цей розв'язок обмежений для будь-яких початкових даних з даного простору послідовностей. Для доведення було використано той факт, що гамільтоніан системи на початкових даних зберігає стале значення.

Ключові слова: *нелінійні осцилятори, двовимірна ґратка, задача Коші, глобальний розв'язок.*

Вступ. Нескінченновимірні гамільтонові системи широко використовуються для моделювання складних квантових явищ. Зокрема, останнім часом значну увагу приділяють моделям, дискретним за просторо-

вою змінною. Серед рівнянь, які описують такі моделі, найбільш відомими є рівняння ланцюгів осциляторів, дискретне рівняння \sin -Гордона, система Фермі-Пасти-Улама, дискретне нелінійне рівняння Шредінгера.

Серед розв'язків таких систем особливої уваги заслуговують біжучі хвилі. У статтях [2; 4; 5; 13; 17; 20; 21] досліджено питання існування біжучих хвиль в системах осциляторів на двовимірній ґратці. В той же час для систем Фермі-Пасти-Улама на двовимірній ґратці відомі декілька праць [6; 18], в яких отримано умови існування періодичних та відокремлених біжучих хвиль. В статтях [3; 9; 15; 16] вивчалися біжучі хвилі для дискретного рівняння \sin -Гордона на двовимірній ґратці.

У статтях [1; 24] вивчалися періодичні розв'язки в системах осциляторів на двовимірній ґратці.

Ще одним важливим класом розв'язків є стоячі хвилі. В статтях [7; 8; 11] досліджувалось питання існування стоячих хвиль для дискретних нелінійних рівнянь типу Шредінгера на двовимірній ґратці. В статтях [22] і [23] досліджувалася задача дискретних нелінійних рівнянь типу Шредінгера на одновимірній ґратці.

Питання коректності задачі Коші для систем осциляторів вивчалося в статтях [10; 12; 14; 19].

Метою статті є одержання умов обмеженості глобального розв'язку задачі Коші для нескінченної системи лінійно зв'язаних нелінійних осциляторів на двовимірній ґратці.

Постановка задачі. У цій статті вивчаються рівняння, які описують динаміку нескінченної системи лінійно зв'язаних нелінійних осциляторів, розміщених на цілочисловій двовимірній ґратці. Нехай $q_{n,m}(t)$ — узагальнена координата (n, m) -го осцилятора в момент часу t . Передбачається, що кожний осцилятор лінійно взаємодіє з чотирма своїми найближчими сусідами. Тоді рівняння руху системи, що розглядається, мають вигляд

$$\ddot{q}_{n,m} = -U'_{n,m}(q_{n,m}) + a_{n-1,m}(q_{n-1,m} - q_{n,m}) - a_{n,m}(q_{n,m} - q_{n+1,m}) + b_{n,m-1}(q_{n,m-1} - q_{n,m}) - b_{n,m}(q_{n,m} - q_{n,m+1}), \quad (n, m) \in \mathbb{Z}^2. \quad (1)$$

Рівняння (1) представляють собою нескінченну систему звичайних диференціальних рівнянь.

Розглядаються такі розв'язки системи (1), що

$$\lim_{n,m \rightarrow \pm\infty} q_{n,m}(t) = 0, \quad (2)$$

тобто осцилятори знаходяться в стані спокою на нескінченності.

Потенціал $U_{n,m}(r)$ запишемо у вигляді $U_{n,m}(r) = -\frac{d_{n,m}}{2}r^2 + V_{n,m}(r)$

і покладемо $c_{n,m} = d_{n,m} - a_{n-1,m} - a_{n,m} - b_{n,m-1} - b_{n,m}$. Тоді рівняння (1) матиме вигляд

$$\ddot{q}_{n,m} = a_{n-1,m}q_{n-1,m} + a_{n,m}q_{n+1,m} + b_{n,m-1}q_{n,m-1} + b_{n,m}q_{n,m+1} + c_{n,m}q_{n,m} - V'_{n,m}(q_{n,m}), \quad (n, m) \in \mathbb{Z}^2. \quad (3)$$

Враховуючи граничні умови (2), це рівняння зручно розглядати як диференціально-операторне рівняння

$$\ddot{q} = Aq - B(q), \quad (4)$$

де

$(Aq)_{n,m} = a_{n-1,m}q_{n-1,m} + a_{n,m}q_{n+1,m} + b_{n,m-1}q_{n,m-1} + b_{n,m}q_{n,m+1} + c_{n,m}q_{n,m}$, (такі оператори вивчалися в [6, с. 597]), а нелінійний оператор B визначається формулою

$$(B(q))_{n,m} = V'_{n,m}(q_{n,m}) \quad (5)$$

у просторі $l^2 = l^2(\mathbb{Z}^2)$ дійсних послідовностей $q = \{q_{n,m}\}$ зі скалярним добутком

$$(q^{(1)}, q^{(2)}) = \sum_{n,m \in \mathbb{Z}} q_{n,m}^{(1)} q_{n,m}^{(2)}.$$

Норму в $l^2 = l^2(\mathbb{Z}^2)$ позначатимемо $\|\cdot\|$.

Далі нам також знадобиться простір l^∞ — банахів простір обмежених послідовностей з нормою

$$\|q\|_{l^\infty} = \sup_{n,m \in \mathbb{Z}} |q_{n,m}|.$$

Зауважимо, що рівняння (3) у просторі l^2 можна подати у гамільтоновому вигляді

$$\begin{cases} \dot{p} = -H'_q(p, q), \\ \dot{q} = H'_p(p, q); \end{cases}$$

з гамільтоніаном

$$H(p, q) = \frac{1}{2}(\|p\|^2 - (Aq, q)) + \sum_{n,m \in \mathbb{Z}} V_{n,m}(q_{n,m}),$$

де $p = \dot{q}$.

За означенням, розв'язком рівняння (4) вважається двічі неперервно диференційовна функція від t зі значеннями в l^2 .

Припускається, що виконуються умови:

- (i) послідовності $\{a_{n,m}\}$ і $\{c_{n,m}\}$ дійсних чисел обмежені;
- (ii) $V_{n,m}(r)$ — функція класу C^1 на \mathbb{R} , причому $V_{n,m}(0) = V'_{n,m}(0) = 0$ і для будь-якого $R > 0$ існує таке $C = C(R) > 0$, що для всіх $n, m \in \mathbb{Z}$

$$|V'_{n,m}(r_1) - V'_{n,m}(r_2)| \leq C|r_1 - r_2|, \quad |r_1|, |r_2| \leq R. \quad (6)$$

З умови (i) випливає, що A є обмеженим самоспряженим оператором в l^2 (див., наприклад, [6, с. 509]).

Задача Коші для рівняння (4) полягає у знаходженні розв'язку, який задовольняє початкові умови:

$$q(0) = q^{(0)}, \quad \dot{q}(0) = q^{(1)}. \quad (7)$$

Основний результат. У статті показано, що за виконання умов (i), (ii), якщо $q(t)$ — розв'язок рівняння (1) зі значеннями в l^2 , то $H(\dot{q}(t), q(t)) = H(q^{(1)}, q^{(0)}) = const.$

Справедлива така теорема.

Теорема 1. Нехай виконуються умови (i), (ii) та оператор A недодатний, тобто $(Aq, q) \leq 0$ для будь-якого $q \in l^2$. Крім того, нехай виконується одна із наступних умов:

- (a) $V_{n,m}(r) \geq 0$ для всіх $n, m \in \mathbb{Z}$ і $r \in \mathbb{R}$;
- (b) існує така неспадна функція $h(\xi)$, визначена для $\xi \geq 0$, що

$$\lim_{\xi \rightarrow +\infty} h(\xi) = +\infty \quad \text{і} \quad V_{n,m}(r) \geq h(|r|) \quad \text{для всіх} \quad n, m \in \mathbb{Z} \quad \text{і} \quad r \in \mathbb{R}.$$

Тоді для будь-яких початкових даних $q^{(0)}, q^{(1)} \in l^2$ задача (4), (7) має єдиний розв'язок, визначений при всіх $t \in \mathbb{R}$.

Наступна теорема, яка встановлює обмеженість глобального розв'язку задачі Коші, є основним результатом цієї статті:

Теорема 2. Нехай виконуються умови (i), (ii) та $V_{n,m}(r) \geq 0$ для всіх $(n, m) \in \mathbb{Z}^2$ і $r \in \mathbb{R}$. Тоді

- (a) якщо оператор A недодатний та $\lim_{r \rightarrow \pm\infty} V_{n,m}(r) = +\infty$ (рівномірно по $(n, m) \in \mathbb{Z}^2$), то єдиний розв'язок задачі (4), (7) з початковими даними початкових даних $q^{(0)}, q^{(1)} \in l^2$ є обмеженою функцією на зі значеннями в l^∞ . Крім того, якщо для деякого $s \geq 2$ існують $R > 0$ і $c > 0$ такі, що

$$V_{n,m}(r) \geq c|r|^s, \quad \forall r \in [-R, R] \quad \text{і} \quad (n, m) \in \mathbb{Z}^2, \quad (8)$$

то розв'язок є обмеженою функцією на \mathbb{R} зі значеннями в l^s .

(b) якщо оператор A від'ємно визначений, тобто то єдиний розв'язок задачі (4), (7) з початковими даними початкових даних є обмеженим на \mathbb{R} зі значеннями в l^2 .

Доведення. У випадку (a) маємо

$$H(q(t), \dot{q}(t)) = \frac{1}{2} \left[\|\dot{q}(t)\|^2 - (Aq(t), q(t)) \right] + \sum_{(n,m) \in \mathbb{Z}^2} V_{n,m}(q_{n,m}(t)) = H(q^{(0)}, q^{(1)}), \quad (9)$$

оскільки гамільтоніан H зберігає своє значення. Звідси, в силу невід'ємності оператора A та невід'ємності потенціалу $V_{n,m}$, маємо

$$V_{n,m}(q_{n,m}(t)) \leq H(q^{(0)}, q^{(1)}).$$

А це означає, що існує стала $C > 0$ така, що $|q_{n,m}(t)| \leq C$ для всіх $t \in \mathbb{R}$ і $(n,m) \in \mathbb{Z}^2$, оскільки $\lim_{r \rightarrow \pm\infty} V_{n,m}(r) = +\infty$ рівномірно по відношенню до $(n,m) \in \mathbb{Z}^2$.

Доведемо тепер другу частину твердження (a). Умова $\lim_{r \rightarrow \pm\infty} V_{n,m}(r) = +\infty$ означає, що якщо нерівність (8) виконується для деякого $R > 0$, то вона виконується і для будь-якого $R > 0$ з константою $c > 0$, яка залежить від R . За першою частиною твердження існує $R > 0$ таке, що $\|q(t)\|_{l^\infty} \leq R$ для всіх $t \in \mathbb{R}$. Таким чином, враховуючи (9) і (8), маємо

$$c \sum_{(n,m) \in \mathbb{Z}^2} |q_{n,m}(t)|^s \leq H(q^{(0)}, q^{(1)})$$

для всіх $t \in \mathbb{R}$. А це й означає, що $q \in l^s$.

У випадку (b) рівність (9) та від'ємність оператора A означають, що

$$\alpha \|q(t)\|^2 \leq H(q^{(0)}, q^{(1)})$$

для всіх $t \in \mathbb{R}$. А це й означає, що $q \in l^2$. **Теорему доведено.**

Висновки. У статті одержано результат про обмеженість глобального розв'язку задачі Коші для нескінченної системи лінійно зв'язаних нелінійних осциляторів на двовимірній ґратці.

Список використаних джерел:

1. Бак С. М. Існування періодичних за часом розв'язків системи осциляторів на двовимірній ґратці / С. М. Бак // Карпатські математичні публікації. — 2012. — Т. 4, № 2. — С. 175–196.
2. Бак С. М. Існування відокремлених біжучих хвиль для системи нелінійно зв'язаних осциляторів на двовимірній ґратці / С. М. Бак // Український математичний журнал. — 2017. — Т. 69, №4. — С. 435–444.
3. Бак С. М. Існування гетероклінічних біжучих хвиль у системі осциляторів на двовимірній ґратці / С. М. Бак // Математичні методи та фізико-механічні поля. — 2014. — Т. 57, №3. — С. 45–52.
4. Бак С. М. Існування звукових періодичних біжучих хвиль в системі нелінійно зв'язаних нелінійних осциляторів на двовимірній ґратці / С. М. Бак // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки : зб. наук. праць. — Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2014. — Вип. 10. — С. 17–23.
5. Бак С. М. Існування надзвукових періодичних біжучих хвиль в системі нелінійно зв'язаних нелінійних осциляторів на двовимірній ґратці / С. М. Бак // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки : зб. наук. праць. — Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2015. — Вип. 12. — С. 5–12.
6. Бак С. М. Існування періодичних біжучих хвиль в системі Фермі-Пасті-Улама на двовимірній ґратці / С. М. Бак // Математичні студії. — 2012. — Т. 37, №1. — С. 76–88.
7. Бак С. М. Існування стоячих хвиль в дискретному нелінійному рівнянні Шредінґера з кубічною нелінійністю на двовимірній ґратці / С. М. Бак // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки : зб. наук. праць. — Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2017. — Вип. 16. — С. 21–29.
8. Бак С. М. Існування стоячих хвиль для дискретного нелінійного рівняння типу Шредінґера із насичуванню нелінійністю / С. М. Бак // Математичні студії. — 2010. — Т. 33, №1. — С. 78–84.
9. Бак С. М. Періодичні біжучі хвилі в дискретному рівнянні \sin -Гордона на двовимірній ґратці / С. М. Бак // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки : зб. наук. праць. — Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2013. — Вип. 9. — С. 5–10.
10. Бак С. М. Коректність задачі Коші для нескінченної системи нелінійних осциляторів, розміщених на двовимірній решітці / С. М. Бак, О. О. Баранова, Ю. П. Білик // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки : зб. наук. праць. — Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2010. — Вип. 4. — С. 18–24.
11. Бак С. М. Стоячі хвилі з періодичною амплітудою в дискретному нелінійному рівнянні типу Шредінґера із насичуваною нелінійністю на двовимірній ґратці / С. М. Бак, Г. М. Ковтонюк, І. В. Печериця // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки : зб.

- наук. праць. — Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2018. — Вип. 18. — С. 5–13.
12. Бак С. М. Коректність задачі Коші для нескінченної системи нелінійних осциляторів з кубічним потенціалом на двовимірній ґратці / С. М. Бак, К. Є. Рум'янцева // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки : зб. наук. праць. — Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2012. — Вип. 6. — С. 29–36.
 13. Бак С. Н. Бегущие волны в системах осцилляторов на двумерных решетках / С. Н. Бак, А. А. Панков // Український математичний вісник. — 2010. — Т. 7, № 2. — С. 154–175.
 14. Бак С. М. Існування та єдиність глобального розв'язку задачі Коші для нескінченної системи нелінійних осциляторів на двовимірній ґратці / С. М. Бак // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки : зб. наук. праць. — Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2011. — Вип. 5. — С. 3–9.
 15. Bak S. The existence of heteroclinic traveling waves in the discrete sine-Gordon equation with nonlinear interaction on a 2D-lattice / S. Bak // Journal of mathematical physics, analysis, geometry. — 2018. — Vol. 14, № 1. — P. 16–26.
 16. Bak S. M. Existence of heteroclinic traveling waves in a system of oscillators on a two-dimensional lattice / S. M. Bak // Journal of Mathematical Sciences, 2016. — Vol. 217, №2 (August). — P. 187–197.
 17. Bak S. M. Existence of solitary traveling waves in a system of nonlinearly coupled oscillators on the 2D lattice / S. M. Bak // Ukrainian mathematical Journal. — 2017. — Vol. 4 (69). — P. 509–520.
 18. Bak S. M., Kovtonyuk G. M. Existence of solitary traveling waves in Fermi-Pasta-Ulam system on 2D lattice / S. M. Bak, G. M. Kovtonyuk // Matematychni Studii. — 2018. — Vol. 50, No.1. — P. 75–87.
 19. Bak S. Well-posedness of initial value problem for discrete nonlinear wave equations / S. Bak, G. N'Guerekata, A. Pankov // Communications in Mathematical Analysis. — 2010. — Vol. 8, № 1. — P. 79–86.
 20. Feckan M. Traveling waves in Hamiltonian systems on 2D lattices with nearest neighbour interactions / M. Feckan, V. Rothos // Nonlinearity. — 2007. — № 20. — P. 319–341.
 21. Friesecke G. Geometric solitary waves in a 2D math-spring lattice / G. Friesecke, K. Matthies // Discrete and continuous dynamical systems. — 2003. — Vol. 3, №1 (February). — P. 105–114.
 22. Pacciani P. On localized solutions of discrete nonlinear Schrödinger equation: An exact result / P. Pacciani, V. V. Konotop, G. P. Menzala // Physica D. — 2005. — Vol. 204. — P. 122–133.
 23. Pankov A. Global well-posedness for discrete non-linear Schrödinger equation / A. Pankov // Applicable Analysis. — 2010. — Vol. 89, № 9. — P. 1513–1521.
 24. Srikanth P. On periodic motions of two-dimensional lattices / P. Srikanth // Functional analysis with current applications in science, technology and industry. — 1998. — Vol. 377. — P. 118–122.

ON THE BOUNDEDNESS OF THE GLOBAL SOLUTION OF CAUCHY PROBLEM FOR INFINITE SYSTEM OF NONLINEAR OSCILLATORS ON 2D-LATTICE

This article is devoted to the study of an infinite-dimensional Hamiltonian system, which describes an infinite system of linearly coupled nonlinear oscillators on a two-dimensional lattice. This system is a countable system of ordinary differential equations. It is convenient to consider this system as a differential-operator equation in Hilbert space of two-way sequences. The Cauchy problem for such equations in this space is considered. Previously, it has been proven that under certain circumstances this problem has a unique local and global solution. Local resolution follows from the standard results for differential equations in Banach spaces. The basic conditions here are the spatial periodicity of coefficients of the operator of linear interaction of oscillators and the Cauchy continuity of nonlinearity (which is defined as a derivative of the on-site potential of the oscillator system). This system, in Hamilton view, was used to establish global resolution. Recall that from a physical point of view the Hamiltonian represents the total energy of the system, i.e. the sum of kinetic and potential energy. The basic conditions, in addition to those mentioned above, are the non-positivity of the operator of linearly interact between the oscillators and the half-boundary below their potentials. However, the question remains whether the global solution is bounded. In this article it is established that under the same conditions of existence of a global solution, if the linear interaction operator is non-positive and the on-site potential at infinity is infinitely large (uniformly over both spatial variables), or the linear interaction operator is negatively defined, then this solution is bounded to any initial data from a given sequence space. To prove this, the fact that the Hamiltonian of the system retains a constant value on the initial data was used.

Key words: *nonlinear oscillators, 2D-lattice, Cauchy problem, global solution.*

Отримано: 13.08.2019

УДК 517.5

DOI: 10.32626/2308-5878.2019-20.13-25

У. В. Гудима, канд. фіз.-мат. наук,

В. О. Гнатюк, канд. фіз.-мат. наук

Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

КРИТЕРІЙ ЕКСТРЕМАЛЬНОЇ ПОСЛІДОВНОСТІ ДЛЯ ЗАДАЧІ ВІДШУКАННЯ ВІДСТАНІ МІЖ ДВОМА ОПУКЛИМИ МНОЖИНАМИ ЛІНІЙНОГО НОРМОВАНОГО ПРОСТОРУ

Останнім часом значна увага приділяється дослідженню спеціальних класів екстремальних задач.

Важливий клас таких задач утворюють задачі теорії наближення функції.

Виявилось, що низка задач цієї теорії є частинними випадками задачі найкращого наближення елемента лінійного нормованого простору опуклою множиною цього простору, яку ще називають задачею відшукування відстані від елемента лінійного нормованого простору до опуклої множини цього простору.

Загальний критерій екстремального елемента для цієї задачі, оснований на співвідношеннях двоїстості, встановлено М. П. Корнейчуком та В. М. Тихомировим. Деяко відмінним від цього критерію є критерій колмогоровського типу.

Узагальненням задачі відшукування відстані від точки лінійного нормованого простору до опуклої множини цього простору є задача відшукування відстані між двома його опуклими множинами.

У праці [1] встановлені співвідношення двоїстості та критерії екстремального елемента для цієї задачі, основані на співвідношенні двоїстості.

Однак, множина екстремальних елементів для низки екстремальних задач є порожньою множиною. Для таких задач питання встановлення критеріїв екстремального елемента втрачає сенс.

Водночас будь-яка екстремальна задача, в тому числі і задача відшукування відстані між двома опуклими множинами, має екстремальну послідовність.

У статті для задачі відшукування відстані між двома опуклими множинами лінійного нормованого простору встановлені критерії екстремальної послідовності для цієї задачі, основані на співвідношенні двоїстості, та критерії екстремальної послідовності колмогоровського типу. Отримані результати конкретизовано на випадок задачі відшукування відстані між замкненими гіперплощинами лінійного нормованого простору.

Ключові слова: лінійний нормований простір, опукла множина, відстань між множинами, екстремальна послідовність, критерій екстремальної послідовності.

Вступ. У статті встановлено критерії екстремальної послідовності для задачі відшукування відстані між двома опуклими множинами лінійного нормованого простору, основані на співвідношенні двоїстості для відповідної екстремальної задачі, та критерії колмогоровського типу. Отримані критерії використано для дослідження задачі відшукування відстані між двома замкненими гіперплощинами лінійного нормованого простору.

Постановка задачі. Нехай X — лінійний над полем дійсних чисел нормований простір, A, B — опуклі множини простору X .

Задачею відшукування відстані (найкращої) між множинами A та B будемо називати задачу відшукування величини

$$E(A, B) = \inf_{\substack{x \in A, \\ y \in B}} \|x - y\| \quad (1)$$

(див., наприклад, [2, с. 65]).

Якщо існує елемент $(x^*, y^*) \in A \times B$ такий, що

$$E(A, B) = \inf_{\substack{x \in A, \\ y \in B}} \|x - y\| = \|x^* - y^*\|,$$

то згідно з [1] його будемо називати екстремальним елементом для величини (1).

Послідовність $\{(x_k, y_k)\}_{k=1}^{\infty}$ елементів $(x_k, y_k) \in A \times B$, $k = 1, 2, \dots$, для якої $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k - y_k\| = E(A, B)$, будемо називати екстремальною послідовністю для величини (1).

Актуальність теми. Відомо, що необхідність наближення складних математичних об'єктів більш простими і зручними у користуванні виникає як при розгляді теоретичних проблем математики, так і при вирішенні проблем практичного характеру.

Однією з центральних галузей теорії наближення є теорія наближення функцій, яка бере свій початок у роботах П. Л. Чебишева, який ще у 50-х роках 19 століття поставив задачу про рівномірне (чебишовське) наближення неперервної на сегменті дійснозначної функції множиною алгебраїчних поліномів степеня, що не перевищує деякого натурального числа.

Ця задача та низка інших задач теорії наближення функцій є частковими випадками задачі найкращого наближення елемента x простору X опуклою множиною B цього простору, тобто задачі відшукування величини

$$E(x, B) = \inf_{y \in B} \|x - y\|. \quad (2)$$

Якщо існує елемент $y^* \in B$ такий, що

$$E(x, B) = \|x - y^*\|,$$

то його називають екстремальним елементом для величини (2).

Основні результати дослідження величини (2) підсумовані, зокрема, у монографіях Н. І. Ахієзера [3], В. К. Дзядика [4], М. П. Корнейчука [5], П.-Ж. Лорана [6], О. І. Степанця [7, 8], В. М. Тихомирова [9] та ін.

Зрозуміло, що задача відшукування величини (2) є частинним випадком задачі відшукування величини (1) при $A = \{x\}$.

Отже, всі вищезгадані задачі наближення вкладаються у схему постановки задачі (1).

Тому дослідження задачі (1) дозволяє з єдиних позицій розглянути результати дослідження цих задач та використати отримані результати дослідження задачі (1) для дослідження інших задач, які вкладаються у схему її постановки.

У праці [1] встановлено співвідношення двоїстості та оснований на ньому критерій екстремального елемента для задачі відшукування величини (1), а також критерій колмогоровського типу екстремального елемента для цієї задачі. Отримані результати конкретизовано на окремі частинні випадки задачі відшукування величини (1) та використано при дослідженні задач відшукування відстані між двома кулями та відстані між кулею і гіперплощиною лінійного нормованого простору.

Проте часто екстремальний елемент для величини (1) не існує (особливо у випадках, коли X є нескінченновимірним простором). Водночас існування екстремальної послідовності для цієї величини гарантовано.

Тому актуальною є проблема встановлення критеріїв екстремальності послідовності $\{(x_k, y_k)\}_{k=1}^{\infty}$, де $(x_k, y_k) \in A \times B$, $k = 1, 2, \dots$, такої, що існує $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k - y_k\|$, що дозволить розширити можливості застосувань результатів дослідження цієї величини.

Мета роботи. Встановити критерій екстремальної послідовності для задачі відшукування величини (1). Застосувати ці критерії для дослідження задачі про відшукування відстані між двома замкненими гіперплощинами лінійного нормованого простору.

Критерій екстремальної послідовності для величини (1), оснований на співвідношенні двоїстості для цієї величини. Будемо позначати через X^* — простір, спряжений з X , а через $S^* = \{f \in X^* : \|f\| \leq 1\}$.

Теорема 1. Нехай $(x_k, y_k) \in A \times B$, $k = 1, 2, \dots$, і послідовність $\{(x_k, y_k)\}_{k=1}^{\infty}$ така, що існує $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k - y_k\|$.

Для того щоб послідовність $\{(x_k, y_k)\}_{k=1}^{\infty}$ була екстремальною послідовністю для величини (1), необхідно і достатньо, щоб існував функціонал $f_0 \in S^*$ такий, що

$$\inf_{\substack{x \in A, \\ y \in B}} f_0(x - y) = \lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k - y_k\|. \quad (3)$$

Доведення. Необхідність. Нехай $\{(x_k, y_k)\}_{k=1}^{\infty}$ є екстремальною послідовністю для величини (1). Згідно з теоремою 1 [1] існує функціонал $f_0 \in S^*$ такий, що

$$\begin{aligned} \inf_{\substack{x \in A, \\ y \in B}} \|x - y\| &= \max_{f \in S^*} \inf_{\substack{x \in A, \\ y \in B}} f(x - y) = \max_{f \in S^*} \left(\inf_{x \in A} f(x) - \sup_{y \in B} f(y) \right) = \\ &= \inf_{x \in A} f_0(x) - \sup_{y \in B} f_0(y) = \inf_{\substack{x \in A, \\ y \in B}} f_0(x - y). \end{aligned} \quad (4)$$

Оскільки $\{(x_k, y_k)\}_{k=1}^{\infty}$ є екстремальною послідовністю для величини (1), то з урахуванням (4) отримаємо

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k - y_k\| = \inf_{\substack{x \in A, \\ y \in B}} \|x - y\| = \inf_{\substack{x \in A, \\ y \in B}} f_0(x - y).$$

Отже, для $f_0 \in S^*$ і екстремальної послідовності $\{(x_k, y_k)\}_{k=1}^{\infty}$ для величини (1) має місце співвідношення (3).

Необхідність доведено.

Достатність. Припустимо, що для послідовності $\{(x_k, y_k)\}_{k=1}^{\infty}$, де $x_k \in A$, $y_k \in B$, $k = 1, 2, \dots$, існує $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k - y_k\|$ та функціонал $f_0 \in S^*$, для якого виконується умова (3).

З урахуванням цієї умови для будь-яких $x \in A$, $y \in B$ будемо мати

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k - y_k\| = \inf_{\substack{x \in A, \\ y \in B}} f_0(x - y) \leq f_0(x - y) \leq \|f_0\| \|x - y\| \leq \|x - y\|.$$

Звідси випливає, що

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k - y_k\| \leq \inf_{\substack{x \in A, \\ y \in B}} \|x - y\|. \quad (5)$$

З іншого боку для всіх $k = 1, 2, \dots$ $\inf_{\substack{x \in A, \\ y \in B}} \|x - y\| \leq \|x_k - y_k\|$, оскільки

$$x_k \in A, y_k \in B.$$

Тому

$$\inf_{\substack{x \in A, \\ y \in B}} \|x - y\| \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k - y_k\|. \quad (6)$$

Із співвідношень (5), (6) випливає рівність

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k - y_k\| = \inf_{\substack{x \in A, \\ y \in B}} \|x - y\|.$$

Це й означає, що послідовність $\{(x_k, y_k)\}_{k=1}^{\infty}$ є екстремальною для величини (1).

Достатність доведено.

Теорему доведено.

Теорема 2. Нехай $(x_k, y_k) \in A \times B$, $k = 1, 2, \dots$, і послідовність $\{(x_k, y_k)\}_{k=1}^{\infty}$ така, що існує $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k - y_k\|$.

Для того щоб послідовність $\{(x_k, y_k)\}_{k=1}^{\infty}$ була екстремальною для величини (1), необхідно і достатньо, щоб існував функціонал $f_0 \in S^*$ такий, що

- 1) $\lim_{k \rightarrow \infty} f_0(x_k - y_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k - y_k\|$,
- 2) $\lim_{k \rightarrow \infty} f_0(x_k) = \inf_{x \in A} f_0(x)$,
- 3) $\lim_{k \rightarrow \infty} f_0(y_k) = \sup_{y \in B} f_0(y)$.

Доведення. Необхідність. Нехай послідовність $\{(x_k, y_k)\}_{k=1}^{\infty}$ є екстремальною послідовністю для величини (1). Згідно з теоремою 1 існує функціонал $f_0 \in S^*$ такий, що має місце рівність (3). З цієї рівності випливає, що

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k - y_k\| &= \inf_{\substack{x \in A, \\ y \in B}} \|x - y\| = \inf_{\substack{x \in A, \\ y \in B}} f_0(x - y) = \inf_{x \in A} f_0(x) - \sup_{y \in B} f_0(y) \leq \\ &\leq f_0(x_k) - \sup_{y \in B} f_0(y) \leq f_0(x_k) - f_0(y_k) = f_0(x_k - y_k) \leq \\ &\leq \|f_0\| \|x_k - y_k\| \leq \|x_k - y_k\|, \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (7)$$

Внаслідок (7)

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_0(x_k - y_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k - y_k\|, \quad (8)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_0(x_k) = \inf_{x \in A} f_0(x), \quad (9)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (f_0(x_k) - f_0(y_k)) = \inf_{x \in A} f_0(x) - \sup_{y \in B} f_0(y). \quad (10)$$

З рівностей (9), (10) випливає, що

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_0(y_k) = \sup_{y \in B} f_0(y). \quad (11)$$

З урахуванням рівностей (8), (9), (11) робимо висновок, що для функціонала $f_0 \in S^*$ виконуються умови 1)–3) теореми.

Необхідність доведено.

Достатність. Припустимо, що для послідовності $\{(x_k, y_k)\}_{k=1}^{\infty}$, де $x_k \in A$, $y_k \in B$, $k = 1, 2, \dots$, існує $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k - y_k\|$ та функціонал $f_0 \in S^*$, для якого виконуються умови 1)–3) теореми. З цих співвідношень випливає, що

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k - y_k\| = \inf_{x \in A} f_0(x) - \sup_{y \in B} f_0(y) = \inf_{\substack{x \in A, \\ y \in B}} f_0(x - y).$$

З урахуванням теореми 1 з цих рівностей робимо висновок, що послідовність $\{(x_k, y_k)\}_{k=1}^{\infty}$ є екстремальною послідовністю для величини (1).

Достатність доведено.

Теорему доведено.

Наслідок 1. Нехай в задачі відшукування величини (1) B є опуклим конусом з вершиною в точці 0, послідовність $\{(x_k, y_k)\}_{k=1}^{\infty}$, де $(x_k, y_k) \in A \times B$, $k = 1, 2, \dots$, така, що існує $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k - y_k\|$.

Для того щоб ця послідовність була екстремальною для величини (1), необхідно і достатньо, щоб існував функціонал $f_0 \in S^*$ такий, що

- 1) $\inf_{x \in A} f_0(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k - y_k\|$,
- 2) $\sup_{y \in B} f_0(y) = 0$.

Доведення. Необхідність. Нехай $\{(x_k, y_k)\}_{k=1}^{\infty}$ є екстремальною послідовністю для величини (1). Згідно з теоремою 1 існує функціонал $f_0 \in S^*$ такий, що має місце рівність (3). З цієї рівності випливає, що

$$\inf_{x \in A} f_0(x) - \sup_{y \in B} f_0(y) = \lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k - y_k\|. \quad (12)$$

Тому $\sup_{y \in B} f_0(y) \in R$. Оскільки B є конусом з вершиною в точці 0, то $\sup_{y \in B} f_0(y) = 0$ (див., наприклад, доведення наслідку 1 [1]).

З урахуванням цього та рівності (12) приходимо до висновку про справедливість умов 1), 2) наслідку.

Необхідність доведено.

Достатність. Припустимо, що для послідовності $\{(x_k, y_k)\}_{k=1}^{\infty}$, де $x_k \in A$, $y_k \in B$, $k = 1, 2, \dots$, існує $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k - y_k\|$ та функціонал $f_0 \in S^*$, для якого виконуються умови 1), 2) цього наслідку. З цих умов випливає, що

$$\inf_{x \in A} f_0(x) - \sup_{y \in B} f_0(y) = \inf_{\substack{x \in A, \\ y \in B}} f_0(x - y) = \lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k - y_k\|.$$

Згідно з теоремою 1 послідовність $\{(x_k, y_k)\}_{k=1}^{\infty}$ є екстремальною послідовністю для величини (1).

Достатність доведено.

Наслідок доведено.

Наслідок 2. Нехай в задачі відшукування величини (1) A є опуклим конусом з вершиною в точці 0 , послідовність $\{(x_k, y_k)\}_{k=1}^{\infty}$, де $(x_k, y_k) \in A \times B$, $k = 1, 2, \dots$, така, що існує $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k - y_k\|$.

Для того щоб послідовність була екстремальною для величини (1), необхідно і достатньо, щоб існував функціонал $f_0 \in S^*$ такий, що

- 1) $-\sup_{y \in B} f_0(y) = \lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k - y_k\|$,
- 2) $\inf_{x \in A} f_0(x) = 0$.

Зрозуміло, що коли в наслідку 1 (наслідку 2) B є підпростором (A є підпростором), то умова 2) в наслідку 1 (умова 2) в наслідку 2) запишеться у вигляді $f_0(y) = 0$, $y \in B$, ($f_0(x) = 0$, $x \in A$).

Критерії колмогоровського типу екстремальної послідовності для величини (1). Розглянемо деякі критерії колмогоровського типу екстремальності послідовності для задачі відшукування величини (1).

Теорема 3. Нехай $(x_k, y_k) \in A \times B$, $k = 1, 2, \dots$, і послідовність $\{(x_k, y_k)\}_{k=1}^{\infty}$ така, що існує $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k - y_k\|$.

Для того щоб послідовність $\{(x_k, y_k)\}_{k=1}^{\infty}$ була екстремальною для величини (1), необхідно і достатньо, щоб існував функціонал $f_0 \in S^*$ такий, що

- 1) $\lim_{k \rightarrow \infty} f_0(x_k - y_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k - y_k\|$,
- 2) $\lim_{k \rightarrow \infty} f_0(x - x_k) \geq 0$ для всіх $x \in A$,
- 3) $\lim_{k \rightarrow \infty} f_0(y - y_k) \leq 0$ для всіх $y \in B$.

Доведення. Необхідність. Нехай $\{(x_k, y_k)\}_{k=1}^{\infty}$ є екстремальною послідовністю для величини (1). Згідно з теоремою 2 існує функціонал $f_0 \in S^*$, який задовольняє умовам 1)–3) цієї теореми. З цих умов випливає, що для всіх $(x, y) \in A \times B$:

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} f_0(x_k - y_k) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k - y_k\|; \quad y \in B \\ \lim_{k \rightarrow \infty} f_0(x_k) &= \inf_{x \in A} f_0(x) \leq f_0(x), \quad \lim_{k \rightarrow \infty} f_0(x - x_k) \geq 0; \\ \lim_{k \rightarrow \infty} f_0(y_k) &= \sup_{y \in B} f_0(y) \geq f_0(y), \quad \lim_{k \rightarrow \infty} f_0(y - y_k) \leq 0. \end{aligned}$$

Отже, існує функціонал $f_0 \in S^*$, для якого виконуються умови 1)–3) цієї теореми.

Необхідність доведено.

Достатність. Нехай існує функціонал $f_0 \in S^*$, для якого виконуються умови 1)–3) теореми.

Тоді для будь-якого елемента $(x, y) \in A \times B$ та $k = 1, 2, \dots$ маємо, що

$$\begin{aligned} \|x - y\| &\geq f_0(x - y) = f_0(x - x_k) + f_0(x_k - y_k) + f_0(y_k - y), \\ \|x - y\| &\geq \lim_{k \rightarrow \infty} f_0(x - x_k) + \lim_{k \rightarrow \infty} f_0(x_k - y_k) + \lim_{k \rightarrow \infty} f_0(y_k - y) \geq \\ &\geq \lim_{k \rightarrow \infty} f_0(x_k - y_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k - y_k\|. \end{aligned}$$

Тому

$$\inf_{\substack{x \in A, \\ y \in B}} \|x - y\| \geq \lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k - y_k\| \geq \inf_{\substack{x \in A, \\ y \in B}} \|x - y\|,$$

оскільки $x_k \in A$, $y_k \in B$, $k = 1, 2, \dots$.

З останніх співвідношень випливає, що

$$\inf_{\substack{x \in A, \\ y \in B}} \|x - y\| = \lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k - y_k\|.$$

Це й означає, що послідовність $\{(x_k, y_k)\}_{k=1}^{\infty}$ є екстремальною послідовністю для величини (1).

Достатність доведено.

Теорему доведено.

Теорема 4. Нехай $(x_k, y_k) \in A \times B$, $k = 1, 2, \dots$, і послідовність $\{(x_k, y_k)\}_{k=1}^{\infty}$ така, що існує $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k - y_k\|$.

Для того щоб послідовність $\{(x_k, y_k)\}_{k=1}^{\infty}$ була екстремальною для величини (1), необхідно і достатньо, щоб для кожного елемента $(x, y) \in A \times B$ існувала послідовність $\{f_k^{(x,y)}\}_{k=1}^{\infty}$, $f_k^{(x,y)} \in S^*$, $k = 1, 2, \dots$, така, що

- 1) $\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} f_k^{(x,y)}(x_k - y_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k - y_k\|$,
- 2) $\underline{\lim}_{k \rightarrow \infty} f_k^{(x,y)}(x - x_k) \geq 0$,
- 3) $\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} f_k^{(x,y)}(y - y_k) \leq 0$.

Доведення. Достатність. Нехай $(x, y) \in A \times B$. Тоді існує послідовність $\{f_k^{(x,y)}\}_{k=1}^{\infty}$, $f_k^{(x,y)} \in S^*$, $k = 1, 2, \dots$, для якої виконуються умови 1)–3) цієї теореми. Звідси випливає існування підпослідовності $\{f_{k_l}^{(x,y)}\}_{l=1}^{\infty}$ послідовності $\{f_k^{(x,y)}\}_{k=1}^{\infty}$ такої, що

$$\lim_{l \rightarrow \infty} f_{k_l}^{(x,y)}(x_{k_l} - y_{k_l}) = \lim_{l \rightarrow \infty} \|x_{k_l} - y_{k_l}\| = \lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k - y_k\|, \quad (13)$$

$$\lim_{l \rightarrow \infty} f_{k_l}^{(x,y)}(x - x_{k_l}) \geq 0, \quad (14)$$

$$\lim_{l \rightarrow \infty} f_{k_l}^{(x,y)}(y - y_{k_l}) \leq 0. \quad (15)$$

Маємо, що для $l = 1, 2, \dots$

$$\|x - y\| \geq f_{k_l}^{(x,y)}(x - y) = f_{k_l}^{(x,y)}(x - x_{k_l}) + f_{k_l}^{(x,y)}(x_{k_l} - y_{k_l}) + f_{k_l}^{(x,y)}(y_{k_l} - y).$$

З урахуванням (13)–(15) звідси одержимо, що

$$\begin{aligned} \|x - y\| &\geq \lim_{l \rightarrow \infty} f_{k_l}^{(x,y)}(x - x_{k_l}) + \lim_{l \rightarrow \infty} f_{k_l}^{(x,y)}(x_{k_l} - y_{k_l}) + \lim_{l \rightarrow \infty} f_{k_l}^{(x,y)}(y_{k_l} - y) \geq \\ &\geq \lim_{l \rightarrow \infty} f_{k_l}^{(x,y)}(x_{k_l} - y_{k_l}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k - y_k\|. \end{aligned}$$

Тому

$$\inf_{\substack{x \in A, \\ y \in B}} \|x - y\| \geq \lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k - y_k\| \geq \inf_{\substack{x \in A, \\ y \in B}} \|x - y\|,$$

оскільки $x_k \in A$, $y_k \in B$, $k = 1, 2, \dots$.

З останніх співвідношень випливає, що

$$\inf_{\substack{x \in A \\ y \in B}} \|x - y\| = \lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k - y_k\|.$$

Це й означає, що послідовність $\{(x_k, y_k)\}_{k=1}^{\infty}$ є екстремальною для величини (1).

Достатність доведено.

Необхідність. Нехай послідовність $\{(x_k, y_k)\}_{k=1}^{\infty}$ є екстремальною для величини (1).

Згідно з теоремою 2 існує функціонал $f_0 \in S^*$, який задовольняє умовам 1)–3) цієї теореми. Для кожного $(x, y) \in A \times B$ покладемо

$f_k^{(x,y)} = f_0$. Тоді з умов 1)–3) теореми 2 випливає, що

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_k^{(x,y)}(x_k - y_k) = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} f_k^{(x,y)}(x_k - y_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k - y_k\|,$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_k^{(x,y)}(x - x_k) = \underline{\lim}_{k \rightarrow \infty} f_k^{(x,y)}(x - x_k) \geq 0,$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_k^{(x,y)}(y - y_k) = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} f_k^{(x,y)}(y - y_k) \leq 0,$$

тобто існує послідовність $\{f_k^{(x,y)}\}_{k=1}^{\infty}$ така, що $f_k^{(x,y)} = f_0$, $k = 1, 2, \dots$,

для якої виконуються умови 1)–3) теореми.

Необхідність доведено.

Теорему доведено.

Наслідок 3. Нехай $(x_k, y_k) \in A \times B$, $k = 1, 2, \dots$, існує $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k - y_k\|$.

Для того щоб послідовність $\{(x_k, y_k)\}_{k=1}^{\infty}$ була екстремальною для величини (1), необхідно і достатньо, щоб для кожного елемента $(x, y) \in A \times B$ існував функціонал $f^{(x,y)} \in S^*$, такий, що

$$1) \lim_{k \rightarrow \infty} f^{(x,y)}(x_k - y_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k - y_k\|,$$

$$2) \lim_{k \rightarrow \infty} f^{(x,y)}(x - x_k) \geq 0,$$

$$3) \lim_{k \rightarrow \infty} f^{(x,y)}(y - y_k) \leq 0.$$

Доведення. Достатність. Нехай для $(x, y) \in A \times B$ існує функціонал $f^{(x,y)} \in S^*$ такий, що виконуються умови 1)–3) цього наслідку.

Тоді для послідовності $\{f_k^{(x,y)}\}_{k=1}^{\infty}$, де $f_k^{(x,y)} = f^{(x,y)}$, $k = 1, 2, \dots$, виконуються умови 1)–3) теореми 3. Згідно з цією теоремою послідовність $\{(x_k, y_k)\}_{k=1}^{\infty}$ є екстремальною послідовністю для величини (1).

Достатність доведено.

Необхідність. Нехай послідовність $\{(x_k, y_k)\}_{k=1}^{\infty}$ є екстремальною для величини (1). Відповідно до теореми 3 існує функціонал $f_0 \in S^*$, який задовольняє умовам 1)–3) цієї теореми. Для кожного $(x, y) \in A \times B$ покладемо $f^{(x,y)} = f_0$. Тоді з умов 1)–3) теореми 3 випливає справедливість умов 1)–3) цього наслідку.

Необхідність доведено.

Наслідок доведено.

Задача відшукування відстані між двома гіперплощинами лінійного нормованого простору, які не перетинаються.

Теорема 5. Нехай $\varphi \in X^*$, $\varphi \neq 0$; $c_1, c_2 \in R$, $c_1 > c_2$; $A = \{x \in X : \varphi(x) = c_1\}$, $B = \{y \in X : \varphi(y) = c_2\}$ — замкнені гіперплощини простору X , $x_1 \in A$, а $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ є екстремальною послідовністю для задачі відшукування

$$\inf_{y \in B} \|x_1 - y\|.$$

Тоді послідовність $\{(x_1, y_k)\}_{k=1}^{\infty}$ є екстремальною для задачі відшукування величини

$$E(A, B) = \inf_{\substack{x \in A, \\ y \in B}} \|x - y\|. \quad (16)$$

Має місце рівність

$$E(A, B) = \frac{c_1 - c_2}{\|\varphi\|}. \quad (17)$$

Доведення. Нехай $f_0 = \frac{\varphi}{\|\varphi\|}$. Зрозуміло, що $\|f_0\| = 1$. Тому $f_0 \in S^*$.

Для функціонала f_0 маємо, що

$$\inf_{\substack{x \in A, \\ y \in B}} f_0(x - y) = \inf_{\substack{x \in A, \\ y \in B}} \frac{\varphi}{\|\varphi\|}(x - y) = \inf_{\substack{x \in A, \\ y \in B}} \frac{\varphi(x) - \varphi(y)}{\|\varphi\|} = \inf_{\substack{x \in A, \\ y \in B}} \frac{c_1 - c_2}{\|\varphi\|} = \frac{c_1 - c_2}{\|\varphi\|}. \quad (18)$$

З іншого боку (див., наприклад, теорему 3[1])

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_1 - y_k\| = \inf_{y \in B} \|x_1 - y\| = \frac{|\varphi(x_1) - c_2|}{\|\varphi\|} = \frac{|c_1 - c_2|}{\|\varphi\|} = \frac{c_1 - c_2}{\|\varphi\|}. \quad (19)$$

З рівностей (18), (19) випливає, що

$$\inf_{\substack{x \in A, \\ y \in B}} f_0(x - y) = \lim_{k \rightarrow \infty} \|x_1 - y_k\|.$$

Звідси та теореми 1 випливає, що $\{(x_1, y_k)\}_{k=1}^{\infty}$ є екстремальною послідовністю для величини (16). Внаслідок цього і рівності (19) робимо висновок про справедливість формули (17).

Теорему доведено.

Висновки. Для задачі відшукування відстані між двома опуклими множинами лінійного нормованого простору встановлено критерії екстремальної послідовності, оснований на співвідношенні двоїстості для цієї задачі, та критерії колмогоровського типу. Ці критерії використано для дослідження задачі відшукування відстані між двома замкненими гіперплощинами лінійного нормованого простору.

Список використаних джерел:

1. Гудима У. В. Співвідношення двоїстості та критерії екстремальності елемента для задачі відшукування відстані між двома опуклими множинами лінійного нормованого простору / У. В. Гудима, В. О. Гнатюк // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки : зб. наук. праць. — Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2018. — Вип. 18. — С. 65–77.
2. Колмогоров А. Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. — М. : Наука, 1976. — 544 с.
3. Ахиезер Н. И. Лекции по теории аппроксимации / Н. И. Ахиезер. — М. : Наука, 1965. — 407 с.
4. Дзядык В. К. Введение в теорию равномерного приближения функций / В. К. Дзядык. — М. : Наука, 1977. — 510 с.
5. Корнейчук Н. П. Экстремальные задачи теории приближения / Н. П. Корнейчук. — М. : Наука, 1976. — 320 с.
6. Лоран П.-Ж. Аппроксимация и оптимизация / П.-Ж. Лоран. — М. : Мир, 1975. — 496 с.
7. Степанец А. И. Методы теории приближений / А. И. Степанец. — Киев : Ин-т математики НАН Украины, 2002. — Ч. I. — 427 с.
8. Степанец А. И. Методы теории приближений / А. И. Степанец. — Киев : Ин-т математики НАН Украины, 2002. — Ч. II. — 468 с.
9. Тихомиров В. М. Некоторые вопросы теории приближений / В. М. Тихомиров. — М. : Изд-во Моск. ун-та, 1976. — 307 с.

THE CRITERIONS OF THE EXTREMALITY OF A SEQUENCE FOR THE PROBLEM OF FINDING THE DISTANCE BETWEEN TWO CONVEX SETS OF THE LINEAR NORMED SPACE

The research and construction of effective methods for decisioning special classes of extreme problems are actual problems of modern mathematics.

In the writings of P. L. Chebyshev investigated a class of problems with non-differentiable functions. These works became the basis of approximation theory.

Many problems of this theory are partial cases of the problem of the best approximation of an element of linear normed space by convex set of this space. Important questions of the study of this problem are establishment of the criterion of the extremality of an element. M. P. Korniiichuk and V. M. Tikhomirov established the criterion of the extremality of an element. The basis of this criterion was relation of duality.

An important problem, the partial case of which is the problem of the best approximation of an element of a linear normed space by a convex set of this space, is the problem of finding the distance between two convex sets of linear normed space. In the article [1] established relation of duality and the criterion of the extremality of an element for this problem.

However, the set of extremal elements for some problems is an empty set. But any extremal problem has an extremal sequence. So research into this sequence is relevant.

In this article established the criterions of the extremal sequence of the basis of which is relation of duality and criterion of the Kolmogorov type for the problem of finding the distance between two convex sets of linear normed space. These results were used for the problem of the find the distance between two closed hyperplanes of the linear normed space.

Key words: *the linear normed space, the convex set, the distance between sets, the extremal sequence, the criterion of the extremality of a sequence.*

Отримано: 19.08.2019

УДК 517.946

DOI: 10.32626/2308-5878.2019-20.26-40

І. М. Конет, д-р фіз.-мат. наук, професор,**Т. М. Пилипюк**, канд. фіз.-мат. наук

Кам'янець-Подільський національний університет

імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

ПАРАБОЛІЧНІ КРАЙОВІ ЗАДАЧІ В НЕОБМЕЖЕНОМУ КУСКОВО-ОДНОРІДНОМУ КЛИНОВИДНОМУ СУЦІЛЬНОМУ ЦИЛІНДРІ

У пропонованій статті методом класичних інтегральних і гібридних інтегральних перетворень у поєднанні з методом головних розв'язків (матриць впливу та матриць Гріна) вперше побудовано єдині точні аналітичні розв'язки параболічних крайових задач математичної фізики в необмеженому за змінною z кусково-однорідному за радіальною змінною r клиновидному за кутовою змінною φ суцільному циліндрі.

Розглянуто випадки задання на гранях клина крайових умов Діріхле і Неймана та їх можливих комбінацій (Діріхле–Неймана, Неймана–Діріхле).

Для побудови розв'язків досліджуваних крайових задач застосовано скінченне інтегральне перетворення Фур'є щодо кутової змінної, інтегральне перетворення Фур'є на декартовій осі щодо аплікатної змінної та гібридне інтегральне перетворення типу Ганкеля 1-го роду на сегменті полярної осі з n точками спряження щодо радіальної змінної.

Послідовне застосування інтегральних перетворень за геометричними змінними дозволяє звести тривимірні початково-крайові задачі спряження до задачі Коші для звичайного лінійного неоднорідного диференціального рівняння 1-го порядку, єдиний розв'язок якої виписано в замкнутому вигляді.

Застосування обернених інтегральних перетворень відновлює в явному вигляді розв'язки розглянутих задач через їх інтегральне зображення.

Ключові слова: *параболічне рівняння, початкові та крайові умови, умови спряження, інтегральні перетворення, гібридні інтегральні перетворення, головні розв'язки.*

Вступ. Теорія крайових задач для диференціальних рівнянь з частинними похідними, зокрема рівнянь математичної фізики, — важливий розділ сучасної теорії диференціальних рівнянь, який в наш час інтенсивно розвивається. Її актуальність обумовлена як значимістю її результатів для розвитку багатьох розділів математики, так і численними застосуваннями її досягнень при дослідженні різноманітних ма-

тематичних моделей різних процесів і явищ фізики, механіки, хімії, біології, медицини, економіки, екології, техніки, новітніх технологій.

Вагомі результати з теорії задачі Коші та крайових задач для рівнянь параболічного типу одержано у відомих працях Городецького В. В. [2], Житарашу М. В., Ейдельмана С. Д. [6], Загорського Т. Я. [7], Івасишена С. Д. [8], Ладженської О. А., Солоннікова В. А., Уральцевої Н. М. [14], Ландіса Є. М. [15], Матійчука М. І. [16], Пукальсько-го І. Д. [18], Фрідмана А. [22], Ейдельмана С. Д. [24] та інших вітчизняних і зарубіжних математиків.

Добре відомо, що складність досліджуваних крайових задач суттєво залежить як від властивостей коефіцієнтів рівнянь (різні види виродженостей і особливостей коефіцієнтів), так і від геометричної структури області (гладкість межі, наявність кутових точок, обмеженість, необмеженість тощо), в якій розглядається задача. На цей час досить детально вивчено властивості розв'язків і розвинуто різноманітні методи побудови розв'язків (точні та наближені) крайових задач для лінійних, квазілінійних і деяких нелінійних рівнянь різних типів (еліптичних, параболічних, гіперболічних) в однозв'язних областях (однорідних середовищах), які обумовлені згаданими вище властивостями коефіцієнтів рівнянь і геометрією області, та побудовано функціональні простори коректності задач в сенсі Адамара.

Водночас багато важливих прикладних задач термомеханіки, теплофізики, дифузії, теорії пружності, теорії електричних кіл, теорії коливань, механіки деформівного твердого тіла приводять до крайових і мішаних задач для диференціальних рівнянь з частинними похідними різних типів не тільки в однорідних середовищах, коли коефіцієнти рівнянь є неперервними, але й в неоднорідних і кусково-однорідних середовищах, коли коефіцієнти рівнянь є кусково-неперервними функціями чи, зокрема, кусково-сталими [4, 5, 19].

Відомо, що крім методу відокремлення змінних (методу Фур'є) та його узагальнень, одним з важливих і ефективних методів вивчення лінійних крайових і мішаних задач для диференціальних рівнянь з частинними похідними в однорідних середовищах є метод інтегральних перетворень, який дає можливість побудувати в аналітичному вигляді точні розв'язки розглянутих задач через їх інтегральне зображення.

У той же час для досить широкого класу лінійних крайових задач у кусково-однорідних середовищах ефективним методом побудови їх розв'язків виявився метод гібридних інтегральних перетворень, що породжені відповідними гібридними диференціальними операторами, коли на кожній компоненті зв'язності кусково-однорідного середовища розглядаються або ж різні диференціальні оператори, або ж диференціальні оператори того ж самого вигляду, але з різними наборами коефіцієнтів [3, 9–12].

У цій статті, яка є логічним продовженням [13], за допомогою методу інтегральних і гібридних інтегральних перетворень у поєднанні з методом головних розв'язків побудовано інтегральні зображення єдиних точних аналітичних розв'язків параболічних початково-крайових задач математичної фізики в необмеженому кусково-однорідному клиновидному суцільному циліндрі.

Постановка задачі. Розглянемо задачу побудови обмеженого на множині

$$D = \{(t, r, \varphi, z) : t > 0; r \in I_n^+ = \bigcup_{j=1}^{n+1} I_j \equiv \bigcup_{j=1}^{n+1} (R_{j-1}; R_j), R_0 > 0, R_{n+1} = R < +\infty; \varphi \in (0; \varphi_0), 0 < \varphi_0 < 2\pi; z \in (-\infty; +\infty)\}$$

класичного розв'язку лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними параболічного типу 2-го порядку [17]

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} - \left[a_{ij}^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{a_{\varphi j}^2}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + a_{zj}^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] u_j + \chi_j^2 u_j = f_j(t, r, \varphi, z); r \in I_j; j = \overline{1, n+1} \quad (1)$$

з початковими умовами

$$u_j(t, r, \varphi, z) \Big|_{t=0} = g_j(r, \varphi, z); r \in I_j; j = \overline{1, n+1}, \quad (2)$$

крайовими умовами

$$\frac{\partial^s u_j}{\partial z^s} \Big|_{z=-\infty} = 0; \quad \frac{\partial^s u_j}{\partial z^s} \Big|_{z=+\infty} = 0; \quad s = 0, 1; \quad j = \overline{1, n+1}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial^s u_1}{\partial r^s} \Big|_{r=0} = 0; \quad \left(\alpha_{22}^{n+1} \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{22}^{n+1} \right) u_{n+1} \Big|_{r=R} = g(t, \varphi, z); \quad s = 0, 1; \quad (4)$$

одними з крайових умов на гранях клина [13]

$$u_j \Big|_{\varphi=0} = g_{1j}(t, r, z); \quad u_j \Big|_{\varphi=\varphi_0} = w_{1j}(t, r, z); \quad j = \overline{1, n+1}, \quad (5)$$

$$u_j \Big|_{\varphi=0} = g_{2j}(t, r, z); \quad \frac{\partial u_j}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=\varphi_0} = -w_{2j}(t, r, z); \quad j = \overline{1, n+1}, \quad (6)$$

$$\frac{\partial u_j}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=0} = g_{3j}(t, r, z); \quad u_j \Big|_{\varphi=\varphi_0} = w_{3j}(t, r, z); \quad j = \overline{1, n+1}, \quad (7)$$

$$\frac{\partial u_j}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=0} = g_{4j}(t, r, z); \quad \frac{\partial u_j}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=\varphi_0} = -w_{4j}(t, r, z); \quad j = \overline{1, n+1} \quad (8)$$

та умовами спряження [12]

$$\left[\left(\alpha_{j1}^k \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j1}^k \right) u_k - \left(\alpha_{j2}^k \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j2}^k \right) u_{k+1} \right]_{r=R_k} = 0; j = 1, 2; k = \overline{1, n}, \quad (9)$$

де a_{rj} , $a_{\varphi j}$, a_{zj} , χ_j , α_{js}^k , β_{js}^k — деякі сталі;

$$c_{jk} = \alpha_{2j}^k \beta_{1j}^k - \alpha_{1j}^k \beta_{2j}^k \neq 0; c_{1k} \cdot c_{2k} > 0; \alpha_{22}^{n+1} \geq 0, \beta_{22}^{n+1} \geq 0; \alpha_{22}^{n+1} + \beta_{22}^{n+1} \neq 0;$$

$$f(t, r, \varphi, z) = \{f_1(t, r, \varphi, z), f_2(t, r, \varphi, z), \dots, f_{n+1}(t, r, \varphi, z)\};$$

$$g(r, \varphi, z) = \{g_1(r, \varphi, z), g_2(r, \varphi, z), \dots, g_{n+1}(r, \varphi, z)\};$$

$$g(t, \varphi, z), g_{pj}(t, r, z), w_{pj}(t, r, z); (p = \overline{1, 4}; j = \overline{1, n+1})$$

— задані дійсні обмежені неперервні функції;

$$u(t, r, \varphi, z) = \{u_1(t, r, \varphi, z), u_2(t, r, \varphi, z), \dots, u_{n+1}(t, r, \varphi, z)\}$$

— шукана неперервно диференційовна за змінною t і двічі неперервно диференційовна за геометричними змінними (r, φ, z) функція.

Зауважимо, що:

- 1) у випадку $\chi_j \equiv 0$ ($j = \overline{1, n+1}$) рівняння (1) є класичним тривимірним неоднорідним рівнянням теплопровідності (дифузії) для ортотропного середовища у циліндричній системі координат;
- 2) якщо $\alpha_{11}^k = 0$, $\beta_{11}^k = 1$; $\alpha_{12}^k = 0$, $\beta_{12}^k = 1$; $\alpha_{21}^k = \lambda_1^k$, $\beta_{21}^k = 0$; $\alpha_{22}^k = \lambda_2^k$, $\beta_{22}^k = 0$, де λ_1^k , λ_2^k — коефіцієнти теплопровідності, то умови спряження (9) збігаються з умовами ідеального теплового (термічного) контакту;
- 3) якщо $\alpha_{11}^k = b_k$, $\beta_{11}^k = 1$; $\alpha_{12}^k = 0$, $\beta_{12}^k = 1$; $\alpha_{21}^k = \lambda_1^k$, $\beta_{21}^k = 0$; $\alpha_{22}^k = \lambda_2^k$, $\beta_{22}^k = 0$, де b_k — коефіцієнти термоопору, то умови спряження (9) збігаються з умовами неідеального теплового контакту.

Отже, у зазначених випадках 1, 2 (або 1, 3) розглянута параболічна крайова задача математичної фізики моделює процеси теплопровідності в необмеженому кусково-однорідному клиновидному суцільному циліндрі.

Основна частина. Припустимо, що розв'язки параболічних початково-крайових задач спряження (1)–(4), (5), (9); (1)–(4), (6), (9); (1)–(4), (7), (9); (1)–(4), (8), (9) існують і задані й шукані функції задовольняють умови застосовності залучених нижче прямих та обернених інтегральних і гібридних інтегральних перетворень [12, 20, 21].

Згідно з [21] визначимо скінченні пряме $F_{m,ik}$ та обернене $F_{m,ik}^{-1}$ інтегральні перетворення Фур'є щодо кутової змінної $\varphi \in (0; \varphi_0)$ за формулами:

$$F_{m,ik}[f(\varphi)] = \int_0^{\varphi_0} f(\varphi) U_{m,ik}(\varphi) d\varphi \equiv f_{m,ik}, \quad (10)$$

$$F_{m,ik}^{-1}[f_{m,ik}] = \frac{2}{\varphi_0} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m^{ik} f_{m,ik} U_{m,ik}(\varphi) \equiv f(\varphi), \quad (11)$$

де

$$\begin{aligned} U_{m,11}(\varphi) &= \sin(\beta_{m,11}\varphi); \quad \beta_{m,11} = \frac{\pi m}{\varphi_0}; \\ U_{m,12}(\varphi) &= \sin(\beta_{m,12}\varphi); \quad \beta_{m,12} = \frac{\pi(2m+1)}{2\varphi_0}; \\ U_{m,21}(\varphi) &= \cos(\beta_{m,21}\varphi); \quad \beta_{m,21} = \beta_{m,12}; \\ U_{m,22}(\varphi) &= \cos(\beta_{m,22}\varphi); \quad \beta_{m,22} = \beta_{m,11}; \\ \varepsilon_0^{ik} &= 0; \quad \varepsilon_m^{ik} = 1 \text{ при } ik = 11, 12, 21; \quad m = 1, 2, 3, \dots; \\ \varepsilon_0^{22} &= \frac{1}{2}; \quad \varepsilon_m^{22} = 1 \text{ при } m = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

При цьому для інтегрального оператора $F_{m,ik}$ виконується тотожність

$$F_{m,ik} \left[\frac{d^2 f}{d\varphi^2} \right] = -\beta_{m,ik}^2 f_{m,ik} + \Phi_{m,ik}; \quad i, k = 1, 2, \quad (12)$$

де

$$\begin{aligned} \Phi_{m,11}(f) &= \frac{\pi m}{\varphi_0} \left[f(0) + (-1)^{m+1} f(\varphi_0) \right]; \\ \Phi_{m,12}(f) &= \frac{\pi(2m+1)}{2\varphi_0} f(0) + (-1)^m \frac{df}{d\varphi} \Big|_{\varphi=\varphi_0}; \\ \Phi_{m,21}(f) &= -\frac{df}{d\varphi} \Big|_{\varphi=0} + (-1)^m \frac{\pi(2m+1)}{2\varphi_0} f(\varphi_0); \\ \Phi_{m,22}(f) &= -\frac{df}{d\varphi} \Big|_{\varphi=0} + (-1)^m \frac{df}{d\varphi} \Big|_{\varphi=\varphi_0}. \end{aligned}$$

Інтегральний оператор $F_{m,ik}$, який діє за формулою (10), внаслідок тотожності (12) тривимірним початково-крайовим задачам спряження (1)–(4), (5), (9); (1)–(4), (6), (9); (1)–(4), (7), (9); (1)–(4), (8), (9) ставить у відповідність задачу побудови обмеженого на множині $D' = \{(t, r, z) : t > 0; r \in I_n^+; z \in (-\infty; +\infty)\}$ класичного розв'язку двовимірних диференціальних рівнянь параболічного типу 2-го порядку

$$\frac{\partial u_{jm,ik}}{\partial t} - \left[a_{rj}^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{v_{jm,ik}^2}{r^2} \right) + a_{zj}^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] u_{jm,ik} + \chi_j^2 u_{jm,ik} = \quad (13)$$

$$= G_{jm,ik}(t, r, z); \quad r \in I_j; \quad j = \overline{1, n+1}$$

з початковими умовами

$$u_{jm,ik}(t, r, z) \Big|_{r=0} = g_{jm,ik}(r, z); \quad r \in I_j; \quad j = \overline{1, n+1}, \quad (14)$$

крайовими умовами

$$\frac{\partial^s u_{jm,ik}}{\partial z^s} \Big|_{z=-\infty} = 0; \quad \frac{\partial^s u_{jm,ik}}{\partial z^s} \Big|_{z=+\infty} = 0; \quad s = 0, 1; \quad j = \overline{1, n+1}, \quad (15)$$

$$\frac{\partial^s u_{1m,ik}}{\partial r^s} \Big|_{r=0} = 0; \quad \left(\alpha_{22}^{n+1} \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{22}^{n+1} \right) u_{n+1m,ik} \Big|_{r=R} = g_{m,ik}(t, z) \quad (16)$$

та умовами спряження

$$\left[\left(\alpha_{j1}^p \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j1}^p \right) u_{pm,ik} - \left(\alpha_{j2}^p \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j2}^p \right) u_{p+1,m,ik} \right] \Big|_{r=R_p} = 0; \quad (17)$$

$$j = 1, 2; \quad p = \overline{1, n},$$

де $v_{jm,ik} = a_{rj}^{-1} a_{\varphi j} \beta_{m,ik}$;

$$G_{jm,ik}(t, r, z) = f_{m,ik}(t, r, z) + a_{\varphi j}^2 r^{-2} \Phi_{m,ik}(t, r, z).$$

Застосуємо до двовимірної початково-крайової задачі спряження (13)–(17) інтегральне перетворення Фур'є на декартовій осі $(-\infty; +\infty)$ щодо змінної z [20]:

$$F[g(z)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(z) \exp(-i\sigma z) dz \equiv \tilde{g}(\sigma), \quad i = \sqrt{-1}, \quad (18)$$

$$F^{-1}[\tilde{g}(\sigma)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{g}(\sigma) \exp(i\sigma z) d\sigma \equiv g(z), \quad (19)$$

$$F \left[\frac{d^2 g}{dz^2} \right] = -\sigma^2 F[g(z)] \equiv -\sigma^2 \tilde{g}(\sigma). \quad (20)$$

Інтегральний оператор F , який діє за формулою (18), внаслідок тотожності (20) крайовій задачі (13)–(17) ставить у відповідність задачу побудови обмеженого на множині $D'' = \{(t, r) : t > 0; r \in I_n^+\}$ класичного розв'язку одновимірних диференціальних рівнянь B -параболічного типу 2-го порядку

$$\frac{\partial \tilde{u}_{jm,ik}}{\partial t} - a_{rj}^2 B_{v_{jm,ik}} [\tilde{u}_{jm,ik}] + (a_{zj}^2 \sigma^2 + \chi_j^2) \tilde{u}_{jm,ik} = \tilde{G}_{jm,ik}(t, r, \sigma); \quad (21)$$

$$r \in I_j; \quad j = \overline{1, n+1}$$

з початковими умовами

$$\tilde{u}_{jm,ik}(t, r, \sigma) \Big|_{t=0} = \tilde{g}_{jm,ik}(r, \sigma); \quad r \in I_j; \quad j = \overline{1, n+1}, \quad (22)$$

крайовими умовами

$$\frac{\partial^s \tilde{u}_{1m,ik}}{\partial r^s} \Big|_{r=0} = 0; \quad \left(\alpha_{22}^{n+1} \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{22}^{n+1} \right) \tilde{u}_{n+1,m,ik} \Big|_{r=R} = \tilde{g}_{m,ik}(r, \sigma) \quad (23)$$

та умовами спряження

$$\left[\left(\alpha_{j1}^p \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j1}^p \right) \tilde{u}_{pm,ik} - \left(\alpha_{j2}^p \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j2}^p \right) \tilde{u}_{p+1,m,ik} \right] \Big|_{r=R_0} = 0; \quad (24)$$

$$j = 1, 2; \quad p = \overline{1, n},$$

де $B_{v_{jm,ik}} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{v_{jm,ik}^2}{r^2}$ — класичний диференціальний оператор Бесселя.

До одновимірної початково-крайової задачі спряження (21)–(24) застосуємо скінченне гібридне інтегральне перетворення типу Ганкеля 1-го роду на кусково-однорідному сегменті I_n^+ з n точками спряження щодо радіальної змінної r [12]:

$$H_{sn} [f(r)] = \int_0^R f(r) V(r, \lambda_s) \sigma(r) r dr \equiv \tilde{f}(\lambda_s), \quad (25)$$

$$H_{sn}^{-1} [\tilde{f}(\lambda_s)] = \sum_{s=1}^{\infty} \tilde{f}(\lambda_s) \frac{V(r, \lambda_s)}{\|V(r, \lambda_s)\|^2} \equiv f(r), \quad (26)$$

$$H_{sn} [B_{(m,ik)} [f(r)]] = -\lambda_s^2 \tilde{f}(\lambda_s) - \sum_{k=1}^{n+1} \gamma_k^2 \int_{R_{k-1}}^{R_k} f(r) V_k(r, \lambda_s) \sigma_k r dr +$$

$$+ a_{n+1}^2 R \sigma_{n+1} \left(\alpha_{22}^{n+1} \right)^{-1} V_{n+1}(R, \lambda_s) \left(\alpha_{22}^{n+1} \frac{df}{dr} + \beta_{22}^{n+1} f \right) \Big|_{r=R}. \quad (27)$$

У формулах (25)–(27) беруть участь, виписані в [12], спектральна функція $V(r, \lambda_s)$, вагова функція $\sigma(r)$ та гібридний диференціальний оператор Бесселя

$$B_{(m,ik)} = \sum_{j=1}^n a_j^2 \theta(r - R_{j-1}) \theta(R_j - r) B_{v_{jm,ik}},$$

де $\theta(x)$ — одинична функція Гевісайда.

Запишемо диференціальні рівняння (21) та початкові умови (22) у матричній формі

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{\partial}{\partial t} - a_1^2 B_{V_{1m,ik}} + q_1^2(\sigma)\right) \tilde{u}_{1m,ik}(t, r, \sigma) \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} - a_2^2 B_{V_{2m,ik}} + q_2^2(\sigma)\right) \tilde{u}_{2m,ik}(t, r, \sigma) \\ \dots\dots\dots \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} - a_{n+1}^2 B_{V_{n+1,m,ik}} + q_{n+1}^2(\sigma)\right) \tilde{u}_{n+1,m,ik}(t, r, \sigma) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{G}_{1m,ik}(t, r, \sigma) \\ \tilde{G}_{2m,ik}(t, r, \sigma) \\ \dots\dots\dots \\ \tilde{G}_{n+1,m,ik}(t, r, \sigma) \end{bmatrix}, \quad (28)$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{u}_{1m,ik}(t, r, \sigma) \\ \tilde{u}_{2m,ik}(t, r, \sigma) \\ \dots\dots\dots \\ \tilde{u}_{n+1,m,ik}(t, r, \sigma) \end{bmatrix} \Big|_{t=0} = \begin{bmatrix} \tilde{g}_{1m,ik}(r, \sigma) \\ \tilde{g}_{2m,ik}(r, \sigma) \\ \dots\dots\dots \\ \tilde{g}_{n+1,m,ik}(r, \sigma) \end{bmatrix}, \quad (29)$$

де $q_j^2(\sigma) = a_{zj}^2 \sigma^2 + \chi_j^2$; $j = \overline{1, n+1}$.

Інтегральний оператор H_{sn} , який діє за формулою (25), зобразимо у вигляді операторної матриці-рядка

$$H_{sn} [\dots] = \begin{bmatrix} \int_0^{R_1} \dots V_1(r, \lambda_s) \sigma_1 r dr & \int_{R_1}^{R_2} \dots V_2(r, \lambda_s) \sigma_2 r dr \\ \dots \int_{R_{n-1}}^{R_n} \dots V_n(r, \lambda_s) \sigma_n r dr & \int_{R_n}^R \dots V_{n+1}(r, \lambda_s) \sigma_{n+1} r dr \end{bmatrix} \quad (30)$$

і застосуємо за правилом множення матриць до задачі (28), (29). Внаслідок тотожності (27) одержуємо задачу Коші для звичайних диференціальних рівнянь 1-го порядку

$$\sum_{j=1}^{n+1} \left(\frac{d}{dt} + \lambda_s^2 + \gamma_j^2 + q_j^2(\sigma) \right) \tilde{u}_{jm,ik}(t, \lambda_s, \sigma) = \sum_{j=1}^{n+1} \tilde{G}_{jm,ik}(t, \lambda_s, \sigma) + a_{n+1}^2 R \sigma_{n+1} \left(\alpha_{22}^{n+1} \right)^{-1} V_{n+1}(R, \lambda_s) \tilde{g}_{m,ik}(t, \sigma), \quad (31)$$

$$\sum_{j=1}^{n+1} \tilde{u}_{jm,ik}(t, \lambda_s, \sigma) \Big|_{t=0} = \sum_{j=1}^{n+1} \tilde{g}_{jm,ik}(\lambda_s, \sigma), \quad (32)$$

де $\tilde{u}_{jm,ik}(t, \lambda_s, \sigma) = \int_{R_{j-1}}^{R_j} \tilde{u}_{jm,ik}(t, r, \sigma) V_j(r, \lambda_s) \sigma_j r dr$;

$$\begin{aligned}\tilde{G}_{jm,ik}(t, \lambda_s, \sigma) &= \int_{R_{j-1}}^{R_j} \tilde{G}_{jm,ik}(t, r, \sigma) V_j(r, \lambda_s) \sigma_j r dr; \\ j &= \overline{1, n+1}, \\ \tilde{g}_{jm,ik}(\lambda_s, \sigma) &= \int_{R_{j-1}}^{R_j} \tilde{g}_{jm,ik}(r, \sigma) V_j(r, \lambda_s) \sigma_j r dr, \\ j &= \overline{1, n+1}.\end{aligned}$$

Припустимо, не зменшуючи загальності розв'язку задачі, що $\max\{q_1^2(\sigma), q_2^2(\sigma), \dots, q_{n+1}^2(\sigma)\} = q_1^2(\sigma)$ і покладемо всюди $\gamma_j^2 = q_1^2(\sigma) - q_j^2(\sigma)$; $j = \overline{1, n+1}$. Задача Коші (31), (32) набуває вигляду

$$\begin{aligned}\frac{d\tilde{u}_{m,ik}}{dt} + \Delta^2(\lambda_s, \sigma)\tilde{u}_{m,ik} &= \\ = \tilde{G}_{m,ik}(t, \lambda_s, \sigma) + a_{n+1}^2 R \sigma_{n+1} \left(\alpha_{22}^{n+1}\right)^{-1} V_{n+1}(R, \lambda_s) \tilde{g}_{m,ik}(t, \sigma),\end{aligned}\quad (33)$$

$$\tilde{u}_{m,ik}(t, \lambda_s, \sigma)\Big|_{t=0} = \tilde{g}_{m,ik}(\lambda_s, \sigma),\quad (34)$$

де $\tilde{u}_{m,ik}(t, \lambda_s, \sigma) = \sum_{j=1}^{n+1} \tilde{u}_{jm,ik}(t, \lambda_s, \sigma)$;

$$\tilde{G}_{m,ik}(\lambda_s, \sigma) = \sum_{j=1}^{n+1} \tilde{G}_{jm,ik}(\lambda_s, \sigma); \quad \tilde{g}_{m,ik}(\lambda_s, \sigma) = \sum_{j=1}^{n+1} \tilde{g}_{jm,ik}(\lambda_s, \sigma);$$

$$\Delta^2(\lambda_s, \sigma) = \lambda_s^2 + a_{z1}^2 \sigma^2 + \chi_1^2.$$

Безпосередньо перевіряється, що єдиним розв'язком задачі Коші (33), (34) є функція

$$\begin{aligned}\tilde{u}_{m,ik}(t, \lambda_s, \sigma) &= N(t, \lambda_s, \sigma) \tilde{g}_{m,ik}(\lambda_s, \sigma) + \int_0^t N(t-\tau, \lambda_s, \sigma) \times \\ &\times \left[\tilde{G}_{m,ik}(\tau, \lambda_s, \sigma) + a_{n+1}^2 R \sigma_{n+1} \left(\alpha_{22}^{n+1}\right)^{-1} V_{n+1}(R, \lambda_s) \tilde{g}_{m,ik}(t, \sigma) \right] d\tau,\end{aligned}\quad (35)$$

де розв'язуюча функція (функція Коші)

$$N(t, \lambda_s, \sigma) = \exp(-\Delta^2(\lambda_s, \sigma)t).$$

Оскільки суперпозиція операторів H_{sn} та H_{sn}^{-1} є одиничним оператором ($H_{sn} \circ H_{sn}^{-1} = H_{sn}^{-1} \circ H_{sn} = I$), то оператор H_{sn}^{-1} , як обернений до оператора (30), зобразимо у вигляді операторної матриці-стовпця

$$H_{sn}^{-1} [\dots] = \begin{bmatrix} \sum_{s=1}^{\infty} \dots \frac{V_1(r, \lambda_s)}{\|V(r, \lambda_s)\|^2} \\ \sum_{s=1}^{\infty} \dots \frac{V_2(r, \lambda_s)}{\|V(r, \lambda_s)\|^2} \\ \dots \dots \dots \\ \sum_{s=1}^{\infty} \dots \frac{V_{n+1}(r, \lambda_s)}{\|V(r, \lambda_s)\|^2} \end{bmatrix} \quad (36)$$

і застосуємо за правилом множення матриць до матриці-елемента $[\tilde{u}_{m,ik}(t, \lambda_s, \sigma)]$, де функція $\tilde{u}_{m,ik}(t, \lambda_s, \sigma)$ визначена за формулою (35). Одержимо єдиний розв'язок одновимірної початково-крайової задачі спряження (21)-(24):

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{jm,ik}(t, r, \sigma) &= \sum_{s=1}^{\infty} N(t, \lambda_s, \sigma) \tilde{g}_{m,ik}(\lambda_s, \sigma) \frac{V_j(r, \lambda_s)}{\|V(r, \lambda_s)\|^2} + \\ &+ \sum_{s=1}^{\infty} \int_0^t N(t-\tau, \lambda_s, \sigma) \tilde{G}_{m,ik}(\tau, \lambda_s, \sigma) d\tau \frac{V_j(r, \lambda_s)}{\|V(r, \lambda_s)\|^2} + \\ &+ a_{n+1}^2 R \sigma_{n+1} (\alpha_{22}^{n+1})^{-1} \sum_{s=1}^{\infty} \int_0^t N(t-\tau, \lambda_s, \sigma) V_{n+1}(R, \lambda_s) \times \\ &\times \tilde{g}_{m,ik}(\tau, \sigma) \frac{V_j(r, \lambda_s)}{\|V(r, \lambda_s)\|^2}; \quad j = \overline{1, n+1}. \end{aligned} \quad (37)$$

Застосувавши послідовно до функцій $\tilde{u}_{jm,ik}(t, r, \sigma)$, визначених формулами (37), обернені оператори F^{-1} та $F_{m,ik}^{-1}$, і виконавши нескладні перетворення, одержуємо функції

$$\begin{aligned} u_{j,ik}(t, r, \varphi, z) &= \sum_{p=1}^{n+1} \int_0^t \int_{R_{p-1}}^{R_p} \int_0^{\varphi_0} \int_{-\infty}^{+\infty} E_{jp}^{ik}(t-\tau, r, \rho, \varphi, \alpha, z-\xi) f_p(\tau, \rho, \alpha, \xi) \times \\ &\times \sigma_p \rho d\xi d\alpha d\rho d\tau + \sum_{p=1}^{n+1} \int_{R_{p-1}}^{R_p} \int_0^{\varphi_0} \int_{-\infty}^{+\infty} E_{jp}^{ik}(t, r, \rho, \varphi, \alpha, z-\xi) g_p(\rho, \alpha, \xi) \times \\ &\times \sigma_p \rho d\xi d\alpha d\rho + \sum_{p=1}^{n+1} a_{\varphi p}^2 \int_0^t \int_{R_{p-1}}^{R_p} \int_{-\infty}^{+\infty} Q_{jp}^{ik}(t, \tau, r, \rho, \varphi, z, \xi) \sigma_p \rho^{-1} d\xi d\rho d\tau + \\ &+ \int_0^t \int_0^{\varphi_0} \int_{-\infty}^{+\infty} W_{jr,ik}(t-\tau, r, \varphi, \alpha, z-\xi) g(\tau, \alpha, \xi) d\xi d\alpha d\tau; \quad j = \overline{1, n+1}, \end{aligned} \quad (38)$$

які визначають єдині розв'язки параболічних початково-крайових задач спряження (1)–(4), (5), (9); (1)–(4), (6), (9); (1)–(4), (7), (9); (1)–(4), (8), (9) при відповідних значеннях ik (11, 12, 21, 22).

У формулах (38) застосовано компоненти

$$E_{jp}^{ik}(t, r, \rho, \varphi, \alpha, z) = \frac{2}{\pi\varphi_0} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m^{ik} K_{jp}^{m,ik}(t, r, \rho, z) U_{m,ik}(\varphi) U_{m,ik}(\alpha)$$

матриці впливу (функції впливу), функції Гріна

$$Q_{jp}^{ik}(t, \tau, r, \rho, \varphi, z, \xi) = \frac{2}{\pi\varphi_0} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m^{ik} K_{jp}^{m,ik}(t - \tau, r, \rho, z - \xi) \Phi_{m,ik}(\tau, \rho, \xi) U_{m,ik}(\varphi)$$

та компоненти

$$W_{jr,ik}(t, r, \varphi, \alpha, z) = a_{n+1}^2 R \sigma_{n+1} \left(\alpha_{22}^{n+1} \right)^{-1} E_{j,n+1}^{ik}(t, r, R, \varphi, \alpha, z)$$

радіальної матриці Гріна (радіальні функції Гріна) відповідних початково-крайових задач спряження, де

$$K_{jp}^{m,ik}(t, r, \rho, z) = \sum_{s=1}^{\infty} \int_0^{+\infty} N(t, \lambda_s, \sigma) \cos(\sigma z) d\sigma \frac{V_j(r, \lambda_s) V_k(\rho, \lambda_s)}{\|V(r, \lambda_s)\|^2}.$$

Проаналізуємо формули (38) в залежності від типу крайових умов на гранях необмеженого кусково-однорідного клиновидного суцільного циліндра. Розглянемо, наприклад, випадок крайових умов (6). У цьому випадку функції Гріна

$$Q_{jp}^{12}(t, \tau, r, \rho, \varphi, z, \xi) = \frac{2}{\varphi_0^2} \sum_{m=1}^{\infty} K_{jp}^{m,12}(t - \tau, r, \rho, z - \xi) \times \\ \times \left[\frac{\pi(2m+1)}{2\varphi_0} g_{2p}(\tau, \rho, \xi) + (-1)^{m+1} w_{2p}(\tau, \rho, \xi) \right] \sin \frac{\pi(2m+1)\varphi}{2\varphi_0}.$$

Визначимо тангенціальні функції Гріна, породжені крайовими умовами (6), за формулами:

$$W_{jp,1}^{12}(t, \tau, r, \rho, \varphi, z, \xi) = \frac{1}{\varphi_0^2} \sum_{m=1}^{\infty} (2m+1) K_{jp}^{m,12}(t - \tau, r, \rho, z - \xi) \sin \frac{\pi(2m+1)\varphi}{2\varphi_0}, \\ W_{jp,2}^{12}(t, \tau, r, \rho, \varphi, z, \xi) = \frac{2}{\pi\varphi_0} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} K_{jp}^{m,12}(t - \tau, r, \rho, z - \xi) \sin \frac{\pi(2m+1)\varphi}{2\varphi_0}.$$

Тоді розв'язок задачі спряження (1)–(4), (6), (9) можемо записати у вигляді

$$u_{j,12}(t, r, \varphi, z) = \sum_{p=1}^{n+1} \int_0^t \int_{R_{p-1}}^{R_p} \int_0^{\varphi_0} \int_{-\infty}^{+\infty} E_{jp}^{12}(t - \tau, r, \rho, \varphi, \alpha, z - \xi) f_p(\tau, \rho, \alpha, \xi) \times \\ \times \sigma_{\rho} \rho d\xi d\alpha d\rho d\tau + \sum_{p=1}^{n+1} \int_{R_{p-1}}^{R_p} \int_0^{\varphi_0} \int_{-\infty}^{+\infty} E_{jp}^{12}(t, r, \rho, \varphi, \alpha, z - \xi) g_p(\rho, \alpha, \xi) \times$$

$$\begin{aligned} & \times \sigma_{\rho} \rho d\xi d\alpha d\rho + \sum_{\rho=1}^{n+1} a_{\varphi\rho}^2 \int_0^t \int_{R_{\rho-1}}^{R_{\rho}} \int_{-\infty}^{+\infty} [W_{jp,1}^{12}(t, \tau, r, \rho, \varphi, z, \xi) g_{2\rho}(\tau, \rho, \xi) + \\ & + W_{jp,2}^{12}(t, \tau, r, \rho, \varphi, z, \xi) w_{2\rho}(\tau, \rho, \xi)] \sigma_{\rho} \rho^{-1} d\xi d\rho d\tau + \\ & + \int_0^t \int_0^{\varphi_0} \int_{-\infty}^{+\infty} W_{jr,12}(t - \tau, r, \rho, \varphi, \alpha, z - \xi) g(\tau, \alpha, \xi) d\xi d\alpha d\tau; \quad j = \overline{1, n+1}. \end{aligned}$$

З використанням властивостей функцій впливу $E_{jp}^{12}(t, r, \rho, \varphi, \alpha, z)$ і функцій Гріна $W_{jp,s}^{12}(t, \tau, r, \rho, \varphi, z, \xi)$, ($s = 1, 2$), $W_{jr,12}(t, r, \rho, \varphi, \alpha, z)$ безпосередньо перевіряється, що функції $u_{j,12}(t, r, \varphi, z)$, визначені формулами (39), задовольняють рівняння (1), початкові умови (2), крайові умови (3), (4), (6) та умови спряження (9) в сенсі теорії узагальнених функцій [23].

Єдиність розв'язку (39) випливає із його структури (інтегрального зображення) та єдиності головних розв'язків (функцій впливу та функцій Гріна) параболічної початково-крайової задачі спряження (1)–(4), (6), (9).

Методами з [1, 23] можна довести, що при відповідних умовах на вихідні дані, формули (39) визначають обмежений класичний розв'язок розглянутої задачі (1)–(4), (6), (9).

Підсумком викладеного вище є така теорема.

Теорема. Якщо функції $f_j(t, r, \varphi, z)$, $g_j(r, \varphi, z)$, $g_{2j}(t, r, z)$, $w_{2j}(t, r, z)$, ($j = \overline{1, n+1}$) задовольняють умови:

- 1) неперервно диференційовні за змінною t і двічі неперервно диференційовані за геометричними змінними;
- 2) мають обмежену варіацію за геометричними змінними;
- 3) абсолютно сумовні за змінною z на $(-\infty; +\infty)$;
- 4) справджують умови спряження, а функція $g(t, \varphi, z)$ також задовольняє умови 1)-3), то параболічна початково-крайова задача спряження (1)-(4), (6), (9) має єдиний обмежений класичний розв'язок, який визначається за формулами (39).

Випадки крайових умов (5), (7) чи (8) на гранях клина $\varphi = 0$, $\varphi = \varphi_0$ аналізуються аналогічно.

Зауваження. 1. У випадку $a_{rj} = a_{\varphi j} = a_{zj} \equiv a_j > 0$ формули (38) визначають структури розв'язків розглянутих задач в ізотропному неограниченому кусково-однорідному клиновидному суцільному циліндрі.

2. Випадок зміни φ в межах $\varphi_1 < \varphi < \varphi_2$ зводиться до розглянутого заміною $\varphi' = \varphi - \varphi_1$ ($\varphi_0 \equiv \varphi_2 - \varphi_1$).

3. Параметри α_{22}^{n+1} , β_{22}^{n+1} дозволяють виділяти з формул (38) розв'язки початково-крайових задач спряження у випадках задання на радіальній поверхні $r = R$ крайові умови 1-го роду ($\alpha_{22}^{n+1} = 0$, $\beta_{22}^{n+1} = 1$), 2-го роду ($\alpha_{22}^{n+1} = 1$, $\beta_{22}^{n+1} = 0$), та 3-го роду ($\alpha_{22}^{n+1} = 1$, $\beta_{22}^{n+1} \equiv h > 0$).

4. Аналіз формул (38) в залежності від аналітичного виразу функцій $f_j(t, r, \varphi, z)$, $g_j(r, \varphi, z)$, $g_{kj}(t, r, z)$, $w_{kj}(t, r, z)$, $j = \overline{1, n+1}$, $k = \overline{1, 4}$, $g(t, \varphi, z)$ проводиться безпосередньо із загальних структур.

Висновки. Методом класичних інтегральних і гібридних інтегральних перетворень у поєднанні з методом головних розв'язків (функцій впливу та функцій Гріна) вперше побудовано єдині точні аналітичні розв'язки параболічних крайових задач у необмеженому кусково-однорідному клиновидному суцільному циліндрі. Одержані інтегральні зображення розв'язків носять алгоритмічний характер, неперервно залежать від параметрів і даних задачі й можуть бути використані як в подальших теоретичних дослідженнях, так і в практиці інженерних розрахунків математичних моделей еволюційних процесів у кусково-однорідних середовищах.

Список використаних джерел:

1. Гельфанд И. М. Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений / И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилор. — М. : Физматгиз, 1958. — 274 с.
2. Городецкий В. В. Граничные свойства гладких у шари розв'язків рівнянь параболічного типу / В. В. Городецкий. — Чернівці : Рута, 1998. — 225 с.
3. Громик А. П. Температурні поля в кусково-однорідних просторових середовищах / А. П. Громик, І. М. Конет, М. П. Ленюк. — Кам'янець-Подільський : Абетка-Світ, 2011. — 200 с.
4. Дейнека В. С. Модели и методы решения задач в неоднородных средах / В. С. Дейнека, И. В. Сергиенко. — К. : Наук. думка, 2001. — 606 с.
5. Дейнека В. С. Модели и методы решения задач с условиями сопряжения / В. С. Дейнека, И. В. Сергиенко, В. В. Скопецкий. — К. : Наук. думка, 1998. — 614 с.
6. Житарашу Н. В. Параболические граничные задачи / Н. В. Житарашу, С. Д. Эйдельман. — Кишинев : Штиинца, 1992. — 327 с.
7. Загорский Т. Я. Смешанные задачи для систем дифференциальных уравнений с частными производными параболического типа / Т. Я. Загорский. — Львов : Изд-во ЛГУ, 1961. — 115 с.
8. Ивасишин С. Д. Матрица Грина параболических задач / С. Д. Ивасишин. — Киев : Вища школа, 1990. — 199 с.
9. Конет І. М. Гіперболічні крайові задачі математичної фізики в кусково-однорідних просторових середовищах / І. М. Конет. — Кам'янець-Подільський : Абетка-Світ, 2013. — 120 с.

10. Конет І. М. Параболічні крайові задачі в кусково-однорідних середовищах / І. М. Конет, Т. М. Пилипюк. — Кам'янець-Подільський : Абетка-Світ, 2016. — 244 с.
11. Конет І. М. Стационарні та нестационарні температурні поля в циліндрично-кругових областях / І. М. Конет, М. П. Ленюк. — Чернівці : Прут, 2001. — 312 с.
12. Конет І. М. Параболічні крайові задачі в кусково-однорідних циліндрично-кругових середовищах / І. М. Конет, Т. М. Пилипюк. — Кам'янець-Подільський : Абетка-Світ, 2017. — 80 с.
13. Конет І. М. Параболічні крайові задачі в кусково-однорідному клиновидному циліндрично-круговому просторі з порожниною / І. М. Конет, Т. М. Пилипюк // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки : зб. наук. пр. — Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Поділ. нац. ун-т ім. І. Огієнка, 2018. — Вип. 18. — С. 86–99.
14. Ладыженская О. А. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа / О. А. Ладыженская, В. А. Солонников, Н. Н. Уралцева. — М. : Наука, 1967. — 736 с.
15. Ландис Е. М. Уравнения второго порядка эллиптического и параболического типов / Е. М. Ландис. — М. : Наука, 1971. — 288 с.
16. Матійчук М. І. Параболічні та еліптичні крайові задачі з особливостями / М. І. Матійчук. — Чернівці : Прут, 2003. — 248 с.
17. Перестюк М. О. Теорія рівнянь математичної фізики / М. О. Перестюк, В. В. Маринець. — Київ : Либідь, 2006. — 424 с.
18. Пукальський І. Д. Крайові задачі для нерівномірно параболических та еліптичних рівнянь з виродженостями і особливостями / І. Д. Пукальський. — Чернівці : Рута, 2008. — 253 с.
19. Сергиенко И. В. Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах / И. В. Сергиенко, В. В. Скопецкий, В. С. Дейнека. — Киев : Наук. думка, 1991. — 432 с.
20. Снеддон И. Преобразования Фурье / И. Снеддон. — М. : ИЛ, 1955. — 668 с.
21. Трантер К. Дж. Интегральные преобразования в математической физике / К. Дж. Трантер. — М. : Гостехтеориздат, 1956. — 204 с.
22. Фридман А. Уравнения с частными производными параболического типа / А. Фридман. — М. : Мир, 1968. — 428 с.
23. Шилов Г. Е. Математический анализ. Второй специальный курс / Г. Е. Шилов. — М. : Наука, 1965. — 328 с.
24. Эйдельман С. Д. Параболические системы / С. Д. Эйдельман. — М. : Наука, 1964. — 444 с.

ARABOLIC BOUNDARY VALUE PROBLEMS IN UNBOUNDED PIECEWISE-HOMOGENEOUS WEDGE-SHAPED SOLID CYLINDER

The unique exact analytical solutions of parabolic boundary value problems of mathematical physics in unbounded by variable z piecewise-homogeneous by radially variable r wedge-shaped by an angularly variable φ continuous cylinder were constructed at first time by the method of classical integral and hybrid integral transforms in combination with the method of main solutions (matrices of influence and Green matrices) in the proposed article.

The cases of assigning on the verge of the wedge the boundary conditions of Dirichlet and Neumann and their possible combinations (Dirichlet–Neumann, Neumann–Dirichlet) are considered.

Finite integral Fourier transform by an angular variable, a Fourier integral transform on a Cartesian axis by an applicative variable and a hybrid integral transform of the Hankel type of the first kind on a segment of the polar axis with n points of conjugation were used to construct solutions of investigated boundary value problems.

The consistent application of integral transforms by geometric variables allows us to reduce the three-dimensional initial boundary-value problems of conjugation to the Cauchy problem for a regular linear inhomogeneous 1st order differential equation whose unique solution is written in a closed form.

The application of inverse integral transforms restores explicitly the solution of the considered problems through their integral image.

Key words: *parabolic equation, initial and boundary conditions, conjugation conditions, integral transforms, hybrid integral transforms, main solutions.*

Отримано: 15.08.2019

УДК 539.3

DOI: 10.32626/2308-5878.2019-20.??-??

Р. С. Мусій, д-р. фіз.-мат. наук, професор,
А. Й. Наконечний, д-р. техн. наук, професор,
В. К. Шиндер, канд. фіз.-мат. наук,
І. В. Андрусак, канд. фіз.-мат. наук,
О. Я. Бродяк, канд. фіз.-мат. наук

Національний університет «Львівська політехніка», м. Львів

МЕТОДИКА ПОБУДОВИ РОЗВ'ЯЗКУ ДВОВИМІРНОЇ ЗАДАЧІ ЕЛЕКТРОДИНАМІКИ ДЛЯ ЕЛЕКТРОПРОВІДНОГО ТІЛА З ПЛОСКОПАРАЛЕЛЬНИМИ МЕЖАМИ ЗА ДІЇ ЗОВНІШНЬОГО НЕСТАЦІОНАРНОГО ЕЛЕКТРОМАГНІТНОГО ПОЛЯ

Сформульовано двовимірну початково-крайову задачу електродинаміки для електропровідного неферромагнітного тіла з плоскопаралельними межами за дії зовнішнього нестационарного електромагнітного поля. Електромагнітне поле задане значеннями неоднорідної за поздовжньою координатою дотичної до основ тіла компоненти вектора напруженості магнітного поля на його основах. Для побудови загального розв'язку сформульовано початково-крайову задачу за такої електромагнітної дії для ключової функції — заданої компоненти вектора напруженості магнітного поля використано кубічну апроксимацію за товщиною координатою та інтегральне перетворення Фур'є за поздовжньою координатою. У результаті вихідна двовимірна початково-крайова задача на ключову функцію зведена до од-

новимірної початково-крайової задачі за часовою змінною та позовжньою координатою на інтегральні за товщинною координатою характеристики ключової функції. Коефіцієнти полінома, що апроксимує ключову функцію подано через вказані інтегральні характеристики ключової функції та задані її значення на основах тіла як відповідні функції часу і позовжньої координати. З метою підвищення точності наближеного розв'язку розглядуваної задачі запропоновано також незалежну апроксимацію відповідних компонент вектора напруженості електричного поля за товщинною координатою за використання заданих крайових умов на ключову функцію. Записано системи рівнянь для визначення інтегральних характеристик цих компонент. Загальні розв'язки розглядуваної задачі на такі характеристики знайдено у вигляді згорток функцій, що описують задані граничні значення ключової функції на основах тіла та однорідні розв'язки задачі на інтегральні характеристики. Отримано розв'язок вихідної задачі електродинаміки, як за дії доволно змінного в часі і за позовжньою координатою нестационарного, так і усталеного електромагнітного поля.

Ключові слова: *електропровідне тіло, плоскопаралельні межі, нестационарне і усталене електромагнітне поле, дотичні компоненти векторів напруженостей магнітного та електричного полів, кубічна апроксимація, інтегральні характеристики, трансформанти Фур'є.*

Вступ. Електропровідні тіла постійної товщини різної геометричної конфігурації в плані є конструктивними елементами багатьох приладів, в процесі функціонування яких вони зазнають впливу зовнішніх нестационарних електромагнітних полів (ЕМП) [1, с. 57–83]. Ці ЕМП внаслідок явища електромагнітної індукції створюють у таких тілах нестационарне ЕМП. Такі індуковані ЕМП необхідно враховувати як додаткові чинники при проектуванні і розрахунку надійності електричних машин і апаратів. Для їх розрахунку необхідно формулювати двовимірні за просторовими координатами нестационарні задачі електродинаміки. У літературі добре описано методи визначення індукованого у електропровідному тілі зовнішньою електромагнітною дією усталеного ЕМП. Однак, відомі методи розв'язування двовимірних нестационарних задач електродинаміки [1, с. 57–83], що використовують інтегральні перетворення Лапласа за часом та метод Фур'є розкладу за власними функціями за просторовими змінними дають розв'язки таких задач у вигляді двохкратних функціональних рядів за відповідними власними функціями. Ці ряди, крім того, що є громіздкими виразами, які сумуються за власними числами — коренями складних трансцендентних рівнянь, є ще погано збіжними, особливо за малих часів нестационарної електромагнітної дії [2, с. 91–106]. Враховуючи, що сумування таких рядів недостатньо вивчено, у даній статті за-

пропоновано методику побудови наближеного розв'язку двовимірної не стаціонарної задачі електродинаміки для електропровідного неферромагнітного тіла з плоскопаралельними межами за дії зовнішнього ЕМП.

Ця методика використовує апроксимацію розподілу за товщиною координатою дотичної до основ електропровідного шару з плоскопаралельними межами компоненти вектора напруженості магнітного поля кубічним поліномом. На її основі знайдено загальний розв'язок двовимірної початково-крайової задачі електродинаміки, сформульованої для розглядуваного тіла стосовно цієї компоненти, за однорідної нестационарної електромагнітної дії.

Математична постановка задачі. Розглянемо електропровідне неферромагнітне тіло з плоскопаралельними межами товщиною $2h$, віднесене до декартової системи координат $Ox_1x_2x_3$, площина x_1Ox_2 якої співпадає з його серединною поверхнею (рис. 1).

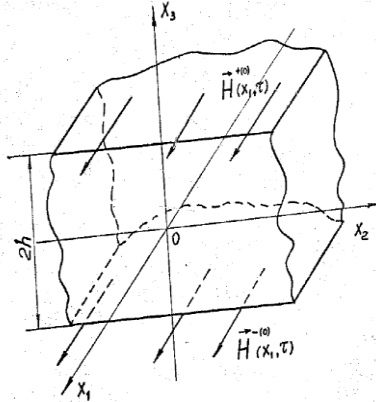


Рис. 1.

На обох основах тіла $z = \pm h$ задано значення компонент вектора напруженості зовнішнього магнітного поля $\vec{H}^{(0)}$

$$H_k^{(0)}(x_l, \pm h, \tau) = H_k^{\pm(0)}(x_l, \tau). \quad (1)$$

Тут — $H_k^{\pm(0)}(x_l, \tau)$ — задані функції часу і координат x_l ($l = x, y$).

Індекси «+» і «-» відносяться відповідно до поверхонь $z = \pm h$; x_1, x_2, x_3 — декартові координати, віднесені до півтовщини тіла h ,

$\tau = \frac{t}{\sigma\mu h^2}$ — безрозмірний характерний для електродинамічних процесів у розглядуваному тілі час, t — час, σ — коефіцієнт електропровідності, μ — магнітна проникність матеріалу тіла.

Визначення компонент $H_1(x_2, x_3, \tau)$ і $H_2(x_1, x_3, \tau)$ вектора напруженості магнітного поля в області тіла

$$\vec{H}(x_1, x_2, x_3, \tau) = \{H_1(x_2, x_3, \tau); H_2(x_1, x_3, \tau); 0\}$$

на основі співвідношень Максвелла зводиться до розв'язування рівняння

$$\Delta_l H_k - \frac{\partial H_k}{\partial \tau} = 0 \quad (2)$$

при заданих крайових (1) і нульовій початковій умові

$$H_l(x_l, x_3, 0) \quad (l = 1, 2). \quad (3)$$

Тут для компактності форми запису вихідних рівнянь введений оператор

$$\Delta_l = \frac{\partial^2}{\partial x_l^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}, \quad (l = 1, 2),$$

аналог оператора Лапласа.

Методика розв'язування двовимірної нестационарної задачі електродинаміки. Побудуємо методику розв'язування сформульованої вище задачі (1)–(3). Ця методика використовує апроксимацію поліноміальним законом розподілу за товщинною координатою x_3 компонент $H_k(x_l, x_3, \tau)$ ($l = 1, 2$) вектора напруженості магнітного поля.

Розв'язок рівняння (2) для кожної зі складових $H_k(x_l, x_3, \tau)$ ($l = 1, 2$) вектора \vec{H} подамо у вигляді

$$H_k(x_l, x_3, \tau) = \sum_{i=1}^m a_{k(j-1)}(x_l, \tau) x_3^{j-1}. \quad (4)$$

Згідно методу запропонованого в роботі [3, с. 63–69], коефіцієнти $a_{k(j-1)}(x_l, \tau)$ апроксимаційних поліномів (4) подаємо через інтегральні характеристики складових $H_k(x_l, x_3, \tau)$ ($l = 1, 2$) вектора \vec{H}

$$H_{ks}(x_l, \tau) = \frac{2s-1}{2} \int_{-1}^1 H_k(x_l, x_3, \tau) x_3^{s-1} dx_3 \quad (5)$$

і задані граничні значення $H_k^{\pm(0)}(x_l, \tau)$ цих складових на основах

$\alpha_{p_3}^* = -\frac{5}{12} E_{p_3} - \frac{5}{24} (f^+ + f^-)$; тіла. Рівняння для визначення інтегральних характеристик H_{ks} одержимо, помноживши рівняння (2) на x_3^{s-1} та інтегруючи по x_3 згідно (5) з урахуванням співвідношення (4).

Приведемо систему вихідних рівнянь електродинаміки для інтегральних характеристик при наближенні функцій $H_k(x_l, x_3, \tau)$ ($l = 1, 2$)

кубічним законом за координатою x_3 . Тоді для визначення інтегральних характеристик E_{p_i} , отримуємо рівняння

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_l^2} + \frac{\partial^2}{\partial \tau}\right) H_{k_1}(x_l, \tau) - 3H_{k_1}(x_l, \tau) = -\frac{3}{2} \left[H_k^{+(0)}(x_l, \tau) + H_k^{-(0)}(x_l, \tau) \right] \quad (6)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_l^2} + \frac{\partial^2}{\partial \tau}\right) H_{k_2}(x_l, \tau) - 15H_{k_2}(x_l, \tau) = -\frac{15}{2} \left[H_k^{+(0)}(x_l, \tau) + H_k^{-(0)}(x_l, \tau) \right]$$

а початкові умови запишуться виразами:

$$H_{k_1}(x_l, 0) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 H_k(x_l, x_3, 0) dx_3,$$

$$H_{k_2}(x_l, 0) = \frac{3}{2} \int_{-1}^1 H_k(x_l, x_3, 0) x_3 dx_3, \quad (7)$$

Коефіцієнти апроксимаційного полінома (4) описуються формулами

$$\alpha_{k_0} = \frac{3}{2} H_{k_1} - \frac{1}{4} q_1; \quad \alpha_{k_1} = \frac{5}{2} H_{k_2} - \frac{3}{4} q_2;$$

$$\alpha_{k_2} = \frac{3}{4} q_1 - \frac{3}{2} H_{k_1}; \quad \alpha_{k_3} = \frac{5}{4} q_2 - \frac{5}{2} H_{k_2}; \quad (8)$$

$$q_1 = H_k^{+(0)} + H_k^{-(0)}; \quad q_2 = H_k^{+(0)} - H_k^{-(0)}.$$

Оскільки складові E_p ($p = 1, 3$) вектора \vec{E} визначаються за допомогою диференціювання функцій H_k , то ступінь точності апроксимації складових E_p при фіксованій кількості членів полінома (4) знижується. Для досягнення такої ж точності функцій E_p як функцій H_k , необхідно збільшувати кількість членів апроксимаційного полінома (4), що ускладнює систему рівнянь (6) і підвищує її порядок. Тому вважається більш доцільним, так як функції E_p в силу властивостей рівнянь Максвелла також визначаються з рівняння вигляду (2), апроксимувати компоненти E_p вектора \vec{E} поліномами вигляду (4), використовуючи при цьому граничні умови на функції E_p , які подаються через задані функції $H_k^{\pm(0)}(x_l, \tau)$ і мають вигляд

$$\left. \frac{\partial E_1}{\partial x_3} \right|_{x_3=\pm 1} = \frac{1}{\sigma_0 h} \left(\frac{\partial^2 H_2^{\pm(0)}}{\partial x_1^2} - \frac{\partial H_2^{\pm(0)}}{\partial \tau} \right),$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_2}{\partial x_3} \Big|_{x_3=\pm 1} &= \frac{1}{\sigma_0 h} \left(\frac{\partial H_1^{\pm(0)}}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 H_2^{\pm(0)}}{\partial x_2^2} \right), \\ E_3 \Big|_{x_3=\pm 1} &= \frac{1}{\sigma_0 h} \left(\frac{\partial H_2^{\pm(0)}}{\partial x_1} - \frac{\partial H_1^{\pm(0)}}{\partial x_2} \right), \end{aligned} \quad (9)$$

Умови (9) отримані за допомогою співвідношень електродинаміки із граничних умов на функції H_k . При цьому коефіцієнти $a_{p(j-1)}^*(x_l, \tau)$ апроксимаційних поліномів для функцій E_p подаються через граничні умови (9) і відповідні до (5) інтегральні характеристики цих функцій, для яких при обмеженні кубічним законом зміни компонент E_p вектора \vec{E} по координаті x_3 при $p = 1, 2$ отримуємо рівняння

$$f^\pm = \frac{\partial E_p}{\partial x_3} \Big|_{x_3=\pm 1}. \quad (10)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_l^2} - \frac{\partial}{\partial \tau} \right) E_{p_2}(x_l, \tau) - \frac{5}{2} E_{p_2}(x_l, \tau) = \frac{5}{4} [f^+(x_l, \tau) + f^-(x_l, \tau)], \quad (11)$$

а для компоненти E_3 рівняння вигляду (6), де функції $H_k^{\pm(0)}$ необхідно замінити значеннями $E_3 \Big|_{x_3=\pm 1}$.

Коефіцієнти $\alpha_{p(j-1)}^*(x_l, \tau)$ апроксимаційного полінома для складових E_p ($p = 1, 2$) вектора \vec{E} описуються виразами

$$\begin{aligned} \alpha_{p_0}^* &= E_{p_1} + \frac{1}{4}(f^+ - f^-); \quad \alpha_{p_1}^* = \frac{5}{4} E_{p_2} + \frac{1}{8}(f^+ + f^-); \\ \alpha_{p_2}^* &= \frac{1}{4}(f^+ - f^-); \quad \alpha_{p_3}^* = -\frac{5}{12} E_{p_2} - \frac{5}{24}(f^+ + f^-); \end{aligned} \quad (12)$$

де $f^\pm = \frac{\partial E_p}{\partial x_3} \Big|_{x_3=\pm 1}$.

Початкові умови на функції E_{p_1} й E_{p_2} будуть рівними

$$\begin{aligned} E_{p_1}(x_l, 0) &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 E_p(x_l, x_3, 0) dx_3; \\ E_{p_2}(x_l, 0) &= \frac{3}{2} \int_{-1}^1 E_p(x_l, x_3, 0) x_3 dx_3. \end{aligned} \quad (13)$$

В окремому випадку для усталеного (гармонійного в часі) зовнішнього електромагнітного поля граничні значення компонент вектора \vec{H} задаються виразами

$$H_{k^*}^{\pm(0)}(x_l, \tau) = H_{k^*}^{\pm(0)}(x_l) \exp(i \frac{\tau}{2\delta_0^2}), \quad (14)$$

де $\delta_0 = (2\omega\sigma_0\mu h^2)^{-\frac{1}{2}}$ — параметр, що характеризує відносно до півтовщини розглядуваного тіла глибину проникання індукційних струмів. Тоді система вихідних рівнянь електродинаміки для визначення інтегральних характеристик $H_{k_s^*}(s=1,2)$ при наближенні функцій H_{k^*} за координатою x_3 кубічним законом на підставі рівнянь (6) буде

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_l^2} - \frac{i}{2\delta_0^2} \right) H_{k_1^*}(x_l) - 3H_{k_1^*}(x_l) = -\frac{3}{2} \left[H_{k^*}^{+(0)}(x_l) + H_{k^*}^{-(0)}(x_l) \right] \quad (15)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_l^2} - \frac{i}{2\delta_0^2} \right) H_{k_2^*}(x_l) - 15H_{k_2^*}(x_l) = -\frac{15}{2} \left[H_{k^*}^{+(0)}(x_l) - H_{k^*}^{-(0)}(x_l) \right], \quad (16)$$

де $H_{k^*}^{\pm(0)}(x_l)$ — амплітудні значення функції $H_{k^*}^{\pm(0)}(x_l, \tau)$.

Інтегральні характеристики складових E_{p1^*}, E_{p2^*} ($p=1,2$) вектора \vec{E} згідно зі співвідношеннями (10)–(11) задовольняють рівнянням

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_l^2} - \frac{i}{2\delta_0^2} \right) E_{p1^*}(x_l) = \frac{1}{2} \left[f_{*}^{+}(x_l) - f_{*}^{-}(x_l) \right], \quad (17)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_l^2} - \frac{i}{2\delta_0^2} \right) E_{p2^*}(x_l) - \frac{5}{2} E_{p2^*}(x_l) = \frac{5}{4} \left[f_{*}^{+}(x_l) + f_{*}^{-}(x_l) \right]. \quad (18)$$

Тут функції $f_{*}^{\pm} = \frac{\partial E_{p^*}}{\partial x_3} \Big|_{x_3=\pm 1}$ подаються виразами (9), а інтегральні характеристики E_{31^*}, E_{32^*} знаходимо з рівнянь (15)–(16), замінюючи в них функції $H_{k_1^*}, H_{k_2^*}$ на функції E_{31^*}, E_{31^*} , а функції $H_{k^*}^{\pm(0)}$ на $E_{3^*} \Big|_{x_3=\pm 1}$ знаходимо з виразів (9).

Коефіцієнти $a_{k^*(j-1)}(x_l)$ полінома, що апроксимує функції $H_{k^*}(x_l, x_3)$ визначаються зі співвідношень (8), у яких необхідно замінити інтегральні характеристики H_{k_1}, H_{k_2} на характеристики $H_{k_1^*}, H_{k_2^*}$, а граничні значення $H_k^{\pm(0)}$ відповідно на значення $H_{k^*}^{\pm(0)}$.

Коефіцієнти $a_{k^{*(j-1)}}(x_l)$ полінома, що апроксимує функції $E_{p^*}(x_l, x_3)$ для $p = 1, 2$, визначаються зі співвідношень (12), у яких характеристики E_{p1}, E_{p2} замінюються характеристиками E_{p1^*}, E_{p2^*} , а граничні значення $\frac{\partial E_1}{\partial x_3} \Big|_{x_3=\pm 1}$ й $\frac{\partial E_2}{\partial x_3} \Big|_{x_3=\pm 1}$ замінюються на граничні значення $\frac{\partial E_1^*}{\partial x_3} \Big|_{x_3=\pm 1}$ й $\frac{\partial E_2^*}{\partial x_3} \Big|_{x_3=\pm 1}$.

Коефіцієнти полінома для функції E_{3^*} подаються співвідношеннями (8), у яких необхідно замінити функції H_{k1}, H_{k2} на функції E_{31^*}, E_{32^*} а функції $H_k^{\pm(0)}$ на функції $E_{3^*}^{\pm(0)} E_{3^*} \Big|_{x_3=\pm 1}$. Таким чином, розв'язування задачі по визначенню нестационарного електромагнітного поля в тілі із плоскопаралельними межами, тобто знаходження складових H_k і E_p векторів напруженостей магнітного і електричного полів, зводиться до розв'язування задач меншої розмірності за координатами для інтегральних характеристик H_{ks} і E_{ps} ($s = 1, 2$).

Функції H_{ks} й E_{ps} визначаються з отриманих систем рівнянь (5)–(6) і (10)–(11) при початкових умовах (7), (13) і відповідних умовах (по координатах x_1 і x_2) на граничних перетинах, що відповідають заданому розподілу на цих перетинах векторів напруженостей магнітного й електричного полів.

Відзначимо, що при використанні апроксимаційного полінома вище третього степеня, системи рівнянь для визначення інтегральних характеристик H_{ks} і E_{ps} стають сингулярно збуреними внаслідок великих числових значень коефіцієнтів. Це приводить до необхідності використання для їхнього розв'язування методів теорії сингулярно збурених рівнянь, що ускладнює методику одержання самого розв'язку.

Запропонована методика застосовна також і у тривимірному випадку. При цьому мають місце вище наведені співвідношення, а у вихідних рівняннях (6) і (10)–(11) необхідно оператор $\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}$ замінити

$$\text{двовимірним оператором Лапласа } \Delta_1 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}.$$

Загальний розв'язок задачі. Для знаходження інтегральних характеристик H_{ks} ($s = 1, 2$) компоненти H_k вектора напруженості

магнітного поля, що описуються системою рівнянь (6), використаємо перетворення Фур'є [4, с. 47–49] за координатою x_1 . Тоді Фур'є-трансформанти функцій $H_{ks}(x_1, \tau)$ ($s = 1, 2$) будуть

$$\tilde{H}_{ks}(\xi, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} H_{ks}(x_1, \tau) e^{i\xi x_1} dx_1.$$

Тут і подальшому символ « \sim » означає Фур'є-трансформанти функцій, ξ — параметр перетворення Фур'є. Тоді, виконавши безпосереднє інтегрування по часу, з рівнянь (6) з врахуванням початкових умов (7) маємо

$$\tilde{H}_{k1}(\xi, \tau) = e^{-(\xi^2+3)\tau} \left[\tilde{\Phi}_{k1}(\xi, \tau) - \tilde{\Phi}_{k1}(\xi, 0) + \tilde{H}_{k1}(\xi, 0) \right], \quad (19)$$

$$\tilde{H}_{k2}(\xi, \tau) = e^{-(\xi^2+15)\tau} \left[\tilde{\Phi}_{k2}(\xi, \tau) - \tilde{\Phi}_{k2}(\xi, 0) + \tilde{H}_{k2}(\xi, 0) \right]. \quad (20)$$

Тут

$$\tilde{\Phi}_{k1}(\xi, \tau) = \frac{3}{2} \int e^{(\xi^2+3)\tau} \left[\tilde{H}_k^{(0)+}(\xi, \tau) + \tilde{H}_k^{(0)-}(\xi, \tau) \right] d\tau, \quad (21)$$

$$\tilde{\Phi}_{k2}(\xi, \tau) = \frac{15}{2} \int e^{(\xi^2+15)\tau} \left[\tilde{H}_k^{(0)+}(\xi, \tau) - \tilde{H}_k^{(0)-}(\xi, \tau) \right] d\tau. \quad (22)$$

Перейшовши до оригіналів у виразах (19)–(20) отримуємо вирази функцій $H_{ks}(x_1, \tau)$ ($s = 1, 2$) у вигляді згортки

$$H_{k1}(x_1, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\xi^2+3)\tau} \left[\tilde{\Phi}_{k1}(\xi, \tau) - \tilde{\Phi}_{k1}(\xi, 0) + \tilde{H}_{k1}(\xi, 0) \right] e^{-i\xi x_1} d\xi, \quad (23)$$

$$H_{k2}(x_1, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\xi^2+15)\tau} \left[\tilde{\Phi}_{k2}(\xi, \tau) - \tilde{\Phi}_{k2}(\xi, 0) + \tilde{H}_{k2}(\xi, 0) \right] e^{-i\xi x_1} d\xi.$$

У випадку усталеного електромагнітного поля, яке задається граничними умовами (14), аналогічним шляхом з рівнянь (15)–(16) знаходимо для інтегральних характеристик $H_{ks^*}(s = 1, 2)$ вирази

$$H_{k1^*}(x_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{3}{2} \frac{\tilde{H}_{k^*}^{(0)+}(\xi) + \tilde{H}_{k^*}^{(0)-}(\xi)}{\xi^2 + 3 + \frac{i}{2\delta_0^2}} e^{-i\xi x_1} d\xi, \quad (24)$$

$$H_{k2^*}(x_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{15}{2} \frac{\tilde{H}_{k^*}^{(0)+}(\xi) - \tilde{H}_{k^*}^{(0)-}(\xi)}{\xi^2 + 15 + \frac{i}{2\delta_0^2}} e^{-i\xi x_1} d\xi. \quad (25)$$

При знайдених інтегральних характеристиках H_{ks} складова $H_k(x_1, x_3, \tau)$ вектора напруженості магнітного поля описується так

$$H_k(x_1, x_3, \tau) = \frac{3}{2} H_{k1}(1 - x_3^2) + \frac{5}{2} H_{k2}(x_3 - x_3^3) + \frac{1}{4} q_1(1 - 3x_3^2) - \frac{1}{4} q_2(3x_3 - 5x_3^3), \quad (26)$$

де

$$q_1 = H_k^{+(0)} + \overline{H_k^{-(0)}}, \quad q_2 = H_k^{+(0)} - H_k^{-(0)}.$$

Тоді складові E_p ($p = 1, 3$) вектора напруженості електричного поля визначаються через співвідношення $\vec{E} = \frac{1}{\sigma_0 h} \text{rot} \vec{H}$. Таким чином, ми отримали загальний розв'язок розглядуваної задачі.

Висновки. Запропонована методика розв'язування двовимірної задачі електродинаміки для електропровідного тіла з плоскопаралельними межами за дії зовнішнього нестационарного електромагнітного поля використовує апроксимацію розподілу за товщиною координатою кубічним поліномом визначальної функції — дотичної до основ шару компоненти вектора напруженості магнітного поля, яка на основах тіла є неоднорідною за поздовжньою координатою. Такий підхід дає змогу зменшити розмірність вихідної двовимірної задачі до одновимірної на інтегральні характеристики визначальної функції. Вирази цих інтегральних характеристик можна записати у вигляді згорток функцій, що описують задані неоднорідні значення визначальної функції та однорідні розв'язки отриманих задач на інтегральні характеристики. З метою підвищення точності апроксимації запропоновано незалежну апроксимацію компонент вектора напруженості електричного поля за використання заданих крайових умов на дотичну до основ шару компоненту вектора напруженості магнітного поля. Дана методика дозволяє суттєво спростити загальний розв'язок розглядуваної двовимірної початково-крайової задачі і отримання конкретних розв'язків за дії характерних типів зовнішніх нестационарних електромагнітних полів, що використовуються для функціонування багатьох електротехнічних приладів та пристроїв.

Список використаних джерел:

1. Батыгин Ю. В. Импульсные магнитные поля для прогрессивных технологий / Ю. В. Батыгин, В. И. Лавинский, Л. Т. Хименко. — Харьков : МОСТ, 2003. — 288 с.
2. Подстригач Я. С. Термоупругость электропроводных тел / Я. С. Подстригач, Я. И. Бурак, А. Р. Гачкевич, Л. В. Чернявская. — К. : Наук. думка, 1977. — 248 с.
3. Мусій Р. С. Динамічні задачі термомеханіки електропровідних тіл канонічної форми : монографія / Р. С. Мусій. — Львів : Вид-во «Растр-7», 2010. — 216 с.

4. Галицын А. С. Интегральные преобразования и специальные функции в задачах теплопроводности / А. С. Галицын, А. Н. Жуковский. — Киев : Наукова думка, 1976. — 283с.

A METHODOLOGY FOR CONSTRUCTING A SOLUTION OF A TWO-DIMENSIONAL PROBLEM OF ELECTRODYNAMICS FOR AN ELECTROCONDUCTIVE BODY WITH PLANE — PARALLEL BOUNDARIES UNDER THE ACTION OF AN EXTERNAL NON-STATIONARY ELECTROMAGNETIC FIELD

A two-dimensional initial-boundary value problem of electrodynamics for an electroconductive non-ferromagnetic body with planar-parallel boundaries is formulated under the action of an external non-stationary electromagnetic field. The electromagnetic field is given by the values of the inhomogeneous longitudinal coordinate of the component of the magnetic field intensity vector at its bases. To construct a general solution of the formulated initial boundary value problem under such electromagnetic action, a cubic approximation by thickness coordinate and an integral Fourier transform along a longitudinal coordinate was used for a key function — a given component of the magnetic field intensity vector. As a result, the initial two-dimensional initial boundary value problem for the key function is reduced to the one-dimensional initial boundary value problem. This initial boundary value problem is on the integral key function. These characteristics are the functions of time variable and the thickness coordinate. The coefficients of the polynomial approximating the key function are given by the transformants of the integral characteristics of the key function and given its values on the bases of the body as corresponding functions of time and longitudinal coordinate. The general solutions of the one-dimensional initial boundary value problem are obtained as a convolution of functions. These functions describe homogeneous solutions and key function boundary values on the bases of the body. Using the inverse Fourier transforms, the solution of the original electrodynamics problem under the action of an arbitrary variable in time and by the longitudinal coordinate of a non-stationary electromagnetic field is written. On the basis of such a common solution, as a partial case, we also write the solutions of the original two-dimensional initial boundary value problem under the action of a stationary harmonic in time variable electromagnetic field. In order to improve the accuracy of the approximate solution of the problem under consideration, an independent approximation of the corresponding component of the electric field intensity vector along the thickness coordinate is proposed. Systems of equations are formulated to determine the integral characteristics of this component, both under the action of an arbitrary variable in time and for a longitudinal coordinate non-stationary and the stationary electromagnetic field.

Key words: *electroconductive body, plane-parallel boundaries, non-stationary and stationary electromagnetic field, tangent components of the intensity vectors of magnetic and electric fields, cubic approximation, integral characteristics, Fourier transform.*

Отримано: 14.08.2019

УДК 519.718:519.217:519.837:517.929
DOI: 10.32626/2308-5878.2019-20.51-60

В. І. Мусурівський, канд. фіз.-мат. наук

Чернівецький факультет національного технічного університету
«Харківський політехнічний інститут», м. Чернівці

ПРО ПРОБЛЕМУ СТАБІЛІЗАЦІЇ КЕРОВАНИХ СТОХАСТИЧНИХ ДИФЕРЕЦІАЛЬНО-ФУНКЦІОНАЛЬНИХ СИСТЕМ ІЗ СКІНЧЕННИМ ЗАПІЗНЕННЯМ

У роботах [1–4] проаналізована проблема стабілізації систем, які описуються стохастичними дифереціально-функціональними рівняннями з імпульсними марковськими збуреннями, будучи системами випадкової структури із постійним або скінченним запізненням, при наявності перехідного процесу та запізнення одночасно. У даній роботі більш загально розглянута проблема стабілізації керованих стохастичних систем, які описуються дифереціально-функціональними рівняннями із скінченним запізненням та незалежними в сукупності вінерівськими процесами. Запізнення побудоване на просторі Скорохода неперервних справа функцій, що мають лівосторонні границі [1]. Ці системи повинні бути асимптотично стійкими за ймовірністю та забезпечувати наперед задану оптимальність перехідного процесу. Керування вибудовується за принципом оберненого зв'язку, отримується як марковський процес [3, 4]. Задача оптимальної стабілізації розглядається в розумінні заданого критерію якості, вибудовується за принципами динамічного програмування Беллмана. В першій частині роботи аналізуються властивості марковських процесів, як підсумок формулюється відповідна лема. В другій частині отриманий інфінітезимальний оператор відповідного марковського процесу, доведена основна теорема стабілізації. Алгоритм доведення побудований на використанні формули Іто. Наведено приклади використання. Алгоритм оптимальної стабілізації продемонстровано в третій частині для дослідження лінійних систем. Для випадку лінійних систем сформульована теорема стабілізації. Отримані результати та наведені доведення справедливі й у детермінованому випадку. Результати наукового дослідження отримані для використання в технічних системах. Дана робота є частиною першою наукового дослідження — частина друга буде містити більше прикладів та використовуватиме метод послідовних наближень.

Ключові слова: *керовані стохастичні дифереціально-функціональні системи, стабілізація, скінченне запізнення.*

Вступ. У роботах [1–4] проаналізована проблема стабілізації систем, які описуються стохастичними дифереціально-функціональними рівняннями з імпульсними марковськими збуреннями, будучи систе-

мами випадкової структури із постійним або скінченим запізненням (СССЗ), при наявності перехідного процесу та запізнення одночасно.

У роботі розглянута більш загально проблема стабілізації керованих стохастичних систем, які описуються диференціально-функціональними рівняннями із скінченим запізненням.

1. Постановка задачі. Розглянемо $x(t) \in R^m$ — випадковий процес керованої стохастичної системи, що описується диференціально-функціональними рівняннями із скінченим запізненням виду

$$dx(t) = a(t, x_t, u)dt + \sum_{k=1}^m b_k(t, x_t, u)dw_k(t), \quad k = 1, 2, \dots, m, \quad (1)$$

з початковою умовою

$$x_{t_0} = z_0 \in \mathbf{D}, \quad (2)$$

де $t \geq t_0 \geq 0$; $x_t \equiv \{x(t + \theta)\}$, $-\tau \leq \theta < 0$, $\tau > 0$; $\mathbf{D} \equiv \mathbf{D}([-\tau, 0], R^m)$ — простір Скорохода неперервних справа функцій, що мають лівосторонні границі [1]. $a(t, x_t, u)$, $b_k(t, x_t, u)$, $k = 1, 2, \dots, m$ — вимірні по сукупності аргументів вектори-функціонали. $w_k(t)$, $k = 1, 2, \dots, m$ — незалежні в сукупності вінерівські процеси, для яких $E w_k(t) = 0$, $E w_k^2(t) = t$. Величина $u \equiv u(t, x(t)) \in R^r$ — r -мірний керуючий вплив [1, 4].

Означення 1. Керування $u \equiv u(t, x)$ назвемо допустимою функцією, якщо функціонали $a(t, x_t, u)$, $b_k(t, x_t, u)$ — неперервні, мають перші похідні за x , рівномірно обмежені за t , і, крім того, $u(t, 0) = 0$.

Клас допустимих керувань позначимо \mathcal{U} . Кожній функції $u \in \mathcal{U}$ — допустимому керуванню, відповідає випадковий процес $x_s(t, u)$, що є розв'язком задачі (1)–(2). Нехай керування вибирається як функція $u = u(t, x)$ — будується за принципом оберненого зв'язку [3, 4], тоді воно буде марковським. Внаслідок, випадковий процес $x_s(t, u)$, що визначається системою (1)–(2), буде марковським.

За аналогією [3, 4] будемо розглядати **задачу оптимальної стабілізації** в розумінні заданого критерію якості: знайти допустиме керування $u \equiv u^o(t, x)$, при якому досягається мінімум функціоналу

$$J_{s,z}(u) = \int_s^\infty E \{W(t, x_t, u(t, z)) | x_t = z\} dt, \quad (3)$$

де (s, z) — фіксована початкова точка, $W(t, x, u)$ — додатньо-визначений функціонал при $t \geq 0$, яке назвемо оптимальним.

Позначимо x^o — оптимальну траєкторію, що відповідає оптимальному керуванню u^o .

Зауваження 1. Необхідно обмежитися критеріями якості, для яких виконується наступна умова: для будь-якого $u \in \mathcal{U}$ та деяких постійних $c > 0$, $p > 0$ справедлива нерівність

$$W(t, x, u) > c \|x\|^p. \quad (4)$$

Зауваження 2. Для вивчення властивостей марковських процесів істотним інструментом є ексцесивні функції $V(x)$ із властивостями [7]

$$0 \leq T_t V(x) = \int_E P(x, t, dy) V(y) \leq V(x), \quad t \geq 0, \quad x \in E, \\ T_t V(x) \rightarrow V(x) \quad \text{при } t \downarrow 0,$$

де X — однорідний за t неперервний справа строго марковський процес у банаховому просторі E . Ексцесивна функція V задовольняє нерівність

$$E_x V(X(\zeta)) \leq V(x) \quad (4')$$

для довільного марковського моменту часу ζ .

Означення 2. Непорожня множина $D \in \mathcal{F}$ називається інваріантною для процесу X , якщо

$$P(x, t, D) = 1$$

для $x \in D$, $t \geq 0$, \mathcal{F} — σ -алгебра вимірних множин в E .

Означення 3. Функція V називається ексцесивною для процесу X у відкритій множині U , якщо співвідношення (4') справедливо для $\forall \zeta \leq \tau_U$, де τ_U — момент першого виходу траєкторії процесу з області U .

У роботах [1–4] всебічно дані означення стійкості. Має місце лема [7]:

Лема. Для стійкості за ймовірністю інваріантної для процесу X точки x_o достатньо, щоб існувала ексцесивна для процесу X в деякому околі точки x_o функція V така, що

$$V(x_o) = 0; \\ \inf_{\|x-x_o\|>\varepsilon} V(x) = V_\varepsilon > 0 \quad \text{для } \forall \varepsilon > 0.$$

Зауваження 3. З нерівності (4) зауваження 1 і внаслідок леми при $t \rightarrow \infty$ будемо мати рівність

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E \left| X_{u_o}^{s,z}(t) \right|^p = 0. \quad (4'')$$

Зауваження 4. При деяких додаткових умовах із зауважень 1, 3 випливає асимптотична та експоненціальна стійкість системи (1).

2. Оптимальна стабілізація. Нехай V — функція із $C_2(E)$. Розглянемо вираз

$$\mathcal{L}_u \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \left(a(t, x_t, u), \frac{\partial}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m \left(b_k(t, x_t, u), \frac{\partial}{\partial x} \right)^2, \quad (5)$$

який при підстановці $u = u(t, x)$ являє собою інфінітезимальний оператор відповідного марковського процесу $X_u^s(t)$.

Теорема 1. Нехай існують функції $V_o(t, x) \in C_2^{(0)}(E)$, $u^o(t, x) \in \mathcal{U}$, що задовольняють при $\forall t \geq 0, x \in E_m, u \in (-\infty, \infty)$ і деяких додатних постійних p, n, k_1, k_2 наступним умовам:

$$V_o(t, x) \leq k_1 |x|^p, \quad \left| \frac{\partial V_o}{\partial x} \right| \leq k_1 (|x|^p + 1), \quad (6)$$

$$\mathcal{L}_{u^o} V_o(t, x) + W(t, x, u^o(t, x)) \equiv 0, \quad (7)$$

$$\mathcal{L}_u V_o(t, x) + W(t, x, u) \geq 0, \quad (8)$$

$$W(t, x, u) \geq k_2 |x|^p, \quad (9)$$

де $\|x(\theta)\| = \sup_{\tau \leq \theta \leq 0} |x(\theta)|$, $\frac{\partial V_o}{\partial x}$ — похідна Фріше. Тоді функція $u^o(t, x)$ є розв'язком задачі про оптимальну стабілізацію системи (1)–(2) у розумінні критерію якості $J_{s,z}(u)$

$$J_{s,x^o}(u^o) = \min_{u \in \mathcal{U}} J_{s,x^o}(u) = V_o(s, x^o). \quad (10)$$

Доведення. Нехай $u = u(t, x)$ — деяке допустиме керування. Застосовуючи формулу Іто [7] до функції $V(t, X^{s,z}(t))$ та з огляду на те, що в силу другого із співвідношень (6) [7] математичні сподівання стохастичних інтегралів, які входять у дану формулу, дорівнюють нулю, одержимо рівність

$$\mathbb{E} V_o^{s,z}(t, X_u^{s,z}(t)) - V_o(s, z) = \mathbb{E} \int_s^t \mathcal{L}_u V_o^{s,z}(v, X_u^{s,z}(v)) dv. \quad (11)$$

Покладаючи $u = u^o(t, z)$ та застосовуючи (7), будемо мати

$$\mathbb{E} \int_s^t W(v, X_{u^o}^{s,z}(v), u(v, X_{u^o}^{s,z}(v))) dv = V_o(s, z) - \mathbb{E} V_o(t, X_{u^o}^{s,z}(t)). \quad (12)$$

Звідки при $t \rightarrow \infty$ випливає нерівність

$$J_{s,z}(u^o) < \infty. \quad (13)$$

Із нерівності (13), з огляду на (9) і зауваження 1, для процесу $X_{u^o}^{s,z}(t)$ виконується рівність (4'). Із (4') і (6) одержуємо нерівність

$$\mathbb{E} V_o(t, X_{u^o}^{s,z}(t)) \leq k_1 \mathbb{E} \left| X_{u^o}^{s,z}(t) \right|^p \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow \infty.$$

Переходячи до границі в (12) при $t \rightarrow \infty$, будемо мати

$$J_{s,z}(u_o) = V_o(s, z).$$

Нехай $u(t, z)$ — деяке допустиме керування, для якого $J_{s,z}(u) < \infty$, тоді легко переконатися в справедливості рівності

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E} V_o(t, X_u^{s,z}(t)) = 0. \quad (14)$$

Використовуючи рівність (14) і з огляду на (11), (8), одержуємо

$$\mathbb{E} V_o^{s,z}(t, X_u^{s,z}(t)) = V_o(s, z) + \mathbb{E} \int_s^t W(v, X_u^{s,z}(v), u(v, X^{s,z}(v))) dv \geq V_o(s, z), \quad (15)$$

На підставі (15) при $t \rightarrow \infty$ одержуємо нерівність

$$\min_{u \in \mathcal{U}} J_{s,z}(u) = V_o(s, z). \quad (16)$$

Доведемо експоненціальну p -стійкість системи (1) при $u = u_o(t, z)$. Досить перевірити для деякої постійної $k_3 > 0$ справедливості нерівності [7]

$$V_o(s, x) \geq k_3 \|x\|^p.$$

З (9), (10) одержимо

$$V_o(s, x) = J^{s,x}(u^o) \geq k_2 \int_0^\infty \mathbb{E} \left| X_{u^o}^{s,z}(v) \right|^p dv$$

і, виходить, для довільних значень $x, s \geq 0$ можна вказати таке $T = T(s, x)$, при якому

$$\mathbb{E} \left| X_{u^o}^{s,z}(T) \right|^p < \frac{1}{2} \|x\|^p. \quad (17)$$

З (17) і формули Іто, з огляду на нерівність [7]

$$\mathcal{L}_{u_o}(\|x\|^p) \geq -k_4 \|x\|^p,$$

знаходимо

$$\begin{aligned} V_o(s, x) &\geq k_2 \int_0^\infty \mathbb{E} \left| X_{u_o}^{s,x}(v) \right|^p dv \geq -k_5 \int_0^\infty \mathbb{E} \mathcal{L}_{u_o} \left| X_{u_o}^{s,x}(v) \right|^p dv = \\ &= k_5 \left(\|x\|^p - \mathbb{E} \left| X_{u_o}^{s,x}(T) \right|^p \right) \geq \frac{k_5}{2} \|x\|^p = k_3 \|x\|^p \end{aligned} \quad (18)$$

Теорема доведена.

Зауваження 5. При об'єднанні умов (7), (8) одержимо наступне рівняння

$$\min_{u \in (-\infty, \infty)} [\mathcal{L}_u V_o(s, x) + W(s, x, u)] = 0 \quad (19)$$

рівняння Беллмана.

Зауваження 6. Умова (9), що накладає обмеження на функцію $W(s, x, u)$ для довільних u , здається занадто обмежувальною. Можна було б сподіватися, що достатньо вимагати виконання тільки умови

$$W(t, z, u^o(t, z)) > k_2 \|x\|^p. \quad (20)$$

Наведений приклад показує, що при ослабленні умови (9) умовою (20) теорема 1 невірна.

Приклад. Розглянемо задачу оптимальної стабілізації для детермінованої системи

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -x_1(t) - x_1(t-1), \\ \frac{dx_2}{dt} = x_2(t) + x_2(t-1) + u, \end{cases} \quad (21)$$

при

$$W(t, x_1, x_2, u) \equiv x_1^2(t) + x_1^2(t-1) + u^2.$$

У цьому випадку

$$\mathcal{L}_u = -(x_1(t) + x_1(t-1)) \frac{\partial}{\partial x_1} + (x_2(t) + x_2(t-1) + u) \frac{\partial}{\partial x_2}.$$

Умови (6)–(8) виконані, як легко бачити, для функцій

$$V_o = \frac{x_1^2(t) + x_1^2(t-1)}{2} + 2x_2^2(t) + 2x_2^2(t-1),$$

$$u^o = -2x_2(t) - 2x_2(t-1) + 2x_2^2(t-1).$$

Очевидно, що умова (9) виконано, наприклад, для

$$u = c_1(x_1(t) + x_1(t-1)) + c_2(x_2(t) + x_2(t-1)).$$

Однак, керування u^o не буде оптимальним у нашому розумінні, тому що оптимальним є керування $u \equiv 0$.

Зауваження 7. Вище доведено, що керування u^o оптимальне для всіх управлінь класу \mathcal{U} . Можна було б сподіватися на існування більш оптимального керування в класі керувань, що враховують історію процесу $X(t)$ від початкового моменту часу s до даного моменту t . Доведено [6], що u^o буде оптимальним.

3. Дослідження лінійних систем. Застосуємо теорему 1 для дослідження лінійної системи

$$dX = \left[A(t)dt + \sum_{k=1}^n B_k(t)dw_k(t) \right] X + \left[h(t)dt + \sum_{k=1}^n c_k(t)dw_k(t) \right] u, \quad (22)$$

де $A(t)$, $B_k(t)$ — матриці $m \times m$, $h(t)$, $c_k(t)$ — вектори в E^m . Елементи матриць $A(t)$, $B_k(t)$ і $h(t)$, $c_k(t)$ — неперервні обмежені функції часу.

Розглянемо задачу про оптимальну стабілізацію системи (22) при критерії якості

$$W(t, x, u) = (A(t)x, x) + \lambda u^2, \quad (23)$$

де $A(t)$ — симетрична обмежена матриця $m \times m$, додатньо-визначена рівномірно відносно $t \geq s$, $\lambda > 0$.

Необхідно знайти оптимальну функцію Ляпунова $V_o(s, x)$, що задовольняє умовам теореми 1, у вигляді невід'ємно-визначеної квадратичної форми

$$V_o(s, x) = -(C(t)x, x), \quad (24)$$

де $C(t)$ — симетрична матриця $m \times m$.

Оператор \mathcal{L}_u для системи (22) визначається рівністю

$$\mathcal{L}_u = \frac{\partial}{\partial t} + \left(A(t)x + h(t)u, \frac{\partial}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left(B_k(t)x + c_k(t)u, \frac{\partial}{\partial x} \right)^2, \quad (25)$$

а рівняння (19), що зв'язує оптимальну функцію Ляпунова $V_o(s, x)$ та оптимальне керування $u^o(t, x)$, має вигляд:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial V_o}{\partial t} + \left(A(t)x, \frac{\partial}{\partial x} \right) V_o + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left(B_k(t)x, \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 V_o + (A(t)x, x) = \\ & = - \min_{u \in U} \left\{ u \left[\left(h(t)x, \frac{\partial}{\partial x} \right) V_o + \sum_{k=1}^n \left(B_k(t)x, \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(c_k(t), \frac{\partial}{\partial x} \right) V_o \right] + \right. \\ & \quad \left. + u^2 \left[\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left(c_k(t), \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 V_o + \lambda \right] \right\} = \\ & = -u^o \left[\left(h(t), \frac{\partial}{\partial x} \right) V_o + \sum_{k=1}^n \left(B_k(t)x, \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(c_k(t), \frac{\partial}{\partial x} \right) V_o \right] - \\ & \quad - (u^o)^2 \left[\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left(c_k(t), \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 V_o + \lambda \right]. \end{aligned} \quad (26)$$

Функція $u^o(t, x)$ в (26) має вигляд

$$u^o(t, x) = \frac{\left(h(t), \frac{\partial}{\partial x} \right) V_o + \sum_{k=1}^n \left(B_k(t)x, \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(c_k(t), \frac{\partial}{\partial x} \right) V_o}{2\lambda + \sum_{k=1}^n \left(c_k(t), \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 V_o}. \quad (27)$$

У результаті підстановки (25) в (27) одержимо рівність

$$u^o(t, x) = - \frac{\left(h(t), C(t)x \right) + \sum_{k=1}^n \left(C(t)c_k(t), B_k(t)x \right)}{\lambda + \sum_{k=1}^n \left(C(t)c_k(t), c_k(t) \right)}. \quad (28)$$

Із цього виразу видно, що оптимальне керування лінійне за x , якщо оптимальна функція Ляпунова задається формулою (24).

Після підстановки (26) в (28) одержимо рівняння для визначення $V_o(t, x)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_o}{\partial t} + \left(A(t)x, \frac{\partial}{\partial x} \right) V_o + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left(B_k(t)x, \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 V_o + (A(t)x, x) = \\ = \frac{\left(h(t), \frac{\partial}{\partial x} \right) V_o + \sum_{k=1}^n \left(B_k(t)x, \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(c_k(t), \frac{\partial}{\partial x} \right) V_o}{2 \left[\lambda + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left(c_k(t), \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 V_o \right]}, \end{aligned} \quad (29)$$

яке в силу симетричності матриці $C(t)$ еквівалентно рівнянню

$$\begin{aligned} \frac{dC}{dt} + CA(t) + A^*(t)C + \sum_{k=1}^n B_k^*(t)C(t)B_k(t) + A(t) = \\ = \frac{\left(Ch(t) + \sum_{k=1}^n B_k^*(t)C c_k(t) \right) + \left(h^*(t)C + \sum_{k=1}^n \left(c_k^*(t)CB_k(t) \right) \right)}{\lambda + \sum_{k=1}^n \left(Cc_k(t), c_k(t) \right)}. \end{aligned} \quad (30)$$

З теореми 1 випливає наступне твердження:

Теорема 2. Якщо рівняння (30) для $\forall t \geq s$ має обмежений додатньо-визначений розв'язок $C(t)$, то керування (28) доставляє мінімум функціоналу

$$J_{s,z}(u) = \int_s^\infty \mathbf{E} \left\{ \left(A(t)X_u^{s,z}(t), X_u^{s,z}(t) \right) + \lambda u^2(t, X_u^{s,z}(t)) \right\} dt. \quad (31)$$

Зауваження 8. Отримані результати та наведені доведення справедливі й у детермінованому випадку $B_k(t) \equiv 0$, $c_k(t) \equiv 0$. Зокрема рівняння (30) переходить у матричне рівняння Ріккати

$$\frac{dC}{dt} + CA(t) + A^*(t)C - \frac{Ch(t)h^*(t)C}{\lambda} + \alpha = 0. \quad (32)$$

Висновки. Результати наукового дослідження отримані для використання в технічних системах. Отримані умови оптимальної стабілізації системи (1)–(2) у розумінні критерію якості $J_{s,z}(u)$. Нехай керування вибирається як функція $u = u(t, x)$ — будується за принципом оберненого зв'язку [3, 4], тоді воно буде марковським. Тому випадковий процес $x_s(t, u)$, що визначається системою (1)–(2), внаслідок використання принципу оберненого взаємозв'язку буде марковським [6].

Список використаних джерел:

1. Мусурицкий В. И. О проблеме стабилизации стохастических дифференциально-функциональных уравнений с импульсными марковскими возмущениями и постоянным запаздыванием. Часть 1 / В. И. Мусурицкий, В. К. Ясинский // Международный научно-технический журнал «Проблемы управления и информатики». — 2014. — № 4. — С. 22–31.
2. Мусурицкий В. И. О проблеме стабилизации стохастических дифференциально-функциональных уравнений с импульсными марковскими возмущениями и постоянным запаздыванием. Часть 2 / В. И. Мусурицкий, В. К. Ясинский // Международный научно-технический журнал «Проблемы управления и информатики». — 2014. — № 6. — С. 5–10.
3. Мусурицкий В. И. О проблеме стабилизации стохастических дифференциально-функциональных уравнений с импульсными марковскими возмущениями и постоянным запаздыванием. Часть 3 / В. И. Мусурицкий, В. К. Ясинский // Международный научно-технический журнал «Проблемы управления и информатики». — 2015. — № 1. — С. 5–10.
4. Мусурицький В. І. Проблема стабілізації стохастичних дифференціально-функціональних рівнянь з імпульсними марковськими збуреннями та скінченним запізненням / В. І. Мусурицький // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки : збірник наукових праць. — Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2014. — Вип. 11. — С. 138–143.
5. Гихман И. И. Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения / И. И. Гихман, А. В. Скороход. — Київ : Наукова думка, 1982. — 612 с.
6. Невельсон М. Б. Устойчивость и стабилизация стохастических дифференциальных уравнений / М. Б. Невельсон, Р. З. Хасьминский // Сборник научных трудов «Летняя школа по теории вероятностей и математической статистике». — Киев : АН УССР, 1969. — С. 161–175.
7. Дынкин Е. Б. Марковские процессы / Е. Б. Дынкин. — Москва : Физматгиз, 1963. — 859 с.

ABOUT THE PROBLEM OF STABILIZATION OF CONTROL STOCHASTIC DIFFERENTIAL-FUNCTIONAL SYSTEMS WITH FINITE DELAY

Works [1–4] analyze a problem of stabilization of systems, which are defined by a stochastic differential-functional equations with impulsive Markov disturbances with a constant or finite delay, in presence of a transitional process and a delay at the same time. This work considers a more generalized problem of stabilization of the control stochastic differential-functional systems with finite delay and mutually independent Wiener processes. The delay is constructed on the space of the Skorokhod of right continuous functions with left limits [1]. This systems must be asymptotically stable by the probability and provide preassigned optimivity of a transient process. The control be selected is built on the principle of inverse communication, obtained as a Markov process [3, 4]. The problem of optimal stabilization is considered in the context of the given quality criteria, builds on Bellman's dynamic programming principles. The first part of the work analyzes the properties of Markov processes. The corresponding lemma is formulated as a result. In the second part obtained the infinitesimal operator of the corresponding Markov process, is formulated and the basic theorem of stabilization is proved. The proof algorithm is based on using the Ito-formula. Examples of use are given. In the third part an optimal stabilization algorithm has been demonstrated to investigate a linear systems. For the case of linear systems, the stabilization theorem is formulated. The results of the scientific research were obtained for use in technical systems. The results obtained and the arguments given are valid in the determined case as well. This work is part one of the first scientific research, the second part will contain more examples and use the method of successive approximations.

Key words: *control stochastic differential-functional systems, stabilization, finite behind.*

Отримано: 27.08.2019

УДК 517.5

DOI: 10.32626/2308-5878.2019-20.61-69

Т. О. Петрова, канд. фіз.-мат. наук,

І. Л. Петрова

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, м. Київ

УЗАГАЛЬНЕННЯ ПОТОЧКОВИХ ІНТЕРПОЛЯЦІЙНИХ ОЦІНОК ОПУКЛОГО НАБЛИЖЕННЯ ФУНКЦІЙ, ЩО МАЮТЬ ДРОБОВУ ПОХІДНУ

Ми розглядаємо питання інтерполяційного наближення функцій з класу Соболева алгебраїчними поліномами. Питання позитивної апроксимації це питання апроксимації позитивних та r -разів неперервно диференційованих функцій алгебраїчними поліномами. Оцінки типу (1) для позитивної апроксимації розглядаються в роботах [1, 2]. Питання монотонної апроксимації це питання наближення монотонних функцій з класу Соболева монотонними алгебраїчними поліномами. Оцінки типу (1) для монотонної апроксимації були доведені в роботах [3, 4, 8]. У роботах [3, 4] розглядається натуральний індекс в просторі Соболева, який не дорівнює одиниці. В роботі [8] розглядається дійсний індекс простору Соболева, який строго більший за два. Доведено, що оцінки типу (1) не виконуються для дійсного індексу більшого за два. Питання опуклої апроксимації це питання апроксимації опуклих функцій з класу Соболева опуклими поліномами. Питання опуклої апроксимації розглядалося в роботах [5, 6]. У роботі [5] розглядався натуральний індекс простору Соболева, який не дорівнює одиниці. В роботі [6] розглядався дійсний індекс простору Соболева, який строго більший за два. Було доведено, що для опуклої апроксимації оцінки типу (1) є невірними для дійсного індексу Соболева, який більший за два. В роботі [9] розглядається питання опуклої апроксимації функцій з простору Соболева опуклими алгебраїчними поліномами, якщо індекс простору Соболева знаходиться в інтервалі від трьох до чотирьох. Також доведено, що оцінка (1) є невірною. В даній роботі досліджується питання наближення опуклих вниз функцій з простору Соболева опуклими алгебраїчними поліномами також для дійсного індексу простору Соболева з інтервалу від трьох до чотирьох. Побудовано контрприклад, який показує, що для цих функцій оцінка типу (1) є невірною. Ця робота є узагальненням результату роботи [9]. Основний результат є аналогом теореми 2.3 в [11].

Ключові слова: *наближення функції, простір Соболева, алгебраїчний поліном, монотонна функція, опукла функція.*

Вступ. Нехай $W^r [0,1] = W^r, r \in \mathbb{N}$ клас функцій $f \in C[0,1]$, таких, що мають абсолютно неперервну $(r-1)$ похідну і $|f^{(r)}(x)| \leq 1$

майже скрізь на $[0,1]$. Теляковський [1] для $r = 1$ та Гопенгауз для $r \in \mathbb{N}$ [2] посилили пряму теорему Нікольського–Тіммана довівши, що кожную функцію $f \in W^r$ можна наблизити алгебраїчним многочленом p_n степеня $< n$ так, що

$$|f(x) - p_n(x)| \leq c(r) \left(\frac{\sqrt{x(1-x)}}{n} \right)^r, n > r \quad (1)$$

де c — абсолютна стала.

DeVore та Yu [3] довели, що при $r = 1, 2$ оцінка (1) справедлива і при наближенні монотонної функції монотонним многочленом. А саме, якщо монотонна функція $f \in W^r$, то існує монотонний многочлен p_n , такий, що має місце (1).

У роботі GLSW [4] доведено, що для натурального $r > 2$ оцінка (1), взагалі кажучи, невірна.

Для опуклого наближення при $r > 2, r \in \mathbb{N}$ доведено [5], що оцінка (1) також є невірною.

Для $r \in \mathbb{R}$ введемо клас функцій $W^r[0,1] = W^r$, таких, що $D_{0+}^{r-1} f$ абсолютно неперервна і $|D_{0+}^r f| \leq 1$ майже скрізь на $[0,1]$ (тут $D_{0+}^{r-1} f$ — лівостороння дробова похідна [7]). Будемо позначати через Π_n — множину всіх алгебраїчних поліномів степеня $\leq n$ і через Δ^2 множину опуклих вниз на $[0,1]$ функцій.

Основним результатом роботи є теорема, яка узагальнює результат роботи [9] на класи $W^r[0,1] \cap \Delta^2$ з $r \in (3; 4)$.

Основні означення та допоміжні твердження. Спочатку нагадаємо основні означення та факти, які використовуються в цій роботі.

Означення. Нехай $\varphi(x) \in L_1(a, b)$. Інтеграли

$$(I_{a+}^\alpha \varphi)(x) \stackrel{def}{=} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{\varphi(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt, x > a. \quad (2)$$

$$(I_{b-}^\alpha \varphi)(x) \stackrel{def}{=} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b \frac{\varphi(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt, x < b, \quad (3)$$

де $\alpha > 0$ називаються інтегралами дробового порядку α . Перший називають лівостороннім, а другий правостороннім.

Що стосується дробового диференціювання, то його слід ввести, як операцію обернену дробовому інтегуванню [7].

Означення. Для функції $f(x)$, що задана на відрізку $[a, b]$ кожен із виразів

$$(D_{a+}^{\alpha} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha}} dt, \quad (4)$$

$$(D_{b-}^{\alpha} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_x^b \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha}} dt \quad (5)$$

називається дробовою похідною порядку $\alpha, 0 < \alpha < 1$ відповідно ліво-сторонньою та правосторонньою.

Перейдемо до дробових похідних порядків $\alpha \geq 1$

$$\alpha = [\alpha] + \{\alpha\},$$

де $[\alpha]$ — ціла частина числа α і $\{\alpha\}$ — дробова частина числа α .

Якщо α — ціле число, то під дробовою похідною порядку α будемо розуміти звичайне диференціювання:

$$D_{a+}^{\alpha} = \left(\frac{d}{dx}\right)^{\alpha}, D_{b-}^{\alpha} = \left(-\frac{d}{dx}\right)^{\alpha}, \alpha = 1, 2, 3... \quad (6)$$

Якщо ж α — не ціле, то правильно ввести за формулами:

$$D_{a+}^{\alpha} f = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}} dt, n = [\alpha] + 1, \quad (7)$$

$$D_{b-}^{\alpha} f = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_x^b \frac{f(t)}{(t-x)^{\alpha-n+1}} dt, n = [\alpha] + 1. \quad (8)$$

Наступна теорема дає достатні умови для існування дробових похідних будь-якого порядку $\alpha, \alpha > 0$ [7].

Теорема. Нехай $\alpha > 0$ та функція $f(x)$ має абсолютно неперервну похідну порядку $n, n = [\alpha] + 1$. Тоді $D_{a+}^{\alpha} f$ існує майже скрізь і може бути представлена у вигляді

$$D_{a+}^{\alpha} f = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(1+k-\alpha)} (x-a)^{k-\alpha} + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x \frac{f^{(n)}(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}} dt. \quad (9)$$

Нехай $f \in W^r[0,1]$. Гопенгауз довів [2], що для апроксимації без обмежень для всіх $r \in \mathbb{N}$ знайдеться $p_n \in \Pi_n$ такий, що оцінка

$$|f(x) - p_n(x)| \leq c \cdot \frac{1}{n^2} (\sqrt{x(1-x)})^r, x \in [0,1] \quad (10)$$

є вірною.

Для монотонного наближення при $r > 2, r \in \mathbb{N}$, доведено, що оцінка (10) є невірною ([4]). В роботах [8, 10] побудовано контрприклад, який показує, що результат не може бути поширеним і на клас $W^r[0,1]$ з $r \in (2,3) \cup (3,4)$.

Для опуклого наближення при $r > 2, r \in \mathbb{N}$ доведено, що оцінка (10) також є невірною ([5]). В роботах [6, 9] побудовано контрприклад, який показує, що результат не може бути поширеним на клас $W^r[0,1]$ при $r \in (2,3) \cup (3,4)$.

Основним результатом цієї роботи є теорема, яка узагальнює результат роботи [9] на класи $W^r[0,1]$ при $r \in (3;4)$. Також ця теорема є аналогом теореми 2.3 в роботі [11].

Основний результат.

Теорема. Нехай $r \in (3,4)$. Тоді для кожного n існує функція $F = F_{r,n} \in W^r[0,1] \cap \Delta^2$ така, що для кожного полінома $p_n \in \Pi_n \cap \Delta^2$ і для будь-якої додатної на $(0;1)$ функції ψ , такої, що $\lim_{x \rightarrow 0} \psi(x) = 0$ і

$\lim_{x \rightarrow 1} \psi(x) = 0$ справедлива одна з таких властивостей:

або
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|F(x) - p_n(x)|}{\varphi^r(x)\psi(x)} = +\infty, \tag{11}$$

або
$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|F(x) - p_n(x)|}{\varphi^r(x)\psi(x)} = +\infty, \tag{12}$$

де $\varphi(x) = \sqrt{x(1-x)}$.

Доведення. Нехай $r \in (3,4)$ і $m = [r] + 1 = 4$. Розглянемо функцію:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{(b-x)^4}{4!} + b^4(x+7) + \frac{b^4}{48}(1+x)^{-2b^{-1}+4} + \frac{b^4}{4!}(1-x)^{b^{-1}+4}, & 0 \leq x \leq b, \\ b^4(x+7) + \frac{b^4}{48}(1+x)^{-2b^{-1}+4} + \frac{b^4}{4!}(1-x)^{b^{-1}+4}, & b < x \leq 1, \end{cases}$$

де $b = \frac{1}{468n^2}$.

Легко бачити, що

$$f(0) > 0, f(1) \leq \frac{45b^4}{4}, f'(0) > -\frac{3b^3}{8}, f'(b) > -\frac{b^3}{24}(e^{-2} + e^{-1}),$$

$$f(b) > 7b^4, f''(x) > 0, x \in [0,1].$$

Таким чином $f \in W^m[0,1] \cap \Delta^2$.

Далі розглянемо функцію $F(x) = x^4 \cdot f(x)$.

Доведемо, що $F \in W^r[0,1] \cap \Delta^2$. Спочатку покажемо, що $F \in \Delta^2$.

Нехай $x \in [b,1]$. Так як $f'(0) < 0, f'(b) < 0$ і $f'(1) > 0$, то $\exists x_0 \in (b,1): f'(x_0) = 0$.

Тоді точка $x = x_0$ є точкою мінімуму функції $f(x)$.

Зауважимо, що $\forall x \in [0,1]: f(x) > b^4$.

Так як $\forall \varepsilon > 0 f'(n^\varepsilon b) > 0, f'(x)$ зростає на $[0,1]$, то достатньо розглянути $x \in (b, n^\varepsilon b]$. Враховуючи те, що $f''(x)$ спадає на $[0,1]$, маємо оцінку

$$\begin{aligned} F''(x) &= 12x^2 f(x) + 8x^3 f'(x) + x^4 f''(x) \geq x^2 \left(x^2 f''(n^\varepsilon b) + 8x f'(b) + 12f(n^\varepsilon b) \right) \geq \\ &\geq x^2 \left(x^2 \left(\frac{b^2}{12} e^{-2n^\varepsilon} + \frac{b^2}{24} e^{-n^\varepsilon} \right) + 8x \left(b^4 - \frac{b^3}{24} (e^{-2} + e^{-1}) \right) + 12b^4 \right) \geq \\ &\geq b^6 \left(\frac{e^{-2n^\varepsilon} + e^{-n^\varepsilon}}{24} + 8bn^\varepsilon - \frac{e^{-2} + e^{-1}}{3} n^\varepsilon + 12 \right). \end{aligned}$$

$$\text{Нехай } \varepsilon \rightarrow 0, \text{ тоді } F''(x) \geq b^6 \left(\frac{-7(e^{-2} + e^{-1})}{24} + 8b + 12 \right) > 0$$

Нехай $x \in [0,b]$. Тоді

$$\begin{aligned} F''(x) &= x^2 \left(8x f'(x) + 12f(x) + x^2 f''(x) \right) \geq x^2 \left(8x f'(0) + 12f(x) + x^2 f''(x) \right) \geq \\ &\geq x^2 \left(-8x \frac{3b^3}{8} + 12f(x) + x^2 f''(x) \right) \geq x^2 \left(-3xb^3 + 12f(b) + x^2 f''(x) \right) \geq \\ &\geq x^2 \left(-3b^4 + 7b^4 + x^2 f''(x) \right) = x^2 \left(4b^4 + x^2 f''(x) \right) > 0. \end{aligned}$$

Ми довели, що $\forall x \in [0,1]: F''(x) \geq 0$. Остання нерівність спричиняє $F \in \Delta^2$.

За теоремою 2.3 в роботі [7] маємо:

$$\begin{aligned} D_{0+}^r F(x) &= \sum_{k=0}^{m-1} \frac{F^{(k)}(0)}{\Gamma(1+k-r)} x^{k-r} + \frac{1}{\Gamma(m-r)} \int_0^x \frac{F^{(m)}(t)}{(x-t)^{r-m+1}} dt = \\ &= \sum_{k=0}^3 \frac{F^{(k)}(0)}{\Gamma(1+k-r)} x^{k-r} + \frac{1}{\Gamma(4-r)} \int_0^x \frac{F^{(4)}(t)}{(x-t)^{r-3}} dt, \end{aligned}$$

майже скрізь на $[0,1]$. Так як $F^{(k)}(0) = 0$ при $k = 0,1,2,3$, то

$$D_{0+}^r F(x) = \frac{1}{\Gamma(4-r)} \int_0^x \frac{F^{(4)}(t)}{(x-t)^{r-3}} dt \text{ майже скрізь на } [0,1].$$

Очевидно, що $\exists c > 0, c \in \mathbb{R}$ така, що $\forall x \in [0,1]: |F^{(4)}(x)| \leq c$. Тоді

$$|D_{0+}^r F(x)| = \frac{c}{\Gamma(4-r)} \int_0^x \frac{dt}{(x-t)^{r-3}} = \frac{c}{\Gamma(4-r)} \frac{x^{4-r}}{4-r} \leq \frac{c}{(4-r)\Gamma(4-r)}.$$

Таким чином, $D_{0+}^r F(x)$ існує майже скрізь на $[0,1]$. Очевидно, що

$$D_{0+}^{r-1} F(x) = \frac{1}{\Gamma(3-r)} \int_0^x \frac{F^{(3)}(t)}{(x-t)^{r-3}} dt$$

буде абсолютно неперервною. Таким чином, $F \in W^r[0,1] \cap \Delta^2$.

Нехай існує многочлен q_n , який є опуклим вниз і для якого умова (11) не виконується.

Тоді, для деякої сталої B маємо:

$$|F(x) - q_n(x)| \leq B\varphi^r(x)\psi(x) \leq Bx^{r/2}, 0 \leq x \leq b.$$

Звідси випливає, що $q_n(0) = F(0) = 0$ і $q'_n(0) = F'(0) = 0$.

Так як $q''_n(x) \geq 0, x \in [0,1]$, то $q'_n(x)$ зростає і умова $q'_n(0) = 0$ зумовлює $q'_n(x) \geq 0, x \in [0,1]$.

Тоді $q_n(x)$ зростає на $[0,1]$ і $q_n(x) \geq 0, x \in [0,1]$.

Тоді многочлен q_n має вигляд $q_n(x) = x^2 \cdot h_{n_1}(x)$, де h_{n_1} многочлен степеня $\leq n_1, n_1 \leq n$.

Розглянемо многочлен $\tilde{q}_n(x) = q_n(x) + f'(0)x + f(0)$.

Доведемо, що умова $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|f(x) - \tilde{q}_n(x)|}{\varphi^r(x)} = +\infty$ не виконується. (13)

Розкладемо функцію $f(x)$ за формулою Тейлора:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + o(x^3), \quad x \in [0;b].$$

Тоді

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|f(x) - \tilde{q}_n(x)|}{\varphi^r(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left| f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{6}x^3 + o(x^3) - \tilde{q}_n(x) \right|}{x^{\frac{r}{2}}} =$$

$$\begin{aligned}
&= \overline{\lim}_{x \rightarrow 0} \left| \frac{\frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{6}x^3 + o(x^3) - q_n(x)}{\frac{r}{x^2}} \right| = \\
&= \overline{\lim}_{x \rightarrow 0} \left| \left(\frac{f''(0)}{2} + \frac{f'''(0)}{6}x + o(x) - h_{n_1}(x) \right) x^{2-r/2} \right| = 0.
\end{aligned}$$

Так як умова (13) не виконується, то $\tilde{q}_n(0) = f(0)$, $\tilde{q}'_n(0) = f'(0)$.

За нерівністю Маркова маємо:

$$\frac{b^3}{18} < \frac{3b^3}{8} + \frac{b^4}{24} = |f'(0)| = |\tilde{q}'_n(0)| \leq 2n^2 \|\tilde{q}_n\|$$

За побудовою многочлена $\tilde{q}_n(x)$ бачимо, що він має одну точку мінімуму $x_0 \in (0,1)$. Тоді $\|\tilde{q}_n\| = \max\{|\tilde{q}_n(0)|, |\tilde{q}_n(1)|, |\tilde{q}_n(x_0)|\}$.

Нехай $\|\tilde{q}_n\| = \tilde{q}_n(1)$.

Тоді

$$\frac{b^3}{18} \leq 2n^2 q_n(1) \Rightarrow q_n(1) > \frac{b^3}{36n^2}. \quad (14)$$

З іншого боку,

$$\begin{aligned}
f(1) &\leq \frac{45b^4}{4} = \frac{45b^3 \cdot b \cdot 36n^2}{36n^2 \cdot 4} = \frac{b^3}{36n^2} \cdot \frac{45bn^2 \cdot 36}{4} = \frac{b^3}{36n^2} \cdot \frac{45 \cdot \frac{1}{468n^2} n^2 \cdot 36}{4} = \\
&= \frac{b^3}{36n^2} \cdot \frac{45 \cdot 36}{4 \cdot 468} = \frac{b^3}{36n^2} \cdot \frac{45 \cdot 9}{468} = \frac{b^3}{36n^2} \cdot \frac{405}{468} \leq \frac{b^3}{36n^2}.
\end{aligned} \quad (15)$$

З нерівностей (14) і (15) маємо, що $f(1) \neq \tilde{q}_n(1)$, а саме $f(1) < \tilde{q}_n(1)$.

Далі розглянемо: $\tilde{q}_n(1) = q_n(1) + f'(0) + f(0)$.

Припустимо, що $q_n(1) = f(1)$.

Тоді

$$\begin{aligned}
\tilde{q}_n(1) &= f(1) + f'(0) + f(0) > f(1) \Leftrightarrow f'(0) + f(0) > 0 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow f(0) > -f'(0) \Leftrightarrow \frac{85}{12}b^4 > \frac{3b^3}{8} + \frac{b^4}{24} \Leftrightarrow \frac{3b^3}{8} < \frac{169}{12}b^4 \\
&\Rightarrow \text{маємо суперечність.}
\end{aligned}$$

Якщо $\|\tilde{q}_n(x)\| = \tilde{q}_n(0)$, то маємо $\tilde{q}_n(1) \leq \tilde{q}_n(0) = f(0) < f(1)$ і також отримуємо, що $f(1) \neq \tilde{q}_n(1)$. Ми припускаємо, що $\tilde{q}_n(1) > 0$, бо в протилежному випадку твердження $f(1) \neq \tilde{q}_n(1)$ очевидно.

Насправді, $\|\tilde{q}_n\| \neq \tilde{q}_n(0)$, так як тоді:

$$13b^4 = \frac{b^3}{18n^2} < \tilde{q}_n(0) = f(0) = \frac{341}{48}b^4 \Rightarrow \text{маємо суперечність.}$$

Випадок $\|\tilde{q}_n\| = |\tilde{q}_n(x_0)|$ розглядається аналогічно.

Таким чином $q_n(1) \neq f(1) = F(1)$.

Теорема доведена.

Висновки. В роботі було побудовано контрприклад, який показує, що оцінка (1) не може бути поширена на клас функцій $f \in W^r[0,1] \cap \Delta^2, r \in (3;4)$.

Список використаних джерел:

1. Теляковський С. А. Две теоремы о приближении функций алгебраическими полиномами / С. А. Теляковський // *Мат. сб.* — 1966. — Вип. 79. — С. 252–265.
2. Gopengauz A. I. Pointwise estimates of Hermitian interpolation / A. I. Gopengauz. — 1994. — Vol. 77.
3. DeVore R. A. Pointwise estimates for monotone polynomial approximation / R. A. DeVore, X. M. Yu // *Constr. Approx.* — 1985. — № 1. — P. 323–331.
4. Gonska H. H. Interpolatory pointwise estimates for polynomial approximations / H. H. Gonska, D. Leviatan, I. A. Shevchuk, H. -J. Wenz // *Constr. Approx.* — 2000. — № 16. — С. 603–629.
5. Петрова Т. О. Контрприклад у інтерполяційному опуклому наближенні / Т. О. Петрова // *Праці Інституту математики НАН України. Математика та її застосування. Теорія наближення функцій.* — 2005. — Вип. 35. — С. 107–112.
6. Петрова Т. О. Один контрприклад для наближення функцій, що мають дробову похідну / Т. О. Петрова // *Вісник Київського університету. Фізико-математичні науки.* — 2006. — № 4. — С. 113–118.
7. Samko S. G. Fractional integrals and derivatives: theory and applications / S. G. Samko, A. A. Kilbas, O. I. Marichev. — 1987.
8. Петрова Т. О. Про поточкові інтерполяційні оцінки монотонного наближення функцій, що мають дробову похідну / Т. О. Петрова // *Вісник Київського університету. Математика. Механіка.* — 2003. — № 9-10. — P. 125–127.
9. Петрова Т. О. Про поточкові інтерполяційні оцінки опуклого наближення функцій, що мають дробову похідну довільного порядку, $r \in (3,4)$ / Т. О. Петрова // *Вісник Київського університету. Математика. Механіка.* — 2017. — № 2 (38). — С. 9–10.
10. Петрова Т. О. Про поточкові інтерполяційні оцінки монотонного наближення функцій, що мають дробову похідну / Т. О. Петрова // *Вісник Київського університету. Математика. Механіка.* — 2002. — № 7-8. — С. 125–127.
11. Kopotun K. A. Interpolatory estimates for convex piecewise polynomial approximation / K. A. Kopotun, I. A. Shevchuk // *Journal of Mathematical Analysis and Applications.* — 2019. — № 474. — P. 467–479.

GENERALIZATION OF POINT INTERPOLATION ASSESSMENTS OF THE PROJECT APPROXIMATION OF FUNCTIONS, WHAT HAVE A FRACTIONAL DERIVATIVE

We discuss whether or not it is possible to have interpolatory estimates in the approximation of a function of Sobolev's space by polynomials. The problem of positive approximation is to estimate the pointwise degree of approximation of a function of r times continuously differentiable and positive functions on $[0, 1]$. Estimates of the form (1) for positive approximation are known ([1, 2]). The problem of monotone approximation is that of estimating the degree of approximation of a monotone nondecreasing function by monotone nondecreasing polynomials. Estimates of the form (1) for monotone approximation were proved in [3, 4, 8]. In [3, 4] is considered r is natural and r not equal one. In [8] is considered r is real and r more two. It was proved that for monotone approximation estimates of the form (1) are fails for r is real and r more two. The problem of convex approximation is that of estimating the degree of approximation of a convex function by convex polynomials. The problem of convex approximation is considered in ([5, 6]). In [5] is considered r is natural and r not equal one. In [6] is considered r is real and r more two. It was proved that for convex approximation estimates of the form (1) are fails for r is real and r more two. In [9] the question of approximation of function of Sobolev's space and convex by algebraic convex polynomial is considered. It is proved, that for this function, estimate (1) is not true, if r is more three and less four generally speaking. In this paper the question of approximation of function Sobolev's space and convex by algebraic convex polynomial is considered. This paper is the generalization of results papers [9] and [11]. It is proved, that for function of Sobolev's space and convex, estimate of the type (1) is not true, generally speaking. The main result is the analog of the theorem 2.3 in [11].

Key words: *approximation of function, Sobolev space, algebraic polynomial, monotone function, convex function.*

Отримано: 19.08.2019

УДК 539.3

DOI: 10.32626/2308-5878.2019-20.70-78

Ю. В. Сачук*, канд. фіз.-мат. наук,

О. В. Максимук**, д-р. фіз.-мат. наук, професор,

І. П. Саланда***, канд. техн. наук

*Східноєвропейський національний університет
імені Лесі Українки, м. Луцьк,

** Львівський національний університет імені Івана Франка, м. Львів,

***Кременецька обласна гуманітарно-педагогічна академія
імені Тараса Шевченка, м. Кременець

АНАЛІТИКО-ЧИСЛОВЕ ОБЧИСЛЕННЯ ІТЕРАЦІЙНИМИ МЕТОДАМИ ОБЛАСТЕЙ КОНТАКТУ ДЛЯ ЗАДАЧІ ПРО ЗНОШУВАННЯ ПРУЖНОЇ ПІВПЛОЩИНИ КАНОНІЧНИМИ ШТАМПАМИ

У роботі розглянуто контактні задачі про контактну взаємодію штампів канонічної форми (циліндричної, еліптичної, гіперболічної, параболічної) з пружною півплощиною із урахуванням зношування матеріалу. На основі моделі абразивного зношування отримане сингулярне інтегро-диференціальне рівняння зі змінними межами інтегрування для визначення контактного тиску, який залежить від двох параметрів та є змінним в часі. На основі методу розділення змінних задачу було зведено до розв'язування узагальненої проблеми на власні значення, зокрема пошуку власних значень та власних векторів. Також при обчисленні власних векторів було враховано форму штампа, розв'язування нескінченної системи лінійних алгебричних рівнянь.

На основі отриманих власних значень та векторів проведено побудову функціонального ряду для контактного тиску. Запропоновано ітераційний аналітико-числовий алгоритм пошуку областей контакту для задачі про зношування півплощини штампами канонічної форми, що ґрунтується на використанні екстраполяційних поліномів. Запропонований ітераційний метод полягає в модифікації розробленого методу напівпрямого пошуку областей зношування, які є змінними межами інтегрування для загального інтегро-диференціального рівняння. Розроблено програмні модулі для реалізації запропонованого підходу та проведено аналіз ефективності використання різних способів екстраполяції в різних програмних засобах.

Для фіксованих моментів часу було знайдено початкові наближення області зношування при заданій сталій силі. Чисельно встановлено оптимальну кількість початкових областей зношування для екстраполяційного пошуку наступних значень при сталих часових проміжках, так що похибкою можна знехтувати. Чи-

сельно пораховано області зношування (контакту) описаним методом для інших часових проміжках в безрозмірних величинах. Побудовано графіки контактних тиски та проведено аналіз особливостей їх розподілів для різних форм штампів.

Ключові слова: *область контакту, лінійна екстраполяція, поліноми Чебишиова, пружна півплощина, інтегро-диференціальні рівняння, зношування півплощини, розділення змінних, аналітико-числові методи, штампи канонічної форми.*

Вступ. При визначенні контактних напружень та величини зношування у взаємодіючих елементах різних механічних систем і конструкцій часто виникає необхідність враховувати низку геометричних та фізико-механічних параметрів. Складність таких задач пов'язана з тим, що область контакту (зношування) заздалегідь невідома і визначення її навіть за відомої притискаючої сили є складною нелінійною проблемою [2, 7]. Ці обставини призводять до необхідності використання геометричних та фізичних нелінійностей при формулюванні таких задач [2, 7, 8]. Тому для отримання числових значень областей зношування у різні моменти часу в подібних випадках доводиться використовувати різні наближені методи, кожен з яких, як правило, не є універсальним [1, 2, 4, 7]. Дослідження нових методів у тому числі із використанням екстраполяційних поліномів для аналітико-числового обрахунку областей зношування є важливою технічною задачею для прикладних галузей механіки [12].

Постановка контактної задачі зі зношуванням півплощини. Розглядається контактна задача про взаємодію штампів канонічної форми з пружною півплощиною із урахуванням зношування матеріалу. У пружну півплощину вдавлюється силою P жорсткий штамп з основою $f(x)$. Крім того, штамп рухається зі швидкістю V у напрямку перпендикулярному до площини рис. 1.

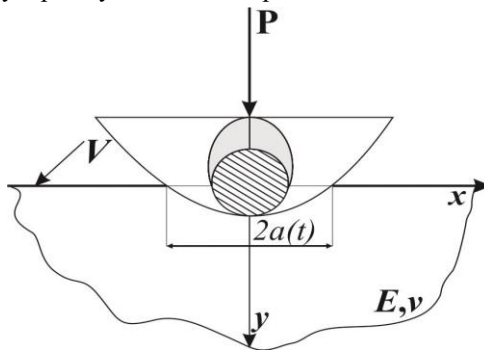


Рис. 1. Модель контактної взаємодії штампів канонічної форми з пружною півплощиною із урахуванням зношування матеріалу

Припустимо, що сила тертя зв'язана з контактним тиском законом Кулона. У випадку лінійної моделі зношування сингулярне інтегро-диференціальне рівняння (1) матиме вигляд [4]:

$$\frac{1}{\alpha} \int_{-a(t)}^{a(t)} p(\xi, t) \frac{d\xi}{\xi - x} = k_1 k_2 V \int_0^t \frac{\partial}{\partial x} p(x, t) dt - \frac{df(x)}{dx}, \quad (1)$$

де $\alpha = \frac{\pi E}{2(1-\nu^2)}$, k_1 — коефіцієнт пропорційності між роботою сили тертя та кількістю зношеного матеріалу, k_2 — коефіцієнт тертя, $p(x, t)$ — контактний тиск, $a(t)$ — область контакту.

Контактний тиск у кожен момент часу t повинен задовольняти умови:

$$P = \int_{-a(t)}^{a(t)} p(x, t) dt, \quad p(\pm a(t), t) = 0. \quad (2)$$

Варто зауважити, що область контакту $a(t)$ змінна в часі, а контактний тиск залежить від просторової та часової координати.

Для розв'язування інтегро-диференціального рівняння для штампів канонічної форми було використано та розвинуто метод розділення змінних з подальшим використанням поліномів Чебишова [4–6]. Отримана задача була зведена до узагальненої проблеми на власні значення та у зв'язку зі особливостями її механічної природи розв'язана сучасними методами факторизації матриць [10, 11].

У відповідності до обраної методики розв'язування рівняння (1) у безрозмірних величинах [6] контактний тиск шукаємо у вигляді:

$$p(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_{2k}(x) e^{-\alpha_{2k} t}. \quad (3)$$

Для однозначного визначення власних векторів (врахування форми штампа) $a_m^k \varphi_{2k}(x)$ запишемо у вигляді [4, 6]:

$$\varphi_{2k}(x) = d_k \sum_{m=0}^{\infty} a_m^k \sqrt{1-x^2} U_{2m}(x). \quad (4)$$

У результаті відповідних підстановок та математичних перетворень згідно (4) було обчислено коефіцієнти d_k шляхом розв'язування нескінченної системи лінійних алгебричних рівнянь [4] та після підстановки (4) у (3) отримуємо остаточної функції контактного тиску для кожного штампа канонічної форми.

Завдяки цьому підходу було отримано аналітичний розв'язок, що дає змогу побудувати збіжний алгоритм [5, 6] для напівпрямого

пошуку областей зношування з умови рівноваги штамп (2) для інтегро-диференціального рівняння (1) при заданій початковій силі P та беручи до уваги твердження, що сила є незмінною.

Алгоритм обчислення областей зношування. Запропонований напівпрямий метод для обчислення змінних областей зношування реалізований в роботах [5, 6], однак при значному збільшенні часу фрикційної взаємодії обчислення кожної наступної області зношування є складною обчислювальною задачею.

Обчислювальний алгоритм на основі екстраполяційних поліномів умовно можна розділити на етапи. На першому етапі (аналітичному наближенні) знаходження області контакту в довільний момент часу такий: у момент часу $t_0 = 0$ задача розв'язана іншим способом [5, 6] (для сили P знайдено a_0); у наступний момент часу $t = t_{i-1}$ приймаємо, що $a(t_{i-1}) = a_{i-1}$, проводимо всю процедуру знаходження контактної тиску (3) за схемою, описаною вище, підставляємо контактний тиск в умову рівноваги (2) і порівнюємо знайдену силу P_{i-1} з P , при $P_{i-1} > P$ зменшуємо a_{i-1} і навпаки. Цей процес повторюємо для кожного наступного $t_{i-1} > t_{i-2}$, де $t_{i-1} = t_{i-2} + \Delta t$, при $i = 2, 3, \dots$

На другому етапі пошуку a_i (для зручності позначимо a_i із верхнім індексом 2 a_i^2) маючи відповідні пари значень $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{i-1}$ із використанням лінійної екстраполяції [3, 9, 13] наближено обчислюється a_i^2 при заданому t_i із використанням значень отриманих на попередніх кроках та виконанні (2). Для пошуку наступної області зношування a_{i+1}^2 , що отримується в результаті роботи фрикційної пари в момент часу $t_{i+1} = t_i + \Delta t$ беремо ряд $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{i-1}$ і додаємо екстраполяційне значення a_i^2 , тобто $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, a_i^2$ в моменти часу $t_1, t_2, t_3, \dots, t_{i-1}, t_i$ і будемо відповідно екстраполяційну функцію. В загальному випадку для пошуку a_{i+k}^2 при t_{i+k} ітераційно будується екстраполяційний поліном на основі отриманих значень на всіх етапах роботи фрикційної пари: $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, a_i^2, a_{i+1}^2, a_{i+2}^2, \dots, a_{i+k}^2$ у фіксовані моменти часу $t_1, t_2, t_3, \dots, t_{i-1}, t_i, t_{i+1}, \dots, t_{i+k}$.

Ключовими факторами при екстраполяційному обчисленні областей зношування a_i^2 , що суттєво впливає на похибку обчислень є вибір кроку розбиття по часу Δt для обчислення $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{i-1}$ що задається при обернено-аналітичному пошуку.

Числові результати та аналіз особливостей розрахунку областей зношування. Для визначеності та ітераційного визначення областей зношування запишемо вигляд $f_k(x)$ для всіх штампів:

- a) параболічної форми $f_1(x) = -\frac{x^2}{2R}$, де R радіус кривизни в точці $x = 0$;
- b) циліндричної форми $f_2(x) = -R + \sqrt{R^2 - x^2}$, де R — радіус циліндра;
- c) еліптичної форми $f_3(x) = -b_1 + \frac{b_1}{a_1} \sqrt{a_1^2 - x^2}$, де a_1, b_1 — велика та мала півосі еліпса, для розрахунків $a_1 = R, b_1 = R(1 \pm \varepsilon)$;
- d) гіперболічної форми $f_4(x) = b_1 - \frac{b_1}{a_1} \sqrt{a_1^2 + x^2}$ де a_1, b_1 — величини дійсної та уявної півосей гіперболи, для розрахунків $a_1 = R, b_1 = R(1 \pm \varepsilon)$.

Для подальших міркувань та зручності числових розрахунків введемо безрозмірні величини: $p(x, t) = p'(x', t')\alpha$, $f(x) = f'(x')a$, $x' = \frac{x}{a}$, $t = t' a / (\alpha k_1 k_2 V)$, надалі штрихи опускаємо.

Для автоматизованого пошуку областей зношування на основі побудови екстраполяційних поліномів із використанням повторних ітерацій та графічного відображення графіків контактного тиску було використано систему Matlab. Можливість побудови таких зображень забезпечує функція *interp1(x, v, xq, 'linear', 'extrap')*, де вхідні параметри x — масив часових проміжків, v — це значення областей зношування у відповідні моменти часу, параметр «*linear*» — задає тип екстраполяційного полінома [13]. Варто відмітити, що найбільш точні наближення отримуються із використанням лінійної екстраполяції [1, 9].

На рис. 2 показано зміну контактного часу для гіперболічного штамп при заданій сталій силі $P = 0.1496$, $\varepsilon = 0.1$ та відповідній їй початковій області контакту $\frac{a_0}{R} = 0.342$, у фіксовані моменти часу $t_1 = 0.095$,

$t_2 = 0.19$, $t_3 = 0.285$, $t_4 = 0.38$, $t_5 = 0.475$, $t_6 = 0.57$, $t_7 = 0.665$, $t_8 = 0.76$, $t_9 = 0.855$, було знайдено наступні області контакту за алгоритмом описаним вище

$$\frac{a_1}{R} = 0.3865, \quad \frac{a_2}{R} = 0.4252, \quad \frac{a_3}{R} = 0.4655, \quad \frac{a_4^2}{R} = 0.5065,$$

$$\frac{a_5^2}{R} = 0.5475, \quad \frac{a_6^2}{R} = 0.5885, \quad \frac{a_7^2}{R} = 0.6295, \quad \frac{a_8^2}{R} = 0.6705, \quad \frac{a_9^2}{R} = 0.7115.$$

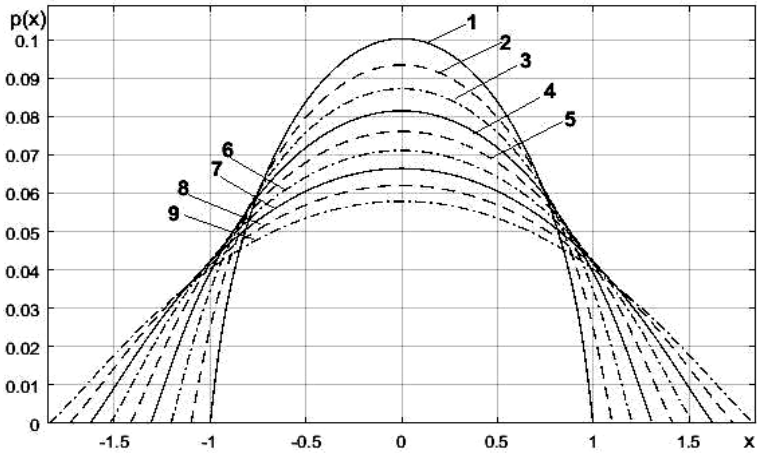


Рис. 2. Контактний тиск для штампa гіперболічної форми

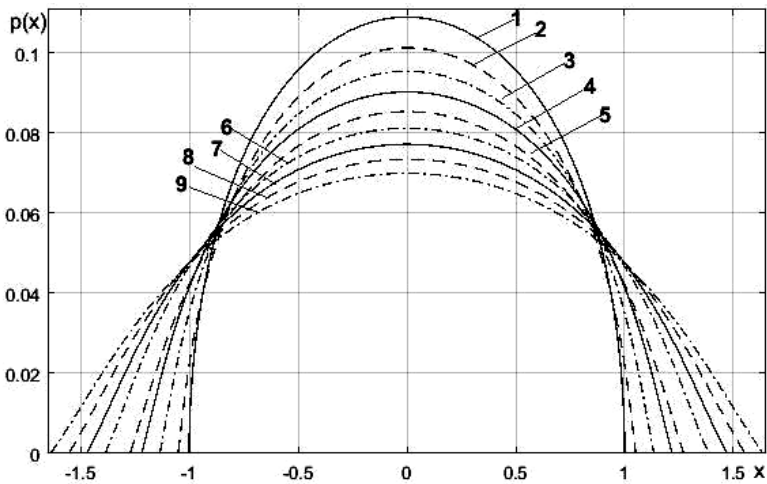


Рис. 3. Контактний тиск для штампa циліндричної форми

На рис.3 показано зміну контактного часу для циліндричного штампa при заданій сталій силі $P = 0.1496$ та відповідній їй початковій області контакту $\frac{a_0}{R} = 0.2895$, у фіксовані моменти часу $t_1 = 0.095$, $t_2 = 0.19$, $t_3 = 0.285$, $t_4 = 0.38$, $t_5 = 0.475$, $t_6 = 0.57$, $t_7 = 0.665$, $t_8 = 0.76$, $t_9 = 0.855$, було знайдено наступні області контакту за алгоритмом описаним вище $\frac{a_1}{R} = 0.3215$, $\frac{a_2}{R} = 0.3492$,

$$\frac{a_3}{R} = 0.377, \quad \frac{a_4^2}{R} = 0.4048, \quad \frac{a_5^2}{R} = 0.4326, \quad \frac{a_6^2}{R} = 0.4604, \quad \frac{a_7^2}{R} = 0.4882,$$

$$\frac{a_8^2}{R} = 0.5160, \quad \frac{a_9^2}{R} = 0.5438.$$

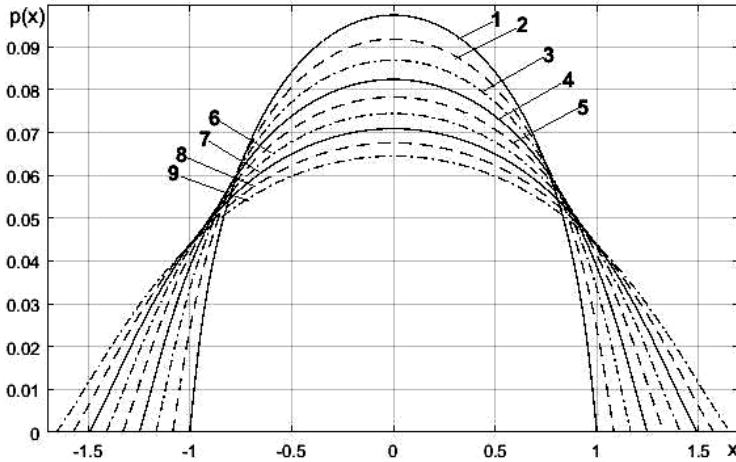


Рис. 4. Контактний тиск для штамп еліптичної форми

На рис. 4 показано зміну контактної області для еліптичного штамп при заданій сталій силі $P = 0.1496$ $\varepsilon = -0.1$ та відповідній їй початковій області контакту $\frac{a_0}{R} = 0.3189$, у фіксовані моменти часу

$$t_1 = 0.095, \quad t_2 = 0.19, \quad t_3 = 0.285, \quad t_4 = 0.38, \quad t_5 = 0.475, \quad t_6 = 0.57, \\ t_7 = 0.665, \quad t_8 = 0.76, \quad t_9 = 0.855, \text{ було знайдено наступні області кон-}$$

такту за алгоритмом описаним вище $\frac{a_1}{R} = 0.355, \quad \frac{a_2}{R} = 0.385,$

$$\frac{a_3}{R} = 0.414, \quad \frac{a_4^2}{R} = 0.4430, \quad \frac{a_5^2}{R} = 0.4720, \quad \frac{a_6^2}{R} = 0.5010, \quad \frac{a_7^2}{R} = 0.5300,$$

$$\frac{a_8^2}{R} = 0.5590, \quad \frac{a_9^2}{R} = 0.5880.$$

Висновок. Для контактної задачі про задача про взаємодію жорсткого штамп із пружною півплощиною зі зношенням матеріалу, котра зводиться до розв'язування інтегро-диференціального рівняння зі змінними межами запропоновано модифікований ітераційний метод пошуку областей контакту на основі екстраполяційних поліномів.

Розвинута методика ітераційного пошуку областей зношування дозволяє визначити контактний тиск в будь-який момент часу і тим самим визначити параметри зношування в кожній точці області контакту при заданні конкретних фізико-механічних параметрів фрикційних пар. Для наочного представлення числових результатів побудовано графіки контактних тисків для різних канонічних штампів при однаковій початковій силі в різні часові моменти і виявлено особливі ефекти взаємодії тіл, зокрема виявлено ефект впливу форми штампа на процес зношування при значному збільшенні часу фрикційної взаємодії контактної пари.

Список використаних джерел:

1. Бондаренко Л. Н. Сравнение экстраполяционных методов обработки результатов измерений / Л. Н. Бондаренко, Д. И. Нефедьев // Измерение. Мониторинг. Управление. Контроль. — 2013. — № 2 (4). — С. 3–9.
2. Дмитриева К. В. Контактная задача для штампа на упругом клине со свободными границами / К. В. Дмитриева // Вестник БНТУ. — 2010. — № 4. — С. 24–29
3. Назарова И. А. Экстраполяционные блочные одношаговые численные методы решения жестких задач Коши / И. А. Назарова // Искусственный интеллект. — 2010. — № 3. — С. 116–126
4. Пелех Б. Л. Контактные задачи для слоистых элементов конструкций и тел с покрытиями / Б. Л. Пелех, А. В. Максимук, И. М. Коровайчук. — Киев : Наук. думка, 1988. — 280 с.
5. Сачук Ю. В. Узагальнена проблема на власні значення в задачах контактної взаємодії з урахуванням зношування матеріалу / Ю. В. Сачук // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. — 2015. — № 21. — С. 205–212.
6. Сачук Ю. В. Контактна задача про зношування пружної півплощини штампами канонічної форми / Ю. В. Сачук, О. В. Максимук // Вісник Тернопільського національного університету. — 2015. — № 2. — С. 70–80.
7. Чебаков М. И. Контактная задача для упругого параллелепипеда при наличии трения и износа / М. И. Чебаков, С. А. Данильченко, А. А. Ляпин // Естественные науки. — 2017. — № 2. — С. 32–37.
8. Чернець М. В. Трибоконтактні задачі для циліндричних з'єднань з технологічною некруглістю / М. В. Чернець. — Люблін : Вид. Люблінської політехніки, 2013. — 273 с.
9. Шарый С. П. Курс вычислительных методов / С. П. Шарый. — Новосибирск : Институт вычислительных технологий СО РАН, 2014. — 501 с.
10. Golpar-Raboky E. A. New Approach for Computing WZ Factorization / E. A. Golpar-Raboky // Applications and Applied Mathematics: An International Journal (AAM). — 2012. — Vol. 7. — No. 2. — P. 571–584.
11. Golpar-Raboky E. A. WZ-factorization via Abaffy-Broyden-Spedicato algorithms / E. A. Golpar-Raboky // Bulletin of the Iranian Mathematical Society. — 2014. — Vol. 40. — No. 2. — P. 399–411.
12. Rerthelsen R. Computational modelling of wear — application to structured surfaces of elastoplastic tools / R. Rerthelsen, H. Wilbuer, R. Holtermann, A. Menzel // GAMM-Mitt. — 2016. — Vol. 39. — №2. — P. 210–228.

13. Todd Young, Mohlenkamp Introduction to Numerical Methods and Matlab Programming for Engineers / Todd Young, J. Martin. — Ohio : Department of Mathematics Ohio University Athens, 2017. — 173 p.

ANALYTICAL AND NUMERICAL CALCULATIONS BY ITERATION METHOD FOR CONTACT AREA FOR THE PROBLEM OF WEARING THE ELASTIC AREA BY CANONICAL STAMPS

The contact problems of contact interaction of canons of canonical forms (cylindrical, elliptical, hyperbolic, parabolic) with an elastic half-plane are considered in the work taking into account wear of the material. On the basis of the model of abrasive wear, a singular integro-differential equation with variable integration limits is obtained to determine the contact pressure, which depends on two parameters and is variable over time. Based on the method of splitting variables, the task was solved to solve a generalized problem on eigenvalues, including finding eigenvalues and eigenvectors. Also, when calculating the eigenvectors, the form of the stamp, the solution of an infinite system of linear algebraic equations, was taken into account.

Based on the eigenvalues and vectors obtained, a functional series for contact pressure was constructed. An iterative analytic-numerical algorithm for finding contact areas is proposed for the problem of half-plane wear by canonical-shaped stamps, based on the use of extrapolation polynomials. The proposed iterative method is to modify the developed method of semi-direct search for wear regions, which are variable integration boundaries for the general integro-differential equation. Software modules have been developed to implement the proposed approach and an analysis of the effectiveness of using different methods of extrapolation in different software tools.

For fixed moments, initial approximations of the wear region were found at a given constant force. The optimal number of initial wear areas is numerically established to extrapolate the following values at constant time intervals, so that the error can be neglected. The wear area (contact) of the described method for other time intervals in dimensionless quantities is numerically calculated. The graphs of contact pressures were constructed and the peculiarities of their distributions for different forms of dies were analyzed.

Key words: *contact area, linear extrapolation, Chebyshev polynomials, elastic half-plane, integro-differential equations, half-plane wear, separation of variables, analytical-numerical methods, canonical stamps.*

Отримано: 22.08.2019

УДК 518.25

DOI: 10.32626/2308-5878.2019-20.79-91

Л. М. Семчишин, канд. фіз.-мат. наук,

О. Б. Павелчак-Данилюк, канд. тех. наук

Чортківський навчально-науковий інститут підприємництва і бізнесу
Тернопільський національний економічний університет, м. Чортків

РОЗВ'ЯЗАННЯ БЛОЧНОЇ СИСТЕМИ З ЧИСЛОВИМИ ЕЛЕМЕНТАМИ В СЕРЕДОВИЩІ MATLAB

У роботі запропоновано новий підхід до блочної системи лінійних алгебраїчних рівнянь із числовими елементами. Розглянено метод розв'язування систем із деякими найхарактернішими способами заповнення. Розв'язок системи знаходимо у вигляді відношення двох поліномів, а невідомі обчислюємо методом невизначених коефіцієнтів. Згрупувавши члени при однакових степенях і для визначення невідомих коефіцієнтів отримано систему, для розв'язування якої використано алгоритм схеми розрізання. Для цього матрицю системи розділено на блоки. Розв'язування отриманих систем вимагало деяких проміжних матричних операцій. Таким чином при повній реалізації алгоритму схеми розрізання для системи виконано ряд арифметичних операцій. Показано високу точність запропонованого методу розв'язання.

Для розв'язання блочної системи лінійних алгебраїчних рівнянь з числовими елементами в середовищі MatLab написана і протестована функція ESSELS. Ця функція реалізує алгоритм розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь методом відсічених систем. Цей алгоритм дозволяє розв'язати системи рівнянь як у випадку симетричного заповнення (кількість піддіагоналей дорівнює кількості наддіагоналей), так і тоді, коли кількість піддіагоналей та наддіагоналей матриці різна. Для порівняння із штатними програмами лінійної алгебри пакета MatLab написано невелику програму. Вона реалізує процедуру розв'язання блочної системи лінійних алгебраїчних рівнянь з числовими елементами засобами MatLab. Проведено результати порівняння в таблиці. Запропоновані алгоритми для даної тестової системи середньої розмірності мають суттєві переваги у порівнянні із стандартними функціями пакету MatLab. Протестовано алгоритм розв'язування системи лінійних алгебраїчних рівнянь з числовими елементами в середовищі MatLab. У роботі показано ефективність запропонованого алгоритму. Теоретичну та методологічну основу дослідження складають методи оптимізації та математичного моделювання.

Запропонований алгоритм може ефективно використовуватися в системах комп'ютерної алгебри та для аналітично-числового розв'язування інженерних та прикладних задач.

Ключові слова: *блочна система, числові елементи, відношення двох поліномів, метод невизначених коефіцієнтів, складність алгоритму, тестування алгоритму.*

Вступ. Одним із актуальних задач обчислювальної математики є розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР). Обчислювальна математика вивчає чисельні методи розв'язування різних математичних задач, тобто методи, які ґрунтуються на побудові скінченної послідовності дій над скінченною множиною чисел. Методи обчислення є базовим інструментом математичного моделювання і важливою частиною програмного забезпечення для комп'ютерів усіх поколінь. За умови використання таких обчислювальних методів застосовують математичне моделювання до розв'язку математичної задачі. Тоді розв'язок одержується у вигляді числового результату.

Постановка проблеми. Сьогодні існує й успішно розвивається декілька напрямків і концепцій щодо виконання символічних перетворень. Із комп'ютерних систем універсального характеру широкого розповсюдження набули REDUCE, muMATH, SCRATCHPAD, MATHEMATICA, MAPLE, MatLab, DERIVE, MatCad. З більшим чи меншим успіхом їх можна застосувати для різних задач комп'ютерної алгебри, у тому числі й розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Однак цей розділ ще не настільки високо розвинутий, як методи для блочних систем.

Зупинимося на специфіці побудови ефективних алгоритмів для розв'язання блочної системи з числовими елементами в середовищі MatLab.

Аналіз останніх публікацій. У роботі [5, с. 128–135] запропоновано розв'язання розріджених систем лінійних алгебраїчних рівнянь із блочними елементами.

Актуальність теми. Розв'язання блочних систем з числовими елементами в середовищі MatLab вимагає застосування ефективних чисельних методів.

Слід зауважити, що питання розв'язання розріджених систем лінійних рівнянь з блочними елементами розглядалися у працях [5, с. 128–135]

Однак, лише в окремих з них розглядаються питання щодо застосування методу відсічених систем в середовищі MatLab [1, 2, 4].

Мета роботи. Метою цієї роботи є дослідження розв'язування блочної системи з числовими елементами. Тестування алгоритмів розв'язання деяких типів систем лінійних алгебраїчних рівнянь з числовими елементами в середовищі MatLab.

Теоретичну та методологічну основу дослідження складають методи оптимізації та математичне моделювання.

Основна частина. Розглянемо метод розв'язування систем із деякими найхарактернішими способами заповнення.

Розглянемо систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\mathbf{Y}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) [\mathbf{E} - \mathbf{B}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)] = \mathbf{C}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m), \quad (1)$$

в якій $\mathbf{B}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$ — регулярна матриця розміру $n \times n$ рангу r , елементами якої є многочлени степеня l ($l = \overline{1, n}$) від $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$.

Кожен мінор k_i -го порядку ($i = \overline{1, m}$) матриці $\mathbf{B}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$ є поліном. Права частина рівняння є вектор

$\mathbf{C}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) = (C_1(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m), C_2(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m), \dots, C_n(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m))^T$
многочленів степеня l від $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$,

$\mathbf{Y}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) = (y_1(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m), y_2(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m), \dots, y_n(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m))^T$
— невідомий вектор.

З метою розв'язання системи (1) розглянемо алгоритм відсічених систем [4], що дозволяє звести системи лінійних алгебраїчних рівнянь з m -мірними λ -матрицями до системи з числовими елементами.

Оскільки $\mathbf{B}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$ — поліноміальна матриця, а $\mathbf{C}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$ — вектор, то їх можна подати у вигляді

$$\mathbf{B}(\lambda_1, \dots, \lambda_m) = \sum_{k_1 + \dots + k_m = 0}^l \lambda_1^{k_1} \dots \lambda_m^{k_m} \mathbf{B}_{k_1 \dots k_m}$$

та

$$\mathbf{C}(\lambda_1, \dots, \lambda_m) = \sum_{k_1 + \dots + k_m = 0}^l \lambda_1^{k_1} \dots \lambda_m^{k_m} \mathbf{C}_{k_1 \dots k_m},$$

де $\mathbf{B}_{k_1 \dots k_m}$ — матриці і $\mathbf{C}_{k_1 \dots k_m}$ — вектори.

Розв'язок системи будемо шукати у вигляді відношення двох поліномів [4]

$$\mathbf{Y}(\lambda_1, \dots, \lambda_m) = \sum_{k_1 + \dots + k_m = 0}^l \lambda_1^{k_1} \dots \lambda_m^{k_m} X_{k_1 k_2 \dots k_m} / \sum_{k_1 + \dots + k_m = 0}^l \lambda_1^{k_1} \dots \lambda_m^{k_m} Z_{k_1 k_2 \dots k_m}, \quad (2)$$

де $X_{k_1 k_2 \dots k_m}$, $Z_{k_1 k_2 \dots k_m}$ — скалярні величини.

Невідомі $X_{k_1 k_2 \dots k_m}$ і $Z_{k_1 k_2 \dots k_m}$ обчислимо методом невизначених коефіцієнтів. Враховуючи (2), систему (1) запишемо у вигляді

$$\begin{aligned} & \sum_{k_1 + \dots + k_m = 0}^l \lambda_1^{k_1} \dots \lambda_m^{k_m} X_{k_1 \dots k_m} \left(\mathbf{E} - \sum_{k_1 + \dots + k_m = 0}^{nl} \lambda_1^{k_1} \dots \lambda_m^{k_m} \mathbf{B}_{k_1 \dots k_m} \right) = \\ & = \sum_{k_1 + \dots + k_m = 0}^l \lambda_1^{k_1} \dots \lambda_m^{k_m} Z_{k_1 \dots k_m} \sum_{k_1 + \dots + k_m = 0}^{nl} \lambda_1^{k_1} \dots \lambda_m^{k_m} \mathbf{C}_{k_1 \dots k_m}. \end{aligned}$$

Звідси матимемо

$$\begin{aligned}
 & X_{00..0} + \sum_{k_1=1}^{nl} \lambda_1^{k_1} X_{k_1 0..0} + \dots + \sum_{k_m=1}^{nl} \lambda_m^{k_m} X_{00..0k_m} + \sum_{k_1+k_2=2}^{nl} \lambda_1^{k_1} \lambda_2^{k_2} X_{k_1 k_2 0..0} + \dots + \\
 & + \sum_{\substack{k_1+k_2+\dots+k_l=t \\ t < m}}^{nl} \lambda_1^{k_1} \lambda_2^{k_2} \dots \lambda_l^{k_l} X_{k_1 k_2 \dots k_l 0..0} + \sum_{\substack{k_s+k_r+\dots+k_p=t \\ t < m}}^{nl} \lambda_s^{k_s} \lambda_r^{k_r} \dots \lambda_p^{k_p} X_{0..0k_s k_r \dots k_p 0..0} + \dots + \\
 & + \sum_{\substack{k_{m-t}+\dots+k_m=t \\ t < m}}^l \lambda_{m-t}^{k_{m-t}} \dots \lambda_m^{k_m} \mathbf{B}_{0..0k_{m-t}k_m} + \dots + \sum_{k_1+k_2+\dots+k_m=m}^l \lambda_1^{k_1} \lambda_2^{k_2} \dots \lambda_m^{k_m} \mathbf{B}_{k_1 k_2 \dots k_m} = \\
 & = \left[Z_{00..0} + \sum_{k_1=1}^{nl} \lambda_1^{k_1} Z_{k_1 0..0} + \dots + \sum_{k_m=1}^{nl} \lambda_m^{k_m} Z_{00..0k_m} + \sum_{k_1+k_2=2}^{nl} \lambda_1^{k_1} \lambda_2^{k_2} Z_{k_1 k_2 0..0} + \right. \\
 & \left. + \sum_{\substack{k_{m-t}+\dots+k_m=t \\ t < m}}^{nl} \lambda_{m-t}^{k_{m-t}} \dots \lambda_m^{k_m} Z_{0..0k_{m-t}k_m} + \dots + \sum_{k_1+k_2+\dots+k_m=m}^{nl} \lambda_1^{k_1} \lambda_2^{k_2} \dots \lambda_m^{k_m} Z_{k_1 k_2 \dots k_m} \right] \times [\mathbf{C}_{00..0} + \\
 & \left. + \sum_{k_1=1}^l \lambda_1^{k_1} \mathbf{C}_{k_1 0..0} + \dots + \sum_{k_m=1}^l \lambda_m^{k_m} \mathbf{C}_{00..0k_m} + \dots + \sum_{k_1+k_2+\dots+k_m=m}^l \lambda_1^{k_1} \lambda_2^{k_2} \dots \lambda_m^{k_m} \mathbf{C}_{k_1 k_2 \dots k_m} \right].
 \end{aligned}$$

Якщо згрупувати члени при однакових степенях λ_i , то для визначення невідомих коефіцієнтів $X_{k_1 k_2 \dots k_m}$ і $Z_{k_1 k_2 \dots k_m}$ одержимо систему

$$\begin{aligned}
 & X_{00..0} (\mathbf{E} - \mathbf{B}_{00..0}) - Z_{00..0} \mathbf{C}_{00..0} = 0, \\
 & X_{10..0} (\mathbf{E} - \mathbf{B}_{00..0}) + X_{00..0} (\mathbf{E} - \mathbf{B}_{10..0}) - [Z_{10..0} \mathbf{C}_{00..0} + Z_{00..0} \mathbf{C}_{10..0}] = 0 \\
 & \sum_{k_1=0}^l \sum_{\substack{k_2=0 \\ k_1+k_2+\dots+k_m=nl+l}}^l \dots \sum_{k_m=0}^l \mathbf{X}_{nl+l-k_1, nl+l-k_2, \dots, nl+l-k_m} (\mathbf{E} - \mathbf{B}_{k_1 k_2 \dots k_m}) - (3) \\
 & - \sum_{k_1=0}^l \sum_{\substack{k_2=0 \\ k_1+k_2+\dots+k_m=nl+l}}^l \dots \sum_{k_m=0}^l Z_{nl+l-k_1, nl+l-k_2, \dots, nl+l-k_m} \mathbf{C}_{k_1 k_2 \dots k_m} = 0.
 \end{aligned}$$

Для розв'язування отриманої системи (3) використаємо алгоритм схеми розрізання [4]. Для цього систему (3) запишемо у спеціальному вигляді. З цією метою позначимо через \mathbf{V} матрицю, елементами якої є матриці $\mathbf{V}_{k_1 \dots k_m}$, сума індексів яких задовольняє умову

$$\sum_{i=1}^m k_i = r \quad (r = \overline{0, n}).$$

Запишемо матриці $\mathbf{B}_0, \mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \dots, \mathbf{B}_r, \dots, \mathbf{B}_l$.

Матриця \mathbf{B}_0 складається з одного елемента $\mathbf{B}_0 = (B_{00\dots 0})$.

Матриці $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2$ мають розмірність $m \times m$

$$\mathbf{B}_1 = \begin{pmatrix} B_{10\dots 0} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & B_{010\dots 0} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & B_{0\dots 01} \end{pmatrix}, \mathbf{B}_2 = \begin{pmatrix} B_{20\dots 0} & B_{110\dots 0} & B_{1010\dots 0} & \dots & B_{10\dots 01} \\ 0 & B_{020\dots 0} & B_{0110\dots 0} & \dots & B_{010\dots 01} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & B_{0\dots 02} \end{pmatrix}.$$

Матриця \mathbf{B}_3 містить m стовпців і $1 + 2 + 3 + \dots + m = (1 + m)m / 2$ рядків

$$\mathbf{B}_3 = \begin{pmatrix} B_{30\dots 0} & B_{210\dots 0} & B_{2010\dots 0} & B_{20010\dots 0} & \dots & B_{20\dots 010} & B_{20\dots 001} \\ 0 & B_{120\dots 0} & B_{1110\dots 0} & B_{11010\dots 0} & \dots & B_{110\dots 010} & B_{110\dots 001} \\ 0 & 0 & B_{1020\dots 0} & B_{10110\dots 0} & \dots & B_{1010\dots 010} & B_{1010\dots 001} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & B_{0\dots 030} & B_{0\dots 021} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & B_{0\dots 012} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & B_{0\dots 003} \end{pmatrix}.$$

Аналогічно записуємо матриці $\mathbf{B}_4, \mathbf{B}_5, \mathbf{B}_6, \dots, \mathbf{B}_l$, кожна з яких містить m стовпців, а кількість рядків у матриці \mathbf{B}_l не перевищує $(l + m)! / (l!m!)$.

Використовуючи означення тензорного добутку [6], систему (3) запишемо у вигляді

$$\mathbf{X} \otimes (\mathbf{E} - \mathbf{B}) - \mathbf{Z} \otimes \mathbf{C} = \mathbf{0} \tag{4}$$

або

$$\mathbf{X} - \mathbf{X} \otimes \mathbf{B} - \mathbf{Z} \otimes \mathbf{C} = \mathbf{0}, \tag{5}$$

де « \otimes » — знак тензорного добутку [6].

Систему (5) можна розв'язати за алгоритмом схеми розрізання [1]. Для цього достатньо матрицю системи (5) розділити на блоки

$$\begin{pmatrix} \mathbf{M}_{11} & \mathbf{M}_{12} \\ \mathbf{M}_{21} & \mathbf{M}_{22} \end{pmatrix}, \text{ де } \mathbf{M}_{11} \text{ — квадратна матриця, розміри якої не переви-}$$

щують $\frac{(nl + l + m)!}{(nl + l)!m!(n + 1)}$, а $\mathbf{M}_{12}, \mathbf{M}_{21}, \mathbf{M}_{22}$ — прямокутні матриці від-

повідних розмірів. Розглядаючи $(n + 1) \frac{(nl + m)!}{(nl)!m!} - \frac{(nl + l + m)!}{(nl + l)!m!}$ неві-

домі як параметри, отримаємо неоднорідну квадратну систему.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{M}_{11} & \mathbf{M}_{12} \\ \mathbf{M}_{21} & \mathbf{M}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{V} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{N}_1 \\ \mathbf{N}_2 \end{pmatrix}, \tag{6}$$

де $\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2$ — вектори, \mathbf{U} та \mathbf{V} — невідомі. Порядок цієї системи обмежений числом $\frac{(nl+l+m)!}{(nl+l)!m!}$, а розв'язки дають параметричне сімейство

розв'язків системи (6). Таким чином, знаходження невідомих \mathbf{U} та \mathbf{V} зводиться до розв'язування двох систем меншого порядку. Вектор \mathbf{V} визначається з системи

$$\left(\mathbf{M}_{22} - \mathbf{M}_{21} \otimes (\mathbf{M}_{11}^{-1} \otimes \mathbf{M}_{12})\right) \otimes \mathbf{V} = \mathbf{N}_2 - \mathbf{M}_{21} \otimes (\mathbf{M}_{11}^{-1} \otimes \mathbf{N}_1), \quad (7)$$

де того ж $\mathbf{M}_{11} \neq 0$. Невідомий вектор \mathbf{U} можна знайти з рівнянь

$$\mathbf{M}_{11} \otimes \mathbf{U} = \mathbf{N}_1 - \mathbf{M}_{12} \otimes \mathbf{V}.$$

Розв'язування отриманих систем (6) і (7) вимагає деяких проміжних матричних операцій [3]. Для обчислення добутку $\mathbf{M}_{11}^{-1} \otimes \mathbf{N}_1$ достатньо знайти розв'язки систем

$$\begin{bmatrix} B_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ B_1 & B_0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & B_0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} W_0^{(i)} \\ W_1^{(i)} \\ \dots \\ W_{(nl+l+m)!/(nl+l)!m!(n+1)}^{(i)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_0 \\ C_1 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (8)$$

де $i = \overline{0, nl}$. Перш за все, потрібно розв'язати систему для $i = 0$, а решта невідомих визначити за співвідношеннями

$$\begin{aligned} W_0^{(i)} &= W_1^{(i)} = \dots W_{i-1}^{(i)} = 0, \\ W_i^{(i)} &= W_0^{(0)}, \\ W_{i+1}^{(i)} &= W_1^{(0)}, \\ &\dots \\ W_{\frac{(nl+l+m)!}{(nl+l)!m!(n+1)}}^{(i)} &= W_{\frac{(nl+l+m)!}{(nl+l)!m!(n+1)}}^{(0)} - 1. \end{aligned}$$

$$W_i^{(0)} = B_0^{-1} \times \left[B_i - \sum_{j=1}^i B_j \times W_{i-j}^{(0)} \right] \quad (i = \overline{0, l}).$$

Розв'язки системи (8) можна обчислювати за формулами [1]

$$W_i^{(0)} = B_0^{-1} \times \left[B_i - \sum_{j=1}^i B_j \times W_{i-j}^{(0)} \right], \quad \left(i = l+1, \frac{(nl+l+m)!}{(nl+l)!m!(n+1)} \right). \quad (9)$$

Для знаходження всіх $W_j^{(0)} \left(j = l+1, \frac{(nl+l+m)!}{(nl+l)!m!(n+1)} \right)$ треба ви-

конати близько $n^3 m \frac{(l+m)!}{l!m!} \frac{(nl+l+m)!}{(nl+l)!m!(n+1)}$ арифметичних операцій.

Обчислення добутоків $\mathbf{M}_{21} \times (\mathbf{M}_{11}^{-1} \times \mathbf{M}_{12})$ і $\mathbf{M}_{21} \times (\mathbf{M}_{11}^{-1} \times \mathbf{N}_1)$ вимагає

виконання $n^3 \left[\frac{(nl+l+m)!}{(nl+l)!m!(n+1)} \right]^2$ арифметичних дій. Для визначення

невідомих \mathbf{V} з системи $\frac{(nl+l+m)!n}{(nl+l)!m!(n+1)}$ -го порядку треба затратити

$O \left(\frac{(nl+l+m)!}{(nl+l)!m!} \right)^\beta$ операцій. За алгоритмом відсічених систем $\beta = 3$.

Для знаходження розв'язків системи (8) насамперед треба знайти добуток $\mathbf{M}_{12} \otimes \mathbf{V}$. Для цього необхідно виконати

$n^2 \left[\frac{(nl+l+m)!}{(nl+l)!m!(n+1)} \right]^2$ операцій, після чого систему можна

розв'язати за формулами (9), на що потрібно $n^3 \left[\frac{(nl+l+m)!}{(nl+l)!m!(n+1)} \right]^2$

дій. Таким чином, для повної реалізації алгоритму схеми розрізання для системи (8) потрібно виконати

$$n^3 \left[\frac{(nl+l+m)!}{(nl+l)!m!(n+1)} \right]^2 + O \left(\frac{(nl+l+m)!}{(nl+l)!m!} \right)^\beta$$

арифметичних операцій на комп'ютері.

Опис тестування функцією ESSEMP.

Для розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь з числовими елементами в середовищі MatLab написана і протестована функція Bl_Essemp. З метою її можливого використання поданий її текст разом з блоком формуванням так званої ε — діагональної системи лінійних алгебраїчних рівнянь, яка детально буде описана далі.

```
ffunction [] =Bl_Essemp( Dimension )
%-----
% << B L E S S E M P >> - процедура для
розв'язання невідроджених систем
% лінійних алгебраїчних рівнянь блочним варіантом
алгоритму відсічених систем.
% Вхідні параметри:
% RB - розміри кліток, на які розбита вихідна
матриця системи
% рівнянь Ax=b;
```

```

% KB - кількість блоків при розбитті системи;
% X - одномірний масив розміру RBxKB для зберігання обчислених
% значень невідомих;
% Y - одномірний робочий масив довжини N.
% -----
clc
KB=2; % - кількість блоків системи
RB=12; % - розмір блоків
N_Dim=RB*KB; % обчислення загального порядку
СИСТЕМИ
% Ввід початкових даних тестової системи
Epsilon=1;
for NumEps=1:6
Epsilon=Epsilon/10
for i=1 : N_Dim
for j=1 : N_Dim
A_sys(i,j)=1.0;
end
A_sys(i,i)=1+Epsilon;
for j=N_Dim+1 : N_Dim+RB
A_sys(i,N_Dim+j)=0;
end
A_sys(i,N_Dim+1)=N_Dim+Epsilon;
end
% Тіло програми
Sum=zeros(RB);
N=KB;
N1 =N+1;
Np=1;
for i=1 : KB
for j=1 : KB+1
i_bgn=(i-1)*RB+1;
i_end=i*RB;
j_bgn=(j-1)*RB+1;
j_end=j*RB;

A(i,j)={A_sys(i_bgn:i_end,j_bgn:j_end)};
B(i,j)={zeros(RB)};
X(i,j)={zeros(RB)};
end
Y(i)={zeros(RB)};
end
end

```

```
for m=1 : N
    M1 =m-1;
    M2 =m-2;
    MP1=m+1;
    Piv=zeros(RB);
    P=zeros(RB);
    iv =m;
    for i=m : N
        P=A{i,m};
        if (m>1)
for j=1 : M1 P=P-X{j,1}*A{i,j}; end
            end
        if abs(det(Piv))<abs(det(P)) Piv=P; iv=i; end
            B{i,m}=P;
        end
        for j=1 : m
            Sum=B{m,j};
            B{m,j}=B{iv,j};
            B{iv,j}=Sum;
        end
        for j=1 : N1
            Sum=A{m,j};
            A{m,j}=A{iv,j};
            A{iv,j}=Sum;
        end
        end
        if m<N for i=MP1 : N B{i,m}=B{m,m}^
(-1)*B{i,m}; end
            end
            if m>1 Y{M1}=B{m,M1}; end
            if m>2 for jr=1 : M2
                j=m-jr-1;
                Y{j}=B{m,j};
                js=j+1;
for i=js : M1 Y{j}=Y{j}-B{i,j}*Y{i}; end
                    end
                end
                for j=MP1 : N+Np
                    P=A{m,j};
if m>1 for i=1 : M1 P=P-Y{i}*A{i,j}; end
                    end
                    B{m,j}=B{m,m}^(-1)*P;
                end
                X{m,1}=B{m,MP1};
            end
        end
    end
end
```

```

        if m>1  for ir=1 :M1
                    i=m-ir;
                    X{i,1}=B{i,MP1};
                    is=i+1;
        for      j=is : m      X{i,1}=X{i,1}-B{i,j}*X{j,1};
end
                                end
        end
        if m>=N  for j=2 : Np
                    X{m,j}=B{m,N+j};
                    for ir=1 : M1
                                i=m-ir;
X{i,j}=B{i,N+j};
                                is=i+1;
        for jj=is : m X{i,j}=X{i,j}-B{i,jj}*X{jj,j};
end
                                end
        end
        end
        end
        % Вивід результату
        disp('X=');
        for i=1 : KB disp(X{i,1}); end
        end
        end

```

EPSILON-діагональна система лінійних алгебраїчних рівнянь.
Дана система лінійних алгебраїчних рівнянь має матрицю виду:

$$A_\varepsilon = \begin{pmatrix} 1+\varepsilon & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1+\varepsilon & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1+\varepsilon & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1+\varepsilon \end{pmatrix}.$$

Спектральне число обумовленості для даної матриці A_ε є пропорційним величині $1/\varepsilon$. Отже, для достатньо малих значень ε система стає погано обумовленою. Якщо покласти $a_{i,n+1} = n + \varepsilon$ (n - порядок системи), то легко перевірити, що $x_i = 1$ ($i = 1, 2, \dots, n$) є точним розв'язком даної системи.

Результати тестування функції ESSEMP для $n = 20$ скопійовані з вікна MatLab і подані в наступній таблиці.

Таблиця 1

Значення ε	Значення невідомих x_i
0.1000	1.0000 1.0000 1.0000 1.0000 1.0000 1.0000 1.0000 1.0000 1.0000 1.0000 1.0000 1.0000 1.0000 1.0000 1.0000 1.0000 1.0000 1.0000 1.0000 1.0000 1.0000 1.0000 1.0000 1.0000
0.0100	1.0000 1.0000 1.0000 1.0000 1.0000 1.0000 1.0000 1.0000 1.0000 1.0000 1.0000 1.0000 1.0000 1.0000 1.0000 1.0000 1.0000 1.0000 1.0000 1.0000 1.0000 1.0000 1.0000 1.0000
1.0000e-003	1.0000 1.0000 1.0000 1.0000 1.0000 1.0000 1.0000 1.0000 1.0000 1.0000 1.0000 1.0000 1.0000 1.0000 1.0000 1.0000 1.0000 1.0000 1.0000 1.0000 1.0000 1.0000 1.0000 1.0000
1.0000e-004	1.0000 1.0000 1.0000 1.0000 1.0000 1.0000 1.0000 1.0000 1.0000 1.0000 1.0000 1.0000 1.0000 1.0000 1.0000 1.0000 1.0000 1.0000 1.0000 1.0000 1.0000 1.0000 1.0000 1.0000
1.0000e-005	1.0001 1.0001 1.0001 1.0001 1.0001 1.0001 1.0001 1.0001 1.0001 1.0001 1.0001 1.0001 1.0000 0.9999 0.9999 0.9998 0.9999 1.0001 0.9997 1.0001 0.9999 0.9999 0.9999 0.9999
1.0000e-006	0.9948 0.9948 0.9948 0.9948 0.9948 0.9948 0.9948 0.9948 0.9948 0.9948 0.9948 0.9948 1.0222 0.9993 0.9993 0.9888 0.9993 1.0243 1.0076 0.9909 1.0118 1.0118 0.9951 1.0118

Таким чином, невідомі обчислюються достатньо точно і для великих значень спектрального числа обумовленості.

Система лінійних рівнянь з матрицею Дж. Х. Уілкінсона.

Для перевірки наростання похибок заокруглення в методах виключення невідомих за рахунок росту проміжних елементів в процесі перетворення матриці знову скористаємося вже описаною матрицею Дж. Х. Уілкінсона:

$$A_W = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -1 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \\ -1 & -1 & \dots & 1 & 1 \\ -1 & -1 & \dots & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

При подібному заповненні матриці в методах виключення невідомих досягається похибка заокруглення порядку $n2^n$. Тут n - порядок системи.

Для спрощення аналізу точності одержаних значень невідомих x_i права частина підбрана таким чином, щоб точний розв'язок був $x_i = i$ для всіх $i = 1, 2, \dots, n$.

Результати тестування функції BI_ESSEMP скопійовані з вікна MatLab і подані в наступній таблиці.

Таблиця 2

Порядок n системи	Розмір блоків	Значення невідомих x_i
24	1	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24
24	12	1.0e+005 *0.0008 0.0016 0.0031 0.0063 0.0125 0.0250 0.0499 0.0997 0.1992 0.3984 0.7967 1.5934 12.8269 13.6853 14.4336 14.9931 15.2380 14.9794 13.9656 11.9449 8.9174 5.8899 6.8899 -53.7955

Одержані результати добре узгоджуються з попередніми результатами тестування набору алгоритмів MatLab . Для розмірів блока більших 1 в BI_ESSEMP використовуються функції MatLab, в яких спостерігається накопичення похибок заокруглення за рахунок значного росту абсолютних величин проміжних результатів обчислень, що характерно для даної матриці.

Висновки. У статті розглянуто новий підхід до розв'язування блочної системи лінійних алгебраїчних рівнянь із числовими елементами. Розв'язок системи отримали у вигляді відношення двох поліномів, а невідомі обчислили методом невизначених коефіцієнтів. Протестовано алгоритм розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь з числовими елементами в середовищі MatLab.

Запропонований алгоритм може ефективно використовуватися в системах комп'ютерної алгебри та для аналітично-числового розв'язування інженерних та прикладних задач.

Список використаних джерел:

1. Воеводин В. В. Численные методы алгебры. Теория и алгоритмы / В. В. Воеводин. — М. : Наука, 1976. — 312 с.
2. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц / Ф. Р. Гантмахер. — Москва : Наука, 1967. — 324 с.
3. Дэвенпорт Дж. Компьютерная алгебра / Дж. Дэвенпорт, И. Сирэ, Э. Турнье. — М. : Мир, 1991. — 352 с.
4. Недашковський М. О. Обчислення з λ -матрицями / М. О. Недашковський, О. Я. Ковальчук. — К. : Наук. думка, 2007. — 294 с.
5. Семчишин Л. М. Розв'язання розріджених систем лінійних алгебраїчних рівнянь із блочними елементами / Л. М. Семчишин // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. — Львів, 2007. — Вип. 6. — С. 128–135.
6. Тыртышников Е. Е. Матричный анализ и линейная алгебра / Е. Е. Тыртышников. — М. : Физматлит, 2007. — 480 с.

SOLUTION OF THE BLOCK SYSTEM WITH NUMERICAL ELEMENTS IN THE MATLAB ENVIRONMENT

The new approach to a block system of linear algebraic equations with numerical elements is proposed. A method of unblocking systems with some of the most common ways of filling is considered. We find the solution of the system as the relation of two polynomials, and the unknowns are calculated by the method of uncertain coefficients. By grouping the members at equal degrees and determining unknown coefficients, a system was used to solve them using a cutting scheme algorithm. For this purpose the system matrix is divided into blocks. Unbundling the resulting systems required some intermediate matrix operations. Thus, with the full implementation of the cutting circuit algorithm for the system, a number of arithmetic operations were performed. High accuracy of the proposed method of resolution is shown.

ESSELS has been written and tested to solve a block system of linear algebraic equations with numerical elements in MatLab. This function implements the algorithm for solving systems of linear algebraic equations by the method of truncated systems. This algorithm allows to solve systems of equations in the case of symmetric filling (the number of sub-diagonals is equal to the number of diagonals) and when the number of sub-diagonals and super-diagonals of the matrix is different. A small program is written for comparison with regular MatLab linear algebra programs. It implements the procedure of solving a block system of linear algebraic equations with numerical elements by means of MatLab. The comparison results in the table are given. The proposed algorithms for this medium-sized test system have significant advantages over standard MatLab features. The algorithm for solving a system of linear algebraic equations with numerical elements in the MatLab environment is tested. The efficiency of the proposed algorithm is shown in the paper. The theoretical and methodological basis of the study are the methods of optimization and mathematical modeling.

The proposed algorithm can be effectively used in computer algebra systems and for analytical and numerical solution of engineering and applied problems.

Key words: *sectional system, numerical elements, relation of two polynomials, method of indefinite coefficients, complication of algorithm, testing of algorithm.*

Отримано: 23.08.2019

УДК 517.5

DOI: 10.32626/2308-5878.2019-20.??-??

V. A. Sorych, Cand. of Phis. and Mathem. Sciences,

N. M. Sorych, Cand. of Phis. and Mathem. Sciences

Kamianets-Podilskyi Ivan Ohienko National University,

Kamianets-Podilskyi

THE JOINT APPROXIMATION (ψ, β) — INTEGRALS BY FEJER'S SUMS IN THE METRIC L_p

We know, that any summable periodic function is answered its Fourier's series. Therefore, it is naturally to approach it by trigonometric polynomials, that are the part's sums of their series, they are named the Fourier's sums. Sometimes the Fourier's sums very slowly approach to it, sometimes they do not approach (the example of the continuous function with divergent Fourier's series in some points was made Du Bois Reimond in 1876 y.). This fact induced mathematicians to search other sequences trigonometric polynomials, that they would gather to their generative function or that would uniformly gather to it on all space. Clear, that most successful in understanding of speed of convergence there is a sequence of its polynomials of the best approaching to the function. But, unfortunately, an operator of the best approaching is not linear. It complicates the construction of polynomials of the best approaching in large part, and, therefore, their use.

If to examine the linear methods of summarization Fourier's sums only, then matrix summarization the gives great class of such methods. One of these methods there is Fejer's method, the method middle arithmetic of the first n Fourier's sums.

In this work the asymptotic equality are found at $n \rightarrow \infty$ of upper bound of the value of the joint approximation by Fejer's sums of the order n of functions, that have a derivative in sense of Stepanets, in the case of an achievement of the saturation, in the metric of space of integral at p degrees functions. The main member of an asymptotic decomposition is selected and the order of the residual member is shown also.

Key words: *Fejer's sums, the joint approximation, the derivative in sense of Stepanets, an intrgral metric.*

Problem statement. Let $\varphi(x)$ — summable 2π — periodic function and

$$S[\varphi] = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

its Fourier series is, $\psi(k)$ — random sequence, $\beta \in R$. If a series

$$\sum_{k=1}^{\infty} \psi(k) \left(a_k \cos \left(kx + \frac{\beta\pi}{2} \right) + b_k \sin \left(kx + \frac{\beta\pi}{2} \right) \right) = S[f]$$

is Fourier series of some function $f(x)$, then, according O. I. Stepanets [1], we call this function (ψ, β) — integral of function $\varphi(x)$ and designate

$$f(x) = I_{\beta}^{\psi}(\varphi; x).$$

Let's denote by L_p , $1 \leq p < \infty$, the space of functions $\varphi(x)$, having a finite norm

$$\|\varphi\|_p = \left(\int_{-\pi}^{\pi} |\varphi(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

and U_p^0 — a single bullet of this space with elements orthogonal to constant.

By $L_{\beta, p}^{\psi}$ we will denote sets of (ψ, β) — integral of function $\varphi \in U_p^0$.

Let's denote by

$$\sum_{n, m}(\varphi; x; \alpha) = \sum_{i=1}^m \alpha_i (f_i(x) - \sigma_n(f_i; x)),$$

where $f_i(x) = I_{\beta_i}^{\psi_i}(\varphi; x)$, $\sigma_n(f; x)$ — Fejer's sum of function $f(x)$ order n :

$$\sigma_n(f; x) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(1 - \frac{k}{n} \right) (a_k(f) \cos kx + b_k(f) \sin kx), \alpha_i \in R.$$

Let's take value

$$\mathcal{E}_{n, m}(U_p^0) = \max_{|\alpha| = 1} \sup_{\varphi \in U_p^0} \left\| \sum_{n, m}(\varphi; x; \alpha) \right\|_p \quad (1)$$

for joint approximation of classes $L_{\beta_i}^{\psi_i}$ by Fejer's sums in the metric of space L_p .

Formulation of the problem. In this paper we investigate asymptotic behavior of $\mathcal{E}_{n, m}(U_p^0)$ with $n \rightarrow \infty$ and some limitation on the sequences $\psi_i(k)$ and numbers $\beta_i (i = \overline{1, m})$, and indicate the order of the residual member.

It is well known (see [1]), that the method of summation of Fourier series the Fejer method is saturated. So meaning that approximation order can't be better of n^{-1} , and the saturation happen if a function have the

regular derivative of the first order. We will consider the following $(\psi_i; \beta_i)$ — integrals of functions $\varphi \in U_p^0$, having a derivative and satisfying the asymptotic estimation:

$$f_i(x) - \sigma_n(f_i; x) = o\left(\frac{1}{n}\right), \quad n \rightarrow \infty \quad (i = \overline{1, m}).$$

Auxiliary statements. Following statements were proved in [4].

Lemma 1. If the sequence $\psi(k)$ is twice monotone, t.i.

$$\Delta \psi(k) = \psi(k) - \psi(k+1) \geq 0,$$

$$\Delta^2 \psi(k) = \psi(k) - 2\psi(k+1) + \psi(k+2) \geq 0, \quad k \in \mathbb{N}, \quad \text{and} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \psi(k) = 0,$$

then

$$S(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi(k) \sin kt \geq 0$$

for $t \in [0; \pi]$.

Lemma 2. If the sequence $\psi(k)$ is four times monotone, t.i.

$$\Delta \psi(k) \geq 0,$$

$$\Delta^2 \psi(k) = \Delta(\Delta \psi(k)) \geq 0,$$

$$\Delta^3(\psi(k)) = \Delta(\Delta^2 \psi(k)) \geq 0, \quad \Delta^4(\psi(k)) = \Delta(\Delta^3 \psi(k)) \geq 0,$$

and $\lim_{k \rightarrow \infty} \psi(k) = 0$, then function

$$C(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi(k) \cos kt$$

goes down $t \in [0; \pi]$.

Lemma 3. If $f(t)$ — even summable function, g_i — odd summable functions and $g_i(t) \geq 0$ at $t \geq 0$, then

$$\max_{|\alpha_i|=1} \int_{-a}^a \left| f(t) + \sum_{i=1}^m \alpha_i g_i(t) \right| dt = \int_{-a}^a \left| f(t) + \sum_{i=1}^m g_i(t) \right| dt.$$

Lemma 4. If $g(t)$ — odd summable function, f_i — even summable functions, and $f_i(t) \leq 0$, at $t \in [0; C]$; $f_i(t) \geq 0$, at $t \in [C; a]$, $i = \overline{1, m}$, then

$$\max_{|\alpha_i|=1} \int_{-a}^a \left| \sum_{i=1}^m \alpha_i f_i(t) + g(t) \right| dt = \int_{-a}^a \left| \sum_{i=1}^m f_i(t) + g(t) \right| dt.$$

Lemma 5. Let $g_i(t)$ — odd functions and $g_i(t) \geq 0$, for $t \in [0; a]$; $f_i(t)$ — even growing functions on $[0; a]$, all functions are continuous for $t \in (0; a)$, besides

$$\text{mes} \left\{ t : \sum_{i=1}^m \alpha_i (f_i(t) + g(t)) = C \right\} = 0.$$

Then

$$\max_{|\alpha_i|=1} \int_{-a}^a \left| \sum_{i=1}^m \alpha_i (f_i(t) + g(t)) - C(\alpha) \right| dt = \int_{-a}^a \left| \sum_{i=1}^m (f_i(t) + g(t)) - C(\alpha^*) \right| dt,$$

where $C(\alpha^*)$ — constant of the best approaching in metric L of function

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i (f_i(t) + g(t))$$

on $[-a; a]$, $\alpha^* = (1, 1, \dots, 1)$.

The main part.

Theorem 1. If sequences $k\psi_i(k)$ are twice monotone and infinitely small, then $\forall \varphi \in U_p^0, \forall \alpha_i \in R$

$$\sum_{n,m} (\varphi; x; \alpha) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m \alpha_i f_i'(x) + r_n(\varphi; x), \quad (2)$$

where

$$f_i'(x) = \frac{1}{n} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x+t) \sum_{k=1}^{\infty} k\psi_i(k) \cos\left(kt + \frac{\beta_i\pi}{2}\right) dt,$$

$$\|r_n(\varphi; x)\|_p = O\left(\sum_{i=1}^m \psi_i(n)\right). \quad (3)$$

Proving. According to [2, p. 52] under conditions of the theorem

$$f_i(x) - \sigma_n(f_i; x) = \frac{1}{\pi n} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x+t) \sum_{k=1}^{\infty} k\psi_i(k) \cos\left(kt + \frac{\beta_i\pi}{2}\right) dt + r_{n,i}(x), \quad (4)$$

and

$$|r_{n,i}(x)| = O(1)\varphi_i(n), \quad \varphi \in U_p^0, n \rightarrow \infty, i = \overline{1, m}. \quad (5)$$

Because

$$\frac{1}{n} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x+t) \sum_{k=1}^{\infty} k\psi_i(x) \cos\left(kt + \frac{\beta_i\pi}{2}\right) dt = f_i'(x),$$

then

$$\sum_{n,m} (\varphi; x; \alpha) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m \alpha_i f_i'(x) + \sum_{i=1}^m r_{n,i}(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m \alpha_i f_i'(x) + r_n(x).$$

Verify the justice of the estimate (3).

It is obvious, that

$$\|r_n(x)\|_p = \sum_{i=1}^m \|r_{n,i}(x)\|_p.$$

According to generalized Minkovski's inequality (see, for example, [3, p. 71])

$$\|r_{n,i}(x)\|_p \leq \frac{1}{\pi} \|\varphi\|_p \left\| \sum_{k=n}^{\infty} \left(1 - \frac{k}{n}\right) \psi_i(k) \cos\left(kt + \frac{\beta_i \pi}{2}\right) \right\|_L.$$

As it follows from proving consequence 3.5 ([2]), if the conditions of the theorem are fulfilled, then for $s = 1$ it is right relation

$$\left\| \sum_{k=n}^{\infty} \left(1 - \frac{k}{n}\right) \psi_i(k) \cos\left(kt + \frac{\beta_i \pi}{2}\right) \right\|_L = O(\psi_i(n)).$$

So for $\varphi \in U_p^0$

$$\|r_n(x)\|_p = O\left(\sum_{i=1}^m \psi_i(n)\right).$$

The theorem is proved.

Consequence. If the conditions of the theorem are fulfilled, then for $\forall \alpha_i \in R$

$$\sup_{\varphi \in U_p^0} \left\| \sum_{n,m} (\varphi; x; \alpha) \right\|_p = \frac{1}{\pi} \sup_{\varphi \in U_p^0} \left\| \sum_{i=1}^m \alpha_i f_i'(x) \right\|_p + 0 \left(\sum_{i=1}^m \psi_i(n) \right). \quad (6)$$

Because

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \alpha_i f_i'(x) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x+t) \sum_{i=1}^m \alpha_i \sum_{k=1}^{\infty} k \psi_i(k) \cos\left(kt + \frac{\beta_i \pi}{2}\right) dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x+t) \sum_{i=1}^m \alpha_i \left(C_i(t) \cos \frac{\beta_i \pi}{2} - S_i(t) \sin \frac{\beta_i \pi}{2} \right) dt, \end{aligned}$$

where

$$C_i(t) = \sum_{k=1}^{\infty} k \psi_i(k) \cos kt, \quad S_i(t) = \sum_{k=1}^{\infty} k \psi_i(k) \sin kt,$$

then, marking

$$F_m(t; \alpha) = \sum_{i=1}^m \alpha_i \left(C_i(t) \cos \frac{\beta_i \pi}{2} - S_i(t) \sin \frac{\beta_i \pi}{2} \right),$$

we receive

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i f_i'(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x+t) F_m(t; \alpha) dt.$$

Apply once more generalized Minkovski's inequality :

$$\left\| \sum_{i=1}^m \alpha_i f_i'(x) \right\|_p \leq \frac{1}{\pi} \|F_m(t; \alpha)\|_L.$$

That is why it is right

Theorem 2. If for some $\delta > 0$ sequences $k^{1+\delta} \psi_i(k)$ are twice monotone and infinitely small, then for $\forall \alpha_i, \beta_i \in R$ and $n \rightarrow \infty$

$$\mathcal{E}_{n,m}(U_p^0) \leq \frac{1}{\pi n} \max_{|\alpha_i|=1} \|F_m(t; \alpha)\|_L + O\left(\sum_{i=1}^m \psi_i(n)\right). \quad (7)$$

Using Lemmas 1–5, it was proved that in the case $\beta_i \in [0;1] \cup [2;3]$ ($i = \overline{1,m}$), or the same $\beta_i \in [1;2] \cup [3;4]$ ($i = \overline{1,m}$) maximum in the first element in (7) arrived at

$$\alpha_i^* = \begin{cases} 1, & \text{if } \beta_i \in [0;1] \\ -1, & \text{if } \beta_i \in [2;3] \end{cases} \quad \text{and} \quad \alpha_i^* = \begin{cases} 1, & \text{if } \beta_i \in [1;2] \\ -1, & \text{if } \beta_i \in [3;4] \end{cases}.$$

Theorem 3. If for some $\delta > 0$ sequences $k^{1+\delta} \psi_i(k)$ are twice monotone and infinitely small, $\beta_i \in [0;1] \cup [2;3]$, or the same $\beta_i \in [1;2] \cup [3;4]$ ($i = \overline{1,m}$), then for $n \rightarrow \infty$

$$\mathcal{E}_{n,m}(U_p^0) \geq \frac{1}{\pi n} \|F_m(t; \alpha^*)\|_L + O\left(\sum_{i=1}^m \psi_i(n)\right). \quad (8)$$

Proving. It is known, that

$$\|f\|_p = \sup_{\|\varphi_i\| \leq 1} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \varphi(t) dt,$$

where

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

therefore

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=1}^m \alpha_i f_i'(x) \right\|_p &= \sup_{\|h_v\| \leq 1} \int_{-\pi}^{\pi} h(t) \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x+t) F_m(t; \alpha^*) dt dx = \\ &= \sup_{\|h_v\| \leq 1} \int_{-\pi}^{\pi} F_m(t; \alpha^*) \int_{-\pi}^{\pi} h(t) \varphi(x+t) dx dt. \end{aligned} \quad (9)$$

If the terms of theorem are executed, then

$$g(t) = \text{sign}(F_m(t; \alpha^*) - C(\alpha^*)) = \text{signsin}(t - \theta^*).$$

If

$$\varphi_s(x) = \begin{cases} \frac{s^2}{2}, & \left| x - \frac{\pi}{2} \right| \leq \frac{1}{2s}, \\ 0, & \left| x - \frac{\pi}{2} \right| > \frac{1}{2s} \end{cases}, \quad s > 0,$$

$\varphi_s(x)$ — odd 2π — periodic function, $h_0(x) = \text{signcos}(t + \theta^*)$, then, as proved in [4],

$$h_0(x) * \varphi_s = g(t) + b(t),$$

where

$$|b(t)| \leq 1, \quad b(t) \neq 0$$

at

$$\left| t \pm \frac{\pi}{2} \right| < \frac{1}{2s}.$$

With proper choice's conditions for s can be provided conditions $\varphi_s(x) \in U_p^0$, therefore

$$\int_{-\pi}^{\pi} F_m(t; \alpha^*) b(t) dt = O\left(\sum_{i=1}^m \psi_i(n)\right).$$

Then, as follows from (2), (3) and (9)

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{n,m}(U_p^0) &\geq \frac{1}{\pi n} \sup_{\|h_v\| \leq 1} \int_{-\pi}^{\pi} F_m(t; \alpha^*) \int_{-\pi}^{\pi} h(t) \varphi(x+t) dx dt + O\left(\sum_{i=1}^m \psi_i(n)\right) \geq \\ &\geq \frac{1}{\pi n} \int_{-\pi}^{\pi} F_m(t; \alpha^*) \int_{-\pi}^{\pi} h_0(t) \varphi_s(x+t) dx dt + O\left(\sum_{i=1}^m \psi_i(n)\right) = \\ &= \frac{1}{\pi n} \|F_m(t; \alpha^*)\|_L + O\left(\sum_{i=1}^m \psi_i(n)\right). \end{aligned}$$

The theorem is proved.

From the validity of the asymptotic estimates (7) and (8) follows the following statement.

Theorem 4. Let for some $\delta > 0$ sequences $k^{1+\delta}\psi_i(k)$ are twice monotone and infinitely small, $\beta_i \in [0;1] \cup [2;3]$, ore the same $\beta_i \in [1;2] \cup [3;4] (i = \overline{1,m})$, then for $n \rightarrow \infty$

$$\mathcal{E}_{n,m}(U_p^0) = \frac{1}{\pi n} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{i=1}^m \alpha_i^* \left(C_i(t) \cos \frac{\beta_i \pi}{2} - S_i(t) \sin \frac{\beta_i \pi}{2} \right) - C(\alpha^*) dt + O\left(\sum_{i=1}^m \psi_i(n) \right),$$

where

$$\alpha_i^* = \text{signs} \sin \frac{\beta_i \pi}{2}, \quad C_i(t) = \sum_{k=1}^{\infty} k \psi_i(k) \cos kt, \quad S_i(t) = \sum_{k=1}^{\infty} k \psi_i(k) \sin kt,$$

$C(\alpha^*)$ — constant of the best approaching in metric L of integral function.

Conclusions. The obtained results for the joint approximation (ψ, β) — integrals by Fejer's sums in the metric L_p can be generalize for Zygmund's sums with condition of saturation for this method.

References:

1. Stepanets A. I. Methods of approximation theory : 2 p. / A. I. Stepanets // Works of In-te of Mathematics NAS of Ukraine. — 2002 — № 40. — 427 p.
2. Bushev D. N. Approximation of classes of continuous periodic functions by Zygmund's sums / D. N. Bushev. — Kyiv, 1984. — 62 p. (Prepr. / AS USSR. In-te of Mathematics; 84.56).
3. Korneichuk N. P. Extreme problems of approximation theory / N. P. Korneichuk. — M. : Nauka, 1976. — 320 p.
4. Sorych N. M. Joint approximation of functions and their derivatives by Fejer's sums / N. M. Sorych. — Kyiv, 1985. — P. 16–26 (Prepr. / AS USSR. In-te of Mathematics; 84.27).

СУМІСНЕ НАБЛИЖЕННЯ (ψ, β) — ІНТЕГРАЛІВ СУМАМИ ФЕЙСРА В МЕТРИЦІ L_p

Відомо, що довільній сумовній періодичній функції відповідає її ряд Фур'є. Тому природно її наближати тригонометричними многочленами, що є частинними сумами цього ряду, їх називають сумами Фур'є. Але інколи суми Фур'є даної функції дуже повільно збігаються до неї, а інколи і розбігаються (приклад неперервної функції із розбіжним в деяких точках рядом Фур'є був наведений Дюбуа-Реймондом у 1876 р.). Цей факт спонукав математиків шукати інші послідовності тригонометричних поліномів, які б збігалися до породжуючої їх функції, які б збігалися до неї рівномірно на всьому просторі. Зрозуміло, що найвдалішою в розумінні

швидкості збіжності до функції є послідовність многочленів її найкращого наближення. Але, на жаль, оператор найкращого наближення не є лінійним. Це в великій мірі ускладнює побудову многочленів найкращого наближення, а, отже, їх використання.

Якщо розглядати лише лінійні методи підсумовування рядів Фур'є, то великий клас таких методів дає матричне підсумовування. Одним з цих методів є метод Фейєра, метод середніх арифметичних перших n сум Фур'є.

У цій статті знайдено асимптотичні рівності при $n \rightarrow \infty$ для верхньої межі величини сумісного наближення сумами Фейєра порядку n функцій, що мають похідну в сенсі Степанця, у випадку досягнення насиченості в метриці простору сумовних в p -тому степені функцій. При цьому виділено головний член асимптотичного розкладу та вказано порядок залишкового члена.

Ключові слова: суми Фейєра, сумісне наближення, похідна в сенсі Степанця, інтегральна метрика.

Отримано: 14.08.2019

УДК 621.315+539.1

DOI: 10.32626/2308-5878.2019-20.100-107

Н. Л. Сосницька, д-р пед. наук, професор,

В. І. Кравець, канд. фіз.-мат. наук,

М. В. Морозов, канд. фіз.-мат. наук,

Г. О. Онищенко, аспірант,

Л. В. Халанчук, аспірант

Таврійський державний агротехнологічний університет, м. Мелітополь

МОДЕЛЮВАННЯ СТАНУ ЕЛЕКТРОНІВ У КОНІЧНИХ КВАНТОВИХ ТОЧКАХ

Розглядається рівняння Шредінгера для стаціонарних станів електронів (носіїв електричного заряду) у конічній квантовій точці (ККТ). Отримані хвильові функції, щільність ймовірності, хвильові числа і власні значення енергії для S — електронів та вивчена їх залежність від параметрів ККТ: діаметра основи D та висоти H . Використовується циліндрична система координат та метод Фур'є розділення змінних. Крім того, розглянуто наближення Вентцеля-Крамерса-Брилюєна (ВКБ — метод) для визначення власних значень енергії електрона. Використана умова нормування хвильової функції та отримано значення амплітуди хвильової функції для стаціонарних станів електрона. Для випадку ККТ власна енергія електрона стаціонарного стану у наближенні ефективної маси залежить від координати z на відміну від циліндричної квантової точки. Розглянуто максимально і мінімально допустимі значення координати z та відповідні значення власної енергії основного стану

електрона при наступних параметрах ККТ: $D = 8$ нм, $H = 10$ нм. Побудовано 3D графіки дискретної моделі щільності ймовірності знаходження електрона у заданій області ККТ для випадку різних радіальних та аксіальних мод хвильової функції. Також розглянуто деякі види можливих стоячих електронних хвиль у ККТ та застосована умова Бора-Зоммерфельда квантування орбіт (нульове наближення метода Вентцеля-Крамєрса-Брилюєна) для отримання значень власної енергії електрона для відповідних мод. Для математичного моделювання та отримання дискретної моделі щільності ймовірності знаходження електрона в заданій області кінчної квантової точки використані математичні пакети MathCad та Scilab.

Квантові точки знаходять широке застосування у наноелектроніці, наприклад: монітори (QLED — технології), інжекційні напівпровідникові лазери для волоконної оптики, сенсори та інше. Тому перспективним та актуальним є розробка наближених, спрощених моделей для розгляду фінітного руху носіїв заряду у кінчній квантовій точці, які можуть бути використані у лабораторному практикумі курсу «Фізичні основи сучасних інформаційних технологій» спеціальності «Комп'ютерні науки».

Ключові слова: *кінчна квантова точка, власна енергія, інформаційні технології, комп'ютерне моделювання, дискретна модель.*

Постановка та обґрунтування актуальності проблеми. У сучасних оптоелектронних приладах (QLED — монітори, напівпровідникові інжекційні лазери, сенсори, біомаркери) використовують квантові точки (QD). Тому дослідження відповідних математичних моделей різноманітних квантових точок (сферичних, циліндричних, кінчних) та їх застосування для організації і проведення лабораторних робіт з дисципліни «Фізичні основи сучасних інформаційних технологій» спеціальності «Комп'ютерні науки» є актуальною задачею [3]. Перспективним є розробка наближених, спрощених моделей для розгляду фінітного руху електронів у квантових точках, які забезпечують визначення щільності ймовірності та власних значень енергії електрона.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. У роботі [2] розглянуто методи отримання, властивості та використання різноманітних квантових точок. В першу чергу представлені методи молекулярно-променевої епітаксії, колоїдного синтезу та кванторозмірні ефекти в напівпровідниках гетероструктурах. Дискретний спектр дозволених енергій носіїв електричного заряду (електрона) залежать від форми, розмірів квантової точки (КТ) та виду обмежуючого потенціалу. В роботі [6] наведені дослідження стану електронів у пірамідальних і кінчних квантових точках та отримані власні значення енергії і графіки щільності ймовірності знаходження електрона в заданій області

квантової точки для різних мод хвильових функцій. Розгляд стану електрона в кінчних квантових точках зроблено в статтях [1, 7, 8]. Застосовується адиабатичне наближення та числові методи (метод Арнольда). Отримані значення енергії та залежність її від геометричних параметрів ККТ діаметра D основи та висоти H .

Мета статті. Дослідити стан електронів у кінчній квантовій точці та залежність власної енергії від розмірів ККТ: висоти H та діаметра D основи у випадку абсолютно непрозорих стінок та наближення ефективної маси.

Методи дослідження. Використовується математичне, комп'ютерне моделювання поведінки електрона в кінчній квантовій точці. Знаходиться аналітичне рішення рівняння Шредінгера для стаціонарних станів та власні значення енергії електрона. Також застосовується нульове наближення метода Вентцеля-Крамерса-Брилюєна для розгляду стоячих електронних хвиль та визначення власних значень хвильових чисел електрона. Для математичного моделювання та побудови 3D графіків дискретної моделі щільності різних радіальних та аксіальних мод використовується математичні пакети MathCad та Scilab.

Виклад основного матеріалу. Розглянемо стан електрона у кінчній квантовій точці (ККТ — рис. 1 а) у випадку непрозорих стінок у наближенні ефективної маси. Виконуємо заміну змінної:

$$a = r + z R / H. \quad (1)$$

Тоді потенціальна енергія електрона для циліндричної системи координат (рис. 1 в) дорівнює:

$$U(r, z) = \begin{cases} U_1 = 0 & \text{у конусі, якщо } 0 \leq a \leq R \text{ та } 0 \leq z \leq H, \\ U_2 = \infty & \text{поза конусу, якщо } a > R \text{ та } z < 0, z > H. \end{cases} \quad (2)$$

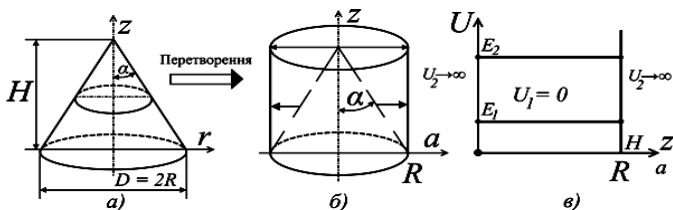


Рис. 1. а) Кінчна квантова точка; б) візуалізація математичних перетворень; в) потенціальна енергія електрона: R — радіус, H — висота.

Для S — електрона ($l = 0$) хвильова функція залежить тільки від координат r та z : $\psi(R, z)$. Тоді рівняння Шредінгера для стаціонарних станів у циліндричній системі координат має вигляд:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{2mE}{\hbar^2} \psi(r, z) = 0, \quad (3)$$

де m — ефективна маса електрона, E — власна енергія.

Використовуємо метод Фур'є розділення змінних для розв'язання рівняння (3):

$$\psi(r, z) = A\varphi_1(r) \cdot \varphi_2(z) = AJ_0(k_1 r) \cdot \sin(k_2 z), \quad (4)$$

де k_1, k_2 — хвильові числа, $J_0(k_1 r)$ — функція Бесселя нульового порядку.

Після заміни змінної (1) рівняння Шредінгера (3) для хвильової функції $\psi(a, z)$ має вигляд:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial a^2} + \frac{1}{(a-z) \cdot R/H} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial a} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{2mE}{\hbar^2} \psi(a, z) = 0. \quad (5)$$

Диференціальне рівняння (5) не має аналітичного розв'язку, але може бути розв'язана чисельними різницевиими методами при граничних умовах $a = R$:

$$\psi(R, z) = 0.$$

Хвильові числа k_1, k_2 та власні значення енергії електрона знаходимо, використовуючи граничні умови. Наприклад, для випадку,

коли висота конуса $H = \frac{R}{\operatorname{tg} \alpha} = \sqrt{3} \cdot R$, координата z_1 поверхні конуса

дорівнює:

$$z_1 = \frac{(R - r_1)}{\operatorname{tg} \alpha} = \sqrt{3} (R - r_1) = \frac{H}{R} (R - r_1) = H \left(1 - \frac{r_1}{R} \right).$$

Тоді

$$r_1 = R - \operatorname{tg} \alpha \cdot z_1 = R - z_1 R / H$$

та

$$\begin{aligned} \psi_1(r_1, z) &= A\varphi_1(R - z_1 R / H) \cdot \varphi_2(z_1) = \\ &= J_0 \left[k_1 (R - z_1 R / H) \right] \cdot \sin k_2 z_1 = 0. \end{aligned}$$

Звідки:

$$k_1 (R - z_1 R / H) = b_n, \quad k_2 z_1 = n_2 \pi$$

та

$$k_1 = \frac{b_n \cdot H}{R(H - z_1)} \quad (6)$$

де b_n — нулі функції Бесселя $J_0(x)$ (табл. 1) [4].

Таблиця 1

Нулі функції Бесселя

n	1	2	3	4	5
b_n	2,405	5,250	8,654	11,791	14,931

Для $z = H$:

$$\sin(k_2 H) = 0,$$

тоді

$$k_2 = \frac{\pi \cdot n_2}{z_1}, \quad (7)$$

де $n_2 = 1, 2, 3$ — квантові числа.

Власні значення енергії електрона в ККТ залежать від координати z , з рівняння Шредінгера (3) отримуємо:

$$k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} = k_1^2 + k_2^2,$$

та

$$E(z) = \frac{\hbar^2}{2m} (k_1^2 + k_2^2) = \frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{3b_{n1}^2}{(H-z)^2} + \frac{n_2^2 \cdot \pi^2}{z^2} \right]. \quad (8)$$

Мінімальне $z_{\min} = 0,1$ Н та максимальне $z_{\max} = 0,9$ Н значення координати z визначаються параметрами кристалічної ґратки речовини КТ. На рис. 2 представлений графік залежності власної енергії E електрона від координати z .

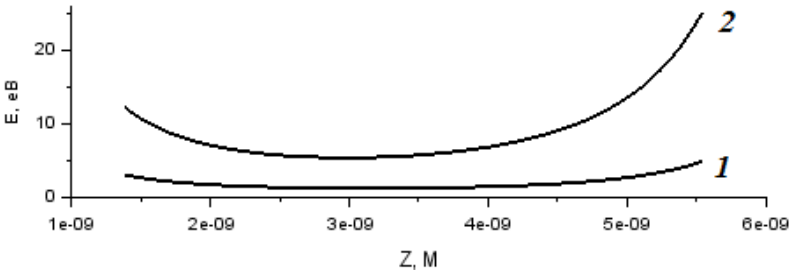


Рис. 2. Залежність власної енергії $E_{n1, n2}$ від координати z :

1 — $n_1 = 1, n_2 = 1$; 2 — $n_1 = 2, n_2 = 2$

Визначаємо амплітуду A хвильової функції $\psi(R, z)$ використовуючи умову нормування:

$$\begin{aligned} \int |\psi(r, z)|^2 dV &= \\ &= A^2 \int_0^H \int_0^{r_1} J_0^2(k_1 r) \cdot 2\pi r dr \cdot \sin^2(k_2 z) dz = 1. \end{aligned} \quad (9)$$

На рис. 3 представлені 3D графіки дискретної моделі [5] щільності ймовірності знаходження електрона у заданій точці області ККТ, яка дорівнює:

$$\rho(r, z) = \psi^2(r, z) = A^2 \cdot J_0^2(k_1 \cdot r) \cdot \sin^2(k_2 \cdot z). \quad (10)$$

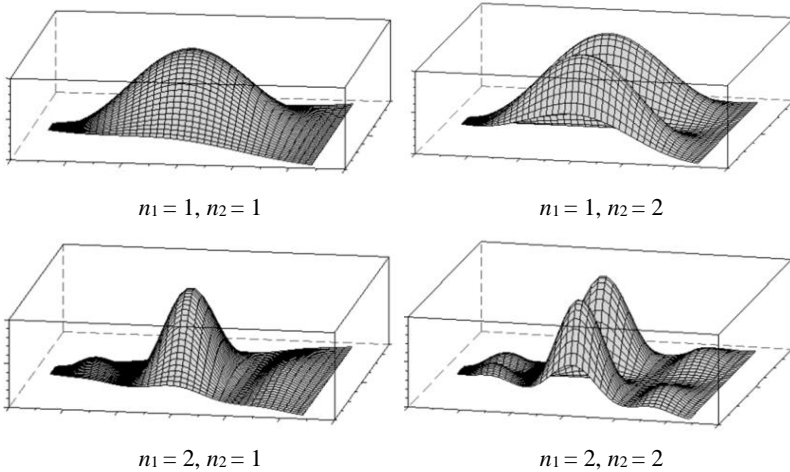


Рис. 3. Щільність ймовірності знаходження електрона у конічній квантовій точці для аксіальних та радіальних мод

Значення енергії електрона можна отримати, використовуючи умову Бора-Зоммерфельда квантування орбіт (нульове наближення метода ВКБ). На рис. 4 зображені можливі орбіти стоячих електронних хвиль у ККТ.

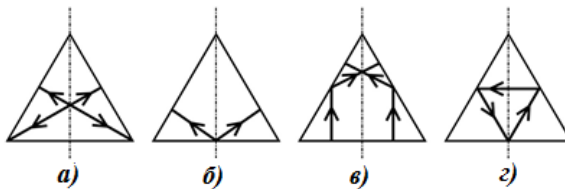


Рис. 4. Можливі орбіти стоячих електронних хвиль у ККТ

Наприклад, для випадку $H = \sqrt{3}R$ для стоячої хвилі а), $l_1 = \sqrt{3}R$ та $2p_1l_1 = n_1h$, тоді:

$$E_1 = \frac{p_1^2}{2m} = \frac{n_1^2 h^2}{24mR^2} = \frac{n^2 h^2}{6mD^2} \quad (11)$$

Мінімальна енергія електрона у ККТ залежить від D — діаметра основи та H — висоти конуса (8). Наприклад, значення енергії для основного стану електрона у наближенні ефективної маси при $z = H/2$, $R = 4 \text{ нм}$ та $\alpha = 60^\circ$ дорівнює $E_1 \approx 1,2 \text{ еВ}$.

Висновки з дослідження і перспективи подальших розробок. Розглянуто розв’язання рівняння Шредінгера стану S — електронів для конічної квантової точки у випадку непрозорих стінок. Отримані

хвильові функції та розподіл щільності ймовірності знаходження електрона в заданій області ККТ. Досліджено залежність власних значень енергії від розмірів квантової точки.

Результати досліджень математичного, комп'ютерного моделювання використовують при організації та проведенні імітаційної лабораторної роботи «Математичне моделювання стану електронів у конічній квантовій точці» курсу «Фізичні основи сучасних інформаційних технологій» спеціальності «Комп'ютерні науки». В подальшому представляє значний інтерес розгляд рівняння Шредингера та стан електронів у конічній квантовій точці з оболонкою та залежність енергій електрона від більш складної геометрії квантових точок.

Список використаних джерел:

1. Багдасарян Д. А. Коническая квантовая точка: электронные состояния и дипольный момент / Д. А. Багдасарян, Д. Б. Айрапетян, А. А. Саркисян, Э. М. Казарян, А. Медвид // Известия НАН Армении, Физика. — 2017. — Т. 52, № 2. — С. 177–188
2. Грибачев В. Методы получения и применения квантовых точек / В. Грибачев // Компоненты и технологии. — 2009. — С. 127–130.
3. Дьоміна Н. А. Моделювання кванторозмірних гетероструктур у лабораторному практикумі з курсу «Фізичні основи сучасних інформаційних технологій» / Н. А. Дьоміна, М. В. Морозов // Збірник наукових праць Кіровоградського державного педагогічного університету імені Володимира Винниченка «Наукові записки. Серія: Проблеми методики фізико-математичної і технологічної освіти». — Кропивницький : ПВВ КДПУ ім. В. Винниченка, 2017. — Вип. 11. — № 5 (1227). — С. 108–134.
4. Кафтанова Ю. В. Специальные функции математической физики / Ю. В. Кафтанова. — Харьков : Новое слово, 2009. — 178 с.
5. Халанчук Л. В. Огляд методів генерації дискретних моделей геометричних об'єктів / Л. В. Халанчук, С. В. Чопоров // Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки : збірник наукових статей. — Запоріжжя : ЗНУ, 2018. — № 1. — С. 139–152.
6. Lozovski V. The Analytical Study of Electronic and Optical Properties of Pyramid-Like and Cone-Like Quantum Dots / V. Lozovski, V. Piatnytsia // Journal of Computational and Theoretical Nanoscience. — 2013. — № 8. — P. 2335–2343.
7. Kazaryan E. M. Quasi-Conical Quantum Dot: Electron States and Quantum Transitions / E. M. Kazaryan, L. S. Petrosyan, V. A. Shahnazaryan, H. A. Sarkisyan // IOP Publishing Limited. — 2015.
8. Hayrapetyan D. B. Direct Interband Light Absorption in Conical Quantum Dot / D. B. Hayrapetyan, A. V. Chalyan, E. M. Kazaryan, H. A. Sarkisyan // Journal of Nanomaterials. — Vol. 2015. — 6 p.

MODELLING OF ELECTRON STATES IN CONICAL QUANTUM DOTS

This paper is devoted to the study of solutions of the stationary Schrodinger equation for the case of a conical quantum dot (CQD). We ob-

tained wave numbers and functions, probability density, and energy eigen values for s -electrons, and studied how they depend on the geometrical parameters of a CQD (diameter D and height H). We used the Wentzel-Kramers-Brillouin method to calculate the energy eigen values. We used the wave function normalization condition to obtain the wave function amplitude for electron stationary states. The energy eigen states of a stationary electron in the effective mass approximation depends on z -coordinate in case of a CQD, unlike the case of a cylindrical quantum dot. We consider the z -coordinate limits for respective energy eigen values for a CQD with $D = 8$ nm and $H = 10$ nm. We plot 3D distribution of the electron probability density in a CQD for axial and radial wave function modes. We also consider the standing electron waves in a CQD with energy eigen values obtained using the Bohr-Sommerfeld quantization condition (0^{th} approximation of the Wentzel-Kramers-Brillouin method). The spatial probability density discrete modelling is performed in MathCad and Scilab environment. Computer and mathematical simulations have been widely employed in modern engineering. Based on the results of this research we developed a computer modelling laboratory work «Modelling of electronic states in a conical quantum dot». Quantum dots have found various applications in nanoelectronics, for example QLED screens, semiconductor lasers for fiber optics, sensors etc. Therefore, the development of simplified models of finite movement of charge carriers in a quantum dot is the promising direction of a laboratory course «Physical fundamentals of modern information technologies» for «Computer sciences» students.

Key words: *conical quantum dot, electron wave function, eigen energy, information technologies, computer modeling, discrete model.*

Отримано: 16.08.2019

ВІДОМОСТІ ПРО АВТОРІВ

Андрусяк Іванна Володимирівна — кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри вищої математики Національного університету «Львівська політехніка», м. Львів, andrusyak.ivanna@gmail.com

Бак Сергій Миколайович — кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри математики та інформатики Вінницького державного педагогічного університету імені Михайла Коцюбинського, м. Вінниця, Sergiy.bak@gmail.com

Бродяк Оксана Ярославівна — кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри вищої математики Національного університету «Львівська політехніка», м. Львів, brodyakoksana1976@gmail.com

Гнатюк Василь Олексійович — кандидат фізико-математичних наук, доцент, професор кафедри математики Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

Гудима Уляна Василівна — кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри математики Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

Конет Іван Михайлович — доктор фізико-математичних наук, професор, проректор з наукової роботи Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський, konet51@ukr.net

Кравець Василь Іванович — кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри вищої математики і фізики Таврійського агротехнологічного університету імені Дмитра Моторного, м. Мелітополь, v_i_kravets@ukr.net

Максимук Олександр Васильович — доктор фізико-математичних наук, професор, професор кафедри вищої математики Львівського національного університету імені Івана Франка, м. Львів, ov.maksymuk@gmail.com

Морозов Микола Вікторович — кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри вищої математики і фізики Таврійського агротехнологічного університету імені Дмитра Моторного, м. Мелітополь, mykola.morozov@tsatu.edu.ua

Мусій Роман Степанович — доктор фізико-математичних наук, професор, професор кафедри вищої математики Національного університету «Львівська політехніка», м. Львів, musiy@polynet.lviv.ua

Мусурівський Віктор Іванович — кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри промислової біотехнології Чернівецького факультету національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут», м. Чернівці, victor_musa@ukr.net

Наконечний Андріян Йосипович — доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри комп'ютерних систем в автоматичі Національного університету «Львівська політехніка», м. Львів, ksa.dept@lpnu.ua

Онищенко Галина Олександрівна — асистент кафедри вищої математики і фізики Таврійського агротехнологічного університету імені Дмитра Моторного, м. Мелітополь, palgalina1@gmail.com

Павелчак-Данилюк Ольга Богданівна — кандидат технічних наук, старший викладач кафедри фундаментальних та спеціальних дисциплін Чортківського навчально-наукового інституту підприємництва і бізнесу Тернопільського національного економічного університету, м. Чортків, danilyuk1901@ukr.net

Петрова Ірина Леонідівна — аспірант кафедри математичного аналізу механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка, м. Київ, irunapetrova1411@gmail.com

Петрова Тамара Олександрівна — кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри математичного аналізу механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка, м. Київ, tamarapetrova2703@gmail.com

Пилипюк Тетяна Михайлівна — кандидат фізико-математичних наук, асистент кафедри інформатики Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

Саланда Іванна Петрівна — кандидат технічних наук, старший викладач кафедри теорії і методики трудового навчання та технологій Кременецької обласної гуманітарно-педагогічної академії імені Тараса Шевченка, м. Кременець

Сачук Юрій Володимирович — кандидат фізико-математичних наук, старший викладач кафедри національної безпеки Східноєвропейського університету імені Лесі Українки, м. Луцьк, sachykyra@gmail.com

Семчишин Ліда Михайлівна — кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри фундаментальних та спеціальних дисциплін Чортківського навчально-наукового інституту підприємництва і бізнесу Тернопільського національного економічного університету, м. Чортків, Lida55718@ukr.net

Сорич Віктор Андрійович — кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри математики Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

Сорич Ніна Миколаївна — кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри математики Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

Сосницька Наталя Леонідівна — доктор педагогічних наук, професор, завідувач кафедри вищої математики і фізики Таврійського агротехнологічного університету імені Дмитра Моторного, м. Мелітополь, nsosnickaya19@gmail.com

Халанчук Лариса Вікторівна — асистент кафедри вищої математики і фізики Таврійського агротехнологічного університету імені Дмитра Моторного, м. Мелітополь, larisavh2201@gmail.com

Шиндер Валентин Костянтинівич — кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри опору матеріалів та будівельної механіки Національного університету «Львівська політехніка», м. Львів, ombm.dept@lpnu.ua

АЛФАВІТНИЙ ПОКАЖЧИК АВТОРІВ

А		О	
Андрусак І. В.	40	Онищенко Г. О.	100
Б		П	
Бак С. М.	5	Павелчак-Данилюк О. Б.	79
Бродяк О. Я.	40	Петрова І. Л.	61
Г		Петрова Т. О.	61
Гнатюк В. О.	13	Пилипюк Т. М.	26
Гудима У. В.	13	С	
К		Саланда І. П.	70
Конет І. М.	26	Сачук Ю. В.	70
Кравець В. І.	100	Семчишин Л. М.	79
М		Сорич В. А.	92
Максимук О. В.	70	Сорич Н. М.	92
Морозов М. В.	100	Сосницька Н. Л.	100
Мусій Р. С.	40	Х	
Мусурівський В. І.	51	Халанчук Л. В.	100
Н		Х	
Наконечний А. Й.	40	Шиндер В. К.	40

ЗМІСТ

Бак С. М.	
Про обмеженість глобального розв’язку задачі Коші для нескінченної системи нелінійних осциляторів на двовимірній ґратці	5
Гудима У. В., Гнатюк В. О.	
Критерії екстремальної послідовності для задачі відшукування відстані між двома опуклими множинами лінійного нормованого простору	13
Конет І. М., Пилипюк Т. М.	
Параболічні крайові задачі в необмеженому кусково-однорідному клиновидному суцільному циліндрі	26
Мусій Р. С., Наконечний А. Й., Шиндер В. К., Андрусак І. В., Бродяк О. Я.	
Методика побудови розв’язку двовимірної задачі електродинаміки для електропровідного тіла з плоскопаралельними межами за дії зовнішнього нестационарного електромагнітного поля	40
Мусурівський В. І.	
Про проблему стабілізації керованих стохастичних диференціально-функціональних систем із скінченним запізненням.....	51
Петрова Т. О., Петрова І. Л.	
Узагальнення поточкових інтерполяційних оцінок опуклого наближення функцій, що мають дробову похідну	61
Сачук Ю. В., Максимук О. В., Саланда І. П.	
Аналітико-числове обчислення ітераційними методами областей контакту для задачі про зношування пружної півплощини канонічними штампами	70
Семчишин Л. М., Павелчак-Данилюк О. Б.	
Розв’язання блочної системи з числовими елементами в середовищі MatLab.....	79
Sorych V. A., Sorych N. M.	
The Joint Approximation (ψ, β) — integrals by Fejer’S sums in the metric L_p	92
Сосницька Н. Л., Кравець В. І., Морозов М. В., Онищенко Г. О., Халанчук Л. В.	
Моделювання стану електронів у кінчних квантових точках	100
Відомості про авторів	108
Алфавітний покажчик авторів	110

Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова
Національної академії наук України
Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка

НАУКОВЕ ВИДАННЯ

МАТЕМАТИЧНЕ ТА КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ

Серія: Фізико-математичні науки

Збірник наукових праць

Випуск 20

Підписано до друку 21.11.2019 р. Гарнітура «Таймс».
Папір офісний. Друк різнографічний.
Формат 60x84/16. Умовн. друк. арк. 6,5. Обл.-вид. арк. 7,1.
Тираж 100. Зам. № 879.

Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка,
вул. Огієнка, 61, м. Кам'янець-Подільський, 32300.
Свідоцтво серії ДК № 3382 від 05.02.2009 р.

Надруковано в Кам'янець-Подільському національному
університеті імені Івана Огієнка,
вул. Огієнка, 61, м. Кам'янець-Подільський, 32300.