

Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова
Національної академії наук України
Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка

МАТЕМАТИЧНЕ ТА КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ

Серія: Фізико-математичні науки

Збірник наукових праць

Випуск 21

Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка
2020

УДК 519.6:519.7
ББК 22
М34

Свідоцтво про державну реєстрацію друкованого засобу масової інформації:
Серія КВ № 14521-3492Р від 25.06.2008 р.

Збірник включено до Переліку наукових фахових видань України категорії Б галузь «Фізико-математичні» (спеціальність: 111 «Математика», 113 «Прикладна математика») наказ Міністерства освіти і науки України № 409 від 17.03.2020 р.

Друкується згідно з рішенням вченої ради Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка,
протокол №10 від 29 жовтня 2020 року.

Редакційна колегія:

- О. М. Хіміч**, член-кореспондент НАНУ,
доктор фізико-математичних наук, професор (*відповідальний редактор*);
А. Ф. Верлянь, член-кореспондент НАПНУ,
доктор технічних наук, професор (*заст. відповідального редактора*);
І. Б. Ковальська, кандидат фізико-математичних наук, доцент
(*відповідальний секретар*);
В. К. Задірака, академік НАНУ, доктор фізико-математичних наук, професор;
І. М. Конет, доктор фізико-математичних наук, професор;
М. О. Перестюк, академік НАНУ, доктор фізико-математичних наук, професор;
А. С. Сердюк, доктор фізико-математичних наук, старший науковий співробітник;
В. М. Старков, доктор фізико-математичних наук, старший науковий співробітник;
Ю. В. Теплінський, доктор фізико-математичних наук, професор;
М. К. Усаров, доктор фізико-математичних наук,
старший науковий співробітник, Узбекистан;
А. О. Чикрій, академік НАНУ, доктор фізико-математичних наук, професор.

Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки : зб. наук. праць / Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова Національної академії наук України, Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка; [редкол.: О. М. Хіміч (відп. ред.) та ін.]. Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2020. Вип. 21. 180 с.

У збірнику друкуються результати досліджень вітчизняних та закордонних науковців, що стосуються проблем застосування математичних моделей в різних галузях людської діяльності.

Для наукових та інженерно-технічних працівників, аспірантів, студентів.

УДК 519.6:519.7
ББК 22

ISSN 2308-5878

DOI: 10.32626/2308-5878.2020-21

© Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова НАН України, 2020

© Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2020

V. M. Glushkov Institute of Cybernetics
of National Academy of Sciences of Ukraine
Kamianets-Podilskyi National Ivan Ohiienko University

MATHEMATICAL AND COMPUTER MODELLING

Series: Physical and mathematical sciences

Scientific journal

ISSUE 21

Kamianets-Podilskyi National Ivan Ohiienko University
2020

Editorial board:

O. Himich, Corresponding Member of the NAS of Ukraine,
Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor (*Executive Editor*);

A. Verlan, Corresponding Member NAPS of Ukraine,
Doctor of Technical Science, Professor (*Vice Executive Editor*);

I. Kovalska, Candidate of Physical and Mathematical Sciences,
Docent (*Responsible Secretary*);

V. Zadiraka, Academician NAS of Ukraine,
Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor;

I. Konet, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor;

M. Perestjuk, Academician NAS of Ukraine,

Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor;

A. Serdyuk, Doctor of Physical and Mathematical Sciences,
Senior Scientific Researcher;

V. Starkov, Doctor of Physical and Mathematical Sciences,
Senior Scientific Researcher;

Yu. Teplinsky, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor;

M. Usarov, Doctor of Physical and Mathematical Sciences,
Senior Scientific Researcher, Uzbekistan;

A. Chikriy, Academician NAS of Ukraine,
Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor.

Mathematical and computer modelling. Series: Physical and mathematical sciences: scientific journal / V. M. Glushkov Institute of Cybernetics of National Academy of Sciences of Ukraine, Kamianets-Podilskyi National Ivan Ohiienko University; [Editorial Board: O. Himich (Executive Editor) and others]. Kamianets-Podilskyi: Kamianets-Podilskyi National Ivan Ohiienko University, 2020. ISSUE 21. 180 p.

There are printed results of investigation of national and foreign scientists that concern to problems of practice mathematical models in different spheres of human activity.

For scientific and technical staff, postgraduate students.

V. M. Glushkov Institute of Cybernetics
of NAS of Ukraine, 2020

© Kamianets-Podilskyi National
Ivan Ohiienko University, 2020

ISSN 2308-5878

DOI: 10.32626/2308-5878.2020-21

УДК 517.9

DOI: 10.32626/2308-5878.2020-21.5-16

С. М. Бак, канд. фіз.-мат. наук

Вінницький державний педагогічний університет
імені Михайла Коцюбинського, м. Вінниця

ІСНУВАННЯ ПЕРІОДИЧНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ В СИСТЕМІ НЕЛІНІЙНИХ ОСЦИЛЯТОРІВ ЗІ СТЕПЕНЕВИМИ ПОТЕНЦІАЛАМИ НА ДВОВИМІРНІЙ ҐРАТЦІ

Стаття присвячена вивченню нескінченновимірної гамільтонової системи, яка описує динаміку нескінченної системи лінійно зв'язаних нелінійних осциляторів на двовимірній ґратці. Рівняння руху цієї системи представляють собою зчисленну систему звичайних диференціальних рівнянь. Останню систему зручно розглядати як диференціально-операторне рівняння у гільбертовому просторі дійсних двохсторонніх послідовностей. Розглядається задача про існування періодичних розв'язків для таких систем зі степеневими потенціалами. Основними умовами існування цих розв'язків є просторова періодичність коефіцієнтів оператора лінійної взаємодії осциляторів та додатність цього оператора. У цій статті показано, що періодичні розв'язки можна побудувати за допомогою методу умовної мінімізації. Для цього побудовано функціонал, критичні точки якого є шуканими періодичними розв'язками. Цей функціонал представлено у вигляді різниці квадратичної і неквадратичної частин. Далі розглянуто задачу умовної мінімізації квадратичної частини функціоналу за умови, що неквадратична частина стала. За допомогою методу множників Лагранжа встановлено, що періодичні розв'язки даної системи лінійно залежать від розв'язків розглянутої задачі умовної мінімізації, зокрема, коефіцієнт лінійної залежності виражається через множник Лагранжа. За допомогою дискретного варіанту принципу концентрованої компактності доведено, що розглянута задача умовної мінімізації має розв'язок, а отже, існують періодичні розв'язки вихідної системи. Зокрема, показано, що для довільної мінімізуючої послідовності квадратичної частини побудованого функціоналу виконується можливість «концентрація» принципу концентрованої компактності, що дозволило довести обмеженість цієї послідовності. Більше того, доведено, що для достатньо великих значень періодів ці розв'язки не є сталими.

Ключові слова: *нелінійні осцилятори, двовимірна ґратка, періодичні розв'язки, метод умовної мінімізації.*

Вступ. Дискретні нескінченновимірні гамільтонові системи широко використовуються для моделювання складних оптичних і квантових явищ. Серед таких систем найбільш відомими є системи зв'язаних осци-

ляторів, дискретні рівняння типу синус-Гордона, системи типу Фермі-Пасти-Улама, дискретні нелінійні рівняння типу Шредінгера.

Серед розв'язків таких систем особливої уваги заслуговують біжучі хвилі. В статтях [2; 4; 5; 12; 17; 21] досліджено питання існування біжучих хвиль в системах осциляторів на двовимірній ґратці. В той же час для систем типу Фермі-Пасти-Улама на двовимірній ґратці відомі декілька праць [6; 19; 22], в яких отримано умови існування періодичних та відокремлених біжучих хвиль. В статтях [3; 8; 14; 16; 18] вивчались біжучі хвилі для дискретного рівняння \sin -Гордона на двовимірній ґратці.

Зауважимо, що в статтях [1; 24] вивчались періодичні розв'язки в системах осциляторів та системах типу Фермі-Пасти-Улама на двовимірній ґратці. А в статтях [9; 11; 13; 15] досліджено питання коректності задачі Коші для систем осциляторів на двовимірній ґратці.

Ще одним важливим класом розв'язків є стоячі хвилі. В статтях [7; 10; 20] досліджувалось питання існування стоячих хвиль для дискретних нелінійних рівнянь типу Шредінгера на двовимірній ґратці.

Мета статті: показати, що періодичні розв'язки системи лінійно зв'язаних нелінійних осциляторів можна побудувати за допомогою методу умовної мінімізації.

Постановка задачі. У цій статті вивчаються рівняння, які описують динаміку нескінченної системи лінійно зв'язаних нелінійних осциляторів, розміщених на цілочисловій двовимірній ґратці. Нехай $q_{n,m}(t)$ — узагальнена координата (n, m) -го осцилятора в момент часу t . Передбачається, що кожний осцилятор лінійно взаємодіє з чотирма своїми найближчими сусідами. Тоді рівняння руху системи, що розглядається, мають вигляд

$$\ddot{q}_{n,m} = -U'_{n,m}(q_{n,m}) + a_{n-1,m}(q_{n-1,m} - q_{n,m}) - a_{n,m}(q_{n,m} - q_{n+1,m}) + b_{n,m-1}(q_{n,m-1} - q_{n,m}) - b_{n,m}(q_{n,m} - q_{n,m+1}), \quad (n, m) \in \mathbb{Z}^2. \quad (1)$$

Рівняння (1) представляють собою нескінченну систему звичайних диференціальних рівнянь.

Розглядаються такі розв'язки системи (1), що

$$\lim_{n,m \rightarrow \pm\infty} q_{n,m}(t) = 0, \quad (2)$$

тобто осцилятори знаходяться в стані спокою на нескінченності.

Потенціал $U_{n,m}(r)$ запишемо у вигляді $U_{n,m}(r) = -\frac{d_{n,m}}{2}r^2 + V_{n,m}(r)$ і покладемо $c_{n,m} = d_{n,m} - a_{n-1,m} - a_{n,m} - b_{n,m-1} - b_{n,m}$. Тоді система (1) матиме вигляд

$$\ddot{q}_{n,m} = a_{n-1,m}q_{n-1,m} + a_{n,m}q_{n+1,m} + b_{n,m-1}q_{n,m-1} + b_{n,m}q_{n,m+1} + c_{n,m}q_{n,m} - V'_{n,m}(q_{n,m}), \quad (n, m) \in \mathbb{Z}^2. \quad (3)$$

Покажемо, що за допомогою методу умовної мінімізації можуть бути побудовані T -періодичні розв'язки системи (3) зі степеневими потенціалами вигляду

$$V_{n,m}(r) = \frac{g_{n,m}}{p} |r|^p, \quad (4)$$

де $g_{n,m} > 0$, $p > 2$. У цьому випадку система (3) набуває вигляду

$$\ddot{q}_{n,m} = a_{n-1,m} q_{n-1,m} + a_{n,m} q_{n+1,m} + b_{n,m-1} q_{n,m-1} + b_{n,m} q_{n,m+1} + c_{n,m} q_{n,m} - g_{n,m} |q_{n,m}|^{p-2} q_{n,m}, \quad (n, m) \in \mathbb{Z}^2, \quad (5)$$

Враховуючи граничні умови (2), цю систему зручно розглядати як диференціально-операторне рівняння

$$\ddot{q} = Aq - B(q), \quad (6)$$

де

$$(Aq)_{n,m} = a_{n-1,m} q_{n-1,m} + a_{n,m} q_{n+1,m} + b_{n,m-1} q_{n,m-1} + b_{n,m} q_{n,m+1} + c_{n,m} q_{n,m},$$

а нелінійний оператор B визначається формулою

$$(B(q))_{n,m} = V'_{n,m}(q_{n,m})$$

в просторі $l^2 = l^2(\mathbb{Z}^2)$ дійсних послідовностей $q = \{q_{n,m}\}$ зі скалярним добутком

$$(q^{(1)}, q^{(2)}) = \sum_{n,m \in \mathbb{Z}} q_{n,m}^{(1)} q_{n,m}^{(2)}.$$

Норму в $l^2 = l^2(\mathbb{Z}^2)$ позначатимемо $\|\cdot\|$.

Передбачається, що послідовності $\{a_{n,m}\}$, $\{b_{n,m}\}$, $\{d_{n,m}\}$ і $\{g_{n,m}\}$ просторово періодичні (по n і m) з деяким натуральним періодом N та виконується наступна умова:

(P) Оператор A додатно визначений, тобто існує таке $\alpha_0 > 0$, що $(Aq, q) \geq \alpha_0 \|q\|^2$.

Нехай $T > 0$. Позначимо через X_T підпростір T -періодичних функцій із $H_{loc}^1(\mathbb{R}; l^2)$. Це гільбертів простір зі скалярним добутком

$$(q, p)_T = \int_{-T/2}^{T/2} [(\dot{q}(t), \dot{p}(t)) + (q(t), p(t))] dt \quad \text{та відповідною нормою}$$

$$\|q\|_T = (q, q)_T^{1/2}. \quad \text{Простір } X_T \text{ складається із послідовностей}$$

$q = \{q_{n,m}(t)\}_{(n,m) \in \mathbb{Z}^2}$ таких функцій $q_{n,m} \in H_{loc}^1(\mathbb{R})$, що

$$q_{n,m}(t+T) = q_{n,m}(t) \text{ і } \|q\|_T^2 = \sum_{(n,m) \in \mathbb{Z}^2} \|q_{n,m}\|_{H^1(-T/2; T/2)}^2 < \infty, \text{ де } \|u\|_{H^1(a; b)}^2 =$$

$$= \int_a^b \left[|\dot{u}(t)|^2 + |u(t)|^2 \right] dt. \text{ На просторі } X_T \text{ розглянемо функціонал}$$

$$\Phi(u) = \int_{-T/2}^{T/2} \left\{ \frac{1}{2} \|\dot{u}(t)\|^2 + \frac{1}{2} (Au(t), u(t)) - \frac{1}{p} \sum_{(n,m) \in \mathbb{Z}^2} g_{n,m} |u_{n,m}(t)|^p \right\} dt. \quad (7)$$

Неважко переконатися, що критичні точки цього функціоналу є T -періодичними розв'язками задачі (5), (2), тобто рівняння (6).

Основний результат. Для будь-якого $\theta > 0$ розглянемо задачу мінімізації, яка полягає у знаходженні функції $u \in X_T$, при якій існує

$$\inf_{v \in X_T} \{ \Psi(v) : S(v) = \theta \} = I_\theta. \quad (8)$$

Теорема 1. Нехай u — розв'язок задачі (8). Тоді $q = \lambda^{\frac{1}{p-2}} u \in T$ -періодичним розв'язком задачі (5), (2).

Доведення. Нехай для деякого $\theta > 0$ задача (8) має розв'язок і $u \in X_T$ — відповідна точка мінімуму. Оскільки функціонали Ψ та S неперервно диференційовні, то існує таке $\lambda \in \mathbb{R}$ (множник Лагранжа), що

$$\begin{aligned} & \int_{-T/2}^{T/2} \left[(\dot{u}(t), \dot{v}(t)) + (Au(t), v(t)) \right] dt = \\ & = \lambda \int_{-T/2}^{T/2} \left[\sum_{(n,m) \in \mathbb{Z}^2} g_{n,m} |u_{n,m}(t)|^{p-2} u_{n,m}(t) v_{n,m}(t) \right] dt \end{aligned} \quad (9)$$

для будь-якого $v \in X_T$. Підстановка $v = u$ показує, що $\lambda > 0$, оскільки в цьому випадку обидва інтеграли в (9) додатні. Більше того, при $v = u$ ліва частина в (9) рівна $2I_\theta$, а інтеграл в правій частині рівний $p\theta$. Тому

$$\lambda = \frac{2I_\theta}{p\theta}. \quad (10)$$

Підставляючи $u = \lambda^{-\frac{1}{p-2}} q$ в тотожність (9), одержуємо,

$$\int_{-T/2}^{T/2} \left[(\dot{q}(t), \dot{v}(t)) + (Aq(t), v(t)) \right] dt =$$

$$= \int_{-T/2}^{T/2} \left[\sum_{(n,m) \in \mathbb{Z}^2} g_{n,m} |q_{n,m}(t)|^{p-2} q_{n,m}(t) v_{n,m}(t) \right] dt$$

для будь-якого $v \in X_T$. А це означає, що $q = \lambda^{\frac{1}{p-2}} u$ — розв'язок задачі (5), (2). **Теорему доведено.**

Неважко переконатися, що задачі (8) при різних θ еквівалентні, причому $I_\theta = \theta^{2/p} I_1$.

Для подальшого нам знадобиться наступний дискретний варіант принципу концентрованої компактності (див. [24], а також [23] в неперервному випадку).

Лема 1. Нехай $v^{(j)} = \{v_{n,m}^{(j)}\}$ така послідовність невід'ємних елементів в l^1 , що $\|v^{(j)}\|_{l^1} = \theta > 0$. Тоді існує така підпослідовність (як і раніше позначається $v^{(j)}$), що виконується одна із наступних трьох можливостей:

(i) (концентрація) існує така пара $(n_j, m_j) \in \mathbb{Z}^2$, що для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться таке $r > 0$, що

$$\sum_{|n-n_j|^2 + |m-m_j|^2 \leq r^2} v_{n,m}^{(j)} \geq \theta - \varepsilon;$$

(ii) (розпливання) $\lim_{j \rightarrow \infty} \|v^{(j)}\|_{l^\infty} = 0$;

(iii) (розщеплення) знайдеться $\alpha \in (0, \theta)$ з наступною властивістю: для будь-якого $\varepsilon > 0$ існують такі невід'ємні послідовності $v^{(j,1)}, v^{(j,2)} \in l_0$, що $\|v^{(j)} - (v^{(j,1)} + v^{(j,2)})\| \leq \varepsilon$, $\|v^{(j,1)}\|_{l^1} - \alpha \leq \varepsilon$, $\|v^{(j,2)}\|_{l^1} - (\theta - \alpha) \leq \varepsilon$ для всіх достатньо великих j , і $\text{dist}[\text{supp}(v^{(j,1)}), \text{supp}(v^{(j,2)})] \rightarrow \infty$ при $j \rightarrow \infty$.

Основним результатом статті є наступна теорема.

Теорема 2. В зроблених припущеннях для будь-якого $T > 0$ задача (8) має розв'язок $u \in X_T$. Більше того, існує таке $T_0 > 0$, що при $T \geq T_0$ цей розв'язок не є сталим.

Доведення. *Крок 1.* Нехай $\{w^{(j)}\}$ довільна мінімізуюча послідовність задачі (8), тобто $w^{(j)} = \{w_{n,m}^{(j)}(t)\} \in X_T$, $S(w^{(j)}) = \theta$ і

$\Psi(w^{(j)}) \rightarrow I_\theta$. При цьому можна вважати, що $\Psi(w^{(j)}) \leq 2I_\theta$. За умовою (P): $\Psi(u) \geq \frac{\beta_0}{2} \|u\|_T^2$, де $\beta_0 = \min\{1, \alpha_0\}$. Тому існує така стала $C > 0$, яка залежить тільки від α_0 , що

$$\|w^{(j)}\|_T^2 \leq CI_\theta. \quad (11)$$

Покладемо $v_{n,m}^{(j)} = \frac{1}{P} \int_{-T/2}^{T/2} g_{n,m} |w_{n,m}^{(j)}(t)|^p dt$, $v^{(j)} = \{v_{n,m}^{(j)}\}$. Оскільки

$H^1(-T/2, T/2)$ неперервно вкладений в $L^p(-T/2, T/2)$ (з константою, що не залежить від T), то із нерівності (11) випливає, що

$$\sum_{(n,m) \in \mathbb{Z}^2} (v_{n,m}^{(j)})^{2/p} \leq C \sum_{(n,m) \in \mathbb{Z}^2} \|w_{n,m}^{(j)}\|_{L^p(-T/2, T/2)}^2 \leq C \|w^{(j)}\|_T^2 \leq CI_\theta. \quad (12)$$

Крім того,

$$\sum_{(n,m) \in \mathbb{Z}^2} v_{n,m}^{(j)} = \|v^{(j)}\|_{l^1} = \theta > 0. \quad (13)$$

Далі до послідовності $\{v^{(j)}\}$ застосуємо лему 1. Після переходу до підпослідовності (з тим самим позначенням) має виконуватися одна із можливостей (i)–(iii).

Крок 2. Розпливання (ii) не може виконуватися. Справді, якщо

$\|v^{(j)}\|_{l^\infty} \rightarrow 0$, при $j \rightarrow \infty$, то

$$\begin{aligned} \|v^{(j)}\|_{l^1} &= \sum_{(n,m) \in \mathbb{Z}^2} [v_{n,m}^{(j)}]^{1-2/p} [v_{n,m}^{(j)}]^{2/p} \leq \\ &\leq \sup_{(n,m) \in \mathbb{Z}^2} [v_{n,m}^{(j)}]^{1-2/p} \sum_{(n,m) \in \mathbb{Z}^2} [v_{n,m}^{(j)}]^{2/p} \leq [\|v^{(j)}\|_{l^\infty}]^{1-2/p} CI_\theta. \end{aligned}$$

Отже, $\|v^{(j)}\|_{l^1} \rightarrow 0$, що суперечить (13).

Припустимо тепер, що виконується розщеплення (iii). Визначимо $w^{(j,1)}, w^{(j,2)} \in X_T$ наступним чином. Нехай $u_{n,m}^{(j,i)} = w_{n,m}^{(j)}$ при $(n,m) \in \text{supp}(v^{(j,i)})$ і $u_{n,m}^{(j,i)} = 0$ у протилежному випадку ($i = 1, 2$).

Неважко перевірити, що $S(u^{(j,i)}) = \sum_{(n,m) \in \text{supp}(v^{(j,i)})} v_{n,m}^{(j)}$ і, отже,

$$\lim_{j \rightarrow \infty} S(u^{(j,1)}) = \alpha, \quad \lim_{j \rightarrow \infty} S(u^{(j,2)}) = \theta - \alpha.$$

Покладемо

$$s_1^{(j)} = \left(\frac{\alpha}{S(u^{(j,1)})} \right)^{1/p}, \quad s_2^{(j)} = \left(\frac{\theta - \alpha}{S(u^{(j,2)})} \right)^{1/p}$$

і $w^{(j,i)} = s_i^{(j)} u^{(j,i)}$. Тоді із (iii) випливає, що

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \left\| w^{(j)} - (w^{(j,1)} + w^{(j,2)}) \right\|_T = 0.$$

Звідси випливає, що

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \left\| \Psi(w^{(j)}) - \Psi(w^{(j,1)} + w^{(j,2)}) \right\|_T = 0. \quad (14)$$

Оскільки носії $\{w^{(j,1)}\}$ і $\{w^{(j,2)}\}$ не перетинаються, то

$$\Psi(w^{(j,1)} + w^{(j,2)}) = \Psi(w^{(j,1)}) + \Psi(w^{(j,2)}) \geq I_\alpha + I_{\theta - \alpha}.$$

З іншого боку, із (14) випливає, що $\lim_{j \rightarrow \infty} \Psi(w^{(j,1)} + w^{(j,2)}) = I_\theta$. Отже,

$I_\theta \geq I_\alpha + I_{\theta - \alpha}$. Однак $I_\theta = \theta^{2/p} I_1$, $p > 2$, $\theta > 0$, $\alpha \in (0, \theta)$. Легко

бачити, що функція $f(x) = x^{\frac{2}{p}} + (1-x)^{\frac{2}{p}}$ на відрізку $[0, 1]$ досягає мінімуму на кінцях відрізка, який дорівнює 1, а отже, $f(x) > 1$ для

всіх $x \in (0, 1)$. Тепер поклавши $x = \frac{\alpha}{\theta}$, маємо, що

$\theta^{\frac{2}{p}} < \alpha^{\frac{2}{p}} + (\theta - \alpha)^{\frac{2}{p}}$. Звідси, одержуємо $I_\theta < I_\alpha + I_{\theta - \alpha}$. Одержана су-

перечність показує, що твердження (iii) не може виконуватися.

Крок 3. Отже, для послідовності $\{v^{(j)}\}$ має місце (i) (концентрація). Зауважимо, що згідно умов періодичності,

$$\Psi(\{u_{n+N,m}(t)\}) = \Psi(\{u_{n,m+N}(t)\}) = \Psi(\{u_{n,m}(t)\}),$$

$$S(\{u_{n+N,m}(t)\}) = S(\{u_{n,m+N}(t)\}) = S(\{u_{n,m}(t)\}).$$

Тому, замінюючи $\{w_{n,m}^{(j)}(t)\}$ на $\{w_{n+a_j N, m+b_j N}^{(j)}(t)\}$ з деякими $a_j, b_j \in \mathbb{Z}$, можна вважати, що в твердженні (i) $(n_j, m_j) = (0, 0)$, тобто для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться таке $r > 0$, що

$$\sum_{|n-n_j|^2 + |m-m_j|^2 > r^2} v_{n,m}^{(j)} \leq \varepsilon.$$

Оскільки $g_{n,m} > 0$ — періодична послідовність, то остання нерівність означає, що для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться таке $C > 0$, що

$$\sum_{|n-n_j|^2 + |m-m_j|^2 > r^2} \int_{-T/2}^{T/2} |w_{n,m}^{(j)}(t)|^p dt \leq C\varepsilon. \quad (15)$$

Згідно (11), послідовність $\{w^{(j)}\}$ обмежена в X_T . Переходячи до підпослідовності (з тим самим позначенням), можна вважати, що $w^{(j)} \rightarrow u = \{u_{n,m}\}$ слабо в X_T . Оскільки X_T неперервно вкладений в $L^p(-T/2, T/2; l^p)$, то $w^{(j)} \rightarrow u$ слабо і в останньому просторі. Крім того, $H^1(-T/2, T/2)$ компактно вкладений в $L^p(-T/2, T/2)$. Тому, переходячи до підпослідовності, можна вважати, що $w_{n,m}^{(j)} \rightarrow u_{n,m}$ сильно в $L^p(-T/2, T/2)$ для будь-яких $(n, m) \in \mathbb{Z}^2$. Крім того, із рівності $S(w^{(j)}) = \theta$ випливає, що $\{w^{(j)}\}$ обмежена послідовність в $L^p(-T/2, T/2; l^p)$. Разом зі збіжністю $w_{n,m}^{(j)} \rightarrow u_{n,m}$ і (15) це дає сильну збіжність $w^{(j)} \rightarrow u$ в $L^p(-T/2, T/2; l^p)$. Разом з неперервністю S на $L^p(-T/2, T/2; l^p)$ це показує, що $S(u) = \theta$. Оскільки Ψ — неперервний квадратичний додатно визначений функціонал, то він слабо напівнеперервний знизу. Звідси випливає, що

$$I_\theta \leq \Psi(u) \leq \lim_{j \rightarrow \infty} \Psi(w^{(j)}) = I_\theta.$$

Таким чином, $\Psi(u) = I_\theta$ і u — розв'язок задачі (8).

Крок 4. Доведемо, що при достатньо великих T цей розв'язок не сталий. Припустимо, що $u = \{u_{n,m}\}$ — сталий розв'язок задачі (8). Тоді

$$0 < \theta = S(u) = \frac{1}{p} \sum_{(n,m) \in \mathbb{Z}^2} g_{n,m} |u_{n,m}|^p T.$$

Звідси $\theta \leq C \|u\|_{l^p}^p T$ або $\|u\|_{l^p} \geq C_0 \theta / T^{1/p}$. Тоді

$$\Psi(u) = \frac{1}{2} (Au, u) T \geq \frac{\alpha_0}{2} \|u\|_{l^2}^2 T \geq \frac{\alpha_0 (C_0 \theta)^2}{2} T^{1-2/p}. \quad (16)$$

З іншого боку, нехай $v = \{v_{n,m}\}$ таке, що $v_{n,m} \equiv 0$ при $(n, m) \neq (0, 0)$, $v_{0,0}(t) = \lambda \sin\left(\frac{2\pi t}{\eta T}\right)$ при $0 \leq t \leq \eta T$, $v_{0,0}(t) = 0$ при $\eta T < t < T$ і $v_{0,0}$ продовжена на всю вісь як T -періодична функція ($0 < \eta < 1$). Константу λ виберемо із умови $S(v) = \theta$. Маємо

$$S(v) = \frac{g_{0,0}}{P} \int_0^T \left| \lambda \sin\left(\frac{2\pi t}{\eta T}\right) \right|^p dt = g_{0,0} p^{-1} (\eta T) \lambda^p A_p = \theta,$$

де $A_p = \int_0^1 |\sin 2\pi t|^p dt$. Звідси $\lambda = (g_{0,0} p^{-1} \theta^{-1} \eta T A_p)^{-1/p}$.

Далі, враховуючи, що $\int_0^1 \cos^2 2\pi t dt = \int_0^1 \sin^2 2\pi t dt = A_2$, маємо

$$\begin{aligned} 2\Psi(v) &= \lambda^2 \int_0^{\eta T} \left[\left(\frac{2\pi}{\eta T} \cos\left(\frac{2\pi t}{\eta T}\right) \right)^2 + c_{0,0} \sin^2\left(\frac{2\pi t}{\eta T}\right) \right] dt = \\ &= \lambda^2 A_2 \left(\frac{4\pi^2}{\eta T} + c_{0,0} \eta T \right) = A_2 (g_{0,0} p^{-1} \theta^{-1} \eta T A_p)^{-2/p} \left(\frac{4\pi^2}{\eta T} + c_{0,0} \eta T \right) = \\ &= A_2 (g_{0,0} p^{-1} \theta^{-1} A_p)^{-2/p} (\eta T)^{1-2/p} (4\pi^2 (\eta T)^{-2} + c_{0,0}). \end{aligned}$$

Зауважимо, що згідно умови (P), $c_{0,0} \geq \alpha_0 > 0$. Тепер виберемо $\eta \in (0, 1)$ таким чином, щоб

$$A_2 c_{0,0} (g_{0,0} p^{-1} \theta^{-1} A_p)^{-2/p} \eta^{1-2/p} < \alpha_0 (C_0 \theta)^2.$$

Тоді, враховуючи (16), при достатньо великих T маємо:

$$\begin{aligned} \Psi(v) &\leq \frac{1}{2} A_2 c_{0,0} (g_{0,0} p^{-1} \theta^{-1} A_p)^{-2/p} \eta^{1-2/p} T^{1-2/p} < \\ &< \frac{\alpha_0 (C_0 \theta)^2}{2} T^{1-2/p} \leq \Psi(u), \end{aligned}$$

Тобто $\Psi(v) < \Psi(u)$. А це означає, що u не може бути розв'язком задачі мінімізації (8). **Теорему доведено.**

Висновки. Таким чином, у цій статті за допомогою методу умовної мінімізації і принципу концентрованої компактності одержано результат про існування періодичних розв'язків для нескінченної системи лінійно зв'язаних нелінійних осциляторів на двовимірній ґратці.

Список використаних джерел:

1. Бак С. М. Існування періодичних за часом розв'язків системи осциляторів на двовимірній ґратці. *Карпатські математичні публікації*. 2012. Т. 4, № 2. С. 175-196.
2. Бак С. М. Існування відокремлених біжучих хвиль для системи нелінійно зв'язаних осциляторів на двовимірній ґратці. *Український математичний журнал*. 2017. Т. 69, № 4. С. 435-444.
3. Бак С. М. Існування гетероклінічних біжучих хвиль у системі осциляторів на двовимірній ґратці. *Математичні методи та фізико-механічні поля*. 2014. Т. 57, № 3. С. 45-52.
4. Бак С. М. Існування дозвуків періодичних біжучих хвиль в системі нелінійно зв'язаних нелінійних осциляторів на двовимірній ґратці. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки*: зб. наук. праць. Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2014. Вип. 10. С. 17-23.
5. Бак С. М. Існування надзвуків періодичних біжучих хвиль в системі нелінійно зв'язаних нелінійних осциляторів на двовимірній ґратці. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки*: зб. наук. праць. Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2015. Вип. 12. С. 5-12.
6. Бак С. М. Існування періодичних біжучих хвиль в системі Фермі-Пасти-Улама на двовимірній ґратці. *Математичні студії*. 2012. Т. 37, № 1. С. 76-88.
7. Бак С. М. Існування стоячих хвиль в дискретному нелінійному рівнянні Шредінґера з кубічною нелінійністю на двовимірній ґратці. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки*: зб. наук. праць. Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2017. Вип. 16. С. 21-29.
8. Бак С. М. Періодичні біжучі хвилі в дискретному рівнянні \sin -Гордона на двовимірній ґратці. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки*: зб. наук. праць. Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2013. Вип. 9. С. 5-10.
9. Бак С. М., Баранова О. О., Білик Ю. П. Коректність задачі Коші для нескінченної системи нелінійних осциляторів, розміщених на двовимірній решітці. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки*: зб. наук. праць. Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2010. Вип. 4. С. 18-24.
10. Бак С. М., Ковтонюк Г. М., Печериця І. В. Стоячі хвилі з періодичною амплітудою в дискретному нелінійному рівнянні типу Шредінґера із насичуваною нелінійністю на двовимірній ґратці. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки*: зб. наук. праць. Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2018. Вип. 18. С. 5-13.
11. Бак С. М., Рум'янцева К. Є. Коректність задачі Коші для нескінченної системи нелінійних осциляторів з кубічним потенціалом на двовимірній ґратці. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки*: зб. наук. праць. Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2019. Вип. 21. С. 15-24.

- науки: зб. наук. праць. Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2012. Вип. 6. С. 29-36.
12. Bak S. H., Pankov A. A. Бегущие волны в системах осцилляторов на двумерных решетках. *Український математичний вісник*. 2010. Т. 7. № 2. С. 154-175.
 13. Bak S. M. Існування та єдиність глобального розв'язку задачі Коші для нескінченної системи нелінійних осциляторів на двовимірній ґратці. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки: зб. наук. праць. Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка*, 2011. Вип. 5. С. 3-9.
 14. Bak S. The existence of heteroclinic traveling waves in the discrete sine-Gordon equation with nonlinear interaction on a 2D-lattice. *Journal of mathematical physics, analysis, geometry*. 2018. Vol. 14, № 1. P. 16-26.
 15. Bak S. M. Global well-posedness of the Cauchy problem for system of oscillators on 2D-lattice with power potentials. *Український математичний вісник*. 2019. Т. 16. № 4. С. 465-476. (Engl.: Bak S. M. Global well-posedness of the Cauchy problem for system of oscillators on 2D-lattice with power potentials. *Journal of Mathematical Sciences*. 2020. Vol. 246. № 5 (May). P. 593-601.)
 16. Bak S. M. Existence of heteroclinic traveling waves in a system of oscillators on a two-dimensional lattice. *Journal of Mathematical Sciences*. 2016. Vol. 217. № 2. P. 187-197.
 17. Bak S. M. Existence of solitary traveling waves in a system of nonlinearly coupled oscillators on the 2D lattice. *Ukrainian mathematical Journal*. 2017. Vol. 4 (69). P. 509-520.
 18. Bak S. M. Homoclinic traveling waves in discrete sine-Gordon equation with nonlinear interaction on 2D lattice. *Matematychni Studii*. 2019. Vol. 52. № 2. P. 176-184.
 19. Bak S. M., Kovtonyuk G. M. Existence of solitary traveling waves in Fermi-Pasta-Ulam system on 2D lattice. *Matematychni Studii*. 2018. Vol. 50. № 1. P. 75-87.
 20. Bak S. M., Kovtonyuk G. M. Existence of standing waves in DNLS with saturable nonlinearity on 2D lattice. *Communications in Mathematical Analysis*. 2019. Vol. 22. № 2. P. 18-34.
 21. Feckan M., Rothos V. Traveling waves in Hamiltonian systems on 2D lattices with nearest neighbour interactions. *Nonlinearity*. 2007. № 20. P. 319-341.
 22. Friesecke G., Matthies K. Geometric solitary waves in a 2D math-spring lattice. *Discrete and continuous dynamical systems*. 2003. Vol. 3. № 1. P. 105-114.
 23. Lions P. L. The concentration-compactness principle in the calculus of variation. The locally compact case, part I. *Ann. Inst. H. Poincare, Anal. Non Lineaire*. 1984. Vol. 1. № 2. P. 109-145.
 24. Pankov A. *Traveling Waves and Periodic Oscillations in Fermi-Pasta-Ulam Lattices*. London; Singapore: Imperial College Press, 2005. 196 p.
 25. Srikanth P. On periodic motions of two-dimensional lattices. *Functional analysis with current applications in science, technology and industry*. 1998. Vol. 377. P. 118-122.

EXISTENCE OF PERIODIC SOLUTIONS IN THE SYSTEM OF NONLINEAR OSCILLATORS WITH POWER POTENTIALS ON A TWO-DIMENSIONAL LATTICE

This article is devoted to the study of an infinite-dimensional Hamiltonian system, which describes an infinite system of linearly coupled nonlinear oscillators on a two-dimensional lattice. This system is a countable system of ordinary differential equations. It is convenient to consider this system as a differential-operator equation in Hilbert space of real two-way sequences.

The problem of existence of periodic solutions for such systems with power potential is considered. The main conditions for the existence of these solutions are the spatial periodicity of the coefficients of the linear interaction of oscillators and the positivity of this operator. This article shows that periodic solutions can be constructed using the constrained minimization method. For this, a functional is constructed whose critical points are the desired periodic solutions. This functional is represented as the difference between the quadratic and non-quadratic parts. Next, we consider the problem of constrained minimization of the quadratic part of the functional under the condition that the non-quadratic part is constant. Using the Lagrange multiplier method, it was found that the periodic solutions of this system linearly depend on the solutions of the considered problem of constrained minimization, in particular, the coefficient of linear dependence is expressed in terms of the Lagrange multiplier. Using a discrete version of the concentration compactness principle, it is proved that the problem of constrained minimization under consideration has a solution, and therefore, there are periodic solutions of the original system. In particular, it is shown that for an arbitrary minimizing sequence of the quadratic part of the constructed functional, the possibility of «concentration» of the concentration compactness principle is satisfied, which allowed to prove the boundedness of this sequence. Moreover, it is proved that for sufficiently large values of periods these solutions are not constant.

Key words: *nonlinear oscillators, 2D-lattice, periodic solutions, constrained minimization method.*

Отримано: 17.09.2020

УДК 518.33,681.3.0.688

DOI: 10.32626/2308-5878.2020-21.17-25

А. Ф. Верлань*, д-р техн. наук, професор,

В. В. Понеділок**, канд. техн. наук

*Інститут проблем моделювання в енергетиці
імені Г. Є. Пухова НАН України, м. Київ,

**Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

ПРО ДЕЯКІ РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕННЯ ІНТЕГРАЛЬНОГО МЕТОДУ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

У статті розглянуто питання застосування інтегрального методу для розв'язування лінійних диференціальних рівнянь. Важливою передумовою використання такого підходу є можливість зведення різних видів звичайних диференціальних рівнянь до еквівалентних інтегральних рівнянь Вольтерри, тоді як зворотне перетворення не завжди можливе. Переваги інтегральних рівнянь в обчислювальному плані визначаються згладжуючими властивостями інтегральних операторів, що проявляється в підвищенні точності отриманих розв'язків або в зменшенні кількості обчислювальних операцій в процесі їх розв'язання. Крім цього, інтегральні рівняння дозволяють розв'язувати задачі, де задані або шукані функції мають розриви 1-го роду. З більш загальної точки зору, при розв'язуванні диференціальних рівнянь збільшення похибки правої частини тягне за собою швидке зростання похибок результатів разом із збільшенням швидкості їх накопичення, а згладжуючі властивості інтегрального методу, за рахунок стійкості прямих методів, дозволяють отримати більш точний розв'язок в умовах наявності похибок в правій частині диференціального рівняння. Позитивні властивості та ефективність застосування інтегрального підходу для розв'язування лінійних диференціальних рівнянь розглядаються на основі обчислювальних експериментів, які дозволяють практично переконатись в доцільності використання інтегральних методів опису та аналізу прикладних задач.

Ключові слова: *інтегральний метод, лінійні диференціальні рівняння, еквівалентні інтегральні рівняння.*

Вступ. При розв'язанні багатьох задач дослідження динамічних систем перехід від диференціальних рівнянь до інтегральних дозволяє використовувати ряд переваг інтегрального представлення задачі,

таких як повний математичний опис, згладжуючі властивості інтегральних операторів; вивчення, забезпечення і прискорення збіжності ітераційних методів; висока стійкість прямих методів [1-5].

Виклад основного матеріалу. Задача Коші для диференціального рівняння із змінними коефіцієнтами

$$\frac{d^n y(x)}{dx^n} + a_1(x) \cdot \frac{d^{n-1} y(x)}{dx^{n-1}} + \dots + a_n(x) \cdot y(x) = f(x), x \geq 0,$$

$$y(0) = C_0; y'(0) = C_1; \dots; y^{(n-1)}(0) = C_{n-1}, \quad (1)$$

має еквівалентне представлення у вигляді інтегрального рівняння [4]:

$$u(x) + \int_0^x K(x, s) \cdot u(s) ds = \varphi(x), \quad (2)$$

де

$$\begin{cases} u(x) = \frac{d^n y(x)}{dx^n}, \\ \int_0^x u(s) ds + C_1 = \frac{d^{n-1} y(x)}{dx^{n-1}}, \\ \dots, \dots, \dots \end{cases} \quad (3)$$

$$y(x) = C_{n-1} \cdot \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \dots + C_1 \cdot x + C_0 + \frac{1}{(n-1)!} \cdot \int_a^x (x-s)^{n-1} \cdot u(s) ds, \quad (4)$$

$$K(x, s) = \sum_{i=1}^n a_i(x) \cdot \frac{(x-s)^{i-1}}{(i-1)!}, \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \varphi(x) = & f(x) - C_{n-1} \cdot a_1(x) - (C_{n-1} \cdot x + C_{n-2}) \cdot a_2(x) - \\ & - \dots - \left(C_{n-1} \cdot \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \dots + C_1 \cdot x + C_0 \right) \cdot a_n(x). \end{aligned}$$

При отриманні виразів (2)-(5) виконується інтегрування записів (3) та використовується формула:

$$\int_a^x dx_1 \int_a^{x_1} dx_2 \dots \int_a^{x_{n-1}} z(x_n) dx_n = \frac{1}{(n-1)!} \cdot \int_a^x (x-s)^{n-1} \cdot z(s) ds.$$

Враховуючи, що звичайні диференціальні рівняння згідно (2)-(5) зводяться до еквівалентних інтегральних рівнянь із виродженими ядрами, доцільно розглянути можливість розв'язання диферен-

ціальних рівнянь шляхом застосування методу квадратур до їх інтегрального еквіваленту. Дослідження даного методу шляхом обчислювальних експериментів підтверджує його ефективність та позитивні властивості.

Розглянемо приклади.

Приклад 1. Нехай потрібно розв'язати диференціальне рівняння з початковими умовами

$$y'' + y' + y = 3e^{-2x}, \quad y'(0) = -2, \quad y(0) = 1, \quad (6)$$

на інтервалі $(0; 1)$.

Еквівалентне інтегральне рівняння для рівняння (6) має вигляд

$$u(x) = 3e^{-2x} + 2x + 1 - \int_0^x (1+x-s) \cdot u(s) ds, \quad (7)$$

а розв'язок визначається виразом

$$y(x) = -2x + 1 - \int_0^x (x-s) \cdot u(s) ds. \quad (8)$$

Застосовуючи формулу трапецій до інтегралів у (7)-(8), отримуємо:

$$\begin{aligned} u(0) &= 3e^{-2 \cdot 0} + 2 \cdot 0 + 1 = 4, \\ u(x_i) &= \\ &= \frac{2}{2+h} \cdot \left[3e^{-2x_i} + 2x_i + 1 - h \cdot \left(\sum_{j=1}^{i-1} A_j u_j + x_i \sum_{j=1}^{i-1} A_j u_j - \sum_{j=1}^{i-1} A_j x_j u_j \right) \right], \\ y(0) &= 1, \\ y(x_i) &= -2x_i + 1 + h \cdot \left(x_i \sum_{j=1}^{i-1} A_j u_j - \sum_{j=1}^{i-1} A_j x_j u_j \right). \end{aligned} \quad (9)$$

Порівняємо розв'язки двома методами при різних кроках і однаковому часі обчислень при наявних похибках у вихідних даних.

Час розв'язання інтегральним методом в середньому дорівнює 0,0121 с., а методом Рунге-Кутта — 0,0122 с.

Нехай на праву частину

$$f(x) = 3e^{-2x} \quad (10)$$

диференціального рівняння (6) накладений випадковий процес з максимальною амплітудою δ_f , виражений в % від амплітуди функції, що стоїть в правій частині (10). Результати розв'язування, які демонструють вищу точність при застосуванні інтегрального методу, наведено на рис. 1-4.

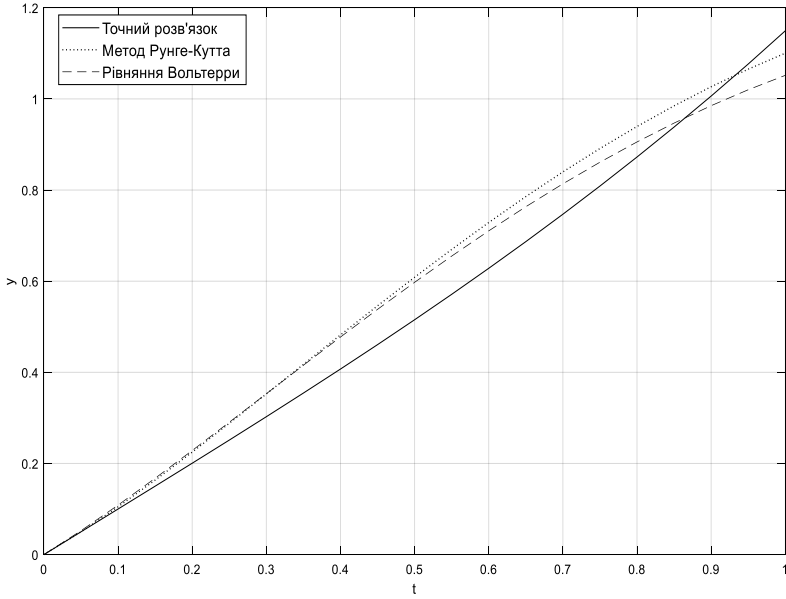


Рис. 1. Розв'язок рівняння з урахуванням шуму $\delta_f = 5\%$

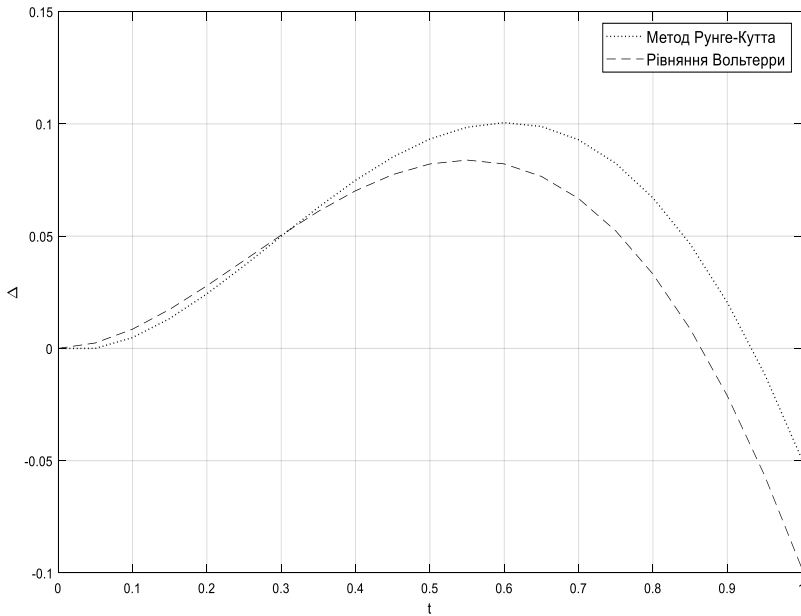


Рис. 2. Відносна похибка розв'язку

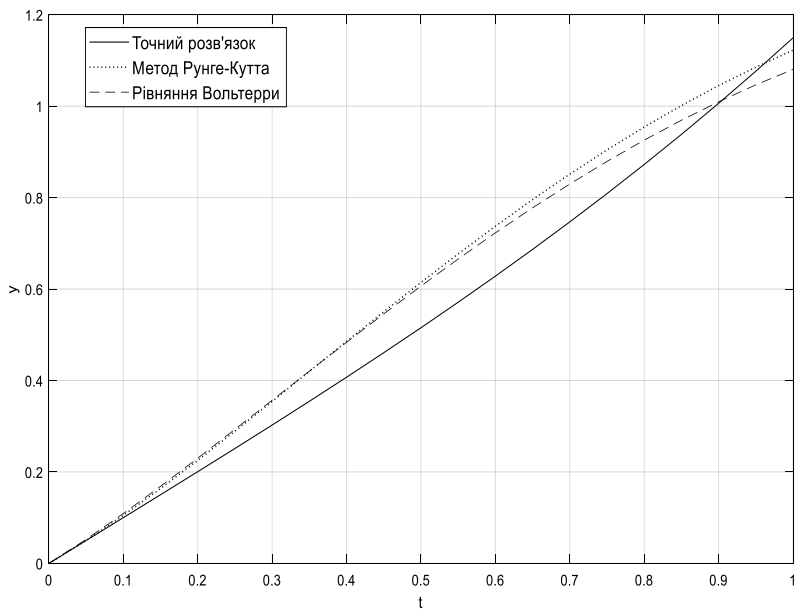


Рис. 3. Розв'язок рівняння з урахуванням шуму $\delta_f = 10\%$

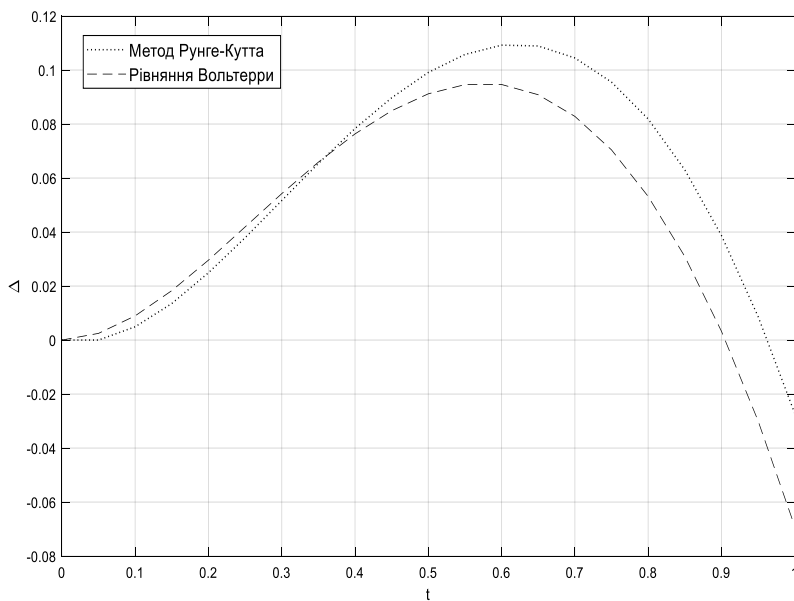


Рис. 4. Відносна похибка розв'язку

При застосуванні методу Рунге-Кутта подальше збільшення похибки правої частини тягне за собою швидке зростання похибок результатів разом із збільшенням швидкості їх накопичення, що приводить до меншої точності обчислень, у порівнянні з інтегральним методом. Таким чином, згладжуючі властивості інтегрального методу дозволяють отримати більш точний розв'язок за наявності похибки в правій частині диференціального рівняння.

Приклад 2. Задано диференціальне рівняння з початковими умовами

$$\begin{aligned} y'' + y' - 2y &= e^{-x}, \\ y'(0) &= 0, \quad y(0) = 1. \end{aligned} \quad (11)$$

Еквівалентне інтегральне рівняння має вигляд

$$u(x) = e^{-x} + 2x - 1 - \int_0^x (1 + 2(x-s)) \cdot u(s) ds, \quad (12)$$

а розв'язок визначається виразом

$$y(x) = x + \int_0^x (x-s) \cdot u(s) ds. \quad (13)$$

Застосовуючи формулу трапецій до (12), (13) і враховуючи співвідношення для методу квадратур, отримаємо:

$$\begin{aligned} u(0) &= e^0 + 2 \cdot 0 - 1 = 0, \\ u(x_i) &= \frac{2}{2+h} \times \\ &\times \left[e^{-2x_i} + 2x_i - 1 - h \cdot \left(\sum_{j=1}^{i-1} A_j u_j + 2x_i \sum_{j=1}^{i-1} A_j u_j - 2 \sum_{j=1}^{i-1} A_j x_j u_j \right) \right], \\ y(0) &= 1, \\ y(x_i) &= x_i + h \times \\ &\times \left(x_i \sum_{j=1}^{i-1} A_j u_j - \sum_{j=1}^{i-1} A_j x_j u_j \right). \end{aligned} \quad (14)$$

Поведінку похибки при розв'язанні порівнюваними методами показано на рис. 5-8. Дослідимо залежність похибки розв'язку порівнюваними методами від похибки задання правої частини. Отже, при приблизно однаковому числі операцій, починаючи з деякого значення похибки правої частини точність інтегрального методу буде вище.

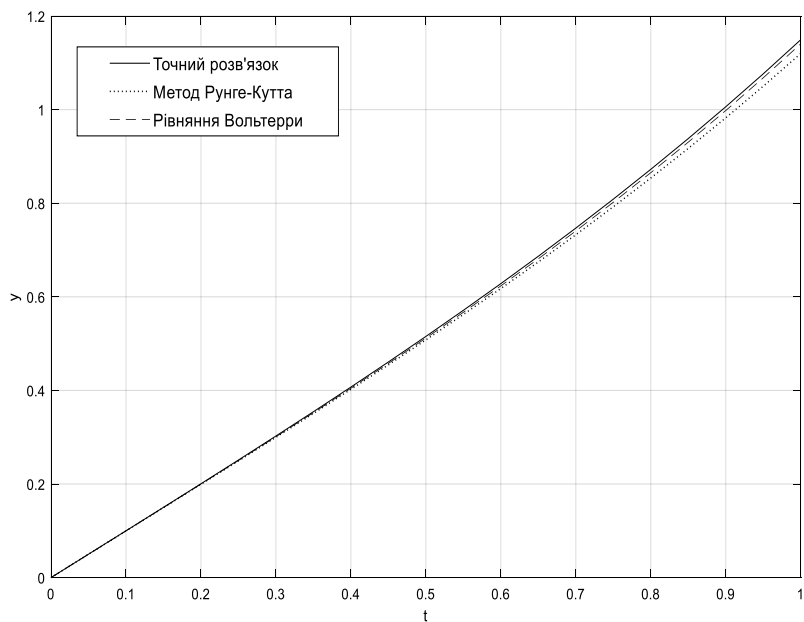


Рис. 5. Розв'язок рівняння з урахуванням шуму $\delta_f = 5\%$

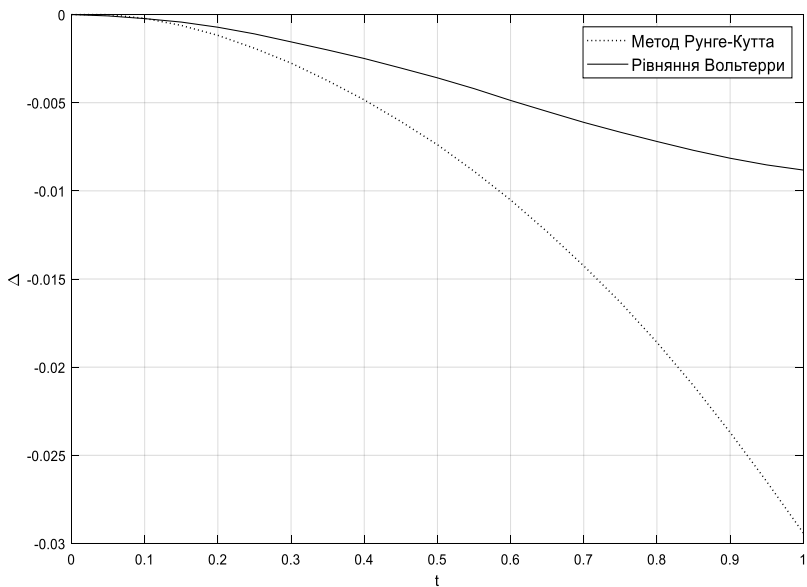


Рис. 6. Відносна похибка розв'язку

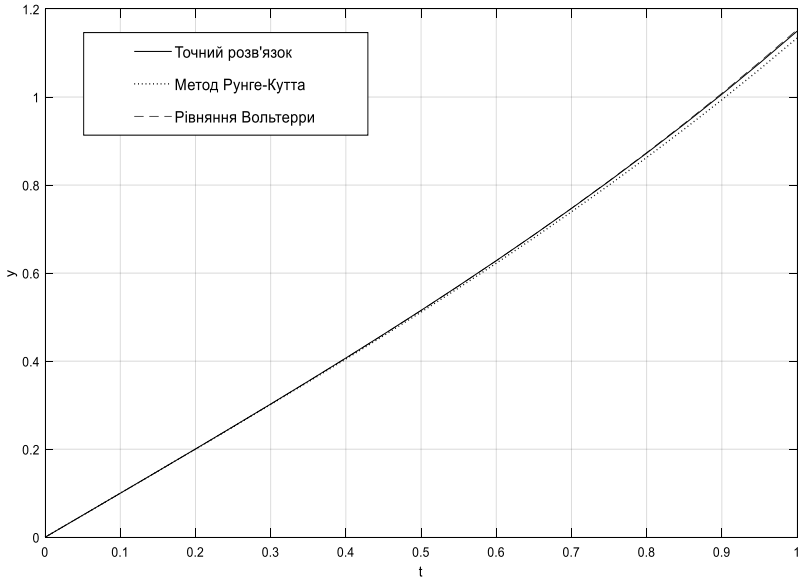


Рис. 7. Розв'язок рівняння з урахуванням шуму $\delta_f = 10\%$

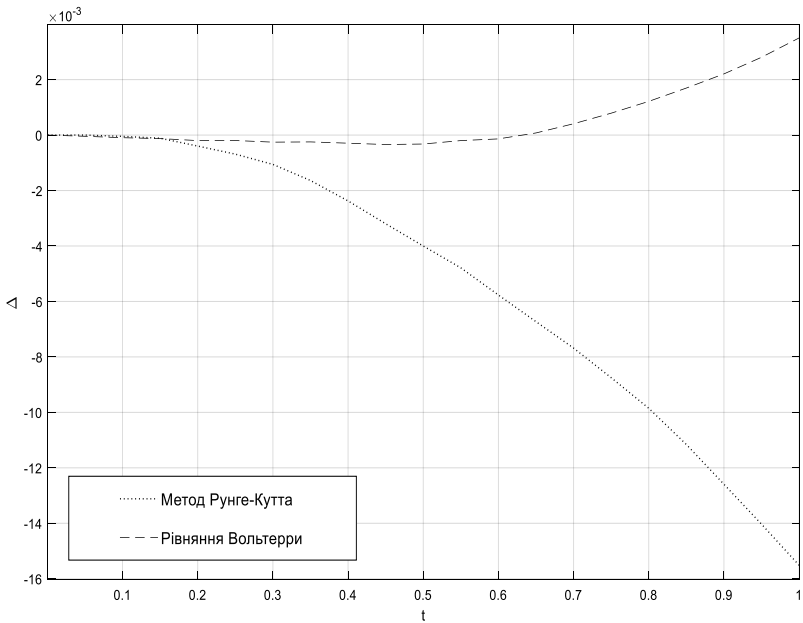


Рис. 8. Відносна похибка розв'язку

Висновки. Таким чином, на підставі обчислювальних експериментів можна зробити висновок, що використання еквівалентної інтегральної форми для розв'язання лінійних диференціальних рівнянь різних порядків в ряді випадків дозволяє отримати покращення точності розв'язку при приблизно однаковому числі операцій, які виконуються. Згладжуючі властивості інтегральних операторів зумовлюють ефективність застосування інтегрального методу розв'язання диференціальних рівнянь в умовах наявності завад.

Список використаних джерел:

1. Васильева А. Б., Тихонов Н. А. Интегральные уравнения. [2-е изд.]. М.: Физматлит, 2004. 160 с.
2. Вержбицкий В. М. Численные методы. Математический анализ и обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Высш. шк., 2001. 383 с.
3. Верлань А. Ф., Сизиков В. С. Интегральные уравнения: Методы, алгоритмы, программы. Киев: Наук. думка, 1986. 543 с.
4. Верлань А. Ф., Москалюк С. С. Математическое моделирование непрерывных динамических систем. Киев: Наук. думка, 1988. 288 с.
5. Манжиров А. В., Полянин А. Д. Справочник по интегральным уравнениям: Методы решения. М.: Изд-во «Факториал Пресс», 2000. 384 с.

SOME RESULTS RESEARCH THE INTEGRAL METHOD SOLVING LINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS

The article considers the application of the integrated method for solving linear differential equations. An important prerequisite for using this approach is the possibility of reducing different types of ordinary differential equations to equivalent Volterra integral equations, while the inverse transformation is not always possible. The advantages of integral equations in the computational plan are determined by the smoothing properties of the integral operators, which is manifested in the increased accuracy of the obtained solutions or in the reduced number of computational operations in the process of their solution. In addition, integral equations allow solving problems where given or required functions have breaks of the first kind. From a more general point of view, when solving differential equations, increasing the error of the right part entails a rapid increase in the errors of the results together with increasing the rate of their accumulation, and the smoothing properties of the integrated method, due to the stability of direct methods, conditions of errors in the right part of the differential equation. The positive properties and efficiency of the integrated approach for solving linear differential equations are considered based on computational experiments, which allow to practically prove the expediency of using integrated methods of description and analysis of applied problems.

Keywords: *integral method, linear differential equations, equivalent integral equations.*

Отримано: 7.10.2020

УДК 519.6

DOI: 10.32626/2308-5878.2020-21.26-42

А. А. Верлань*, д-р техн. наук,**С. А. Положаєнко****, д-р техн. наук, професор

* Норвезький університет науки і технологій, м. Йовік, Норвегія,
Національний технічний університет України

«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», м. Київ,

** Одеський національний політехнічний університет, м. Одеса

АНАЛІЗ МОЖЛИВОСТЕЙ ВИБОРУ ТА АДАПТАЦІЇ АЛГОРИТМІВ ЧИСЕЛЬНОЇ РЕАЛІЗАЦІЇ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ ДИНАМІЧНИХ МОДЕЛЕЙ

У роботі аналізуються можливості вибору та адаптації обчислювальних алгоритмів при реалізації диференціальних динамічних моделей, тобто при розв'язуванні звичайних диференціальних рівнянь. Обмежені ресурси комп'ютерно-інтегрованих систем визначають вимоги до швидкодії обчислювально-керуючих систем, що свідчить про актуальність питання цільового вибору або адаптації числових методів розв'язування рівнянь динаміки об'єктів. Процес вдосконалення числових методів має велику історію та не припиняється і дотепер. Зростання складності досліджуваних динамічних об'єктів зумовило розвиток неявних методів числового аналізу динаміки, але проведені дослідження свідчать, що застосування неявних методів виправдано, якщо припустимо застосування значного за величиною кроку інтегрування вихідної системи. Крім того, з'ясовано, що наявні результати по формалізації степеневих методів розв'язування алгебраїчних рівнянь на кроці інтегрування і адаптація їх при комп'ютерному використанні поки ще недостатні для вирішення питання про їх застосування при дослідженні складних динамічних об'єктів. Обмеження кроку інтегрування зверху свідчить про недоцільність використання методів Рунге-Кутта високого порядку для цілей моделювання динаміки досліджуваних систем в реальному часі. Відповідно щодо квадратурних методів, то у загальному вигляді задача формалізації побудови не вирішена. Таким чином, задачу оптимального вибору методу може бути сформульовано так: потрібно визначити числовий метод інтегрування рівнянь динаміки об'єкта, що моделюється, для якого може бути досягнута необхідна швидкість управляючої системи, а похибка розв'язування рівнянь динаміки не перевищує заданого значення. Проведено аналіз властивостей різних груп числових методів, який дає змогу зробити висновок про те, що при виборі найкращого методу вихідну множину необхідних методів слід формувати на основі однокрокових методів типу Рунге-Кутта і квадратурних методів не вище четвертого порядку. При реалізації стаціонарних режимів в

вихідну групу методів слід включати також багатокрокові методи — явні і типу «прогноз-корекція».

Ключові слова: *числові методи, математична модель, обчислювальний алгоритм, диференціальні рівняння.*

Вступ. На даний час числові методи обчислювальної математики проникають практично у всі сфери наукової та інженерної діяльності, а математичні моделі (ММ) стають основними засобами дослідження. Значення ММ безперервно зростає у зв'язку з оптимізацією технічних пристроїв та технологічних схем планування експерименту. При цьому реалізація ММ засобами обчислювальної техніки (ОТ) здійснюється за допомогою різних методів обчислювальної математики, яка безперервно удосконалюється. Мета чинної роботи полягає у розгляді, порівняльному аналізі та адаптації обчислювальних алгоритмів реалізації диференціальних динамічних моделей як частинної задачі застосування числових методів.

Основна частина. Умови функціонування динамічних об'єктів жорстко визначають вимоги до швидкодії обчислювально-керуючих систем, які мають завжди обмежені ресурси, що свідчить про актуальність питання вибору числових методів інтегрування рівнянь динаміки об'єктів, що моделюються, при організації обчислювальних процесів.

Аналіз властивостей методів наближеного розв'язування рівнянь динаміки. На даний час відома значна кількість методів числового розв'язування систем звичайних диференціальних рівнянь (ЗДР) [1-5], основну частину яких можна розділити на три групи:

- однокрокові методи типу Рунге-Кутта і ступеневі методи;
- багатокрокові кінцево-різницеві методи (типу Мілна, Адамса);
- гібридні методи (типу Батчера).

Загальною властивістю цих методів є те, що всі вони будуються на основі *розкладання шуканої функції в степеневий ряд*, в якому зберігається (враховується) скінченна кількість членів. При цьому накладається умова — метод r -го порядку повинен давати точний розв'язок, якщо шукана функція являє собою поліном r -го ступеня. Ця умова, і той факт, що будь-яка функція, яка має достатню кількість похідних, може бути наближено замінена відповідним поліномом, визначають можливість побудови зазначених методів. Аналогічний підхід може бути здійснений і при використанні будь-якої повної системи функцій.

Інший, досить загальний підхід до питання побудови числових методів розв'язування диференціальних рівнянь, полягає в *заміні вихідної системи* деякою іншою, розв'язання якої може бути здійснено досить просто із залученням аналітичних прийомів. Найбільш відомими з таких методів є так звані *експоненційні* [6], сутність яких по-

лягає в поданні правої частини вихідної системи у вигляді суми лінійного та нелінійного членів і використанні виразу загального інтеграла для лінійних систем. Різноманітність методів має місце через різні способи уведення лінійних членів, а також завдяки різним прийомам обчислення загального інтеграла.

Незважаючи на значну кількість різноманітних обчислювальних схем (розрахункових правил) розв'язування звичайних диференціальних рівнянь з початковими умовами і чималу історію розвитку цього питання, процес вдосконалення числових методів не припиняється і дотепер. Пояснюється це значним розвитком обчислювальної техніки, який забезпечив можливість дослідження складних об'єктів, тобто можливість практичної реалізації складних обчислювальних схем. Зростання складності досліджуваних динамічних об'єктів зумовила розвиток *неявних* методів числового аналізу динаміки, що відзначаються значно кращими характеристиками стійкості у порівнянні з класичними явними методами. Різноманітність неявних обчислювальних схем розв'язування ЗДР обумовлено різноманітністю прийомів формування і розв'язування нелінійних алгебраїчних рівнянь [7].

Відмова від лінійної форми розрахункових правил привела до розвитку нелінійних числових методів розв'язування ЗДР [8, 9] і побудови схем на основі дробово-раціональної апроксимації шуканих функцій [9]. Отримали розвиток і методи, що базуються на заміні вихідної системи [9, 10].

Проаналізуємо принципи побудови методів числового розв'язування задачі Коші, а також розрахункові правила найбільш уживаних на практиці методів. При цьому, з метою спрощення запису та досягнення наочності розрахункових співвідношень, викладення матеріалу дано для випадку одного диференціального рівняння з однією невідомою

$$\dot{y} = f(y, t), \quad y(0) = y_0. \quad (1)$$

Таке спрощення не знижує загального характеру результатів у зв'язку з тим, що процедура розв'язування системи диференціальних рівнянь полягає у застосуванні розрахункових правил до кожного рівняння системи, яка розв'язується.

Під *однокроковими* методами розв'язування задачі Коші для рівняння (1) розуміють методи числового інтегрування, що дозволяють визначати наближений розв'язок в точці лише на основі отриманого раніше розв'язку для попередньої точки. У загальному вигляді алгоритми однокрокових методів представляються в наступному вигляді

$$y_{i+1} = F(f, t_i, y_i) \quad (2)$$

для явних методів інтегрування, і

$$y_{i+1} = F(f, t_i, y_i, y_{i+1}) \quad (3)$$

для неявних методів інтегрування.

В останньому випадку мають місце не розрахункові співвідношення для визначення y_{i+1} , а рівняння відносно них. Отже, при використанні неявних методів виникає необхідність розв'язування рівняння (3), а в багатовимірному випадку — систем рівнянь відносно y_{i+1} на кожному кроці. Оскільки ці рівняння, як правило, є нелінійними, то обчислювальна складність неявних методів стає очевидною. Застосування неявних методів виправдано в тих випадках, якщо може виникнути потреба використання значного (за величиною) кроку інтегрування вихідної системи або якщо рівняння (3) може бути розв'язано досить просто. Тут слід зазначити, що розв'язування рівняння (3) зазвичай ведеться ітераційним способом, тим більше, що його вигляд є якраз зручним для застосування ітерацій. Таким чином, ефективність неявних методів буде в значній мірі залежати від *збіжності ітераційного процесу*, що, в загальному випадку, визначається властивостями вихідної системи (1). На практиці процес ітерацій переривають (припиняють) після двох-трьох циклів внаслідок досягнення наперед визначеної точності розв'язку.

Аналіз однокрокових методів числового інтегрування системи (1), заснованих на багаточленних наближеннях, дозволяє виділити три принципи їх побудови:

- розкладання шуканого розв'язку в ряд Тейлора;
- компенсація перших членів ряду Тейлора для функції похибки (методи Рунге-Кутта);
- застосування квадратурних правил.

Розкладання шуканого розв'язку в ряд Тейлора відноситься до найбільш відомих способів наближеного розв'язування. Необхідність визначення похідних високого порядку від шуканого розв'язку обумовлює значну обчислювальну складність методів. Принагідно слід зазначити, що наявні результати щодо формалізації степеневих методів і адаптація їх при комп'ютерному використанні поки ще недостатні для вирішення питання про їх застосування при дослідженні складних динамічних об'єктів.

У практиці числового розв'язування рівнянь типу (1) широкого поширення набули явні методи Рунге-Кутта, що задаються правилами

$$y_{i+1} = y_i + \sum_{j=1}^q p_j k_j(h), \quad (4)$$

де

$$k_j(h) = h f \left(y_i + \sum_{s=1}^{j-1} \beta_{js} k_s(h), t_i + \alpha_j h \right), \quad (5)$$

а параметри $p_j, \alpha_j, j = \overline{1, q}, (d_1 = 0), \beta_{js}, 0 < s < j \leq q$ обираються, виходячи з умов рівності нулю перших членів ряду Тейлора функції похибки $\varphi(h)$, яка визначається рівністю

$$\varphi(h) = y(t+h) - y(t) - \sum_{j=1}^q p_j k_j(h). \quad (6)$$

Величина $\varphi(h)$ характеризує похибку методу на кроці інтегрування (локальна похибка методу) і, за припущення гладкості $f(y, t)$ по обох аргументах, може бути представлена на основі формули Тейлора у вигляді

$$\varphi(h) = \frac{\varphi^{(r+1)}(\theta h)}{(r+1)!} h^{r+1}, \quad 0 \leq \theta \leq 1, \quad (7)$$

де величина r називається порядком (ступенем) точності методу.

Методи першого порядку точності. Вони представляються таким розрахунковим правилом (метод Ейлера)

$$y_{i+1} = y_i + h f(y_i, t_i). \quad (8)$$

Методи другого порядку точності. Ці методи представляються розрахунковими правилами, параметри яких задовольняють наступній системі

$$1 - p_1 - p_2 = 0, \quad 1 - 2 p_1 \alpha_2 = 0, \quad 1 - 2 p_1 \beta_{21} = 0, \quad (9)$$

причому цю систему можна отримати прирівнюванням до нуля перших трьох членів розкладання функції $\varphi(h)$ в ряд Тейлора.

Система (9) є недовизначеною і сумісною, що призводить до існування безлічі розв'язків, представлених у вигляді однопараметричної множини. Приймаючи $\alpha_2 = b$, отримуємо для будь-яких $\beta \neq 0$

$$p_1 = 1 - \frac{1}{2b}, \quad p_2 = \frac{1}{2b}, \quad \beta_{21} = b. \quad (10)$$

При виборі конкретного значення b керуються різними міркуваннями. На практиці набули поширення значення параметрів, що приводять до зручних, в обчислювальному відношенні, розрахункових правил. Так, при $b = 1$ маємо $p_1 = 1/2, p_2 = 1/2, \beta_{21} = \alpha_2 = 1$. Розрахункове правило, що відповідає цим значенням, має вигляд

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} (f(y_i, t_i) + f(y_i + h \dot{y}_i, t_i + h)), \quad (11)$$

а оскільки $y_i + h \dot{y}_i \approx y_{i+1}$, то лінійну комбінацію $0,5(k_1 + k_2)$ можна розглядати як аналог квадратурної формули трапецій при обчисленні інтеграла у виразі для точного значення шуканої функції

$$y_{i+1} = y_i + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \dot{y}(r) dr. \quad (12)$$

Ще одне правило, яке використовується, можна отримати при $b = 1/2$. В цьому випадку маємо $p_1 = 0$, $p_2 = 1$, $\beta_{21} = \alpha_2 = 1/2$ і

$$y_{i+1} = y_i + h f \left(y_i + \frac{1}{2} h \dot{y}_i, t_i + \frac{h}{2} \right), \quad (13)$$

що може розцінюватися як аналог квадратурної формули середніх прямокутників при обчисленні інтеграла в (12).

Можливо однозначне визначення значень параметрів p_1 , p_2 , α_2 , β_{21} шляхом доповнення системи (9) співвідношеннями, які отримуються з умов перетворення на нуль деяких членів у виразі для $\varphi'''(0)$. Так, з (9) випливає $\alpha_2 = \beta_{21}$. При цьому $\varphi'''(0)$ містить три члена з однаковими коефіцієнтами, рівність нулю яких дає систему

$$1 - p_1 - p_2 = 0, \quad 1 - 2 p_2 \alpha_2 = 0, \quad 1 - 3 p_2 \alpha_2^2 = 0, \quad (14)$$

яка має єдиний розв'язок $p_1 = 1/4$, $p_2 = 3/4$, $\alpha_2 = 2/3$. Відповідне розрахункове правило має вигляд

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{4} \left(f(y_i, t_i) + 3 f \left(y_i + \frac{2}{3} h \dot{y}_i, t_i + \frac{2}{3} h \right) \right). \quad (15)$$

З виразу для $\varphi'''(0)$ випливає неможливість побудови формул числового інтегрування третього порядку точності при $q = 2$, оскільки ніяким вибором параметрів не можна забезпечити рівність $\varphi'''(0) = 0$ для довільних $f(y, t)$.

Методи третього порядку точності. При $q = 3$ є вісім параметрів, що підлягають визначенню: $p_1, p_2, p_3, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_{21}, \beta_{31}, \beta_{32}$ (в загальному випадку число параметрів, як це випливає з (4) і (5), визначається виразом $(q^2 + 3q - 2)/2$). Система рівнянь для їх визначення має вигляд

$$\begin{aligned} p_1 + p_2 + p_3 &= 1, & p_2 \alpha_2 + p_3 \alpha_3 &= 1/2, \\ p_2 \alpha_2^2 + p_3 \alpha_3^2 &= 1/3, & p_2 \alpha_2 \beta_{32} &= 1/6, \\ \beta_{31} + \beta_{32} - \alpha_3 &= 0, & \beta_{21} + \alpha_2 &= 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Система (16) є невизначеною і несумісною. Множину її розв'язків може бути представлено у двохпараметричному вигляді з двома вільними параметрами, в якості яких доцільно прийняти α_2 і α_3 , оскільки вони в (16) входять в другому ступені. При цьому розв'язок (16) має вигляд

$$p_1 = 1 - \frac{3(\alpha_3 - \alpha_2) - 2}{6\alpha_2\alpha_3}, \quad p_2 = \frac{3\alpha_3 - 2}{6\alpha_2(\alpha_3 - \alpha_2)}, \quad p_3 = \frac{2 - 3\alpha_2}{6\alpha_3(\alpha_3 - \alpha_2)}, \quad (17)$$

$$\beta_{21} = \alpha_2, \quad \beta_{31} = \frac{\alpha_3(3\alpha_2(1 - \alpha_2) - \alpha_3)}{\alpha_2(2 - 3\alpha_2)}, \quad \beta_{32} = \frac{\alpha_3(\alpha_3 - \alpha_2)}{\alpha_2(2 - 3\alpha_2)}$$

при будь-яких α_2, α_3 , за винятком $\alpha_2 = \alpha_3, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 0, \alpha_2 = 2/3$, при яких система (16) стає несумісною.

Найбільш уживане правило третього порядку точності виходить при $\alpha_2 = 1/2, \alpha_3 = 1$. Для цього випадку $p_1 = 1/6, p_2 = 2/3, p_3 = 1/6, \beta_{21} = 1/2, \beta_{31} = -1, \beta_{32} = 2$ і розрахункове правило набуває вигляду

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3), \quad k_1 = h f(y_i, t_i), \quad (18)$$

$$k_2 = h f\left(y_i + \frac{k_1}{2}, t_i + \frac{h}{2}\right), \quad k_3 = h f(y_i - k_1 + 2k_2, t_i + h).$$

Це правило можна розглядати як аналог квадратурної формули Сімпсона, оскільки в разі, якщо $f(y, t)$ не залежить від y ($f_y \equiv 0$), то (18) збігається з останньою.

І в даному випадку параметри розрахункових правил можуть вибиратися із залученням додаткових співвідношень, які забезпечують єдиний розв'язок системи (16) і, крім того, не існує наборів параметрів, що призводять до правил четвертого порядку точності.

Методи четвертого і більш високих порядків точності. Із зростанням q система рівнянь відносно параметрів розрахункових правил набуває все більш складного вигляду. При $q = 4$ маємо 13 параметрів, які повинні задовольняти системі 11 рівнянь

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1, \quad p_2\alpha_2 + p_3\alpha_3 + p_4\alpha_4 = 1/2, \quad \alpha_2 = \beta_{21},$$

$$p_2\alpha_2^2 + p_3\alpha_3^3 + p_4\alpha_4^2 = 1/3, \quad p_2\alpha_2^3 + p_3\alpha_3^3 + p_4\alpha_4^3 = 1/4,$$

$$p_3\beta_{32}\alpha_2 + p_4(\beta_{42}\alpha_2 + \beta_{43}\alpha_3) = 1/6, \quad \beta_{31} + \beta_{32} - \alpha_3 = 0, \quad (19)$$

$$p_3\beta_{32}\alpha_2^2 + p_4(\beta_{42}\alpha_2^2 + \beta_{43}\alpha_3^2) = 1/12, \quad \beta_{41} + \beta_{42} + \beta_{43} - \alpha_4 = 0,$$

$$p_3\beta_{32}\alpha_2\alpha_3 + p_4\alpha_4(\beta_{42}\alpha_2 + \beta_{43}\alpha_3) = 1/8, \quad p_4\beta_{43}\beta_{32}\alpha_2 = 1/24.$$

Система (19) має безліч розв'язків, які, в загальному випадку, залежать від двох параметрів. Аналіз умов спільності показує, що безліч розв'язків розпадається на три підмножини, вигляд яких залежить від співвідношень між окремими параметрами. Так, якщо $\alpha_2 \neq \alpha_3 \neq \alpha_4$, то (19) сумісна лише при $\alpha_4 = 1$ і множина розв'язків є двохпараметричною. При вільних параметрах α_2 і α_3 всі розв'язки представляються таким чином

$$p_2 = \frac{2\alpha_3 - 1}{12\alpha_2(\alpha_2 - \alpha_3)(\alpha_2 - 1)}, \quad p_3 = \frac{2\alpha_2 - 1}{12\alpha_3(\alpha_2 - \alpha_3)(1 - \alpha_3)},$$

$$p_4 = \frac{6\alpha_2\alpha_3 - 4(\alpha_2 + \alpha_3) + 3}{12(\alpha_3 - 1)(\alpha_2 - 1)},$$

$$\beta_{42} = \frac{(\alpha_2 - 1)\left(4(\alpha_2 - \alpha_3^2) + 3(\alpha_3 - \alpha_2) + 2(\alpha_3 + 1)\right)}{2\alpha_2(\alpha_2 - \alpha_3)(6\alpha_2\alpha_3 - 4(\alpha_2 + \alpha_3) + 3)}, \quad (20)$$

$$\beta_{43} = \frac{(2\alpha_2 - 1)(\alpha_3 - 1)(\alpha_2 - 1)}{\alpha_3(\alpha_2 - \alpha_3)(6\alpha_2\alpha_3 - 4(\alpha_2 + \alpha_3) + 3)}, \quad \beta_{32} = \frac{\alpha_3(\alpha_2 - \alpha_3)}{2\alpha_2(2\alpha_2 - 1)},$$

$$p_1 = 1 - p_2 - p_3 - p_4, \quad \beta_{41} = 1 - \beta_{42} - \beta_{43}, \quad \beta_{31} = \alpha_2 - \beta_{32}, \quad \beta_{21} = \alpha_2,$$

причому $\alpha_2 \neq \frac{1}{2}$, $\alpha_2 \neq 0$, $\alpha_2 \neq \frac{3 - 4\alpha_3}{4 - 6\alpha_3}$, $\alpha_3 \neq 0$.

Друга підмножина розв'язків визначається умовами сумісності системи (19) при $\alpha_2 = \alpha_4$ і являє собою однопараметричну множину, для опису якої зручно вважати вільним параметр p_2 . При цьому всі розв'язки подаються як

$$\alpha_2 = \alpha_4 = \beta_{21} = 1, \quad \alpha_3 = \frac{1}{2}, \quad p_1 = \frac{1}{6}, \quad p_3 = \frac{2}{3}, \quad p_4 = \frac{1}{6} - p_2, \quad \beta_{31} = \frac{3}{8},$$

$$\beta_{32} = \frac{1}{8}, \quad \beta_{41} = \frac{12p_2 + 1}{2(6p_2 - 1)}, \quad \beta_{42} = \frac{1}{2(6p_2 - 1)}, \quad \beta_{43} = \frac{2}{1 - 6p_2}, \quad (21)$$

причому $p_2 \neq 1/6$.

Третя підмножина розв'язків визначається умовами сумісності при $\alpha_2 = \alpha_3$ і, так само як і друга підмножина, є однопараметричною, опис якої також зручно задавати при вільному параметрі p_2 . Всі розв'язки мають вигляд

$$\alpha_2 = \alpha_3 = \beta_{21} = \frac{1}{2}, \quad \alpha_4 = 1, \quad p_1 = \frac{1}{6}, \quad p_3 = \frac{2}{3} - p_2, \quad p_4 = \frac{1}{6}, \quad \beta_{31} = \frac{1 - 3p_2}{2(2 - 3p_2)},$$

$$\beta_{32} = \frac{1}{2(2 - 3p_2)}, \quad \beta_{41} = 0, \quad \beta_{42} = 3p_2 - 1, \quad \beta_{43} = 2 - 3p_2, \quad (22)$$

причому $p_2 \neq 2/3$.

Розрахункове правило, що відповідає множині параметрів (22) при $p_2 = 1/3$, і яке набуло найбільшого поширення, має вигляд

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4),$$

$$k_1 = h f(y_i, t_i), \quad k_2 = h f\left(y_i + \frac{k_1}{2}, t_i + \frac{h}{2}\right), \quad (23)$$

$$k_3 = h f\left(y_i + \frac{k_2}{2}, t_i + \frac{h}{2}\right), \quad k_4 = h f(y_i + k_3, t_i + h).$$

Таким чином, це правило, як і правило (18), можна розглядати в якості аналогу квадратурної формули Сімпсона.

Інша поширена форма розрахункових співвідношень четвертого порядку відповідає першій підмножині розв'язків системи (19) при $\alpha_2 = 1/3$, $\alpha_3 = 2/3$. При цьому $\beta_{21} = 1/2$, $\beta_{31} = -1/3$, $\beta_{32} = \beta_{41} = \beta_{43}$, $\alpha_4 = 1$, $\beta_{42} = -1$, $p_1 = p_4 = 1/8$, $p_2 = p_3 = 3/8$, а розрахункове правило має вигляд

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{8}(k_1 + 3k_2 + 3k_3 + k_4),$$

$$k_1 = h f(y_i, t_i), \quad k_2 = h f\left(y_i + \frac{k_1}{3}, t_i + \frac{h}{3}\right), \quad (24)$$

$$k_3 = h f\left(y_i + \frac{k_2}{3} + k_2, t_i + \frac{2}{3}h\right), \quad k_4 = h f(y_i + k_1 - k_2 + k_3, t_i + h).$$

Це правило може трактуватися як аналог відомої квадратурної формули «трих восьмих» (при $f_y \equiv 0$ (24) співпадає з останньою).

Викладені методи Рунге-Кутта до четвертого порядку включно мають властивість множинності розв'язків рівнянь щодо параметрів розрахункових правил (за винятком методу Ейлера). Починаючи з $q = 5$ (і далі) параметрів α_j , p_j , β_{js} , $j = 1, q$, $0 < s < j \leq q$ не вистачає для виконання умов забезпечення q -го порядку точності. Відповідні системи стають перевизначеними і несумісними. Так, побудова методу 5-го порядку можлива лише при $q = 6$. Ця властивість, яка полягає в тому, що порядок точності методу менше q , зберігається для всіх методів вище четвертого порядку. Застосування методів Рунге-Кутта вимагає q -кратного обчислення правих частин вихідного рівняння на кожному кроці інтегрування. А оскільки саме обчислення правої частини є однією з найбільш трудомістких операцій, то використання методів вище четвертого порядку ставить високі вимоги щодо швидкодії обчислювального пристрою, який працює в реальному часі. Крім того, застосування методів високого порядку точності виправдано у випадках, коли обчислювальний процес може бути реалізовано зі значним кроком інтегрування, при якому необхідна швидкодія обчислювача може виявитися прийнятною. Однак, в разі побудови системи управління, крок інтегрування, що співпадає з ін-

тервалом дискретності визначення управлінь, має обмеження зверху, оскільки збільшення дискретності управлінь призводить до збільшення похибки моделювання. Дана обставина свідчить про недоцільність використання методів Рунге-Кутта високого порядку для цілей моделювання в реальному часі динаміки об'єктів, що досліджуються. Сказане рівною мірою слід віднести і до використання неявних методів Рунге-Кутта, ідея побудови яких аналогічна викладеній вище, не дивлячись на те, що неявні методи є більш точними, оскільки містять більше число параметрів (у виразах (5)). Для неявних методів слід покласти $0 < s \leq q$ або $0 < s \leq j$ — для напівявних).

Квадратурні методи. Третя група однокрокових методів числового розв'язування задачі Коші містить в собі методи, побудова яких заснована на застосуванні квадратурних формул при обчисленні інтеграла в (12). Ці методи будемо називати *квадратурними*.

Для викладу основної ідеї побудови квадратурних методів представимо вираз (12) у вигляді

$$y_{i+1} = y_i + h \int_0^1 f(y(t_i + \alpha h), t_i + \alpha h) d\alpha = y_i + h \int_0^1 \varphi(\alpha) d\alpha, \quad (25)$$

що досягається заміною змінних $\alpha = [(t - t_i)/h]$ в (12). Для обчислення інтеграла в (25) скористаємося формулою Гаусса. Тоді отримаємо наближене значення для y_{i+1} у вигляді

$$y_{i+1} \approx y_i + h \sum_{j=1}^q p_j \varphi(\alpha_j) = y_i + h \sum_{j=1}^q p_j f(y(t_i + \alpha_j h), t_i + \alpha_j h). \quad (26)$$

Права частина (26) містить $2q$ параметрів, які вибираються з умови точності квадратурного правила для поліномів r -го ступеня. З теорії квадратур відомо, що така вимога може застосовуватися для будь-яких $r \leq (2q - 1)$, причому похибка обчислення інтеграла в (25), в припущенні безперервності $\varphi^{(r+2)}(\alpha)$, є величиною $O(h^{r+2})$. В результаті можна отримати метод числового розв'язування диференціальних рівнянь $(r+1)$ -го порядку. Якщо в (26) з $2q$ параметрів m параметрів вважати вільними, то можна будувати методи $(2q - m)$ -го порядку точності.

Умова точності квадратурного правила для поліномів r -го ступеня призводить до наступної системи рівнянь щодо параметрів:

$$\sum_{i=1}^q p_i \alpha_i^{(j-1)} = \frac{1}{j}, \quad j = \overline{1, (2q - m)}, \quad (27)$$

в якій m параметрів може бути обрано довільно. У теорії квадратур [11-14] доводиться, що при $m = 0$ система (27) має єдиний розв'язок для будь-якого $q \geq 1$. З цього випливає, що вона сумісна при будь-яких $m < 2q$.

Таким чином, задаючи q, m , а також вільні параметри, і визначаючи з (27) інші параметри, замість (26) можна записати точну рівність

$$y_{i+1} = y_i + h \sum_{j=1}^q p_j f(y_{i+\alpha_j}, t_i + \alpha_j h) + O(h^{2q-m+1}), \quad (28)$$

(тут $y_{i+\alpha_j} = y(t_i + \alpha_j h)$).

Однак для практичних обчислень вираз (28) не може застосовуватися, оскільки значення $y_{i+\alpha_j}$ — невідомі. Аналізуючи (28) неважко помітити, що порядок похибки рівності не зміниться, якщо в ньому замінити невідомі $y_{i+\alpha_j}$ на величини, які мають порядок похибки $O(h^{2q-m})$, для отримання яких достатньо застосувати квадратурну формулу порядку точності, меншого на одиницю. Це досягається: або зменшенням q , або збільшенням на одиницю кількості вільних параметрів, а також вибором їх значень, зручних в обчислювальному відношенні. При цьому для обчислення $y_{i+\alpha_j}$ з похибкою $O(h^{2q-m})$ необхідно знати інші значення $y_{i+\bar{\alpha}_j}$, вимога до точності визначення яких ще більш слабка (порядок похибки $y_{i+\bar{\alpha}_j}$ дорівнює $(2q - m - 1)$). Застосовуючи описану процедуру до віднаходження $y_{i+\bar{\alpha}_j}$, і повторюючи цей процес, в результаті приходимо до висновку про необхідність знати $y_{i+\bar{\alpha}_j}$ з похибкою $O(h^2)$, що, в свою чергу, забезпечується застосуванням методу Ейлера. Таким чином, можна побудувати алгоритм послідовного визначення з наростаючою точністю значень $y_{i+\bar{\alpha}_j}, \dots, y_{i+\bar{\alpha}_j}, y_{i+\alpha_j}$, що дозволяє віднайти y_{i+1} у відповідності до виразу (28) із заданим порядком локальної похибки.

При побудові квадратурних методів розв'язування задачі Коші основною проблемою є узгодження квадратурних формул різного порядку точності між собою з метою отримання економічних розрахункових правил. У загальному вигляді задачу формалізації побудови квадратурних методів не вирішено.

Квадратурні методи першого порядку точності. Параметри методів визначаються з (27) при $(2q - m - 1)$, що призводить до єдиної

умови $\sum_{j=1}^q p_j = 1$. При $q = 1$ маємо $p_1 = 1$ (α_1 обирається довільно) і

$$y_{i+1} = y_i + h f(y_{i+\alpha_1}, t_i + \alpha_1 h),$$

але $f(y_{i+\alpha_1}, t_i + \alpha_1 h) = f(y_i, t_i) + O(h)$, що приводить до явного методу Ейлера (при $\alpha_1 = 1$ має місце неявний метод Ейлера).

Квадратурні методи другого порядку. Для побудови методів використовуються два рівняння системи (27)

$$\sum_{j=1}^q p_j = 1 \quad \sum_{j=1}^q p_j \alpha_j = \frac{1}{2}. \quad (29)$$

Вираз (29) при $q = 1$ має єдиний розв'язок $p_1 = 1, \alpha_2 = 1/2$, а відповідне розрахункове правило збігається з методом Рунге-Кутта (13). При $q = 2$ система (29) має два вільних параметра, в якості яких зручно вибирати α_1 і α_2 . При цьому

$$p_1 = \frac{2\alpha_2 - 1}{2(\alpha_2 - \alpha_1)} \quad p_2 = \frac{1 - 2\alpha_1}{2(\alpha_2 - \alpha_1)}$$

і, отже,

$$y_{i+1} = y_i + h \left(\frac{2\alpha_2 - 1}{2(\alpha_2 - \alpha_1)} f(y_{i+\alpha_1}, t_{i+\alpha_1 h}) + \frac{1 - 2\alpha_1}{2(\alpha_2 - \alpha_1)} f(y_{i+\alpha_2}, t_{i+\alpha_2 h}) \right) \quad (30)$$

Природно, що при використанні (30) для побудови розрахункових правил доцільно прийняти $\alpha_1 = 0$. Тоді множина розв'язків (29) є однопараметричною (по параметру α_2) і збігається з множиною (10) розв'язків системи (9) для параметрів методів Рунге-Кутта другого порядку, а вираз (30) набуває вигляду

$$y_{i+1}^{(3)} = y_i + h \left(1 - \frac{1}{2\alpha_2} f(y_i, t_i) + \frac{1}{2\alpha_2} f(y_{i+\alpha_2}, t_{i+\alpha_2 h}) \right), \quad (31)$$

де верхній індекс при шуканій функції означає порядок локальної похибки. Вираз (31) являє собою неявне правило, для використання якого необхідно знати $y_{i+\alpha_2}$. Відповідно до викладеного вище, для

побудови явного однокрокового правила необхідно мати $y_{i+\alpha_2}^{(2)}$, що забезпечується застосуванням правила

$$y_{i+\alpha_2}^{(2)} = y_{i+\alpha_2} h f(y_i, t_i). \quad (32)$$

Сукупність виразів (31) і (32) складає розрахункові правила методів другого порядку точності. У загальному випадку ці методи вимагають дворазового обчислення правих частин на кроці інтегрування, проте використання властивостей асимптотичних оцінок дозво-

ляє, в окремому випадку $\alpha_2 = 1$, побудувати метод другого порядку, що вимагає одноразового обчислення правих частин на кожному кроці. Дійсно, при $\alpha_2 = 1$ (31) можна представити як

$$y_{i+1}^{(3)} = y_i^{(3)} + \frac{1}{2} h \left(f \left(y_i^{(2)}, t_i \right) + f \left(y_{i+1}^{(2)}, t_i + h \right) \right), \quad (33)$$

звідки видно, що розраховане на $(i+1)$ -му кроці значення $f \left(y_{i+1}^{(2)}, t_i + h \right)$ може використовуватися на $(i+2)$ -му кроці в якості першого доданка збільшення в (33). Таким чином, сукупність виразів (32) і (33) дає економічний метод другого порядку.

Квадратурні методи третього порядку. Система рівнянь відносно параметрів цих методів складається з перших трьох рівнянь системи (27):

$$\sum_{j=1}^q P_j = 1, \quad \sum_{j=1}^q P_j \alpha_j = \frac{1}{2}, \quad \sum_{j=1}^q P_j \alpha_j^2 = \frac{1}{3}. \quad (34)$$

При $q=1$ система (34) несумісна, а при $q>1$ — недовизначена з $2q-3$ вільними параметрами. Для $q=2$ існує однопараметрична множина розв'язків, яка при вільному параметрі α_1 має вигляд:

$$p_1 = \frac{1}{4(3\alpha_1^2 - 3\alpha_1 + 1)}, \quad p_2 = \frac{3(2\alpha_1 - 1)^2}{4(3\alpha_1^2 - 3\alpha_1 + 1)}, \quad \alpha_2 = \frac{3\alpha_1 - 1}{3(2\alpha_1 - 1)}.$$

При $\alpha_1 = 0$ маємо $p_1 = 1/4$, $p_2 = 3/4$, $\alpha_2 = 2/3$, тому

$$y_{i+1}^{(4)} = y_i^{(3)} + \frac{h}{4} \left(f \left(y_i^{(3,4)}, t_i \right) + 3 f \left(y_{i+2/3}^{(3)}, t_i + \frac{2}{3} h \right) \right). \quad (35)$$

Для обчислення $y_{i+2/3}^{(3)}$ необхідно використовувати один з методів другого порядку, застосовуючи для цієї мети загальне вираз (30). Однак, з огляду на те, що в (35) входить $f(y_i, t_i)$, при обчисленні $y_{i+2/3}^{(3)}$ має сенс використовувати це значення правої частини, що зводить до $\alpha_1^{(3)} = 0$ і

$$y_{i+2/3}^{(3)} = y_{i+}^{(4)} + \frac{2}{3} h \left(\frac{2\alpha_2^{(3)} - 1}{2\alpha_2^{(3)}} f(y_i, t_i) + \frac{1}{2\alpha_2^{(3)}} f \left(y_{(i+2/3)\alpha_2^{(3)}}, t_i + \frac{2}{3} \alpha_2^{(3)} h \right) \right), \quad (36)$$

а

$$y_{(i+2/3)\alpha_2^{(3)}} = y_i^{(4)} + \frac{2}{3}\alpha_2^{(3)} h f(y_i, t_i).$$

Приймаючи $\alpha_2^{(3)} = 1/2$, приходимо до наступного правила

$$\begin{aligned} y_{i+1/3}^{(2)} &= y_i + \frac{h}{3} f(y_i, t_i). \\ y_{i+2/3}^{(3)} &= y_i + \frac{2}{3} h f\left(y_{i+1/3}^{(2)}, t_{i+1/3} h\right), \\ y_{i+1}^{(4)} &= y_i + \frac{h}{4} \left(f(y_i, t_i) + 3 f\left(y_{i+2/3}^{(3)}, t_{i+2/3} h\right) \right). \end{aligned} \quad (37)$$

Правило (37) аналогічне до методу Рунге-Кутта третього порядку, отриманому при $\alpha_2 = 1/3$, $\alpha_3 = 2/3$ в (16).

При $\alpha_2^{(3)} = 1$ обчислювальне правило набуває вигляду

$$\begin{aligned} y_{i+2/3}^{(2)} &= y_i + \frac{2}{3} h f(y_i, t_i), \\ y_{i+2/3}^{(3)} &= y_i + \frac{1}{3} h \left(f(y_i, t_i) + f\left(y_{i+2/3}^{(2)}, t_{i+2/3} h\right) \right), \\ y_{i+1}^{(4)} &= y_i + \frac{h}{4} \left(f(y_i, t_i) + 3 f\left(y_{i+2/3}^{(3)}, t_{i+2/3} h\right) \right). \end{aligned} \quad (38)$$

При $q = 3$ система (34) має три вільних параметра, в якості яких зручно прийняти $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Поклавши, як і раніше, $\alpha_1 = 0$, приходимо до наступного розв'язку

$$p_1 = \frac{1}{3\alpha_2\alpha_3} + \frac{\alpha_2 - 1}{2\alpha_2} + \frac{\alpha_3 - 1}{2\alpha_3}, \quad p_2 = \frac{3\alpha_3 - 2}{6(\alpha_3 - \alpha_2)\alpha_2}, \quad p_3 = \frac{2 - 3\alpha_2}{6(\alpha_3 - \alpha_2)\alpha_3}.$$

Питання вибору значень α_2, α_3 не вирішене на даний час. Як вказувалося, часто вибирають параметри з умови зручності обчислень. Так, приймаючи $\alpha_2 = 1/2$, $\alpha_3 = 1$, маємо $p_1 = 1/6$, $p_2 = 2/3$, $p_3 = 1/6$ і

$$y_{i+1}^{(4)} = y_i^{(4)} + \frac{h}{6} \left(f(y_i, t_i) + 4 f\left(y_{i+1/2}^{(3)}, t_{i+1/2} h\right) + f\left(y_{i+1}^{(3)}, t_{i+h}\right) \right). \quad (39)$$

Для значень $y_{i+1/2}^{(3)}$ і $y_{i+1}^{(3)}$ справедливі вирази (36) в яких параметри $\alpha_2^{(3)}$, в загальному випадку, різні, а вибір їх значень призводить до різних обчислювальних правил. Так, якщо $\alpha_2^{(3)} = 2$, то, з огляду на необхідність обчислення $f\left(y_{i+1/2}^{(3)}, t_{i+h}\right)$ в (39) для $y_{i+1/2}^{(3)}$, маємо

$$y_{i+1/2}^{(3)} = y_i^{(4)} + \frac{h}{8} \left(3f(y_i, t_i) + f(y_{i+1}^{(3)}, t_{i+h}) \right). \quad (40)$$

Вважаючи $\alpha_2^{(3)} = 1$ для обчислення $y_{i+1}^{(3)}$, отримуємо

$$y_{i+1/2}^{(3)} = y_i^{(4)} + \frac{h}{2} \left(f(y_i, t_i) + f(y_{i+1}^{(3)}, t_{i+h}) \right). \quad (41)$$

і, як зазвичай,

$$y_{i+1}^{(2)} = y_i + hf(y_i^{(4)}, t_i). \quad (42)$$

Сукупність виразів (39)-(42) і складає обчислювальне правило. Аналізуючи ці вирази, неважко помітити, що число обчислень правої частини залежить від порядку похибки $y_i^{(r)}$ при обчисленні $f(y_i, t_i)$. При $r = 4$ потрібно обчислювати чотири значення правої частини на кожному кроці інтегрування, а при $r = 3$ — три. Інша особливість цього розрахункового правила полягає в наявності трьох наближених значень y_{i+1} , що може бути використане для контролю обчислювального процесу. Цю властивість методів, заснованих на квадратурних формулах, слід вважати істотною перевагою і враховувати при виборі методу числового розв'язування.

Висновки. Виконаний порівняльний аналіз показав, що застосування неявних методів доцільно для забезпечення збіжності обчислювальних процедур при значних кроках інтегрування вихідної системи рівнянь, причому, саме збіжність ітераційного процесу в ході обчислень визначає ефективність неявних методів.

Застосування методів високого порядку точності виправдано лише у випадках, коли формалізація вихідної задачі (суть ММ динамічної системи) дозволяє реалізувати обчислювальний процес з достатньо великим кроком інтегрування, що, з одного боку, необхідно для скорочення часу обчислень (наприклад, для реалізації систем управління реального часу швидкоплинними процесами), а з другого — забезпечується достатньою швидкістю обчислювача. Однак надмірне збільшення кроку інтегрування може негативно позначитися на точності моделювання.

За очевидною привабливістю квадратурних методів основною проблемою у їх застосуванні є узгодження квадратурних формул різного порядку точності між собою, що впливає з необхідності отримання економічних розрахункових правил і являє собою окрему задачу у постановочному плані.

Список використаних джерел:

1. Самарский А. А., Гулин А. В. Численные методы. М.: Наука, 1989. 432 с.
2. Краскевич В. Е., Зеленский К. Х., Гречко В. И. Численные методы в инженерных исследованиях. Киев: Вища школа, 1986. 263 с.

3. Вержбицкий В. М. Основы численных методов. М.: Высшая школа, 2002. 848 с.
4. Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. Численные методы. М.: Наука, 2004. 600 с.
5. Бабенко К. И. Основы численного анализа. М.: Наука, 1986. 744 с.
6. Галанин М. П., Конев С. А. Разработка и применение экспоненциального метода интегрирования жёстких систем на основе классического метода Рунге-Кутты. *Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша*. 2012. № 51. 24 с. DOI: 10.20948/prepr-2018-51. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2018-51>.
7. Лобанов А. И., Петров И. Б. Численное решение нелинейных алгебраических уравнений. М.: Национальный Открытый Университет «ИНТУИТ», 2012. URL: https://www.studentlibrary.ru/book/intuit_051.html.
8. Moler C., van Loan C. Nineteen dubious ways to compute the exponential of a matrix, 25 years later. *SIAM Review*. 2003. Vol. 45. № 1. P. 3-49.
9. Tokman M. Efficient integration of large stiff systems of ODEs with exponential propagation iterative (EPI) methods. *Journal of Computational Physics*. 2006. Vol. 213. P. 748-776.
10. Al-Mohy A. H., Higham N. J. Computing the action of the matrix exponential, with an application to exponential integrators. *SIAM J. Sci. Comput.* 2011. Vol. 33. P. 488-511.
11. Хайпер Э., Нёрсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. М.: Мир. 1990. 512 с.
12. Hairer E., Wanner G. Solving ordinary differential equations II: Stiff and differential-algebraic problems. 2nd ed. Berlin; New York: Springer-Verlag, 1996. ISBN 978-3-540-60452-5.
13. Iserles A. A First Course in the Numerical Analysis of Differential Equations. Cambridge: Cambridge University Press, 1996. ISBN 978-0-521-55655-2.
14. Süli E., Mayers D. An Introduction to Numerical Analysis. Cambridge: Cambridge University Press, 2003. ISBN 0-521-00794-1.

ANALYSIS OF POSSIBILITIES OF ALGORITHMS' SELECTION AND ADAPTATION FOR DIFFERENTIAL DYNAMIC MODELS' NUMERICAL IMPLEMENTATION

The paper analyzes possibilities of selection and adaptation of computational algorithms in the implementation of differential dynamic models, i.e. in solving ordinary differential equations. The limited resources of computer-integrated systems determine the requirements for the computing and control systems' performance, which indicates the urgency of target selection or adaptation of numerical methods for solving equations of dynamics objects. The process of improving numerical methods has a long history and does not stop until now. The growing complexity of the studied dynamic objects has led to the development of implicit methods for dynamics' numerical analysis, but research shows that the use of implicit methods is justified, if we assume the use of a significant step of integrating the source system. In addition, it is found that the available results on the formalization of power methods for solving algebraic equations in the integration step and their adaptation in computer use are still insufficient to address their use in the study of complex dynamic objects. The integration step upper limit indicates the inexpediency of using

high-order Runge-Kutta methods for the purposes of modeling the dynamics of the studied systems in real time. Accordingly, with regard to quadrature methods, the problem of formalizing the construction is not solved in general. Thus, the task of selecting the optimal method can be formulated as follows: to determine the numerical method for the modeled object's dynamics equations' integration, for which the required speed of the control system can be achieved, and the error of solving the dynamics equations does not exceed the specified value. The analysis of the properties of different groups of numerical methods is carried out, which makes it possible to conclude that in choosing the best method the initial set of the required methods should be formed based on the single-step methods of the Runge-Kutta type and the quadrature methods no higher than the fourth order. In implementing stationary modes, the initial group of methods should also include the multi-step methods — explicit and the «forecast-correction» type.

Key words: *numerical methods, mathematical model, computational algorithm, differential equations.*

Отримано: 24.09.2020

УДК 004.94:51-7

DOI: 10.32626/2308-5878.2020-21.42-53

Д. А. Верлань*, канд. техн. наук,

В. А. Іванюк**, д-р техн. наук,

О. О. Фомін***, д-р техн. наук

* ТОВ «Науково-виробниче підприємство «ІНФОТЕХ», м. Київ,

** Кам'янець-Подільський національний університет

імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський,

*** Одеський національний політехнічний університет, м. Одеса

ІНТЕГРАЛЬНІ ДИНАМІЧНІ МОДЕЛІ В ЗАДАЧАХ ІДЕНТИФІКАЦІЇ І ДІАГНОСТИКИ

У роботі розглянуто модельний підхід для розв'язання задачі діагностики і контролю динамічних об'єктів на основі застосування інтегральних рівнянь. Зростаюча складність енергетичних об'єктів, врахування їх динамічних властивостей, підвищення вимог до точності та об'єктивності прийнятих рішень призводять до необхідності розробки нових ефективних алгоритмів математичного забезпечення систем обробки діагностичної інформації, які б дозволили забезпечити зазначені вимоги і автоматизувати процес контролю силових установок.

У цей час в технічній діагностиці розвивається напрям, що ґрунтується на відновленні моделі (оператора) з метою діагностики. Звичайно передбачається, що несправності змінюють тільки параметри моделі об'єктів контролю, які при діагностуванні оцінюються методами параметричної ідентифікації, але можливі ви-

падки, коли потрібно враховувати і зміни структури об'єкту. Реальні об'єкти, як правило, одночасно володіють і нелінійними і динамічними властивостями. Тому, як інформативний опис об'єктів контролю невідомої структури доцільно використовувати нелінійні непараметричні динамічні моделі на основі інтегρο-степеневих рядів Вольтерри, які характеризують властивості об'єкта контролю (його стан) у вигляді послідовності інваріантних до виду вхідного сигналу багатовимірних вагових функцій — ядер Вольтерри. Застосування моделей на основі рядів Вольтерри дозволяє повно і точно врахувати нелінійні і інерційні властивості об'єкта контролю, робить процедуру модельної діагностики більш універсальною, підвищує надійність діагнозу.

Ключові слова: діагностика, контроль, нелінійні об'єкти, динаміка, інтегральні рівняння.

Вступ. В залежності від виду об'єкта і степеня адекватності відповідної йому математичної моделі, рівняння, якими описується об'єкт можуть бути звичайними диференціальними, одновимірними або багатовимірними інтегральними, інтегρο-диференціальними рівняннями, операторними, диференціальними рівняннями з частинними похідними і т.д. В загальному випадку ці рівняння є неоднорідними, так як включають в себе функції різних зовнішніх і внутрішніх збуджень, що діють на систему.

Для опису нелінійних динамічних об'єктів з невідомою структурою (типу «чорний ящик») використовують ряд Вольтерри (РВ) [3-7], який при багатьох функціональних аргументах $x_1(t), \dots, x_\nu(t)$ — вхідних впливів, має вигляд:

$$\begin{aligned}
 y_j(t) = & \sum_{i_1=1}^{\nu} \int_0^t w_{i_1}^j(\tau) x_{i_1}(t-\tau) d\tau + \\
 & + \sum_{i_1=1}^{\nu} \sum_{i_2=1}^{\nu} \int_0^t \int_0^t w_{i_1 i_2}^j(\tau_1, \tau_2) x_{i_1}(t-\tau_1) x_{i_2}(t-\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 + \\
 & + \sum_{i_1=1}^{\nu} \sum_{i_2=1}^{\nu} \sum_{i_3=1}^{\nu} \int_0^t \int_0^t \int_0^t w_{i_1 i_2 i_3}^j(\tau_1, \tau_2, \tau_3) x_{i_1}(t-\tau_1) x_{i_2}(t-\tau_2) x_{i_3}(t-\tau_3) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 + \dots, \\
 & j = \overline{1, \mu},
 \end{aligned} \tag{1}$$

де $y_j(t)$ — відгук об'єкта на j -ому виході в даний момент часу t при нульових початкових умовах; $w_{i_1 i_2 \dots i_n}^j(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n)$ — ядра Вольтерри n -го порядку по i_1, i_2, \dots, i_n входах і j -му виходу, симетричні щодо дійсних змінних $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ функції; ν, μ — кількість входів і виходів відповідно.

Застосування моделей на основі РВ в діагностичних дослідженнях [1-3] пояснюється його принципово важливими перевагами: яв-

ними співвідношеннями між вхідними та вихідними змінними; універсальністю — можливістю дослідження нелінійних неперервних в часі та імпульсних систем, стаціонарних і нестаціонарних; одночасним і компактним урахуванням нелінійних та інерційних (динамічних) властивостей об'єкта.

Ефективність застосування методів розпізнавання образів для непрямого контролю і діагностики стану об'єктів в основному залежить від інформативності використовуваної сукупності параметрів (ознак). Якщо вибрані параметри досить повно характеризують внутрішню структуру об'єкта діагностування, то об'єкти, будучи ідентичними за структурою, відобразяться в просторі цих параметрів у вигляді щільної множини точок. Об'єктам з особливостями структури (дефектним) будуть відповідати точки, що відхиляються від цієї щільної множини.

У задачах модельної діагностики адекватність моделі об'єкта контролю (ОК) слід розуміти не в сенсі точності опису відгуку об'єкта, а в сенсі інформативності її з точки зору достовірного (надійного) розпізнавання стану об'єкта. При використанні ядер Вольтерри (ЯВ) як джерела діагностичної інформації про ОК необхідно забезпечити в першу чергу високу точність оцінки багатовимірних ЯВ малих порядків, що часто на практиці виявляється достатнім для побудови ефективної системи, що розпізнає.

Висока точність оцінювання ядер досягається застосуванням запропонованих в роботах завадостійких методів детермінованої ідентифікації [8-11].

Методи редукції діагностичних моделей, які формуються на основі вихідного опису об'єктів контролю у вигляді ядер Вольтерри. Запропонована інформаційна технологія непрямого контролю і діагностики нелінійних динамічних об'єктів заснована на непараметричній ідентифікації ОК з використанням ЯВ і полягає в послідовному вирішенні наступних завдань.

Ідентифікація ОК. Мета — отримання інформаційної моделі ОК у вигляді ЯВ. Етапи реалізації: подача тестових сигналів на входи ОК; вимір відгуків на них; визначення ЯВ на основі даних експерименту «вхід-вихід».

Побудова діагностичної моделі ОК. Мета — формування простору ознак. Етапи реалізації: стиснення ЯВ; визначення діагностичної цінності ознак; вибір оптимальної системи ознак — редукція діагностичної моделі.

Побудова класифікатора станів ОК. Мета — побудова сімейства вирішальних правил оптимальної класифікації. Етапи реалізації: побудова вирішальних правил — навчання; оцінка достовірності класифікації — іспит; оптимізація діагностичної моделі.

Діагностика ОК. Мета — оцінка стану ОК. Етапи реалізації: ідентифікація ОК; оцінка діагностичних ознак; розпізнавання — віднесення ОК до певного класу.

Застосування даного методу модельної діагностики пов'язане з розв'язанням задачі параметризації багатовимірних функцій ЯВ [11-13]. При побудові діагностичної моделі виділяють три рівні опису [14]:

1. Вихідний рівень, на якому функції $w_k(\tau_1, \dots, \tau_k)$, отримані в результаті ідентифікації ОК, розглядаються як єдине ціле.
2. Рівень вихідних ознак, на якому функція $w_k(\tau_1, \dots, \tau_k)$ представляється вектором $x = (x_1, \dots, x_n)'$. Інформативні прикмети можуть бути отримані за допомогою попереднього перетворення $T_j: C[a, b] \rightarrow R^n$, ($j = 1, \dots, n$): $x_j = T_j(w_k(\tau_1, \dots, \tau_k))$. В якості оператора T_j можуть застосовуватися ортогональні розкладання і інтегральні перетворення ЯВ у вектори коефіцієнтів базисних функцій [15, 16]. У простому випадку оператор T_j є оператором дискретизації $x_j = w_k(t_j, \dots, t_j)$, $t_j = j\Delta t$ (Δt — крок дискретизації).
3. Рівень перетворених ознак, що отримуються в результаті реалізації обраного ортогонального перетворення $L: R^n \rightarrow R^m$ ($m \leq n$), що забезпечує скорочення розмірності простору ознак. При цьому вирішується задача мінімізації кількості вторинних ознак при максимальному збереженні інформації, що міститься у вихідному описі ОК. Оптимальним у цьому сенсі є розкладання Карунена-Лоєва [17].

Застосовуються різні способи формування вектора діагностичних ознак на основі діагональних перерізів багатовимірних ЯВ: вибірка відліків ЯВ (V_k), евристичні ознаки (E_k), моменти (M_k), Фур'є-образи (AF_k і PF_k), вейвлет-перетворення (W_k) і розкладання Карунена-Лоєва (KL_k). Представлені результати досліджень діагностичної цінності (інформативності) різних систем ознак у сенсі критерію — максимальної ймовірності правильного розпізнавання (P_{\max}), що реалізується побудованою системою розпізнавання на підмножині \mathbf{X}' із заданої множини ознак \mathbf{X} ($\mathbf{X}' \in \mathbf{X}$) в обраній системі ознак.

Використовуються системи ознак:

1. Вибірki відліків (V_k) діагональних перетинів ЯВ $w_k(t, \dots, t)$ порядків $k = 1, 2, 3$ із заданою дискретністю.
2. Евристичні ознаки (E): максимум модуля діагонального перерізу k -мірного ЯВ, точка екстремуму t_{\max} , похідна функції $w_k(t, \dots, t)$ в точці $t = 0$, інтеграл модуля функції перерізу ЯВ, тривалість перерізу процесу t_{tr} .
3. Момент $\mu^k(M_k)$ порядків $r = \overline{0, 3}$ для перерізів ЯВ порядку k :

$$\mu_{ij\dots l}^k = \int_0^\infty \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \tau_1^i \tau_2^j \dots \tau_k^l \omega_k(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k) d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_k, \dots$$

$$i, j, \dots, l = 0, 1, \dots; i + j + \dots + l = r.$$

4. Частотні характеристики — дискретні значення багатовимірних амплітудно-частотної $A_k(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k)$ (AF) і фазо-частотної $\varphi_k(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k)$ (PF) характеристик, які представляють собою відповідно модуль та фазу багатовимірного перетворення Фур'є ЯВ k -го порядку $W_k(j\omega_1, j\omega_2, \dots, j\omega_k)$:

$$A_k(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k) = W_k(j\omega_1, j\omega_2, \dots, j\omega_k), \quad (2)$$

$$\varphi_k(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k) = \arctg \frac{\text{Im}(W_k(j\omega_1, j\omega_2, \dots, j\omega_k))}{\text{Re}(W_k(j\omega_1, j\omega_2, \dots, j\omega_k))}. \quad (3)$$

5. Коефіцієнти розкладання Карунена-Лоева (KL $_k$) c_1, c_2, \dots, c_m для перерізів ЯВ порядків $k = 1, 3$, які визначаються за формулою: $c_i = \Phi'x_i$, де $c_i = (c_{i1}, c_{i2}, \dots, c_{im})'$ — вектор-стовпець коефіцієнтів розкладання Карунена-Лоева для i -го класу ($i = 1, 2, \dots, M$); x_i — вектор початкових ознак i -го класу розмірністю n ; $\Phi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m)$ — матриця перетворення розмірністю $n \times m$ ($m < n$), в якості стовпців якої вибираються m нормованих власних векторів $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m$, що відповідають найбільшим характеристичним числам кореляційної матриці $R = \sum_{i=1}^M p(\omega_i) E\{x_i x_i'\}$, тут $p(\omega_i)$ — апіорна ймовірність появи i -го класу ω_i , а $E\{x_i x_i'\}$ — оператор математичного очікування, який обчислюється по всіх спостереженнях, що відносяться до i -го класу.
6. Коефіцієнти вейвлет-перетворень (W_k) перетинів ЯВ k -го порядку, які обчислюються за формулою:

$$C(a, b) = \int_0^\infty w_n(t, t, \dots, t) a^{-1/2} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt, \quad (4)$$

тут $\psi(t)$ — функція перетворення (материнський вейвлет), a і b — відповідно параметри масштабу і зсуву вейвлета [18]. Як базисний тут використовується вейвлет *coiflet*.

Інтегральні рівняння можуть бути отримані або безпосередньо за структурою динамічної системи за ваговими і нелінійними характеристиками елементів, або шляхом еквівалентних, або наближених перетворень диференціальних або інтегро-диференціальних рівнянь, записаних на основі фізичних законів.

Побудова обчислювальних алгоритмів для параметричної ідентифікації лінійних інтегральних динамічних моделей, які описують динамічні об'єкти із зосередженими параметрами. Для таких об'єктів модель має вигляд

$$a_1(t)y(t) + \int_{G_1(t)} K_1(t, \tau)y(\tau)d\tau + l(t) = a_2(t)f(t) + \int_{G_2(t)} K_2(t, \tau)y(\tau)d\tau, \quad (5)$$

де $a_i(t)$, $\int_{G_i(t)} K_i(t, \tau) y(\tau) d\tau$, $l(t)$, $i = 1, 2$ — параметри, що підлягають

визначенню; $y(t)$ і $f(t)$ — відповідно вихідний і вхідний сигнали.

Найпростіший алгоритм для обчислення невідомих параметрів в (5) можна отримати, припускаючи, що моменти вимірювання t_i і τ_i сигналів $f(t)$ і $y(t)$ співпадають; $t_i = \tau_i, i = \overline{1, N}$, де $N = N_y = N_f$, і використовуючи для обчислення інтегралів квадратурні формули виду

$$\int_0^{t_i} x(\tau) d\tau = \sum_{j=0}^{N_i} w_{ij} x(t_j) + r_i[x], N_i = \overline{1, N}, i = \overline{1, N}, \quad (6)$$

де w_{ij} — міра, $t_i = \tau_i$ — вузли, $r_i[x]$ — залишковий член квадратурної формули, $N = N_y = N_f$.

Суть квадратурного алгоритму розрахунку параметрів моделі (5) полягає в тому, що розрахункові вирази в ньому формуються на основі дискретизації інтегралів за допомогою квадратурних формул виду (6) з відкиданням залишкових членів. Дискретизуючи попередню модель (5) в точках $t_i, i = \overline{0, N}$, отримуємо згідно (6) наступну систему з $N + 1$ -го лінійного алгебраїчного рівняння відносно невідомих параметрів:

$$\begin{aligned} a_1 y(0) + l(0) &= a_2(0) \tilde{f}(0), \\ a_1(t_i) \tilde{y}(t_i) + \sum_{j=0}^{n_i} w_{ij} K_1(t_i, t_j) \tilde{y}(t_j) + l(t_i) &= \\ &= a_2(t_i) \tilde{f}(t_i) + \sum_{j=0}^{M_i} w_{ij} K_2(t_i, t_j) \tilde{f}(t_j), M_i, N_i = \overline{1, N}. \end{aligned} \quad (7)$$

За відсутності якої-небудь додаткової інформації про невідомі параметри $a_v(t_i)$, $K_v(t_i, t_j)$, $l(t_i)$, $v = \overline{1, 2}$ в системі (7) буде $2(N + 1)(N + 3)$ невідомих, тобто в цьому випадку виникають труднощі розв'язання несумісної СЛАР. Уникнути це можна, припустивши, наприклад, що невідомі параметри в (2) мають поліноміальний вигляд, тобто

$$a_v(t) = \sum_{k=1}^{m_v} a_{vk} \rho_{vk}(t), \quad (8)$$

$$k_v(t, \tau) = \sum_{k=1}^{p_v} \sum_{s=1}^{Q_v} c_{vrs} \varphi_{or}(t) \psi_{vs}(\tau), \quad (9)$$

$$L(t) = \sum_{k=1}^l \lambda_k \xi_k(t), \quad (10)$$

де a_{vk} , λ_{vk} , c_{vrs} — невідомі сталі коефіцієнти, а $\{\rho_{vk}\}_{k=1}^{m_v}$, $\{\xi_{vk}\}_{k=1}^l$, $\{\varphi_{vk}\}_{k=1}^{p_v}$, $\{\psi_{vs}\}_{s=1}^{Q_v}$ — системи лінійно незалежних функцій, $v = \overline{1, 2}$.

Якщо

$$N = m = m_1 + m_2 + l_1 + l_2 + P_1 Q_1 + P_2 Q_2 - 1, \quad (11)$$

то число рівнянь в (8) дорівнюватиме числу невідомих. Звичайно, при цьому залишаються відкритими такі питання: вибору функцій $P_{vk}, \varphi_{vk}, \psi_{vk}, \xi_k$, існування та єдиності розв'язку СЛАР (7), а також питання про вплив похибок на точність розрахунку невідомих параметрів. Ці питання певною мірою можуть бути вирішені в частинному, але досить важливому випадку, коли шукані параметри $a_v(t), l(t), k_v(t, \tau)$ визначаються наступними співвідношеннями:

$$a_1(t) \equiv 1, a_2(t) \equiv 0; \quad (12)$$

$$k_1(t, \tau) = k(t - \tau) = \sum_{j=1}^m q_j \frac{(t - \tau)^{j-1}}{(j-1)!}, m \in N; \quad (13)$$

$$k_2(t, \tau) = \frac{(t - \tau)^{m-1}}{(m-1)!}, \quad (14)$$

$$l(t) = \sum_{j=1}^{m-1} (c_j \frac{t^j}{j!} + q_j \sum_{k=0}^{m-j-1} c_k \frac{t^{k+j}}{(k+j)!}), \quad (15)$$

де q_i — невідомі, а c_i — відомі сталі величини.

Розглянемо випадок стаціонарного динамічного об'єкта. Нехай стаціонарний об'єкт описується диференціальним рівнянням вигляду

$$u^{(m)}(t) + p_1 u^{(m-1)}(t) + \dots + p_m u(t) = f(t), u^{(i-1)}(0) = C_i, i = \overline{1, m}, \quad (16)$$

де C_i — відомі величини (початкові умови), $u(t), f(t)$ — відповідно вхідний і вихідний сигнали, p_i — параметри, що ідентифікуються.

Методом послідовного інтегрування рівняння (16) перетвориться до еквівалентного інтегрального рівняння Вольтерри II-го роду

$$u(t) + \int_0^t K(t, s) u(s) ds = F(t), t \in [0, T], \quad (17)$$

де

$$K(t, s) = \sum_{i=1}^m p_i \frac{(t-s)^{i-1}}{(i-1)!}, m \in N, \quad (18)$$

$$F(t) = \int_0^t \frac{(t-s)^{m-1}}{(m-1)!} f(s) ds + \sum_{i=1}^{m-1} C_i \frac{t^i}{i!} + \sum_{i=1}^{m-1} p_i \sum_{k=0}^{m-i-1} C_k \frac{t^{k+i}}{(k+i)!}. \quad (19)$$

Для формування системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) відносно невідомих коефіцієнтів $p_i, i = \overline{1, m}$, рівняння (17) з урахуванням (18) і (19) запишемо у вигляді

$$\sum_{i=1}^{m-1} p_m \left[\int_0^t \frac{(t-s)^{i-1}}{(i-1)!} u(s) ds - \sum_{k=0}^{m-i-1} C_k \frac{t^{k+i}}{(k+i)!} \right] = \int_0^t \frac{(t-s)^{m-1}}{(m-1)!} f(s) ds - u(t) + \sum_{i=0}^{m-1} C_i \frac{t_i}{i!}. \quad (20)$$

Розбивши період вимірювань на N точок з кроком $h = \frac{T}{N}$ отримуємо СЛАР відносно невідомих коефіцієнтів p_i

$$\sum_{i=1}^m A_{ji} p_i = F_j, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, N}, \quad (21)$$

де

$$A_{ji} = \int_0^{t_j} \frac{(t_j - s)^{i-1}}{(i-1)!} u(s) ds - \sum_{k=0}^{m-i-1} C_k \frac{t_j^{k+i}}{(k+i)!}, \quad i = \overline{1, m-1}, \quad (22)$$

$$A_{jm} = \int_0^{t_j} \frac{(t_j - s)^{m-1}}{(m-1)!} u(s) ds,$$

$$F_j = \int_0^{t_j} \frac{(t_j - s)^{m-1}}{(m-1)!} f(s) ds - u(t) + \sum_{i=1}^{m-1} C_i \frac{t_j^i}{i!}. \quad (23)$$

Для обчислення інтегралів у виразах (22) і (23) можуть бути використані різні квадратурні формули, зокрема формула трапецій.

У загальному випадку СЛАР (21) є несумісною і для її вирішення необхідно використовувати спеціалізовані методи, наприклад метод найменших квадратів.

Розглянемо приклади розв'язання ряду тестових завдань з використанням описаного методу.

Приклад 1. Вхідний сигнал: $u(t) = 1 - e^{-2t}$, $t \in [0; 2]$, $h = 0.01$. Вихідний сигнал: $f(t) = -14e^{-2t} - 0.2$. Початкові умови: $C_1 = 0, C_2 = 2, C_3 = -4, C_4 = 8, C_5 = -16$.

Задача: визначити коефіцієнти p_i еквівалентного диференціального рівняння

$$u^{(5)}(t) + p_1 u^{(4)}(t) + p_2 u^{(3)}(t) + p_3 u^{(2)}(t) + p_4 u^{(1)}(t) + p_5 u(t) = f(t), \quad u^{(i-1)}(0) = C_i, \quad i = \overline{1, 5}. \quad (24)$$

Точний розв'язок: $p_1 = 1.2, p_2 = -2, p_3 = 3.1, p_4 = 0.7, p_5 = -0.2$.

Використовуючи вирази (21)-(23) і квадратурної формулу трапецій для апроксимації інтегралів, що входять у вирази (22), (24),

отримуємо СЛАР відносно невідомих коефіцієнтів p_i , причому дана система є несумісною. Застосовуючи для її вирішення метод найменших квадратів, отримуємо наступні значення шуканих коефіцієнтів $p_1 = 1.8930, p_2 = -1.8640, p_3 = 3.0249, p_4 = 5.5493, p_5 = -0.1997$.

На рис. 1 представлено розв'язок рівняння (24) відповідно при точних значеннях коефіцієнтів (а) і при коефіцієнтах, отриманих в результаті розрахунку (б). Середньоквадратична похибка — $\Delta = 3.4 \times 10^{-6}$.

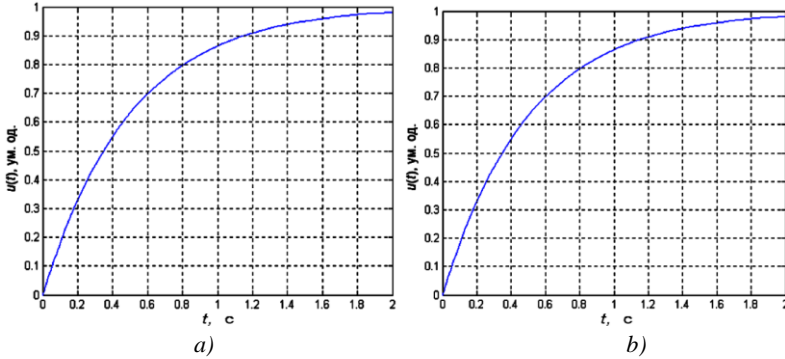


Рис. 1. Графіки розв'язку рівняння (24)

Додамо до вихідного сигналу f випадкову заваду, розподілену за нормальним законом. У табл. 1 представлені значення коефіцієнтів p_i , отримані при різних значеннях завади.

Таблиця 1

Значення коефіцієнтів p_i

Величина завади у % від вихідного сигналу	Середньоквадратична похибка	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5
1	4×10^5	2.01	-2.19	5.16	12.09	-0.20
5	8.8×10^{-4}	-4.77	4.04	8.09	-61.30	-0.21
10	3.1×10^{-5}	41.17	-36.85	-15.41	422.95	-0.25

Приклад 2. Вхідний сигнал: $u(t) = e^{1-t} + 1$. Вихідний сигнал: $f(t) = -0.5e^{1-t} - 1$. Початкові умови: $C_1 = 3.7183, C_2 = -2.7183, C_3 = 2.7183$.

Задача: визначити коефіцієнти p_i еквівалентного диференціального рівняння

$$u'''(t) + p_1 u''(t) + p_2 u'(t) + p_3 u(t) = f(t), u^{i-1} = C_i, i = \overline{1,3}.$$

Точний розв'язок: $p_1 = 2, p_2 = 0.5, p_3 = -1$.

У табл. 2 представлені значення коефіцієнтів p_i , отримані при різних значеннях завади.

Таблиця 2

Значення коефіцієнтів p_i

Величина завади у % від вихідного сигналу	Середньо квадратична похибка	p_1	p_2	p_3
0	1.7×10^{-6}	1.25	-0.25	-1.00
1	1.2×10^{-5}	0.20	-1.30	-1.00
5	2.8×10^{-5}	6.94	5.45	-0.99
10	1.7×10^{-4}	4.28	2.79	-0.99

Приклад 3. Вхідний сигнал: $u(t) = t^3$. Вихідний сигнал: $f(t) = -t^3 + 1.5t^2 + 12t + 6$. Початкові умови: $C_1 = 0, C_2 = 0, C_3 = 0$.

Задача: визначити коефіцієнти p_i еквівалентного диференціального рівняння

$$u'''(t) + p_1 u''(t) + p_2 u'(t) + p_3 u(t) = f(t), u^{i-1} = C_i, i = \overline{1,3}.$$

Точний розв'язок: $p_1 = 2, p_2 = 0.5, p_3 = -1$.

У табл. 3 представлені значення коефіцієнтів p_i , отримані при різних значеннях завади.

Таблиця 3

Значення коефіцієнтів p_i

Величина завади у % від вихідного сигналу	Середньо квадратична похибка	p_1	p_2	p_3
0	5.9×10^{-6}	1.9996	0.5014	-1.0018
1	1.3×10^{-4}	1.9799	0.5880	-1.1251
5	1.0×10^{-3}	2.0496	0.3675	-0.8863
10	8.6×10^{-4}	1.8763	1.1025	-1.8252

Висновки. На підставі результатів дослідження можна зробити висновок про такі важливі особливості й переваги інтегрального методу, як його висока стійкість, ефективність в сенсі витрат машинно-

го часу та обсягу обчислень, простота реалізації. Отже, інтегральний метод може бути ефективно використаний при розв'язуванні задач параметричної ідентифікації, які характеризуються наявністю похибок у вихідних даних.

Список використаних джерел:

1. Матвійчук Я. М. Математичне моделювання динамічних систем: теорія і практика. Львів: Видавничий центр ЛНУ ім. І. Франка, 2000. 215 с.
2. Katipamula S., Brambley M. R. Methods for Fault Detection, Diagnostics, and Prognostics for Building Systems — A Review, Part I. *HVAC&R RESEARCH*. 2005. Vol. 11. № 1. P. 3-25.
3. Patton R. J., Fantuzzi C., Simani S. Model-Based Fault Diagnosis in Dynamic Systems Using Identification Techniques. New-York: Springer-Verlag, 2003.
4. Попов В. Н., Колесников И. М., Зобков А. Л., Жебрак Л. М. Применение функционального описания Вольтерра для контроля датчиков навигационных систем. *Контроль. Диагностика*. 1999. № 11. С. 3-7.
5. Пупков К. А., Егупов Н. Д. Методы классической и современной теории автоматического управления. Статистическая динамика и идентификация систем автоматического управления: учебник для ВУЗов. В 5 т. Т. 2, 2-е изд., перераб. и доп. Москва: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2004. 638 с.
6. Попков Ю. С., Киселев О. Н., Петров Н. П., Шмульян Б. Л. Идентификация и оптимизация нелинейных стохастических систем. Москва: Энергия, 1976. 440 с.
7. Пупков К. А., Капалин В. И., Ющенко А. С. Функциональные ряды в теории нелинейных систем. Москва: Наука, 1976. 448 с.
8. Форсайт Дж. Машинные методы математических вычислений. Москва: Мир, 1977. 279 с.
9. Апарцин А. С., Солодуша С. В. О математическом моделировании нелинейных динамических систем рядами Вольтерры. *Электронное моделирование*. 1999. № 2. С. 3-12.
10. Павленко В. Д. Идентификация нелинейных динамических систем в виде ядер Вольтерры на основе данных измерений импульсных откликов. *Электронное моделирование*. 2010. Т. 32. № 3. С. 3-18.
11. Павленко С. В. Применение вейвлет-фильтрации в процедуре идентификации нелинейных систем на основе моделей Вольтерра. *Восточно-европейский журнал передовых технологий*. Харьков, 2010. № 6/4 (48). С. 65-70.
12. Павленко В. Д. Информационная технология косвенного контроля и диагностики динамических объектов на основе моделей Вольтерра. *Труды Одесск. политехн. ун-та*. Одесса, 2008. Вып. 2 (30). С. 194-199.
13. Pavlenko V., Fomin A. Methods For Black-Box Diagnostics Using Volterra Kernels. *ICIM 2008: Proceedings 2nd International Conference on Inductive Modelling*, September 15-19, 2008, Kyiv, Ukraine. P. 104-107.
14. Павленко В. Д., Павленко С. В. Вычислительный интеллект и информационная оптимизация систем диагностирования состояний непрерывных объектов. *Вычислительный интеллект (результаты, проблемы, перспективы)*: материалы 1-й Международной научно-технической конференции (10-13 мая 2011 г., Черкассы). Черкассы: Маклаут, 2011. С. 113-114.

15. Епифанов С. В., Кузнецов Б. И., Богаенко И. И. и др Синтез систем управления и диагностирования газо-турбинных двигателей. Киев: Техника, 1998. 312 с.
16. Ранченко Г. С., Миргород В. Ф., Бевзюк А. А. Исследование системы управления расходом топлива авиационного двигателя с цифровым логико-динамическим регулятором. *Труды Одесского национального политехнического университета*. 2004. Вып. 2 (22). С. 163-168.
17. Верлань А. Ф., Игнатченко А. А., Олецкий А. В. Построение математических моделей непрерывных сигналов на основе интегрального преобразования Карунена-Лоэва. *Электронное моделирование*. 1992. № 2. С. 3-7.
18. Фукунага К. Введение в статистическую теорию распознавания образов. Москва: Наука, 1970. 368 с.

INTEGRAL DYNAMIC MODELS IN IDENTIFICATION AND DIAGNOSTICS PROBLEMS

The paper considers a model approach to solving the problem of diagnostics and control of dynamic objects based on the application of integral equations. The growing complexity of energy facilities, taking into account their dynamic properties, increasing requirements for accuracy and objectivity of decisions lead to the need to develop new effective algorithms for mathematical software for diagnostic information processing systems to meet these requirements and automate the process of controlling power plants.

Currently, the direction based on the restoration of the model (operator) for diagnostic purposes is being developed in technical diagnostics. It is generally assumed that faults change only the parameters of the model of objects of control, which are evaluated by diagnostic methods of parametric identification, but there may be cases when you need to take into account changes in the structure of the object. Real objects, as a rule, have both nonlinear and dynamic properties. Therefore, as an informative description of the objects of control of unknown structure, it is expedient to use nonlinear nonparametric dynamical models based on integer-degree Volterra series, which characterize the properties of objects of control (its state) as a sequence of multidimensional weight functions — Volterra kernels. The use of models based on Volterra kernels allows you to fully and accurately take into account the nonlinear and inertial properties of objects of control, makes the procedure of model diagnostics more universal, increases the reliability of the diagnosis.

Key words: *diagnostics, control, nonlinear objects, dynamics, integral equations.*

Отримано: 29.09.2020

УДК 519.21

DOI: 10.32626/2308-5878.2020-21.54-61

Л. А. Вотякова*, канд. фіз.-мат. наук,

О. С. Туржанська*, канд. пед. наук,

О. А. Назарчук**, канд. мед. наук

*Вінницький державний педагогічний університет
імені Михайла Коцюбинського, м. Вінниця,**Вінницький національний медичний університет
імені М. І. Пирогова, м. Вінниця

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ОДНОКАНАЛЬНОЇ СИСТЕМИ МАСОВОГО ОБСЛУГОВУВАННЯ З ДВОЕТАПНИМ НАДХОДЖЕННЯМ ВИМОГИ

Будь-яка система масового обслуговування, як правило, включає такі основні складові: вхідний потік вимог (заявок), обслуговуючий пристрій, чергу на обслуговування і вихідний потік. Щоб провести аналіз системи масового обслуговування вважаємо, що час надходження заявок та час обслуговування є випадкові величини, закони розподілу яких визначаються за статистичними даними, накопиченими при аналізі подібних ситуацій.

І, звісно ж, така задача розв'язується методами теорії ймовірностей, які застосовуються у теорії масового обслуговування. Будеться математична модель, що опише функціонування системи масового обслуговування, і проводиться її аналіз.

Найбільш привабливими випадковими процесами, що описують функціонування систем масового обслуговування, є марковські процеси.

У роботі представлена математична модель одноканальної системи масового обслуговування, для якої час надходження вимоги складається з двох етапів. Ми побудували модель масового обслуговування з двоетапним вхідним потоком, а саме знайшли основні ймовірнісні характеристики вхідного потоку, розподіл ймовірностей числа вимог, що надходять за час t . Для знаходження стаціонарного розподілу вкладеного ланцюга Маркова ми скористались графоаналітичним методом.

Вихідними даними для роботи була найпростіша класична модель системи масового обслуговування, ускладнена наступним шляхом: вхідний потік складається з двох етапів — часу підготовки вимоги і часу її транспортування.

Такі моделі є більш наближеними до потреб практики і дають можливість врахувати більшу кількість факторів, що впливають на процес обслуговування.

Ключові слова: система масового обслуговування, ланцюг Маркова, перехідні ймовірності, показниковий розподіл.

Вступ. Вимоги практики вже майже півстоліття висувають перед теорією масового обслуговування велике число постановок задач [1]. Кожна нова постановка має за мету побудову математичної моделі, яка б відображала істинний характер досліджуваних явищ. Найбільш ефективним у цьому плані виявився інструментарій, розроблений в теорії випадкових процесів і особливо марковських [2].

Процеси, у яких переходи визначаються вкладеним ланцюгом Маркова, а час перебування у кожному стані показниково розподілена випадкова величина, виявились придатними для описання функціонування найрізноманітніших систем [1-5].

Постановка задачі. У своїй роботі ми будемо виходити з найпростішої класичної одноканальної системи масового обслуговування. Наша задача — побудувати нову модель, змінивши характер потоку надходження вимог. Новизна запропонованої тут математичної моделі у характері вхідного потоку [3-4]. Якщо стандартний підхід передбачає, що вхідний потік є рекурентний, то в нашій роботі час надходження вимоги складається з часу підготовки вимоги і часу власне надходження (транспортування) її, причому тривалість кожного стану є показниково розподілена випадкова величина.

Зрозуміло, що за цих умов функціонування такої системи описується марковським процесом, а тому при знаходженні основних ймовірнісних характеристик були використані методи теорії марковських процесів.

Основна частина. Нехай на обслуговуючий пристрій надходить рекурентний потік вимог. Час надходження вимоги має функцію розподілу:

$$F(t) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } t \leq 0, \\ 1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{-\lambda_2 t} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{-\lambda_1 t}, & \text{якщо } t > 0, \end{cases} \quad (1)$$

де $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$ ($\lambda_1 \neq \lambda_2$). Якщо вимога надходить в момент, коли обслуговуючий пристрій вільний, то вона негайно потрапляє на обслуговування і обслуговується час η із функцією розподілу:

$$G(t) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } t \leq 0, \\ 1 - e^{-\mu t}, & \text{якщо } t > 0, \end{cases} \quad (2)$$

причому випадкова величина η не залежить від вхідного потоку. Якщо ж вимога надходить в момент, поки пристрій зайнятий, то вона втрачається.

Оскільки час надходження вимоги є сумою двох незалежних випадкових величин ξ_1 і ξ_2 , то будемо вважати, що ξ_1 — час підготовки вимоги до відправлення (має показниковий розподіл з параметром λ_1), ξ_2 — час надходження вимоги (має показниковий розподіл з параметром λ_2). У зв'язку з цим функціонування системи можна

описати у такий спосіб. Система може перебувати у станах: e_1 — система вільна, йде підготовка до відправлення вимоги, перебуває у цьому стані час ξ_2 і переходить із ймовірністю одиниця в другий стан; e_2 — система вільна, вимога обслуговується, перебуває у цьому стані час $\min(\xi_1, \eta)$ (вважаємо, що відправник дістає інформацію про прибуття вимоги і починає готувати наступну) і переходить в стан e_1 з ймовірністю $p_{31} = P(\eta < \xi_1) = \frac{\mu}{\lambda_1 + \mu}$ або у стан e_4 з ймовірністю

$p_{34} = P(\xi_1 < \eta) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \mu}$; e_4 — вимога продовжує обслуговуватись, перебуває у цьому стані час $\min(\xi_2, \eta)$ і переходить у стан

e_2 з ймовірністю $p_{42} = P(\eta < \xi_2) = \frac{\mu}{\lambda_2 + \mu}$ або у стан e_3 з ймовірністю

$p_{43} = P(\xi_2 < \eta) = \frac{\lambda_2}{\lambda_2 + \mu}$.

Час перебування системи у станах e_1, e_2, e_3, e_4 має показниковий розподіл відповідно з параметрами $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_1 + \mu, \lambda_2 + \mu$.

Таким чином, функціонування досліджуваної системи масового обслуговування описується марковським процесом $\xi(t)$, множиною станів якого є множина $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, граф його можливих переходів має вигляд:

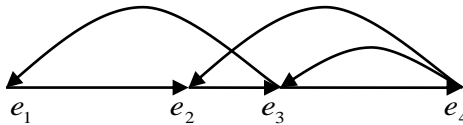


Рис. 1.

Той факт, що в момент часу t процес перебуває у стані e_i ($i = \overline{1,4}$) будемо записувати так: $\xi(t) = i$, зокрема згідно з нашим припущенням $\xi(0) = 1$. Переходи здійснюються згідно з вкладеним ланцюгом Маркова, який задається такою матрицею:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{\mu}{\lambda_1 + \mu} & 0 & 0 & \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \mu} \\ 0 & \frac{\mu}{\lambda_2 + \mu} & \frac{\lambda_2}{\lambda_2 + \mu} & 0 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Основними характеристиками процесу $\xi(t)$ є ймовірності того, що процес у момент часу t знаходиться у стані e_j за умови, що у початковий момент він знаходиться у стані e_i . Позначимо їх

$$P_{ij}(t) = P(\xi(t) = j | \xi(0) = i).$$

Скориставшись формулою повної ймовірності, складемо систему функціональних рівнянь

$$P_{11}(t + \Delta t) = P_{11}(t)P(\xi_1 > \Delta t) + P_{13}(t)P(\eta < \Delta t)P(\xi_1 > \Delta t) + o(\Delta t),$$

$$P_{12}(t + \Delta t) = P_{11}(t)P(\xi_1 < \Delta t) + P_{12}(t)P(\xi_2 > \Delta t) + P_{14}(t)P(\eta < \Delta t)P(\xi_2 > \Delta t) + o(\Delta t),$$

$$P_{13}(t + \Delta t) = P_{12}(t)P(\xi_2 < \Delta t) + P_{13}(t)P(\eta > \Delta t)P(\xi_1 > \Delta t) + P_{14}(t)P(\eta > \Delta t)P(\xi_2 < \Delta t) + o(\Delta t),$$

$$P_{14}(t + \Delta t) = P_{13}(t)P(\eta > \Delta t)P(\xi_1 < \Delta t) + P_{14}(t)P(\eta < \Delta t)P(\xi_2 < \Delta t) + o(\Delta t).$$

Звідки дістанемо систему лінійних диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} P_{11}'(t) = -\lambda_1 P_{11}(t) + \mu P_{13}(t), \\ P_{12}'(t) = \lambda_1 P_{11}(t) - \lambda_2 P_{12}(t) + \mu P_{14}(t), \\ P_{13}'(t) = \lambda_2 P_{12}(t) - (\lambda_1 + \mu) P_{13}(t) + \lambda_2 P_{14}(t), \\ P_{14}'(t) = \lambda_1 P_{13}(t) - (\lambda_2 + \mu) P_{14}(t). \end{cases} \quad (4)$$

характеристичне рівняння:

$$\begin{vmatrix} x + \lambda_1 & 0 & -\mu & 0 \\ -\lambda_1 & x + \lambda_2 & 0 & -\mu \\ 0 & -\lambda_2 & x + \lambda_2 + \mu & -\lambda_2 \\ 0 & 0 & -\lambda_1 & x + \lambda_2 + \mu \end{vmatrix} =$$

$$= x^4 + 2(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu)x^3 + ((\lambda_1 + \lambda_2 + \mu)^2 + \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\mu + \lambda_2\mu)x^2 + (\lambda_1^2\lambda_2 + \lambda_1\lambda_2^2 + 3\lambda_1\lambda_2\mu + \lambda_1^2\mu + \lambda_1\mu^2 + \lambda_2\mu^2)x = 0.$$

Очевидно, що $x_1 = 0$, $x_2 = -(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu)$ — корені цього рівняння. Ще два корені рівняння дістанемо з рівняння:

$$x^2 + (\lambda_1 + \lambda_2 + \mu)x + \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\mu + \lambda_2\mu = 0.$$

$$x_{3,4} = \frac{1}{2}(-(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu) \pm \sqrt{(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu)^2 - 2\lambda_1\lambda_2 - 2\lambda_1\mu - 2\lambda_2\mu}).$$

Тоді загальний розв'язок системи (4) подається у вигляді:

$$P_{11}(t) = c_{11} + c_{12}e^{x_2 t} + c_{13}e^{x_3 t} + c_{14}e^{x_4 t},$$

$$P_{12}(t) = c_{21} + c_{22}e^{x_2 t} + c_{23}e^{x_3 t} + c_{24}e^{x_4 t},$$

$$P_{13}(t) = c_{31} + c_{32}e^{x_2 t} + c_{33}e^{x_3 t} + c_{34}e^{x_4 t},$$

$$P_{14}(t) = c_{41} + c_{42}e^{x_2 t} + c_{43}e^{x_3 t} + c_{44}e^{x_4 t}.$$

Оскільки $\operatorname{Re} x_k < 0$ для $k = 2, 3, 4$, то існують границі $\lim_{t \rightarrow +\infty} P_{1k}(t) = c_{k1}$ ($t = \overline{1, 4}$), які позначимо відповідно $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4$ (стаціонарні ймовірності).

Стаціонарні характеристики π_k ($k = \overline{1, 4}$) можна знайти за формулами:

$$\pi_k = \frac{p_k m_k}{p_1 m_1 + p_2 m_2 + p_3 m_3 + p_4 m_4}, \quad (5)$$

де p_1, p_2, p_3, p_4 — стаціонарні ймовірності вкладеного ланцюга Маркова, що задається матрицею (3), $m_1 = \frac{1}{\lambda_1}$, $m_2 = \frac{1}{\lambda_2}$, $m_3 = \frac{1}{\lambda_3}$, $m_4 = \frac{1}{\lambda_4}$ — середній час, який процес $\xi(t)$ проводить відповідно у станах e_1, e_2, e_3, e_4 . Стаціонарні ймовірності вкладеного ланцюга Маркова є розв'язок системи:

$$\begin{cases} p_1 = p_3 \frac{\mu}{\lambda_1 + \mu}, \\ p_2 = p_1 + p_4 \frac{\mu}{\lambda_2 + \mu}, \\ p_3 = p_2 + p_4 \frac{\lambda_2}{\lambda_2 + \mu}, \\ p_4 = p_3 \frac{\lambda}{\lambda_1 + \mu}, \\ p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1, \end{cases}$$

яку розв'яжемо графо-аналітичним методом [6].

За графом переходів вкладеного ланцюга Маркова побудуємо нижні решітки кожної вершини і для них знайдемо індекси:

- для першої вершини

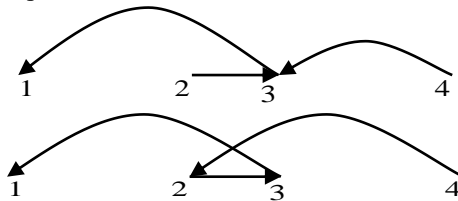


Рис. 2.

$$I_1 = \frac{\mu}{\lambda_1 + \mu} \cdot \frac{\lambda_2}{\lambda_2 + \mu} + \frac{\mu}{\lambda_1 + \mu} \cdot \frac{\mu}{\lambda_2 + \mu} = \frac{\mu}{\lambda_1 + \mu},$$

- для другої вершини

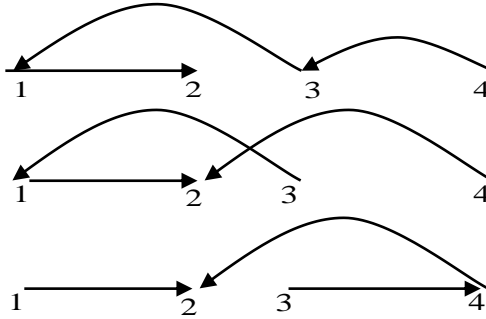


Рис. 3.

$$I_2 = \frac{\mu}{\lambda_1 + \mu} \cdot \frac{\lambda_2}{\lambda_2 + \mu} + \frac{\mu}{\lambda_1 + \mu} \cdot \frac{\mu}{\lambda_2 + \mu} + \frac{\mu}{\lambda_2 + \mu} \cdot \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \mu} = \frac{\mu}{\lambda_2 + \mu} + \frac{\mu}{\lambda_1 + \mu} \cdot \frac{\lambda_2}{\lambda_2 + \mu},$$

- для третьої вершини

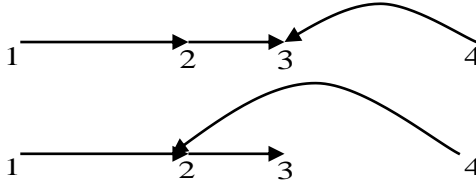


Рис. 4.

$$I_3 = \frac{\lambda_2}{\lambda_2 + \mu} + \frac{\mu}{\lambda_2 + \mu} = 1,$$

- для четвертої вершини

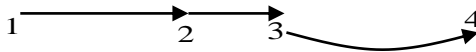


Рис. 5.

$$I_4 = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \mu}.$$

Тоді $p_k = \frac{I_k}{I}$, де $I = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = 2 + \frac{\mu}{\lambda_2 + \mu} + \frac{\mu}{\lambda_1 + \mu} + \frac{\lambda_2}{\lambda_2 + \mu}$,

точніше

$$p_1 = \frac{\lambda_2 \mu + \mu^2}{2\lambda_1 \lambda_2 + 3\lambda_1 \mu + 3\lambda_2 \mu + 3\mu^2},$$

$$P_2 = \frac{\lambda_1 \mu + \mu^2 + \lambda_2 \mu}{2\lambda_1 \lambda_2 + 3\lambda_1 \mu + 3\lambda_2 \mu + 3\mu^2},$$

$$P_3 = \frac{\lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \mu + \mu^2 + \lambda_2 \mu}{2\lambda_1 \lambda_2 + 3\lambda_1 \mu + 3\lambda_2 \mu + 3\mu^2},$$

$$P_4 = \frac{\lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \mu}{2\lambda_1 \lambda_2 + 3\lambda_1 \mu + 3\lambda_2 \mu + 3\mu^2}.$$

Скориставшись формулою (5), маємо

$$\pi_1 = \frac{1}{\Lambda} (\lambda_2^2 \mu + \lambda_2 \mu^2), \quad \pi_2 = \frac{1}{\Lambda} (\lambda_1^2 \mu + \lambda_1 \mu^2 + \lambda_1 \lambda_2 \mu),$$

$$\pi_3 = \frac{1}{\Lambda} (\lambda_1 \lambda_2^2 + \lambda_1 \lambda_2 \mu), \quad \pi_4 = \frac{1}{\Lambda} \lambda_1^2 \lambda_2,$$

де $\Lambda = \lambda_2^2 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_2^2 + 2\lambda_1 \lambda_2 \mu + \lambda_1 \mu^2 + \lambda_1^2 \mu + \lambda_2^2 \mu + \lambda_2 \mu^2$.

Нарешті, врахувавши, що $P_{11}(0) = 1$, $P_{12}(0) = P_{13}(0) = P_{14}(0) = 0$, $P_{11}'(0) = -\lambda_1$, $P_{12}'(0) = \lambda_1$, $P_{13}'(0) = P_{14}'(0) = 0$, $P_{11}''(0) = \lambda_1^2$, $P_{12}''(0) = -\lambda_1^2 - \lambda_1 \lambda_2$, $P_{13}''(0) = \lambda_1 \lambda_2$, $P_{14}''(0) = 0$, маємо чотири системи для визначення c_{ik} ($i = \overline{1,4}$, $k = 2, 3, 4$):

$$\begin{cases} c_{12} + c_{13} + c_{14} = 1 - \pi_1, \\ x_2 c_{12} + x_3 c_{13} + x_4 c_{14} = -\lambda_1, \\ x_2^2 c_{12} + x_3^2 c_{13} + x_4^2 c_{14} = \lambda_1^2, \end{cases} \begin{cases} c_{22} + c_{23} + c_{24} = -\pi_2, \\ x_2 c_{22} + x_3 c_{23} + x_4 c_{24} = \lambda_1, \\ x_2^2 c_{22} + x_3^2 c_{23} + x_4^2 c_{24} = -\lambda_1^2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_{32} + c_{33} + c_{34} = -\pi_3, \\ x_2 c_{32} + x_3 c_{33} + x_4 c_{34} = 0, \\ x_2^2 c_{32} + x_3^2 c_{33} + x_4^2 c_{34} = 0, \end{cases} \begin{cases} c_{42} + c_{43} + c_{44} = -\pi_4, \\ x_2 c_{42} + x_3 c_{43} + x_4 c_{44} = 0, \\ x_2^2 c_{42} + x_3^2 c_{43} + x_4^2 c_{44} = \lambda_1 \lambda_2. \end{cases}$$

Висновки. Таким чином, побудовані перехідні ймовірнісні характеристики, які повністю описують функціонування одноканальної системи з двоетапним надходженням вимоги.

Список використаних джерел:

1. Гнеденко Б. В., Коваленко И. Н. Введения в теорию массового обслуживания. М.: Наука, 1966. 431 с.
2. Боровков А. А. Вероятностные методы в теории массового обслуживания. М.: Наука, 1972. 368 с.
3. Породников В. Д., Шаташвили А. Д. Об одной системе с изменяющимся входным потоком и групповым обслуживанием. *Тез. докл. XXI школы-коллоквиум по т. в. и м. ст.* Тбилиси, 1987. С. 37.
4. Породников В. Д., Шаташвили А. Д. Исследование систем массового обслуживания с переключаемым режимом работы, зависящий от длины

- очереди. *Эргодическая теория марковских процессов. Всесоюзная школа-семинар, т. докладов* Кедвел, 1987. С. 44-45.
5. Philippe N. Basic elements of queuing theory. Application to the Modelling of Computer Systems. The University of Massachusetts, 1998. 110 p.
 6. Votyakova L. A., Nakonechna L. I. Modelling of the queuing system with an increasing demand intensity in the empty state. *Theory of Stochastic Processes*. 2018. Vol. 23 (39). № 2. P. 75-79.

MATHEMATICAL MODEL OF ONE-CHANNEL QUEUEING SYSTEM WITH TWO-STAGE REMAND ARRIVAL

Any queuing system typically includes the following main components: the input stream of requests, the service device, the service queue and the output stream. To analyze the queuing system, we believe that the time of receipt of applications and time of service are random variables, the laws of distribution of which are determined by statistics accumulated in the analysis of such situations.

And, of course, this problem is solved by the methods of probability theory, which are used in the theory of queuing. A mathematical model describing the functioning of the queuing system is built and analyzed.

The most attractive random processes which describe the functioning of queuing systems are Markov processes.

Mathematical model of a one-channel queueing system, for which the time of remand accession consists of two stages, has been presented in this article. We have built a queueing model with a two-step input flow, namely, we have found the basic probabilistic characteristics of the input flow. Particularly, the main probability characteristics of input flow and distribution of probability of number of remands, which comes during t time were found. To find the stationary distribution of the embedded Markov chain, we used the graphoanalytic method.

The initial data for the article is the simplest classical queuing system model, complicated by the following: the input flow consists of two stages — the time of preparation of the remand and the time of its transportation.

Such models are more approximate to the needs of the practice and allow the opportunity to consider greater number of factors influencing the service process.

Key words: *queuing system, Markov chains, transition probabilities, exponent distribution.*

Отримано: 12.10.2020

УДК 518.968

DOI: 10.32626/2308-5878.2020-21.62-68

К. Г. Геселева, аспірант,**С. О. Кріль**, канд. фіз.-мат. наук

Кам'янець-Подільський національний університет

імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

ЗАСТОСУВАННЯ КОЛОКАЦІЙНО-ІТЕРАТИВНОГО МЕТОДУ ДО НЕЛІНІЙНИХ ІНТЕГРО-ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

У статті досліджується питання застосування колокаційно-ітеративного методу [1, 3] до одного типу нелінійного інтегро-функціонального рівняння. Вказано умови, які гарантують існування єдиного розв'язку такого рівняння. Приведена основна схема методу та вказано умови, при виконанні яких цей метод буде збіжним. При обґрунтуванні методу використовується той факт, що вихідне нелінійне інтегро-функціональне рівняння можна звести до нелінійного інтегрального рівняння, ядра інтегральних операторів якого записуються в явному вигляді.

Також важливим моментом при обґрунтуванні є те, що колокаційно-ітеративний метод можна трактувати як частковий випадок проєкційно-ітеративного методу. Застосування останнього до різних типів нелінійних операторних рівнянь систематично досліджувалось у роботах А. Ю. Лучки та його учнів.

Суттєвою особливістю досліджуваного у роботі методу є те, що на кожному кроці ітерації потрібно розв'язувати системи нелінійних алгебраїчних чи трансцендентних рівнянь, що є основною технічною складністю цього процесу. Але задача відшукування розв'язків таких систем є простішою, ніж розв'язування вихідного нелінійного інтегро-функціонального рівняння.

У роботі показано, що метод послідовних наближень та метод колокації розв'язання вихідного нелінійного рівняння можна розглядати як часткові випадки колокаційно-ітеративного методу.

Крім основного алгоритму методу приведено його обчислювальну схему, яка є більш зручною для безпосередніх обчислень ніж сам метод і яку при необхідності можна успішно реалізувати на комп'ютері, створивши для цього відповідну програму.

Ключові слова: *нелінійне інтегро-функціональне рівняння, нелінійне інтегральне рівняння, колокаційно-ітеративний метод, метод колокації, обчислювальна схема, наближений розв'язок, вузли колокації, інтегральний оператор.*

Вступ. Розглянемо нелінійне інтегро-функціональне рівняння

$$y(x) = f(x) + p(x)y(h(x)) + \int_a^b K(x;t)y(t)dt + \quad (1)$$

$$+ \lambda \int_a^b C(x;t)F\left(t; \int_a^b G(t;\xi)y(\xi)d\xi\right)dt, x \in [a;b], \quad (2)$$

$$y(x) = 0, x \notin [a;b], \quad (2)$$

де $f(x)$ — задана, $y(x)$ — шукана функції з простору $L_2(a;b)$, λ — додатний параметр.

Відносно рівняння (1) вважатимемо, що:

- 1) функції $p(x)$ та $h(x)$ на проміжку $[a;b]$ задовольняють умовам

$$|p(x)| \leq \bar{p} < \infty, \quad (3)$$

$h(x)$ — диференційовна на $[a;b]$ і

$$h'(x) \geq l > 0, \quad x - h(x) \geq \sigma > 0; \quad (4)$$

- 2) лінійні інтегральні оператори

$$(Ky)(x) = \int_a^b K(x;t)y(t)dt, \quad (5)$$

$$(Cu)(x) = \int_a^b C(x;t)u(t)dt, \quad (6)$$

$$(Gy)(x) = \int_a^b G(x;t)y(t)dt, \quad (7)$$

відображають простір $L_2(a;b)$ в себе і є цілком неперервними;

- 3) дійсна функція $F(x; z)$ змінних $x \in [a;b]$ та $z \in R$ задовольняє умову Каратеодорі та, крім того, $F(v; 0) \in L_2(a;b)$ і

$$|F(x; u) - F(x; z)| \leq |u - z|, \quad \forall u, z \in R, x \in [a;b]. \quad (8)$$

При таких припущеннях, як відомо [2, 4], інтегральний оператор

$$(By)(x) = f(x) + \int_a^b K(x;t)y(t)dt + \lambda \int_a^b C(x;t)F\left(t; \int_a^b G(t;\xi)y(\xi)d\xi\right)dt, \quad (9)$$

відображає простір $L_2(a;b)$ в себе і є цілком неперервним.

Колокаційно-ітеративний метод. До рівняння (1) при виконанні умови (2) застосуємо колокаційно-ітеративний метод, згідно якого наближені розв'язки будуються так:

$$y_k(x) - p(x)y_k(h(x)) = f(x) + \int_a^b K(x;t)z_k(t)dt + \lambda \int_a^b C(x;t)F\left(t; \int_a^b G(t;\xi)z_k(\xi)d\xi\right)dt, x \in [a;b], \quad (10)$$

$$y_k(x) = 0, x \notin [a;b],$$

$$z_k(x) = y_{k-1}(x) + w_k(x), k = 1, 2, 3, \dots, \quad (11)$$

$$w_k(x) = \int_a^b P_n(x;t)(y_k(t) - y_{k-1}(t))dt, \quad (12)$$

де

$$P_n(x;t) = \sum_{m=1}^n \tau_m^{-1} \eta_m(x) \eta_m(t), \quad \tau_m = \int_a^b \eta_m^2(x) dx. \quad (13)$$

Система функцій $\{\eta_m(x)\}_{m=1}^n$ знаходиться як розв'язок системи функціональних рівнянь

$$\begin{aligned} \eta_m(x) - p(x)\eta_m(h(x)) &= \varphi_m(x), x \in [a;b], \\ \eta_m(x) &= 0, x \notin [a;b], \end{aligned} \quad (14)$$

причому вихідна система функцій $\{\varphi_m(x)\}$ є лінійно-незалежною та повною у просторі $L_2(a;b)$. Іншими словами, функціональні поправки $w_k(x)$ на кожному кроці ітерації шукаються у вигляді

$$w_k(x) = \sum_{m=1}^n a_m^k \eta_m(x).$$

Невідомі коефіцієнти a_m^k знаходимо з умови

$$y_k(x_i) - z_k(x_i) = 0, i = \overline{1, n}, \quad (15)$$

(тут $x_i \in [a;b], i = \overline{1, n}$ — вузли колокації).

Здійснивши нескладні елементарні перетворення, приходимо до висновку, що для визначення функцій $w_k(x)$ на кожному кроці ітерації згідно формул (10)-(13) отримується деяке нелінійне інтегральне рівняння, подібне до рівняння (1), але з виродженими ядрами. Це у свою чергу дає змогу записати останнє у вигляді системи алгебраїчних чи трансцендентних рівнянь порядку n .

Обґрунтування методу. Ідея обґрунтування методу (10)-(15) полягає у тому, що вихідне рівняння (1) з урахуванням умови (2) можна звести до нелінійного інтегрального рівняння вигляду

$$u(x) = f(x) + \int_a^b T(x;t)u(t)dt + \lambda \int_a^b C(x;t)F\left(t; \int_a^b H(t;\xi)u(\xi)d\xi\right)dt, \quad (16)$$

складові елементи якого задовольняють умовам, аналогічним приведеним вище умовам 2), 3).

Дійсно, взявши

$$\begin{aligned} y(x) - p(x)y(h(x)) &= u(x), x \in [a; b], \\ y(x) &= 0, x \notin [a; b], \end{aligned} \quad (17)$$

отримаємо, що

$$y(x) = \begin{cases} u(x), x \in [a; h^{-1}(a)), \\ u(x) + \sum_{i=1}^s y(h^i(x)) \prod_{k=0}^{i-1} p(h^k(x)), x \in \Delta_s, s = \overline{1, m}, \end{cases} \quad (18)$$

де $\Delta_s = [c_{s-1}; c_s)$, $c_0 = a$, $c_s = h^{-1}(c_{s-1})$, $c_m = b$, $h^k(x) = h(h^{k-1}(x))$, $s = \overline{1, m}$.

Тоді, підставивши $y(x)$, що має вигляд (18), у підінтегральні вирази рівняння (1) і здійснивши ряд перетворень, переконаємось у тому, що ядра $T(x;t)$ та $H(x;t)$ інтегральних операторів рівняння (16) набудуть вигляду

$$T(x;t) = \begin{cases} K(x;t) + \sum_{i=1}^{m-s} K(x;(h^{-1})^i(t)) \prod_{k=1}^i p((h^{-1})^k(t)), t \in \Delta_s, \\ K(x;t), t \in (c_{m-1}; b), s = \overline{1, m-1}, x \in (a; b), \end{cases} \quad (19)$$

$$H(x;t) = \begin{cases} G(x;t) + \sum_{i=1}^{m-s} G(x;(h^{-1})^i(t)) \prod_{k=1}^i p((h^{-1})^k(t)), t \in \Delta_s, \\ G(x;t), t \in (c_{m-1}; b), s = \overline{1, m-1}, x \in (a; b). \end{cases} \quad (20)$$

При цьому колокаційно-ітеративний метод (10)-(15) розв'язування рівняння (1) з умовою (2) буде рівносильним колокаційно-ітеративному методу розв'язання рівняння (16), тобто методу:

$$u_k(x) = f(x) + \int_a^b T(x;t)\tilde{z}_k(t)dt + \lambda \int_a^b C(x;t)F\left(t; \int_a^b H(t;\xi)\tilde{z}_k(\xi)d\xi\right)dt, \quad (21)$$

$$\tilde{z}_k(x) = u_{k-1}(x) + w_k(x), k = 1, 2, 3, \dots, \quad (22)$$

$$w_k(x) = \int_a^b Q_n(x;t)(u_k(t) - u_{k-1}(t))dt, \quad (23)$$

де

$$Q_n(x;t) = \sum_{m=1}^n \alpha_m^{-1} \varphi_m(x) \varphi_m(t), \quad \alpha_m = \int_a^b \varphi_m^2(x) dx, \quad (24)$$

(тут $\{\varphi_m(x)\}$ — лінійно-незалежна та повна в просторі $L_2(a;b)$ система функцій).

У роботі [5] до рівняння (16) застосовується проекційно-ітеративний метод та приводиться схема його обґрунтування. Оскільки колокаційно-ітеративний метод можна розглядати, як окремий випадок проекційно-ітеративного, то, приймаючи до уваги приведені у згаданій роботі міркування, приходимо до висновку, що матиме місце твердження.

Теорема. Якщо виконуються приведені вище умови 1)-3) і для довільної функції $g(x) \in L_2(a;b)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b P_n(x;t) g(t) dt = g(x),$$

то для всякої функції $f(x) \in L_2(a;b)$ інтегро-функціональне рівняння (1) з умовою (2) матиме єдиний розв'язок та буде справедлива нерівність

$$\|y^*(x) - \tilde{y}(x)\| \leq c \cdot \|f^*(x) - f(x)\|, \quad c > 0,$$

де $y^*(x)$ та $\tilde{y}(x)$ — відповідно розв'язки рівняння (1) при $f(x) = f^*(x)$ та при $f(x) = f(x)$.

Тоді при достатньо великих n колокаційно-ітеративний метод (10)-(15) буде збіжним.

Слід відмітити, що, як частковий випадок методу (10)-(15), при $w_k(x) = 0, k = 1, 2, 3, \dots$, отримаємо один варіант методу послідовних наближень, а при $y_0(x) \equiv 0$ наближення $z_1(x)$ можна розглядати як наближений розв'язок рівняння (1), побудований за допомогою колокаційного методу.

Обчислювальна схема. Безпосередні обчислення згідно колокаційно-ітеративного методу (10)-(15) доцільно проводити за такою схемою.

Задаємо лінійно-незалежну на проміжку $[a;b]$ систему функцій $\{\varphi_j(x)\}, j = \overline{1, n}$ і згідно формули (14) знаходимо систему функцій $\{\eta_j(x)\}, j = \overline{1, n}$.

Далі будуємо функції

$$K_j(x) = \int_a^b K(x;t) \eta_j(t) dt, \quad G_j(x) = \int_a^b G(x;t) \eta_j(t) dt, \quad j = \overline{1, n}. \quad (25)$$

Нехай, виходячи з деякого початкового наближення $y_0(x)$, знайдемо функцію $y_{k-1}(x)$. Будемо функцію $u_{k-1}(x) = y_{k-1}(x) + p(x)y_{k-1}(h(x))$.

Після цього виконуємо ітерацію

$$v_k(x) = f(x) + \int_a^b K(x;t) y_{k-1}(t) dt + \lambda \int_a^b C(x;t) F \left(t; \int_a^b G(t;\xi) y_{k-1}(\xi) d\xi \right) dt, \quad (26)$$

і записуємо нев'язку

$$\varepsilon_k(x) = v_k(x) - u_{k-1}(x). \quad (27)$$

Обчислюємо числа b_i^k

$$b_i^k = \varepsilon_k(x_i), i = \overline{1, n}, \quad (28)$$

(тут, як відмічалось вище, $x_i \in [a; b], i = \overline{1, n}$ – вузли колокації).

Розв'язавши систему n нелінійних рівнянь

$$\sum_{j=1}^n a_j^k (\varphi_j(x_i) - K_j(x_i)) - \lambda \int_a^b C(x_i;t) F \left(t; \sum_{j=1}^n a_j^k G_j(t) \right) dt = b_i^k, \quad (29)$$

де $i = \overline{1, n}$, знаходимо коефіцієнти a_j^k і будемо функцію

$$u_k(x) = v_k(x) + \sum_{j=1}^n a_j^k K_j(x) + \lambda \int_a^b C(x;t) F \left(t; \sum_{j=1}^n a_j^k G_j(t) \right) dt. \quad (30)$$

Наближення $y_k(x)$ знаходимо, розв'язавши покроково функціональне рівняння

$$\begin{aligned} y_k(x) - p(x)y_k(h(x)) &= u_k(x), x \in [a; b], \\ y_k(x) &= 0, x \notin [a; b]. \end{aligned} \quad (31)$$

Здійснивши нескладні перетворення, можна показати, що приведена обчислювальна схема (14), (25)-(31) є рівносильною колокаційно-ітеративному методу (10)-(15).

Висновки. У статті досліджено один із наближених методів розв'язування деякого типу нелінійного інтегро-функціонального рівняння, а саме, — колокаційно-ітеративний метод. Зокрема, розглянуто питання існування єдиного розв'язку та побудови його наближених розв'язків. Розглянуто застосування колокаційно-ітеративного методу до такого рівняння. Він полягає у тому, що при виконанні певних умов згадані інтегро-функціональні рівняння можна звести до нелінійних інтегральних рівнянь. Приведені обґрунтування методу та обчислювальна схема.

Список використаних джерел:

1. Геселева К. Г. Колокаційний та колокаційно ітеративний методи розв'язання інтегро-функціональних рівнянь з малою нелінійністю. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні*

- науки: зб. наук. пр. Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Поділ. нац. ун-т ім. Івана Огієнка, 2015. Вип. 12. С. 19-27.
2. Забрейко П. П., Кошелев А. И., Красносельский М. А. и др. Интегральные уравнения. М.: Физматгиз, 1968. 448 с.
 3. Конет И. М., Геселева К. Г. Коллокационный и коллокационно-итеративный методы решения интегро-функционального уравнения. *Часопис «Весник Брєсцкага університета». Серія 4. Фізика. Математика.* 2017. № 2. С. 82-89.
 4. Красносельский М. А., Забрейко П. П., Пустыльник Е. И. и др. Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. М.: Наука, 1966. 500 с.
 5. Лучка А. Ю. Проекционно-итеративные методы решения линейных дифференциальных и интегральных уравнений. Киев: Наук. думка, 1980. 288 с.

APPLICATION OF THE COLLOCATION-ITERATIVE METHOD TO NONLINEAR INTEGRO-FUNCTIONAL EQUATIONS

The article investigates the application of the collocation-iterative method to one type of nonlinear integro-functional equation. The conditions that guarantee the existence of a single solution of such an equation are given. The basic algorithm of the method is given and the conditions under which this method will be convergent are indicated. In substantiating this method, the fact is used that the original nonlinear integro-functional equation can be reduced to a nonlinear integral equation, the kernels of integral operators of which are written explicitly.

Another important point in the justification is that the collocation-iterative method can be interpreted as a partial case of the projection-iterative method. The application of the latter to different types of nonlinear operator equations has been systematically investigated in the works of A. Y. Luchka and his students.

A significant difference between the method studied in this work is that at each step of the iteration it is necessary to solve systems of nonlinear algebraic or transcendental equations, which is the main technical complexity of this process. But the problem of finding solutions of such systems is simpler than solving the original nonlinear integro-functional equation.

The article shows that the method of successive approximations and the method of collocation of the solution of the initial nonlinear equation can be considered as partial cases of the collocation-iterative method.

In addition to the basic algorithm of the method, its computational algorithm is given, which is more convenient for direct calculations than the method itself and which, if necessary, can be successfully implemented on a computer by creating an appropriate program.

Key words: *nonlinear integro-functional equation, nonlinear integral equation, collocation-iterative method, collocation method, computational algorithm, approximate solution, collocation nodes, integral operator.*

Отримано: 24.09.2020

UDC 517.958;517.956.4

DOI: 10.32626/2308-5878.2020-21.69-83

A. Gromyk*, Ph.D.,

I. Konet**, Doctor of Phys. and Mathem. Sciences, Professor,

T. Pylypiuk**, Ph.D.

*State Agrarian and Engineering University in Podilia,
Kamianets-Podilskyi,

**Kamianets-Podilskyi National

Ivan Ohiienko University, Kamianets-Podilskyi

PARABOLIC BOUNDARY VALUE PROBLEMS IN UNLIMITED PIECEWISE HOMOGENEOUS WEDGE-SHAPED HOLLOW CYLINDER

The unique exact analytical solutions of parabolic boundary value problems of mathematical physics in unbounded by variable z piecewise-homogeneous by radially variable r wedge-shaped by an angularly variable φ hollow cylinder were constructed at first time by the method of classical integral and hybrid integral transforms in combination with the method of main solutions (matrices of influence and Green matrices) in the proposed article.

The cases of assigning on the verge of the wedge the boundary conditions of Dirichlet and Neumann and their possible combinations (Dirichlet — Neumann, Neumann — Dirichlet) are considered.

Finite integral Fourier transform by an angular variable, a Fourier integral transform on a Cartesian axis by an applicative variable and a hybrid integral transform of the Hankel type of the second kind on a segment of the polar axis with n points of conjugation were used to construct classic solutions of investigated initial-boundary value problems.

The consistent application of integral transforms by geometric variables allows us to reduce the three-dimensional initial boundary-value problems of conjugation to the Cauchy problem for a regular linear inhomogeneous 1st order differential equation whose unique solution is written in a closed form.

The application of inverse integral transforms restores explicitly the solution of the considered problems through their integral image.

Key words: *parabolic equation, initial and boundary conditions, conjugation conditions, integral transforms, hybrid integral transforms, main solutions.*

Introduction. The theory of boundary value problems for partial differential equations and the equations of mathematical physics in particular, is an important part of modern theory of differential equations, which is developing intensively in our time. Its results are important for the devel-

opment of many branches of mathematics, and numerous applications of its achievements are importance for study of various mathematical models of various processes and phenomena of physics, mechanics, chemistry, biology, medicine, economics, ecology, technology, latest technologies.

Significant results from the theory of the Cauchy problem and boundary value problems for equations of parabolic type were obtained in the well-known works of V. Gorodetsky [2], Zhitarashu N., Eidelman S. [6], Zagorskiy T. [7], Ivasishen S. [8], Ladyzhenskaya O., Solonnikova V., Ural'ceva N. [14], Landis E. [15], Matiychuk M. [16], Pukalskiy I. [18], Friedman A. [22], Eidelman S. [24] and other domestic and foreign mathematicians.

It is well known that the complexity of the studied boundary value problems significantly depends on the properties of the coefficients of the equations (different types of degeneracies and features of the coefficients) and on the geometric structure of the region (smoothness of the boundary, angular points, boundedness, infinity, etc.). At present, the properties of solutions have been studied in detail and various methods for constructing solutions (exact and approximate) of boundary value problems for linear, quasilinear, and some nonlinear equations of different types (elliptic, parabolic, hyperbolic) in single-connected domains (homogeneous media) have been developed and functional spaces of correctness of problems in the sense of Hadamard have been constructed.

However, many important applied problems of thermomechanics, thermal physics, diffusion, theory of elasticity, theory of electrical circuits, oscillation theory, mechanics of a deformable solid lead to boundary value problems and mixed problems not only in homogeneous environments when the coefficients of the equations are continuous, but also in inhomogeneous and piecewise homogeneous environments when the coefficients of equations are piecewise continuous or piecewise constant [4, 5, 19].

It is known that in addition to the method of separation of variables (Fourier method) and its generalizations, one of the important and effective methods of studying linear boundary and mixed problems for partial differential equations in homogeneous environments is the method of integral transforms, which allows to construct analytically exact solutions of the considered problems through their integral image.

At the same time, for a rather wide class of linear boundary value problems in piecewise homogeneous environments, the method of hybrid integral transforms generated by the corresponding hybrid differential operators on each component of connectivity of piecewise homogeneous environment with different differential operators, or differential operators of the same type, but with different sets of coefficients proved to be an effective method of constructing their solutions [3, 9-12].

This article is a logical continuation of [13]. Integral images of the only exact analytical solutions of parabolic initial-boundary value prob-

lems of mathematical physics in an unbounded piecewise-homogeneous wedge-shaped hollow cylinder were constructed in this article by means of the method of integral and hybrid integral transforms in combination with the method of principal solutions.

Formulation of the problem. Let's consider the problem of constructing a classical solution of linear partial differential equations of parabolic type of the 2nd order [17]

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} - \left[a_{rj}^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{a_{\varphi j}^2}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + a_{zj}^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] u_j + \chi_j^2 u_j = f_j(t, r, \varphi, z); \quad r \in I_j; \quad j = \overline{1, n+1}, \quad (1)$$

which is bounded in the set

$$D = \{(t, r, \varphi, z) : t > 0; r \in I_n^+ = \bigcup_{j=1}^{n+1} I_j \equiv \bigcup_{j=1}^{n+1} (R_{j-1}; R_j), R_0 > 0, R_{n+1} = R < +\infty;$$

$$\varphi \in (0; \varphi_0), 0 < \varphi_0 < 2\pi; z \in (-\infty; +\infty)\}$$

with initial conditions

$$u_j(t, r, \varphi, z)|_{t=0} = g_j(r, \varphi, z); \quad r \in I_j; \quad j = \overline{1, n+1}, \quad (2)$$

boundary conditions

$$\frac{\partial^s u_j}{\partial z^s} \Big|_{z=-\infty} = 0; \quad \frac{\partial^s u_j}{\partial z^s} \Big|_{z=+\infty} = 0; \quad s = 0, 1; \quad j = \overline{1, n+1}, \quad (3)$$

$$\left(\alpha_{11}^0 \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{11}^0 \right) u_1 \Big|_{r=R_0} = g_0(t, \varphi, z); \quad \left(\alpha_{22}^{n+1} \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{22}^{n+1} \right) u_{n+1} \Big|_{r=R} = g(t, \varphi, z), \quad (4)$$

one of the boundary conditions on the wedge boundaries [13]

$$u_j|_{\varphi=0} = g_{1j}(t, r, z); \quad u_j|_{\varphi=\varphi_0} = w_{1j}(t, r, z); \quad j = \overline{1, n+1}, \quad (5)$$

$$u_j|_{\varphi=0} = g_{2j}(t, r, z); \quad \frac{\partial u_j}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=\varphi_0} = -w_{2j}(t, r, z); \quad j = \overline{1, n+1}, \quad (6)$$

$$\frac{\partial u_j}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=0} = g_{3j}(t, r, z); \quad u_j|_{\varphi=\varphi_0} = w_{3j}(t, r, z); \quad j = \overline{1, n+1}, \quad (7)$$

$$\frac{\partial u_j}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=0} = g_{4j}(t, r, z); \quad \frac{\partial u_j}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=\varphi_0} = -w_{4j}(t, r, z); \quad j = \overline{1, n+1} \quad (8)$$

and conjugate conditions [12]

$$\left[\left(\alpha_{j1}^k \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j1}^k \right) u_k - \left(\alpha_{j2}^k \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j2}^k \right) u_{k+1} \right] \Big|_{r=R_k} = 0; \quad j = 1, 2; \quad k = \overline{1, n}, \quad (9)$$

here a_{rj} , $a_{\varphi j}$, a_{zj} , χ_j , α_{js}^k , β_{js}^k — some constants;

$$c_{jk} = \alpha_{2j}^k \beta_{1j}^k - \alpha_{1j}^k \beta_{2j}^k \neq 0; \quad c_{1k} \cdot c_{2k} > 0; \quad \alpha_{11}^0 \leq 0, \quad \beta_{11}^0 \geq 0, \quad \alpha_{22}^{n+1} \geq 0,$$

$$\beta_{22}^{n+1} \geq 0; \quad \left| \alpha_{11}^0 \right| + \beta_{11}^0 \neq 0; \quad \alpha_{22}^{n+1} + \beta_{22}^{n+1} \neq 0;$$

$$f(t, r, \varphi, z) = \{ f_1(t, r, \varphi, z), f_2(t, r, \varphi, z), \dots, f_{n+1}(t, r, \varphi, z) \};$$

$$g(r, \varphi, z) = \{ g_1(r, \varphi, z), g_2(r, \varphi, z), \dots, g_{n+1}(r, \varphi, z) \}; \quad g_0(t, \varphi, z),$$

$$g(t, \varphi, z), \quad g_{pj}(t, r, z), \quad w_{pj}(t, r, z); \quad (p = \overline{1, 4}; \quad j = \overline{1, n+1})$$

— are known real bounded continuous functions;

$$u(t, r, \varphi, z) = \{ u_1(t, r, \varphi, z), u_2(t, r, \varphi, z), \dots, u_{n+1}(t, r, \varphi, z) \}$$

— is desired real function which is continuously differentiable by variable t and twice-continuously differentiable by geometric variables (r, φ, z) .

Let's notice that:

- 1) in the case of $\chi_j \equiv 0$ ($j = \overline{1, n+1}$) equation (1) is a classic three-dimensional inhomogeneous thermal conductivity equation (diffusion) for an orthotropic environment in cylindrical coordinates;
- 2) in the case of $\alpha_{11}^k = 0, \quad \beta_{11}^k = 1; \quad \alpha_{12}^k = 0, \quad \beta_{12}^k = 1; \quad \alpha_{21}^k = \lambda_1^k, \quad \beta_{21}^k = 0; \quad \alpha_{22}^k = \lambda_2^k, \quad \beta_{22}^k = 0$, here $\lambda_1^k, \quad \lambda_2^k$ — thermal conductivity coefficients, the conjugate conditions (9) coincide with conditions of ideal heat (thermal) contact;
- 3) in the case of $\alpha_{11}^k = b_k, \quad \beta_{11}^k = 1; \quad \alpha_{12}^k = 0, \quad \beta_{12}^k = 1; \quad \alpha_{21}^k = \lambda_1^k, \quad \beta_{21}^k = 0; \quad \alpha_{22}^k = \lambda_2^k, \quad \beta_{22}^k = 0$, here b_k — coefficients of thermal resistance, the conjugate conditions (9) coincide with conditions of not ideal thermal contact.

Thus, in these cases 1, 2 (or 1, 3) considered parabolic boundary value problem of mathematical physics is a mathematical model of thermal conductivity processes in an unlimited piecewise homogeneous wedge-shaped hollow cylinder.

The main part. Let's assume that the solutions of parabolic initial-boundary problems of conjugation (1)-(4), (5), (9); (1)-(4), (6), (9); (1)-(4), (7), (9); (1)-(4), (8), (9) exist, and defined and the unknown functions satisfy the conditions of applicability of direct and inverse integral and hybrid integral transforms [12, 20, 21].

Due to [21] let's define finite direct $F_{m,ik}$ and inverse $F_{m,ik}^{-1}$ integral Fourier transforms relative to the angular variable $\varphi \in (0; \varphi_0)$ by formulas:

$$F_{m,ik}[f(\varphi)] = \int_0^{\varphi_0} f(\varphi) U_{m,ik}(\varphi) d\varphi \equiv f_{m,ik}, \quad (10)$$

$$F_{m,ik}^{-1} [f_{m,ik}] = \frac{2}{\varphi_0} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m^{ik} f_{m,ik} U_{m,ik}(\varphi) \equiv f(\varphi), \quad (11)$$

here

$$\begin{aligned} U_{m,11}(\varphi) &= \sin(\beta_{m,11}\varphi); \quad \beta_{m,11} = \frac{\pi m}{\varphi_0}; \\ U_{m,12}(\varphi) &= \sin(\beta_{m,12}\varphi); \quad \beta_{m,12} = \frac{\pi(2m+1)}{2\varphi_0}; \\ U_{m,21}(\varphi) &= \cos(\beta_{m,21}\varphi); \quad \beta_{m,21} = \beta_{m,12}; \\ U_{m,22}(\varphi) &= \cos(\beta_{m,22}\varphi); \quad \beta_{m,22} = \beta_{m,11}; \\ \varepsilon_0^{ik} &= 0; \quad \varepsilon_m^{ik} = 1 \text{ if } ik = 11, 12, 21; \quad m = 1, 2, 3, \dots; \\ \varepsilon_0^{22} &= \frac{1}{2}; \quad \varepsilon_m^{22} = 1 \text{ if } m = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

In this case, the identity (12) is fulfilled for the integral operator

$$F_{m,ik} \left[\frac{d^2 f}{d\varphi^2} \right] = -\beta_{m,ik}^2 f_{m,ik} + \Phi_{m,ik}; \quad i, k = 1, 2, \quad (12)$$

here

$$\begin{aligned} \Phi_{m,11}(f) &= \frac{\pi m}{\varphi_0} \left[f(0) + (-1)^{m+1} f(\varphi_0) \right]; \\ \Phi_{m,12}(f) &= \frac{\pi(2m+1)}{2\varphi_0} f(0) + (-1)^m \left. \frac{df}{d\varphi} \right|_{\varphi=\varphi_0}; \\ \Phi_{m,21}(f) &= - \left. \frac{df}{d\varphi} \right|_{\varphi=0} + (-1)^m \frac{\pi(2m+1)}{2\varphi_0} f(\varphi_0); \\ \Phi_{m,22} &= - \left. \frac{df}{d\varphi} \right|_{\varphi=0} + (-1)^m \left. \frac{df}{d\varphi} \right|_{\varphi=\varphi_0}. \end{aligned}$$

The integral operator $F_{m,ik}$ due to the formula (10) as a result of identity (12) three-dimensional initial boundary value problems of conjugation (1)-(4), (5), (9); (1)-(4), (6), (9); (1)-(4), (7), (9); (1)-(4), (8), (9) puts in accordance the task of constructing classical solution of two-dimensional differential equations of parabolic type of the 2nd order which is limited in the set $D' = \{(t, r, z) : t > 0; r \in I_n^+; z \in (-\infty; +\infty)\}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{jm,ik}}{\partial t} - \left[a_{rj}^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{v_{jm,ik}^2}{r^2} \right) + a_{zj}^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] u_{jm,ik} + \chi_j^2 u_{jm,ik} &= \quad (13) \\ &= G_{jm,ik}(t, r, z); \quad r \in I_j; \quad j = \overline{1, n+1}, \end{aligned}$$

with initial conditions

$$u_{jm,ik}(t, r, z) \Big|_{t=0} = g_{jm,ik}(r, z); \quad r \in I_j; \quad j = \overline{1, n+1}, \quad (14)$$

boundary conditions

$$\frac{\partial^s u_{jm,ik}}{\partial z^s} \Big|_{z=-\infty} = 0; \quad \frac{\partial^s u_{jm,ik}}{\partial z^s} \Big|_{z=+\infty} = 0; \quad s = 0, 1; \quad j = \overline{1, n+1}, \quad (15)$$

$$\left(\alpha_{11}^0 \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{11}^0 \right) u_{1m,ik} \Big|_{r=R_0} = g_{0m,ik}(t, z); \quad (16)$$

$$\left(\alpha_{22}^{n+1} \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{22}^{n+1} \right) u_{n+1m,ik} \Big|_{r=R} = g_{m,ik}(t, z)$$

and conjugate conditions

$$\left[\left(\alpha_{j1}^p \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j1}^p \right) u_{pm,ik} - \left(\alpha_{j2}^p \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j2}^p \right) u_{p+1,m,ik} \right] \Big|_{r=R_p} = 0; \quad (17)$$

$$j = 1, 2; \quad p = \overline{1, n},$$

here $v_{jm,ik} = a_{rj}^{-1} a_{\varphi j} \beta_{m,ik}$;

$$G_{jm,ik}(t, r, z) = f_{m,ik}(t, r, z) + a_{\varphi j}^2 r^{-2} \Phi_{m,ik}(t, r, z).$$

Let's apply to the two-dimensional initial-boundary value problem of conjugation (13)-(17) integral Fourier transform on the Cartesian axis $(-\infty; +\infty)$ relative to the variable z [20]:

$$F[g(z)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(z) \exp(-i\sigma z) dz \equiv \tilde{g}(\sigma), \quad i = \sqrt{-1}, \quad (18)$$

$$F^{-1}[\tilde{g}(\sigma)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{g}(\sigma) \exp(i\sigma z) d\sigma \equiv g(z), \quad (19)$$

$$F\left[\frac{d^2 g}{dz^2}\right] = -\sigma^2 F[g(z)] \equiv -\sigma^2 \tilde{g}(\sigma). \quad (20)$$

The integral operator F due to the formula (18) as a result of identity (20) boundary value problem (13)-(17) puts in accordance the task of constructing classical solution of one-dimensional differential equations of B — parabolic type of the 2nd order which is limited in the set $D'' = \{(t, r) : t > 0; r \in I_n^+\}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{u}_{jm,ik}}{\partial t} - a_{rj}^2 B_{v_{jm,ik}}[\tilde{u}_{jm,ik}] + (a_{zj}^2 \sigma^2 + \chi_j^2) \tilde{u}_{jm,ik} &= \\ &= \tilde{G}_{jm,ik}(t, r, \sigma); \quad r \in I_j; \quad j = \overline{1, n+1} \end{aligned} \quad (21)$$

with initial conditions

$$\tilde{u}_{jm,ik}(t, r, \sigma) \Big|_{t=0} = \tilde{g}_{jm,ik}(r, \sigma); \quad r \in I_j; \quad j = \overline{1, n+1}, \quad (22)$$

boundary conditions

$$\begin{aligned} \left(\alpha_{11}^0 \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{11}^0 \right) \tilde{u}_{1m,ik} \Big|_{r=R_0} &= \tilde{g}_{0m,ik}(r, \sigma); \\ \left(\alpha_{22}^{n+1} \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{22}^{n+1} \right) \tilde{u}_{n+1,m,ik} \Big|_{r=R} &= \tilde{g}_{m,ik}(r, \sigma) \end{aligned} \quad (23)$$

and conjugate conditions

$$\begin{aligned} \left[\left(\alpha_{j1}^p \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j1}^p \right) \tilde{u}_{pm,ik} - \left(\alpha_{j2}^p \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j2}^p \right) \tilde{u}_{p+1,m,ik} \right] \Big|_{r=R_0} &= 0; \\ j = 1, 2; \quad p = \overline{1, n}, \end{aligned} \quad (24)$$

here $B_{V_{jm,ik}} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{V_{jm,ik}^2}{r^2}$ — classical Bessel differential operator.

To the one-dimensional initial-boundary problem of conjugation (21)-(24) let's apply finite hybrid integral Hankel transform of 2nd kind relative to the radial variable r in piecewise homogeneous segment I_n^+ of n conjugation points [12]:

$$M_{sn} [f(r)] = \int_{R_0}^R f(r) V(r, \lambda_s) \sigma(r) r dr \equiv \tilde{f}(\lambda_s), \quad (25)$$

$$M_{sn}^{-1} [\tilde{f}(\lambda_s)] = \sum_{s=1}^{\infty} \tilde{f}(\lambda_s) \frac{V(r, \lambda_s)}{\|V(r, \lambda_s)\|^2} \equiv f(r), \quad (26)$$

$$\begin{aligned} M_{sn} [B_{(m,ik)} [f(r)]] &= -\lambda_s^2 \tilde{f}(\lambda_s) - \sum_{k=1}^{n+1} \gamma_k^2 \int_{R_{k-1}}^{R_k} f(r) V_k(r, \lambda_s) \sigma_k r dr - \\ &- \alpha_1^2 R_0 \sigma_1 \left(\alpha_{11}^0 \right)^{-1} V_1(R_0, \lambda_s) \left(\alpha_{11}^0 \frac{df}{dr} + \beta_{11}^0 f \right) \Big|_{r=R_0} + \\ &+ \alpha_{n+1}^2 R \sigma_{n+1} \left(\alpha_{22}^{n+1} \right)^{-1} V_{n+1}(R, \lambda_s) \left(\alpha_{22}^{n+1} \frac{df}{dr} + \beta_{22}^{n+1} f \right) \Big|_{r=R}. \end{aligned} \quad (27)$$

Spectral function $V(r, \lambda_s)$, weight function $\sigma(r)$ and hybrid Bessel differential operator $B_{(m,ik)} = \sum_{j=1}^n \alpha_j^2 \theta(r - R_{j-1}) \theta(R_j - r) B_{V_{jm,ik}}$, written in [12], take part in formulas (25)-(27) ($\theta(x)$ is the Heaviside step function).

Let's write the differential equations (21) and the initial conditions (22) in matrix form

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{\partial}{\partial t} - a_1^2 B_{V_{1,m,ik}} + q_1^2(\sigma)\right) \tilde{u}_{1m,ik}(t, r, \sigma) \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} - a_2^2 B_{V_{2,m,ik}} + q_2^2(\sigma)\right) \tilde{u}_{2m,ik}(t, r, \sigma) \\ \dots\dots\dots \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} - a_{n+1}^2 B_{V_{n+1,m,ik}} + q_{n+1}^2(\sigma)\right) \tilde{u}_{n+1,m,ik}(t, r, \sigma) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{G}_{1m,ik}(t, r, \sigma) \\ \tilde{G}_{2m,ik}(t, r, \sigma) \\ \dots\dots\dots \\ \tilde{G}_{n+1,m,ik}(t, r, \sigma) \end{bmatrix}, \quad (28)$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{u}_{1m,ik}(t, r, \sigma) \\ \tilde{u}_{2m,ik}(t, r, \sigma) \\ \dots\dots\dots \\ \tilde{u}_{n+1,m,ik}(t, r, \sigma) \end{bmatrix}_{t=0} = \begin{bmatrix} \tilde{g}_{1m,ik}(r, \sigma) \\ \tilde{g}_{2m,ik}(r, \sigma) \\ \dots\dots\dots \\ \tilde{g}_{n+1,m,ik}(r, \sigma) \end{bmatrix}, \quad (29)$$

here $q_j^2(\sigma) = a_{2j}^2 \sigma^2 + \chi_j^2$; $j = \overline{1, n+1}$.

Let's represent the integral operator H_{sn} which operates due to the formula (25) as an operator matrix-row:

$$M_{sn} [\dots] = \begin{bmatrix} \int_{R_0}^{R_1} \dots V_1(r, \lambda_s) \sigma_1 r dr & \int_{R_1}^{R_2} \dots V_2(r, \lambda_s) \sigma_2 r dr \\ \dots \int_{R_{n-1}}^{R_n} \dots V_n(r, \lambda_s) \sigma_n r dr & \int_{R_n}^R \dots V_{n+1}(r, \lambda_s) \sigma_{n+1} r dr \end{bmatrix}. \quad (30)$$

Let's apply the operator matrix-row (30) to the problem (28), (29) according to the matrix multiplication rule. As a result of the identity (27), we get a Cauchy problem for ordinary differential equations of the 1st order

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{n+1} \left(\frac{d}{dt} + \lambda_s^2 + \gamma_j^2 + q_j^2(\sigma) \right) \tilde{u}_{jm,ik}(t, \lambda_s, \sigma) = \\ & = \sum_{j=1}^{n+1} \tilde{G}_{jm,ik}(t, \lambda_s, \sigma) - a_1^2 R_0 \sigma_1 \left(\alpha_{11}^0 \right)^{-1} V_1(R_0, \lambda_s) \tilde{g}_{0m,ik}(t, \sigma) + \\ & + a_{n+1}^2 R \sigma_{n+1} \left(\alpha_{22}^{n+1} \right)^{-1} V_{n+1}(R, \lambda_s) \tilde{g}_{m,ik}(t, \sigma), \end{aligned} \quad (31)$$

$$\left. \sum_{j=1}^{n+1} \tilde{u}_{jm,ik}(t, \lambda_s, \sigma) \right|_{t=0} = \sum_{j=1}^{n+1} \tilde{g}_{jm,ik}^1(\lambda_s, \sigma), \quad (32)$$

$$\text{where } \tilde{u}_{jm,ik}(t, \lambda_s, \sigma) = \int_{R_{j-1}}^{R_j} \tilde{u}_{jm,ik}(t, r, \sigma) V_j(r, \lambda_s) \sigma_j r dr; \quad j = \overline{1, n+1},$$

$$\tilde{G}_{jm,ik}(t, \lambda_s, \sigma) = \int_{R_{j-1}}^{R_j} \tilde{G}_{jm,ik}(t, r, \sigma) V_j(r, \lambda_s) \sigma_j r dr; \quad j = \overline{1, n+1},$$

$$\tilde{g}_{jm,ik}(\lambda_s, \sigma) = \int_{R_{j-1}}^{R_j} \tilde{g}_{jm,ik}(r, \sigma) V_j(r, \lambda_s) \sigma_j r dr, \quad j = \overline{1, n+1}.$$

Let's suppose that $\max\{q_1^2(\sigma), q_2^2(\sigma), \dots, q_{n+1}^2(\sigma)\} = q_1^2(\sigma)$ and put everywhere $\gamma_j^2 = q_1^2(\sigma) - q_j^2(\sigma); \quad j = \overline{1, n+1}$. Cauchy problem (31), (32) takes the form

$$\frac{d\tilde{u}_{m,ik}}{dt} + \Delta^2(\lambda_s, \sigma)\tilde{u}_{m,ik} = \tilde{G}_{m,ik}(t, \lambda_s, \sigma) - a_1^2 R_0 \sigma_1 (\alpha_{11}^0)^{-1} V_1(R_0, \lambda_s) \tilde{g}_{0m,ik}(t, \sigma) + \quad (33)$$

$$+ a_{n+1}^2 R \sigma_{n+1} (\alpha_{22}^{n+1})^{-1} V_{n+1}(R, \lambda_s) \tilde{g}_{m,ik}(t, \sigma),$$

$$\tilde{u}_{m,ik}(t, \lambda_s, \sigma) \Big|_{t=0} = \tilde{g}_{m,ik}(\lambda_s, \sigma), \quad (34)$$

here $\tilde{u}_{m,ik}(t, \lambda_s, \sigma) = \sum_{j=1}^{n+1} \tilde{u}_{jm,ik}(t, \lambda_s, \sigma);$

$$\tilde{G}_{m,ik}(\lambda_s, \sigma) = \sum_{j=1}^{n+1} \tilde{G}_{jm,ik}(\lambda_s, \sigma); \quad \tilde{g}_{m,ik}(\lambda_s, \sigma) = \sum_{j=1}^{n+1} \tilde{g}_{jm,ik}^1(\lambda_s, \sigma);$$

$$\Delta^2(\lambda_s, \sigma) = \lambda_s^2 + a_{z1}^2 \sigma^2 + \chi_1^2.$$

We can directly check that the only solution of the Cauchy problem (33), (34) is the function

$$\tilde{u}_{m,ik}(t, \lambda_s, \sigma) = N(t, \lambda_s, \sigma) \tilde{g}_{m,ik}(\lambda_s, \sigma) + \int_0^t N(t-\tau, \lambda_s, \sigma) \times$$

$$\times \left[\tilde{G}_{m,ik}(t, \lambda_s, \sigma) - a_1^2 R_0 \sigma_1 (\alpha_{11}^0)^{-1} V_1(R_0, \lambda_s) \tilde{g}_{0m,ik}(t, \sigma) + \quad (35)$$

$$+ a_{n+1}^2 R \sigma_{n+1} (\alpha_{22}^{n+1})^{-1} V_{n+1}(R, \lambda_s) \tilde{g}_{m,ik}(t, \sigma) \right] d\tau,$$

here $N(t, \lambda_s, \sigma) = \exp(-\Delta^2(\lambda_s, \sigma)t)$. is solving function (Cauchy function).

The superposition of operators M_{sn} and M_{sn}^{-1} is a single operator ($M_{sn} \circ M_{sn}^{-1} = M_{sn}^{-1} \circ M_{sn} = I$). Let's represent the operator M_{sn}^{-1} as inverse to operator (30), as the operator matrix-column:

$$M_{sn}^{-1}[\dots] = \begin{bmatrix} \sum_{s=1}^{\infty} \dots \frac{V_1(r, \lambda_s)}{\|V(r, \lambda_s)\|^2} \\ \sum_{s=1}^{\infty} \dots \frac{V_2(r, \lambda_s)}{\|V(r, \lambda_s)\|^2} \\ \dots \dots \dots \\ \sum_{s=1}^{\infty} \dots \frac{V_{n+1}(r, \lambda_s)}{\|V(r, \lambda_s)\|^2} \end{bmatrix} \quad (36)$$

Let's apply operator matrix-column (36) to the matrix-element $[\tilde{u}_{m,ik}(t, \lambda_s, \sigma)]$, where the function $\tilde{u}_{m,ik}(t, \lambda_s, \sigma)$ is defined by formula (35) due to the matrices multiplication rule. As a result we get the only solution of one-dimensional initial boundary problem of conjugation (21)-(24):

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{jm,ik}(t, r, \sigma) &= \sum_{s=1}^{\infty} N(t, \lambda_s, \sigma) \tilde{g}_{m,ik}(\lambda_s, \sigma) \frac{V_j(r, \lambda_s)}{\|V(r, \lambda_s)\|^2} + \\ &+ \sum_{s=1}^{\infty} \int_0^t N(t-\tau, \lambda_s, \sigma) \tilde{G}_{m,ik}(\tau, \lambda_s, \sigma) d\tau \frac{V_j(r, \lambda_s)}{\|V(r, \lambda_s)\|^2} + \\ &+ \left(-a_1^2 R_0 \sigma_1 (\alpha_{11}^0)^{-1}\right) \sum_{s=1}^{\infty} \int_0^t N(t-\tau, \lambda_s, \sigma) V_1(R_0, \lambda_s) g_{0m,ik}(\tau, \sigma) d\tau \times \\ &\times \frac{V_j(r, \lambda_s)}{\|V(r, \lambda_s)\|^2} + a_{n+1}^2 R \sigma_{n+1} (\alpha_{22}^{n+1})^{-1} \sum_{s=1}^{\infty} \int_0^t N(t-\tau, \lambda_s, \sigma) V_{n+1}(R, \lambda_s) \times \\ &\times \tilde{g}_{m,ik}(\tau, \sigma) \frac{V_j(r, \lambda_s)}{\|V(r, \lambda_s)\|^2}; \quad j = \overline{1, n+1}. \end{aligned} \quad (37)$$

If to apply consistently inverse operators F^{-1} and $F_{m,ik}^{-1}$ to functions $\tilde{u}_{jm,ik}(t, r, \sigma)$, which are defined by formulas (37) and perform the some simple transformations, we get functions

$$\begin{aligned} u_{j,ik}(t, r, \varphi, z) &= \sum_{p=1}^{n+1} \int_0^t \int_{R_{p-1}}^{R_p} \int_0^{\varphi_0+\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E_{jp}^{ik}(t-\tau, r, \rho, \varphi, \alpha, z-\xi) f_p(\tau, \rho, \alpha, \xi) \times \\ &\times \sigma_p \rho d\xi d\alpha d\rho d\tau + \sum_{p=1}^{n+1} \int_{R_{p-1}}^{R_p} \int_0^{\varphi_0+\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E_{jp}^{ik}(t, r, \rho, \varphi, \alpha, z-\xi) g_p(\rho, \alpha, \xi) \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \sigma_{p,\rho} d\xi d\alpha d\rho + \sum_{p=1}^{n+1} a_{\varphi p}^2 \int_0^t \int_{R_{p-1}}^{R_p} \int_{-\infty}^{+\infty} Q_{jp}^{ik}(t, \tau, r, \rho, \varphi, z, \xi) \sigma_{p,\rho}^{-1} d\xi d\rho d\tau + \quad (38) \\ & + \int_0^t \int_0^{\varphi_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[W_{jr,ik}^1(t - \tau, r, \varphi, \alpha, z - \xi) g_0(\tau, \alpha, \xi) + \right. \\ & \left. + W_{jr,ik}^2(t - \tau, r, \varphi, \alpha, z - \xi) g(\tau, \alpha, \xi) \right] d\xi d\alpha d\tau; \quad j = \overline{1, n+1}. \end{aligned}$$

Functions (38) define the only solutions of parabolic initial boundary problems of conjugation (1)-(4), (5), (9); (1)-(4), (6), (9); (1)-(4), (7), (9); (1)-(4), (8), (9) with appropriate values of ik (11, 12, 21, 22).

In formulas (38) there are components

$$E_{jp}^{ik}(t, r, \rho, \varphi, \alpha, z) = \frac{2}{\pi\varphi_0} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m^{ik} K_{jp}^{m,ik}(t, r, \rho, z) U_{m,ik}(\varphi) U_{m,ik}(\alpha)$$

of matrix of influence (functions of influence), Green's functions

$$Q_{jp}^{ik}(t, \tau, r, \rho, \varphi, z, \xi) = \frac{2}{\pi\varphi_0} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m^{ik} K_{jp}^{m,ik}(t - \tau, r, \rho, z - \xi) \Phi_{m,ik}(\tau, \rho, \xi) U_{m,ik}(\varphi),$$

components

$$W_{jr,ik}^1(t, r, \varphi, \alpha, z) = -a_1^2 R_0 \sigma_1 \left(\alpha_{11}^0 \right)^{-1} E_{j1}(t, r, R_0, \varphi, \alpha, z)$$

of left radial Green's matrix (left radial Green's functions) and components

$$W_{jr,ik}^2(t, r, \varphi, \alpha, z) = a_{n+1}^2 R \sigma_{n+1} \left(\alpha_{22}^{n+1} \right)^{-1} E_{j,n+1}^{ik}(t, r, R, \varphi, \alpha, z)$$

of right radial Green's matrix (right radial Green's functions) of corresponding initial-boundary problems of conjugation, here

$$K_{jp}^{m,ik}(t, r, \rho, z) = \sum_{s=1}^{\infty} \int_0^{+\infty} N(t, \lambda_s, \sigma) \cos(\sigma z) d\sigma \frac{V_j(r, \lambda_s) V_k(\rho, \lambda_s)}{\|V(r, \lambda_s)\|^2}.$$

Let's analyze formulas (38) depending on the type of boundary conditions on the wedge boundaries of an unbounded piecewise homogeneous wedge-shaped hollow cylinder. Let's consider, for example, the case of boundary conditions (6). In this case, Green's functions

$$\begin{aligned} Q_{jp}^{12}(t, \tau, r, \rho, \varphi, z, \xi) &= \frac{2}{\varphi_0^2} \sum_{m=1}^{\infty} K_{jp}^{m,12}(t - \tau, r, \rho, z - \xi) \times \\ & \times \left[\frac{\pi(2m+1)}{2\varphi_0} g_{2p}(\tau, \rho, \xi) + (-1)^{m+1} w_{2p}(\tau, \rho, \xi) \right] \sin \frac{\pi(2m+1)\varphi}{2\varphi_0}. \end{aligned}$$

Let's determine the tangential Green's functions generated by boundary conditions (6) by the formulas:

$$W_{jp,1}^{12}(t, \tau, r, \rho, \varphi, z, \xi) = \frac{1}{\varphi_0^2} \sum_{m=1}^{\infty} (2m+1) K_{jp}^{m,12}(t-\tau, r, \rho, z-\xi) \sin \frac{\pi(2m+1)\varphi}{2\varphi_0},$$

$$W_{jp,2}^{12}(t, \tau, r, \rho, \varphi, z, \xi) = \frac{2}{\pi\varphi_0} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} K_{jp}^{m,12}(t-\tau, r, \rho, z-\xi) \sin \frac{\pi(2m+1)\varphi}{2\varphi_0}.$$

Then the solution of the problem of conjugation (1)-(4), (6), (9) we can write in the form

$$\begin{aligned} u_{j,12}(t, r, \varphi, z) = & \sum_{p=1}^{n+1} \int_0^t \int_{R_{p-1}}^{R_p} \int_0^{\varphi_0} \int_{-\infty}^{+\infty} E_{jp}^{12}(t-\tau, r, \rho, \varphi, \alpha, z-\xi) f_p(\tau, \rho, \alpha, \xi) \times \\ & \times \sigma_{\rho} \rho d\xi d\alpha d\rho d\tau + \sum_{p=1}^{n+1} \int_{R_{p-1}}^{R_p} \int_0^{\varphi_0} \int_{-\infty}^{+\infty} E_{jp}^{12}(t, r, \rho, \varphi, \alpha, z-\xi) g_p(\rho, \alpha, \xi) \times \\ & \times \sigma_{\rho} \rho d\xi d\alpha d\rho + \sum_{p=1}^{n+1} a_{\varphi p}^2 \int_0^t \int_{R_{p-1}}^{R_p} \int_{-\infty}^{+\infty} [W_{jp,1}^{12}(t, \tau, r, \rho, \varphi, z, \xi) g_{2p}(\tau, \rho, \xi) + \\ & + W_{jp,2}^{12}(t, \tau, r, \rho, \varphi, z, \xi) w_{2p}(\tau, \rho, \xi)] \sigma_{\rho} \rho^{-1} d\xi d\rho d\tau + \\ & + \int_0^t \int_0^{\varphi_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[W_{jr,12}^1(t-\tau, r, \varphi, \alpha, z-\xi) g_0(\tau, \alpha, \xi) + \right. \\ & \left. + W_{jr,12}^2(t-\tau, r, \varphi, \alpha, z-\xi) g(\tau, \alpha, \xi) \right] d\xi d\alpha d\tau; \quad j = \overline{1, n+1}. \end{aligned}$$

Using a properties of functions of influence $E_{jp}^{12}(t, r, \rho, \varphi, \alpha, z)$ and Green's functions $W_{jp,s}^{12}(t, \tau, r, \rho, \varphi, z, \xi)$, ($s=1,2$), $W_{jr,12}^k(t, r, \varphi, \alpha, z)$, ($k=1,2$) we can verify that functions $u_{j,12}(t, r, \varphi, z)$ which are defined by formulas (39), satisfy the equation (1), the initial conditions (2), the boundary conditions (3), (4), (6) and conjugate conditions (9) in the sense of theory of generalized functions [23].

The uniqueness of the solution (39) follows from its structure (integral image) and from uniqueness of the main solutions (functions of influence and Green's functions) of parabolic initial-boundary value problem of conjugation (1)-(4), (6), (9).

By methods from [1, 23] can be proved that under appropriate conditions on the initial data, formulas (39) define a limited classical solution of the considered problem (1)-(4), (6), (9).

We get the following theorem as the summary of the above results.

Theorem. If functions $f_j(t, r, \varphi, z)$, $g_j(r, \varphi, z)$, $g_{2j}(t, r, z)$, $w_{2j}(t, r, z)$, ($j = \overline{1, n+1}$) satisfy conditions:

- 1) are continuously differentiated by variable t and continuously differentiated twice by the geometric variables;
- 2) have a limited variation for the geometric variables;
- 3) are absolutely summable with the variable z in $(-\infty; +\infty)$;
- 4) conjugate conditions are true and functions $g_0(t, \varphi, z)$, $g(t, \varphi, z)$ also satisfy the conditions 1)-3), then the parabolic initial-boundary value problem of conjugation (1)-(4), (6), (9) has a single bounded classical solution, which is determined by formulas (39).

Cases of boundary conditions (5), (7) or (8) on the wedge boundaries $\varphi = 0$, $\varphi = \varphi_0$ we can analyze similarly.

Remark 1. In the case of $a_{rj} = a_{\varphi j} = a_{zj} \equiv a_j > 0$ formulas (38) define the structures of the solutions of considered problems in an isotropic unlimited piecewise homogeneous wedge-shaped hollow cylinder.

Remark 2. The case of changing φ within $\varphi_1 < \varphi < \varphi_2$ is reduced to the considered replacement $\varphi' = \varphi - \varphi_1$ ($\varphi_0 \equiv \varphi_2 - \varphi_1$).

Remark 3. Parameters α_{11}^0 , β_{11}^0 , α_{22}^{n+1} , β_{22}^{n+1} allow to allocate from formulas (38) the solutions of initial boundary value problems of conjugation in the case of boundary conditions of the 1st kind, 2nd kind and 3rd kind and their possible combinations on the radial surfaces $r = R_0$, $r = R$.

Remark 4. Analysis of the solution (38) is done directly from the general structures according to the analytical expression of functions $f_j(t, r, \varphi, z)$, $g_j(r, \varphi, z)$, $g_{kj}(t, r, z)$, $w_{kj}(t, r, z)$, $j = 1, n+1$, $k = 1, 4$, $g_0(t, \varphi, z)$, $g(t, \varphi, z)$.

Conclusions. By means of method of classical integral and hybrid integral transforms and with the method of principal solutions (influence functions and Green's functions) exact analytical solutions of parabolic boundary-value problems in unlimited piecewise homogeneous wedge-shaped hollow cylinder are obtained at first time. The obtained integrated images of solutions are of algorithmic character, continuously depend on the parameters and data of the problem and can be used both in further theoretical research and in the practice of engineering calculations of mathematical models of evolutionary processes in piecewise homogeneous environments.

References:

1. Gelfand I., Shilov G. Some questions in the theory of differential equations. Moscow: Fizmatgiz, 1958. 274 p.

2. Gorodetsky V. Boundary properties in the layer of smooth solutions of equations of parabolic type. Chernivtsi: Ruta, 1998. 225 p.
3. Gromyk A., Konet I., Leniuk M. The temperature fields in the piece-homogeneous spatial environments. Kamenets-Podilsky: Abetka-Svit, 2011. 200 p.
4. Deineka V., Sergienko I. Models and methods for solving problems in heterogeneous environments. Kiev: Nauk. dumka, 2001. 606 p.
5. Deineka V., Sergienko I., Skopetsky V. Models and methods of solving of problems with conjugate conditions. Kyiv: Nauk. dumka, 1998. 614 p.
6. Zhitrashu N., Eidelman S. Parabolic boundary value problems. Kishinev: Shtiintsa, 1992. 327 p.
7. Zagorskiy T. Mixed problems for systems of partial differential equations of the parabolic type. *Lvov University Press*. 1961. 115 p.
8. Ivasishen S. Green's matrix of parabolic problems. Kiev: Vyscha Shkola, 1990. 199 p.
9. Konet I. Hyperbolic boundary-value problems of mathematical physics in piecewise homogeneous spacial environments. Kamenets-Podilsky: Abetka-Svit, 2013. 120 p.
10. Konet I., Pylypiuk T. Parabolic boundary value problems in piecewise homogeneous environments. Kamenets-Podilsky: Abetka-Svit, 2016. 244 p.
11. Konet I., Leniuk M. Stationary and nonstationary temperature fields in cylindrical-circular areas. Chernivtsi: Prut, 2001. 312 p.
12. Konet I., Pylypiuk T. Parabolic boundary value problems in piecewise homogeneous cylindrical-circular media. Kamianets-Podilskyi: Abetka-Svit, 2017. 80 p.
13. Konet I., Pylypiuk T. Parabolic boundary value problems in an unbounded piecewise homogeneous wedge-shaped solid cylinder. *Mathematical and computer modeling. Series: Physical and Mathematical Sciences*. Coll. Science. pr. Kamianets-Podilskyi: Kamianets-Podil. nat. I. Ohiienko univ., 2019. Issue 20. P. 26-40.
14. Ladyzenskaya O., Solonnikov V., Ural'ceva N. Linear and Quasi-linear Equations of Parabolic Type. Moscow: Nauka, 1967. 736 p.
15. Landis E. Second Order Equations of Elliptic and Parabolic Type. Moscow: Nauka, 1971. 288 p.
16. Matychuk M. Parabolic and elliptic boundary value problems with features. Chernivtsi: Prut, 2003. 248 p.
17. Perestiuk M., Marynets' V. The theory of equations of mathematical physics. Kyiv: Lybid', 2006. 424 p.
18. Pukalskyi I. The boundary value problems for unevenly parabolic and elliptic equations with degeneration and singularities. Chernivtsi: Ruta, 2008. 253 p.
19. Sergienko I., Skopetsky V., Deineka V. Mathematic modeling and the study of processes in heterogeneous environments. Kyiv: Naukova Dumka, 1991. 432 p.
20. Sneddon I. Fourier transforms. Moscow: IL, 1955. 668 p.
21. Tranter K. Integral transformations in mathematical physics. Moscow: Gostheorizdat, 1956. 204 p.
22. Friedman A. Partial differential equations of parabolic type. Moscow: Mir, 1968. 428 p.
23. Shilov G. Mathematical analysis. Second special course. Moscow: Nauka, 1965. 328 p.
24. Eidel'man S. Parabolic Systems. Moscow: Nauka, 1964. 444 p.

ПАРАБОЛІЧНІ КРАЙОВІ ЗАДАЧІ В НЕОБМЕЖЕНОМУ КУСКОВО-ОДНОРІДНОМУ КЛИНОВИДНОМУ ПОРОЖНИСТОМУ ЦИЛІНДРІ

У пропонованій статті методом класичних інтегральних і гібридних інтегральних перетворень у поєднанні з методом головних розв'язків (матриць впливу та матриць Гріна) вперше побудовано єдині точні аналітичні розв'язки параболічних крайових задач математичної фізики в необмеженому за змінною z кусково-однорідному за радіальною змінною r клиновидному за кутовою змінною φ порожнистому циліндрі.

Розглянуто випадки задання на гранях клина крайових умов Діріхле і Неймана та їх можливих комбінацій (Діріхле — Неймана, Неймана — Діріхле).

Для побудови класичних розв'язків досліджуваних початково-крайових задач застосовано скінченне інтегральне перетворення Фур'є щодо кутової змінної, інтегральне перетворення Фур'є на декартовій осі щодо аплікатної змінної та гібридне інтегральне перетворення типу Ганкеля 2-го роду на сегменті полярної осі з n точками спряження щодо радіальної змінної.

Послідовне застосування інтегральних перетворень за геометричними змінними дозволяє звести тривимірні початково-крайові задачі спряження до задачі Коші для звичайного лінійного неоднорідного диференціального рівняння 1-го порядку, єдиний розв'язок якої виписано в замкнутому вигляді.

Застосування обернених інтегральних перетворень відновлює в явному вигляді розв'язки розглянутих задач через їх інтегральне зображення.

Ключові слова: *параболічне рівняння, початкові та крайові умови, умови спряження, інтегральні перетворення, гібридні інтегральні перетворення, головні розв'язки.*

Отримано: 15.09.2020

УДК 517.5

DOI: 10.32626/2308-5878.2020-21.84-99

У. В. Гудима, канд. фіз.-мат. наук,

В. О. Гнатюк, канд. фіз.-мат. наук

Кам'янець-Подільський національний університет

імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

УМОВИ ІСНУВАННЯ ЕКСТРЕМАЛЬНОГО ЕЛЕМЕНТА ДЛЯ ЗАДАЧІ ВІДШУКАННЯ ВІДСТАНІ МІЖ ДВОМА МНОЖИНАМИ, ЄДИНОСТІ ЕКСТРЕМАЛЬНОГО ЕЛЕМЕНТА ЕКВІВАЛЕНТНОЇ ЇЙ ЗАДАЧІ, ВЛАСТИВОСТІ ФУНКЦІЇ ВІДСТАНІ

Відомо, що одним із напрямів математики, який найбільш інтенсивно розвивається в даний час, є теорія наближень, у тому числі теорія наближень функцій.

Початком сучасної теорії наближень прийнято вважати працю П. Л. Чебишова 1857 року, присвячену поліномам, що найменше відхиляються від нуля.

У цій праці П. Л. Чебишов вперше ввів поняття найкращого наближення.

Згодом було досліджено низку подібних задач, в яких окремі функції наближались поліномами, тригонометричними поліномами, раціональними функціями тощо у різних метриках.

Виявилось, що такі задачі вкладаються у схему задачі найкращого наближення елемента лінійного нормованого простору опуклою множиною цього простору, яку ще називають задачею відшукування відстані від елемента лінійного нормованого простору до опуклої множини цього простору.

Загальні теореми існування, єдиності екстремального елемента для задачі відшукування відстані від елемента лінійного нормованого простору до опуклої множини цього простору, властивості функціонала найкращого наближення, теореми двоїстості та критерії екстремального елемента для цієї задачі встановлено, зокрема, М. П. Корнейчуком у праці [1].

Зрозуміло, що задача відшукування відстані від елемента лінійного нормованого простору до опуклої множини цього простору є частковим випадком задачі відшукування відстані між двома множинами лінійного нормованого простору, що визначається як інфімум норм різниць всеможливих елементів цих множин (див., наприклад, [2, 3]).

У працях [4, 5] доведені співвідношення двоїстості, критерії екстремальності елемента та послідовності для задачі відшукування відстані між двома опуклими множинами лінійного нормованого простору.

У цій статті встановлено умови існування екстремального елемента для задачі відшукування відстані між двома множина-

ми лінійного нормованого простору, умови єдиності екстремального елемента для еквівалентної їй задачі, властивості функції відстані та одержано формули для відшукування екстремального елемента для задачі відшукування відстані між двома замкненими кулями цього простору.

Ключові слова: лінійний нормований простір, відстань між множинами, екстремальний елемент, умови існування та єдиності, властивості функції відстані.

Вступ. У статті встановлено умови існування екстремального елемента для задачі відшукування відстані між двома множинами лінійного нормованого простору, умови єдиності екстремального елемента для еквівалентної їй задачі, властивості функції відстані.

Постановка задачі. Еквівалентна задача. Нехай X — лінійний над полем дійсних чисел нормований простір, A , B — множини цього простору.

Задачею відшукування відстані між множинами A та B будемо називати задачу відшукування величини

$$E(A, B) = \inf_{\substack{x \in A, \\ y \in B}} \|x - y\| \quad (1)$$

(див., наприклад, [2, с. 65; 3, с. 110]).

Якщо існує елемент $(x^*, y^*) \in A \times B$ такий, що

$$E(A, B) = \inf_{\substack{x \in A, \\ y \in B}} \|x - y\| = \|x^* - y^*\|,$$

то його будемо називати екстремальним елементом для величини (1).

Поряд із задачею відшукування величини (1) будемо розглядати задачу відшукування величини

$$\inf_{z \in A - B} \|z\|. \quad (2)$$

Якщо існує елемент $z^* = x^* - y^* \in A - B$, для якого

$$\inf_{z \in A - B} \|z\| = \|z^*\|,$$

то його будемо називати екстремальним елементом для величини (2).

Зрозуміло, що має місце таке твердження.

Твердження 1. Справедлива рівність

$$E(A, B) = \inf_{z \in A - B} \|z\|. \quad (3)$$

Для того щоб елемент $(x^*, y^*) \in A \times B$ був екстремальним елементом для величини (1), необхідно і достатньо, щоб елемент $z^* = x^* - y^* \in A - B$ був екстремальним елементом для величини (2).

З урахуванням твердження 1 задачу відшукування величини (2) будемо називати задачею, еквівалентною задачі відшукування величини (1).

Актуальність теми. Останнім часом ідеї та методи теорії апроксимації проникають у різні розділи математичної науки, особливо прикладних напрямів, адже необхідність наближення складних математичних об'єктів більш простими і зручними у користуванні, виникає як при розгляді теоретичних проблем, так і при вирішенні проблем практичного характеру.

Центральною галуззю теорії апроксимації є теорія наближення функцій, фундамент якої закладено у працях П. Л. Чебишова, який ще у 50-х роках 19 століття поставив задачу про найкраще рівномірне наближення неперервної на сегменті дійснозначної функції множиною алгебраїчних поліномів степеня, що не перевищує деякого натурального числа.

Ця задача та низка інших задач теорії наближення допускає загальну постановку, якщо як міру відхилення розглядати норму простору, що дало можливість використовувати для їх розв'язання ідеї та методи функціонального аналізу. Внаслідок цього було сформульовано задачу найкращого наближення елемента y лінійного нормованого простору X опуклою множиною A цього простору, тобто задачу відшукування величини

$$E(A, y) = \inf_{x \in A} \|x - y\|. \quad (4)$$

Якщо існує елемент $x^* \in A$ такий, що

$$E(A, y) = \|x^* - y\|,$$

то його називають екстремальним елементом для величини (4).

При фіксованій апроксимуючій множині величина (4) задає на X функціонал $E(A, y)$, $y \in X$.

Функціонал $E(A, y)$, $y \in X$, називають функціоналом найкращого наближення (див., наприклад, [1, с. 16]).

Основні результати дослідження величини (4) підсумовані, зокрема, у монографіях Н. І. Ахієзера [6], В. К. Дзядика [8], М. П. Корнейчука [1], П.-Ж. Лорана [8], О. І. Степанця [9, 10], В. М. Тихомірова [11] та ін.

Зокрема, у праці [1] встановлено теореми існування, єдиності екстремального елемента для задачі відшукування величини (4), власливості функціонала найкращого наближення.

Зрозуміло, що задача відшукування величини (4) є частковим випадком задачі відшукування величини (1) при $B = \{y\}$.

Отже, всі вищезгадані задачі наближення вкладаються у схему постановки задачі відшукування величини (1).

Тому результати загального характеру, отримані при дослідженні цієї задачі, становитимуть самостійний інтерес, а також можуть бути відправним пунктом для подальшого дослідження задач, що вкладаються у її схему, в тому числі для дослідження задачі відшукування величини (4).

Актуальними, зокрема, є питання встановлення умов існування екстремального елемента для величини (1), єдиності екстремального елемента для задачі відшукування величини (2), властивостей функції відстані $E(A, B)$, $B \subset X$, при фіксованому $A \subset X$, які розглядаються у цій статті.

Мета роботи. Встановити деякі умови існування екстремального елемента для задачі відшукування величини (1), умови єдиності екстремального елемента для задачі (2), властивості функції відстані для задачі відшукування величини (1), одержати формули для відшукування екстремального елемента для задачі відшукування відстані між двома замкненими кулями цього простору.

Умови існування екстремального елемента для величини (1) та умови єдиності екстремального елемента для величини (2).

Означення 1 (див., наприклад, [1, с. 21]). Множина V простору X називається локально компактною, якщо з будь-якої обмеженої послідовності точок цієї множини можна виділити збіжну підпослідовність.

Теорема 1. Якщо $A - B$ є замкненою локально компактною множиною, то екстремальний елемент для величини (1) існує.

Доведення. Внаслідок означення точної нижньої межі одержимо, що для кожного $k \in N$ існують точки $x_k \in A$ та $y_k \in B$ такі, що

$$E(A, B) \leq \|x_k - y_k\| < E(A, B) + \frac{1}{k}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Звідси випливає, що

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k - y_k\| = E(A, B). \quad (5)$$

Тому послідовність $\{x_k - y_k\}_{k=1}^{\infty}$ є обмеженою послідовністю простору X , причому $x_k - y_k \in A - B$, $k = 1, 2, \dots$.

Оскільки за умовою $A - B$ є локально компактною і замкненою множиною, то існує збіжна підпослідовність $\{x_{k_l} - y_{k_l}\}_{l=1}^{\infty}$ послідовності $\{x_k - y_k\}_{k=1}^{\infty}$ і

$$\lim_{l \rightarrow \infty} (x_{k_l} - y_{k_l}) = z^* \in A - B.$$

Внаслідок цього і (5) існують елементи $x^* \in A$, $y^* \in B$, для яких $z^* = x^* - y^*$ та

$$E(A, B) = \lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k - y_k\| = \lim_{l \rightarrow \infty} \|x_{k_l} - y_{k_l}\| = \|z^*\| = \|x^* - y^*\|.$$

Це означає, що елемент $(x^*, y^*) \in A \times B$ є екстремальним елементом для величини (1).

Теорему доведено.

Теорема 2. Якщо A є замкнутою локально компактною множиною простору X , а B — компакт цього простору, то $A - B$ є замкнутою локально компактною множиною простору X .

Доведення. Нехай виконуються умови теореми і $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ є обмеженою послідовністю точок множини $A - B$. Тоді існують послідовності $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ та число $c > 0$ такі, що $x_k \in A$, $y_k \in B$, $z_k = x_k - y_k$ та $\|z_k\| = \|x_k - y_k\| \leq c$, $k = 1, 2, \dots$.

Оскільки $y_k \in B$, $k = 1, 2, \dots$, і B — компакт простору X , то існує число $c_1 > 0$, що $\|y_k\| \leq c_1$, $k = 1, 2, \dots$, та з послідовності $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ можна вибрати підпослідовність $\{y_{k_l}\}_{l=1}^{\infty}$ таку, що $\lim_{l \rightarrow \infty} y_{k_l} = y^* \in B$.

Маємо

$$\|x_{k_l}\| - \|y_{k_l}\| \leq \|x_{k_l} - y_{k_l}\| \leq c, \quad \|x_{k_l}\| \leq c + \|y_{k_l}\| \leq c + c_1 = c_2, \quad l = 1, 2, \dots$$

Отже, $\{x_{k_l}\}_{l=1}^{\infty}$ є обмеженою послідовністю замкнутої локально компактної множини A . Згідно з означенням 1 та внаслідок замкненості множини A з послідовності $\{x_{k_l}\}_{l=1}^{\infty}$ можна вибрати збіжну до елемента множини A підпослідовність. Не обмежуючи загальності, будемо вважати, що уже $\lim_{l \rightarrow \infty} x_{k_l} = x^* \in A$. Оскільки $\lim_{l \rightarrow \infty} y_{k_l} = y^* \in B$, то

$$\lim_{l \rightarrow \infty} z_{k_l} = \lim_{l \rightarrow \infty} (x_{k_l} - y_{k_l}) = x^* - y^* \in A - B.$$

Отже, з будь-якої обмеженої послідовності $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ точок множини $A - B$ можна вибрати підпослідовність $\{z_{k_l}\}_{l=1}^{\infty}$, яка збігається до точки цієї множини. Це означає, що $A - B$ є локально компактною множиною.

Нехай тепер z^* є граничною точкою множини $A - B$. Тоді існує послідовність $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ точок множини $A - B$, яка збігається до z^* .

Тому $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ є обмеженою послідовністю точок множини $A - B$.

Вище встановлено, що з цієї послідовності можна вибрати під-послідовність $\{z_{k_l}\}_{l=1}^{\infty}$, яка збігається до елемента множини $A - B$.

Отже, $z^* = \lim_{k \rightarrow \infty} z_k = \lim_{l \rightarrow \infty} z_{k_l} \in A - B$.

З проведених міркувань випливає, що кожна гранична точка множини $A - B$ належить цій множині. Тому $A - B$ є замкнутою множиною.

Теорему доведено.

Наслідок 1. Якщо A є замкнутою локально компактною множиною простору X , а B — компакт цього простору, то $A - B$ є множиною існування екстремального елемента для величини (1).

Справедливість наслідку випливає з теорем 1, 2.

Наслідок 2. Якщо A та B є компактами простору X , то екстремальний елемент для величини (1) існує.

Справедливість наслідку випливає з наслідку 1.

Наслідок 3. Якщо A є скінченновимірним підпростором простору X , а B є компактом цього простору, то екстремальний елемент для величини (1) існує.

Справедливість наслідку випливає з локальної компактності та замкненості скінченновимірного підпростору лінійного нормованого простору (див., наприклад, [1, с. 21]) та наслідку 1.

Твердження 2. Якщо $A = \{x \in X : \|x - a\| \leq r_1\}$ — куля простору X з центром у точці a радіуса r_1 , а $B = \{y \in X : \|y - b\| \leq r_2\}$ — куля простору X з центром у точці b радіуса r_2 , то екстремальний елемент (x^*, y^*) для величини (1) в цьому випадку існує, зокрема:

$$(x^*, y^*) = (b, b), \text{ якщо } \|b - a\| \leq r_1;$$

$$(x^*, y^*) = \left(a + \frac{r_1}{\|b - a\|} (b - a), a + \frac{r_1}{\|b - a\|} (b - a) \right),$$

$$\text{якщо } \|b - a\| > r_1 \text{ та } \|b - a\| \leq r_1 + r_2;$$

$$(x^*, y^*) = \left(a + \frac{r_1}{\|b - a\|} (b - a), b - \frac{r_2}{\|b - a\|} (b - a) \right), \text{ якщо } \|b - a\| > r_1 + r_2.$$

Доведення. Нехай $\|b - a\| \leq r_1$. Тоді $b \in A \cap B$ і для $(b, b) \in A \times B$ маємо, що $0 \leq E(A, B) = \inf_{\substack{x \in A, \\ y \in B}} \|x - y\| \leq \|b - b\| = 0$. Звідси випливає, що

$E(A, B) = \|b - b\| = 0$ та $(x^*, y^*) = (b, b)$ є екстремальним елементом для величини (1).

Нехай тепер $\|b - a\| > r_1$ і $\|b - a\| \leq r_1 + r_2$. Для точки $a + \frac{r_1}{\|b - a\|}(b - a)$ маємо, що

$$\begin{aligned} \left\| a + \frac{r_1}{\|b - a\|}(b - a) - a \right\| &= \left\| \frac{r_1}{\|b - a\|}(b - a) \right\| = r_1, \\ \left\| a + \frac{r_1}{\|b - a\|}(b - a) - b \right\| &= \|b - a\| \left| \frac{r_1}{\|b - a\|} - 1 \right| = |r_1 - \|b - a\|| = \\ &= \|b - a\| - r_1 \leq r_1 + r_2 - r_1 = r_2. \end{aligned}$$

Тому $(x^*, y^*) = \left(a + \frac{r_1}{\|b - a\|}(b - a), a + \frac{r_1}{\|b - a\|}(b - a) \right) \in A \times B$. Для (x^*, y^*) , крім того, одержуємо

$$0 \leq E(A, B) = \inf_{\substack{x \in A, \\ y \in B}} \|x - y\| \leq \|x^* - y^*\| = 0.$$

Звідси випливає, що $E(A, B) = \|x^* - y^*\| = 0$.

Тому (x^*, y^*) є екстремальним елементом для величини (1) цьому випадку.

Нехай тепер $\|b - a\| > r_1 + r_2$ та

$$(x^*, y^*) = \left(a + \frac{r_1}{\|b - a\|}(b - a), b - \frac{r_2}{\|b - a\|}(b - a) \right).$$

Вище встановлено, що $x^* = a + \frac{r_1}{\|b - a\|}(b - a) \in A$. Для y^* маємо,

$$\text{що } \|y^* - b\| = \left\| b - \frac{r_2}{\|b - a\|}(b - a) - b \right\| = r_2.$$

Тому $y^* \in B$, а $(x^*, y^*) \in A \times B$. Згідно з [4] в розглядуваному випадку $E(A, B) = \|b - a\| - (r_1 + r_2)$. Оскільки

$$\begin{aligned} \|x^* - y^*\| &= \left\| a + \frac{r_1}{\|b-a\|}(b-a) - b + \frac{r_2}{\|b-a\|}(b-a) \right\| = \\ &= \left\| \frac{r_1 + r_2}{\|b-a\|}(b-a) - (b-a) \right\| = \|b-a\| \frac{|r_1 + r_2 - \|b-a\||}{\|b-a\|} = \|b-a\| - (r_1 + r_2), \end{aligned}$$

то $E(A, B) = \|x^* - y^*\|$, де $(x^*, y^*) \in A \times B$.

Звідси випливає, що (x^*, y^*) є екстремальним елементом для величини (1) в цьому випадку.

Твердження доведено.

Теорема 3. Якщо X — банахів простір, в якому для довільних x, y має місце «нерівність паралелограма»

$$2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 - \|x+y\|^2 \geq c\|x-y\|^2, \quad (6)$$

де $c > 0$, A, B — опуклі множини цього простору такі, що $A-B$ є замкненою множиною, то екстремальний елемент для величини (1) існує, а екстремальний елемент для величини (2) єдиний.

Доведення. З урахуванням рівності (3) та з означення інфімуму випливає, що для будь-якого натурального числа n існує елемент $z_n \in A-B$ такий, що

$$E(A, B) \leq \|z_n\| < E(A, B) + \frac{1}{n}. \quad (7)$$

Переконаємося, що $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ є фундаментальною послідовністю простору X .

Оскільки $z_n, z_m, n=1, 2, \dots, m=1, 2, \dots$ є елементами множини $A-B$ для всіх натуральних n і m , а множина $A-B$ є опуклою множиною внаслідок опуклості множин A і B (див., наприклад, [3, с. 14]), то $\frac{z_n + z_m}{2} \in A-B$ для всіх натуральних n і m . Використаємо далі «нерівність паралелограма» (6), поклавши в ній $x = z_n, y = z_m$.

Згідно з цією нерівністю

$$2\|z_n\|^2 + 2\|z_m\|^2 - \|z_n + z_m\|^2 \geq c\|z_n - z_m\|^2. \quad (8)$$

Оскільки $\frac{z_n + z_m}{2} \in A-B$, то

$$\|z_n + z_m\|^2 = 4 \left\| \frac{z_n + z_m}{2} \right\|^2 \geq 4(E(A, B))^2.$$

Звідси та з нерівностей (7), (8) одержуємо, що

$$\begin{aligned} c \|z_n - z_m\|^2 &\leq 2\|z_n\|^2 + 2\|z_m\|^2 - 4(E(A, B))^2 \leq \\ &\leq 2\left(E(A, B) + \frac{1}{n}\right)^2 + 2\left(E(A, B) + \frac{1}{m}\right)^2 - 4(E(A, B))^2 = \\ &= 4E(A, B)\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right) + \frac{2}{n^2} + \frac{2}{m^2}, \\ \|z_n - z_m\| &\leq \left(\frac{4E(A, B)}{c}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right) + \frac{2}{cn^2} + \frac{2}{cm^2}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad n, m \in N. \end{aligned}$$

Оскільки права частина цієї нерівності прямує до нуля при $n \rightarrow \infty$, $m \rightarrow \infty$, то робимо висновок, що $\lim_{\substack{n \rightarrow \infty, \\ m \rightarrow \infty}} \|z_n - z_m\| = 0$.

Це означає, що $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ є фундаментальною послідовністю точок множини $A - B$. Внаслідок повноти простору X і замкненості множини $A - B$ ця послідовність збігається до $z^* \in A - B$. Оскільки $z^* \in A - B$, то існують $x^* \in A$, $y^* \in B$, що $z^* = x^* - y^*$.

Звідси та з нерівності (7) випливає, що $\|z^*\| = \|x^* - y^*\| = E(A, B)$, де $(x^*, y^*) \in A \times B$. Це означає, що (x^*, y^*) є екстремальним елементом для величини (1), а z^* є екстремальним елементом для величини (2).

Переконаємося в єдиності екстремального елемента для величини (2). Нехай $\bar{z} = \bar{x} - \bar{y} \in A - B$ також є екстремальним елементом для величини (2). Поклавши в нерівності (6) $x = z^*$, $y = \bar{z}$ з урахуванням

нерівності $\left\|\frac{z^* + \bar{z}}{2}\right\| \geq E(A, B)$ та рівності (3) отримаємо, що

$$\begin{aligned} 2\|z^*\|^2 + 2\|\bar{z}\|^2 - \|z^* + \bar{z}\|^2 &\geq c\|z^* - \bar{z}\|^2, \\ 0 \leq \|z^* - \bar{z}\|^2 &\leq \frac{1}{c}\left(2\|z^*\|^2 + 2\|\bar{z}\|^2 - 4\left\|\frac{z^* + \bar{z}}{2}\right\|^2\right) \leq \\ &\leq \frac{1}{c}\left(2(E(A, B))^2 + 2(E(A, B))^2 - 4(E(A, B))^2\right) = 0. \end{aligned}$$

Звідси випливає, що $z^* = \bar{z}$, що й потрібно було довести.

Теорему доведено.

Наслідок 4. Якщо X — банахів простір, в якому має місце «нерівність паралелограма» (6), A — замкнена опукла множина простору X , а B — опуклий компакт цього простору, то екстремальний елемент для величини (1) існує, а екстремальний елемент для величини (2) єдиний.

Справедливість наслідку випливає з теореми 3 оскільки A та B — опуклі множини, а $A - B$ є замкненою множиною простору X внаслідок замкненості множини A та компактності множини B (див., наприклад, [12, с. 23]).

Наслідок 5. Якщо X — банахів простір, в якому має місце «нерівність паралелограма» (6), A — замкнена опукла множина простору X , $y \in X$, то екстремальний елемент для задачі відшукування величини (4) існує та єдиний.

Доведення. Позначимо через $B = \{y\}$. Тоді

$$E(A, y) = E(A, B) = \inf_{\substack{x \in A, \\ y \in B}} \|x - y\| = \inf_{z \in A - B} \|z\|. \quad (9)$$

Для задачі відшукування величини (9) виконуються всі умови теореми 3. Згідно з цією теоремою існує екстремальний елемент (x^*, y) для задачі (9). Це означає, що $x^* \in A$ та $\|x - y\| \geq \|x^* - y\|$ для всіх $x \in A$. Звідси випливає, що x^* є екстремальним елементом для величини (4). Нехай \bar{x} також є екстремальним елементом для цієї величини. Тоді $\|x^* - y\| = \|\bar{x} - y\| = E(A, y)$. Згідно з теоремою 3 $x^* - y = \bar{x} - y$. Тому $x^* = \bar{x}$. Єдиність екстремального елемента для величини (4) встановлена.

Наслідок доведено.

Зауважимо, що справедливість теореми 3 та наслідків 4, 5 має місце, зокрема, у випадку, коли X є гільбертовим простором або простором l_p , $1 < p < 2$, оскільки ці простори є повними та в гільбертовому просторі X виконується рівність паралелограма: для будь-яких $x, y \in X$ $2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 - \|x + y\|^2 = \|x - y\|^2$ (див., наприклад, [13, с.64]), а в просторі l_p , $1 < p < 2$, має місце «нерівність паралелограма» [14]: для будь-яких $x, y \in l_p$, $1 < p < 2$,

$$2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 - \|x + y\|^2 \geq (p - 1)\|x - y\|^2.$$

Твердження 3. Якщо в задачі відшукування величини (2) $A - B$ є опуклою множиною, то множина екстремальних елементів для цієї величини також є опуклою множиною.

Доведення. Нехай елементи $z^* = x^* - y^* \in A - B$, $\bar{z} = \bar{x} - \bar{y} \in A - B$ є екстремальними для величини (2), $\alpha \in [0, 1]$. Оскільки за умовою множина $A - B$ є опуклою, то $(1 - \alpha)z^* + \alpha\bar{z} \in A - B$. Тому

$$\begin{aligned} E(A, B) &\leq \left\| (1 - \alpha)z^* + \alpha\bar{z} \right\| \leq (1 - \alpha)\|z^*\| + \alpha\|\bar{z}\| = \\ &= (1 - \alpha)E(A, B) + \alpha E(A, B) = E(A, B). \end{aligned}$$

Звідси випливає, що $\left\| (1 - \alpha)z^* + \alpha\bar{z} \right\| = E(A, B)$.

Отже, всі точки відрізка $\left[z^*, \bar{z} \right]$ є екстремальними елементами для величини (2). Тому множина всіх екстремальних елементів для величини (2) є опуклою.

Твердження доведено.

Означення 2 (див., наприклад, [1, с. 22-23]). Кажуть, що простір X є строго нормованим, якщо рівність $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$ для $x, y \in X$, $x \neq 0$, $y \neq 0$, можлива лише тоді, коли $x = cy$ ($c > 0$).

Теорема 4. Якщо в задачі відшукування величини (2) $A - B$ є опуклою множиною, X — строго нормований простір і екстремальний елемент для величини (2) існує, то він єдиний.

Доведення. Припустимо, що вектори $z^* = x^* - y^* \in A - B$, $\bar{z} = \bar{x} - \bar{y} \in A - B$ є екстремальними для величини (2). Згідно з твердженням 3 екстремальним елементом для цієї величини буде також вектор $\frac{z^* + \bar{z}}{2}$. Тому (див рівність (3))

$$E(A, B) = \left\| \frac{z^* + \bar{z}}{2} \right\| \leq \frac{1}{2}\|z^*\| + \frac{1}{2}\|\bar{z}\| = \frac{1}{2}E(A, B) + \frac{1}{2}E(A, B).$$

Звідси випливає, що

$$\|z^* + \bar{z}\| = \|z^*\| + \|\bar{z}\| = 2E(A, B). \quad (10)$$

Якщо $E(A, B) = 0$, то $\|z^*\| = \|\bar{z}\| = 0$. Тому $z^* = \bar{z} = 0$.

Якщо ж $E(A, B) \neq 0$, то $z^* \neq 0$, $\bar{z} \neq 0$. З урахуванням цього, строгої нормованості простору X та рівності (10) одержимо, що існує число $c > 0$, для якого $z^* = c\bar{z}$. Звідки $\|z^*\| = c\|\bar{z}\|$, $E(A, B) = cE(A, B)$. Оскільки $E(A, B) \neq 0$, то $c = 1$. Тому $z^* = c\bar{z} = \bar{z}$.

Теорему доведено.

Наслідок 6 (див., наприклад, [11, с. 152]). Якщо в задачі відшукування величини (4) A є опуклою множиною, X — строго нормований простір і екстремальний елемент для цієї величини існує, то він єдиний.

Доведення. Нехай x^* та \bar{x} — екстремальні елементи для величини (4). Тоді $E(A, y) = \|x^* - y\| = \|\bar{x} - y\|$. Згідно з теоремою 4 $x^* - y = \bar{x} - y$. Звідси випливає, що $x^* = \bar{x}$. Це й означає, що екстремальний елемент для величини (4) єдиний.

Наслідок доведено.

Властивості функції відстані для задачі відшукування величини (1). Позначимо через $P(X)$ — множину всеможливих підмножин простору X , через $O(X)$ — множину обмежених замкнених множин цього простору.

Як відомо (див., наприклад, [12, с. 33]), відстанню за Гаусдорфом (гаусдорфовою відстанню) між множинами A і B із $O(X)$ називається величина

$$h(A, B) = \max \left\{ \sup_{x \in A} \inf_{y \in B} \|x - y\|, \sup_{y \in B} \inf_{x \in A} \|x - y\| \right\}.$$

Величина $h(A, B)$, $A \in O(X)$, $B \in O(X)$, задає метрику на $O(X)$ (див., наприклад, [12, с. 33]).

При фіксованій множині $A \in P(X)$ величина $E(A, B)$, $B \in P(X)$, задає на $P(X)$ деяку функцію: кожному $B \in P(X)$ ставиться у відповідність число $E(A, B)$, яку назвемо функцією відстані для задачі відшукування величини (1).

Розглянемо деякі властивості цієї функції.

Теорема 5. Для будь-яких $A \in P(X)$; $B_1, B_2 \in O(X)$ має місце співвідношення

$$|E(A, B_1) - E(A, B_2)| \leq h(B_1, B_2). \quad (11)$$

Для будь-якої фіксованої множини $A \in P(X)$ функція $E(A, B)$, $B \in O(X)$, є неперервною на $O(X)$ у розумінні метрики Гаусдорфа на $O(X)$.

Якщо A — підпростір простору X , то функція $E(A, B)$, $B \in P(X)$, є півадитивною:

$$E(A, B_1 + B_2) \leq E(A, B_1) + E(A, B_2), \quad B_1, B_2 \in P(X), \quad (12)$$

і додатно однорідною, тобто

$$E(A, \lambda B) = |\lambda| E(A, B), \quad \lambda \in R, \quad B \in P(X). \quad (13)$$

Доведення. Нехай $A \in P(X)$, $B_1, B_2 \in O(X)$. Для будь-яких $x \in A$, $y_1 \in B_1$, $y_2 \in B_2$ маємо

$$\|x - y_1\| = \|(x - y_2) + (y_2 - y_1)\| \leq \|x - y_2\| + \|y_2 - y_1\|.$$

Звідси випливає, що

$$\begin{aligned} E(A, B_1) &= \inf_{\substack{x \in A, \\ y_1 \in B_1}} \|x - y_1\| \leq \|x - y_1\| \leq \|x - y_2\| + \inf_{y_1 \in B_1} \|y_2 - y_1\| \leq \\ &\leq \|x - y_2\| + \sup_{y_2 \in B_2} \inf_{y_1 \in B_1} \|y_2 - y_1\| \leq \|x - y_2\| + \\ &+ \max \left\{ \sup_{y_1 \in B_1} \inf_{y_2 \in B_2} \|y_2 - y_1\|, \sup_{y_2 \in B_2} \inf_{y_1 \in B_1} \|y_2 - y_1\| \right\} = \|x - y_2\| + h(B_1, B_2). \end{aligned}$$

Отже, для будь-яких $x \in A$, $y_2 \in B_2$

$$E(A, B_1) \leq \|x - y_2\| + h(B_1, B_2).$$

Тому

$$E(A, B_1) \leq \inf_{\substack{x \in A, \\ y_2 \in B_2}} \|x - y_2\| + h(B_1, B_2) = E(A, B_2) + h(B_1, B_2).$$

Звідки $E(A, B_1) - E(A, B_2) \leq h(B_1, B_2)$.

Аналогічно доводиться, що

$$E(A, B_2) - E(A, B_1) \leq h(B_1, B_2).$$

З двох останніх нерівностей випливає справедливність співвідношення (11).

Нехай $A \in P(X)$, $B, B_0 \in O(X)$, $\varepsilon > 0$, $\delta = \varepsilon$. З урахуванням (11) одержимо, що

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta = \varepsilon > 0) (\forall B \in O(X) : h(B, B_0) < \delta = \varepsilon)$$

$$|E(A, B) - E(A, B_0)| \leq h(B, B_0) < \delta = \varepsilon.$$

Це й означає, що функція $E(A, B)$, $B \in O(X)$, є неперервною у будь-якій точці $B_0 \in O(X)$ у розумінні метрики Гаусдорфа на $O(X)$. Тому $E(A, B)$, $B \in O(X)$, є неперервною на $O(X)$ у розумінні гаусдорфівської метрики на $O(X)$.

Нехай тепер A — підпростір простору X , $B_1, B_2 \in P(X)$. Для будь-яких $x_1, x_2 \in A$, $y_1 \in B_1$, $y_2 \in B_2$ маємо, що

$$E(A, B_1 + B_2) = \inf_{\substack{x \in A, \\ z \in B_1 + B_2}} \|x - z\| = \inf_{\substack{x \in A, \\ y_1 \in B_1, y_2 \in B_2}} \|x - (y_1 + y_2)\| \leq \\ \leq \|(x_1 + x_2) - (y_1 + y_2)\| \leq \|x_1 - y_1\| + \|x_2 - y_2\|.$$

Звідси випливає, що

$$E(A, B_1 + B_2) \leq \inf_{\substack{x_1 \in A, \\ y_1 \in B_1}} \|x_1 - y_1\| + \inf_{\substack{x_2 \in A, \\ y_2 \in B_2}} \|x_2 - y_2\| = E(A, B_1) + E(A, B_2).$$

Співвідношення (12) встановлено.

Переконаємося у справедливості співвідношення (13). Нехай $\lambda \in R$, $B \in P(X)$. При $\lambda = 0$ маємо, що $\lambda B = 0 \cdot B = 0$. Тому $E(A, \lambda B) = E(A, 0) = \inf_{x \in A} \|x - 0\| = \inf_{x \in A} \|x\| = 0$, оскільки за умовою A — підпростір простору X і, отже, $0 \in A$.

З іншого боку $|\lambda| E(A, B) = 0 \cdot E(A, B) = 0$. З проведених міркувань випливає, що рівність (13) має місце при $\lambda = 0$.

Нехай $\lambda \neq 0$. Тоді

$$E(A, \lambda B) = \inf_{\substack{x \in A, \\ z \in \lambda B}} \|x - z\| = \inf_{\substack{x \in A, \\ y \in B}} \|x - \lambda y\| = \inf_{\substack{x \in A, \\ y \in B}} \left\| \lambda \left(\frac{x}{\lambda} - y \right) \right\| = \\ = |\lambda| \inf_{\substack{\frac{x}{\lambda} \in A, \\ \frac{\lambda}{\lambda} \frac{\lambda}{\lambda} \\ y \in B}} \left\| \frac{x}{\lambda} - y \right\| = |\lambda| \inf_{\substack{z \in A, \\ y \in B}} \|z - y\| = |\lambda| E(A, B),$$

отже, співвідношення (13) встановлено.

Теорему доведено.

Висновки. Встановлено деякі умови існування екстремального елемента для задачі відшукування відстані між двома множинами лінійного нормованого простору, умови єдиності екстремального елемента для еквівалентної їй задачі, властивості функції відстані, одержано формули для відшукування екстремального елемента для задачі відшукування відстані між двома замкненими кулями цього простору.

Список використаних джерел:

1. Корнейчук Н. П. Экстремальные задачи теории приближения. М.: Наука, 1976. 320 с.
2. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976. 544 с.
3. Арутюнов А. В. Лекции по выпуклому и многозначному анализу: учебное пособие. М.: Физматлит, 2014. 184 с.
4. Гудима У. В., Гнатюк В. О. Співвідношення двоїстості та критерії екстремальності елемента для задачі відшукування відстані між двома опукли-

- ми множинами лінійного нормованого простору. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки: зб. наук. праць. Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2018. Вип. 18. С. 65-77.*
5. Гудима У. В., Гнатюк В. О. Критерії екстремальної послідовності для задачі відшукування відстані між двома опуклими множинами лінійного нормованого простору. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки: зб. наук. праць. Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2019. Вип. 20. С. 13-25.*
 6. Ахиезер Н. И. Лекции по теории аппроксимации. М.: Наука, 1965. 407 с.
 7. Дзядык В. К. Введение в теорию равномерного приближения функций. М.: Наука, 1977. 510 с.
 8. Лоран П.-Ж. Аппроксимация и оптимизация. М.: Мир, 1975. 496 с.
 9. Степанец А. И. Методы теории приближений. Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. Ч. I. 427 с.
 10. Степанец А. И. Методы теории приближений. Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. Ч. II. 468 с.
 11. Тихомиров В. М. Некоторые вопросы теории приближений. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1976. 307 с.
 12. Половинкин Е. С., Балашов М. В. Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа. М.: Физматлит, 2004. 416 с.
 13. Иосида К. Функциональный анализ. М.: Мир, 1967. 624 с.
 14. Vunum W. L. Weak parallelogram lows for Banach spaces. *Can. Math. Bull.* 1976. Vol. 19, № 3. P. 269-275.

THE CONDITIONS OF EXISTENCE OF THE EXTREMAL ELEMENT FOR THE PROBLEM OF FINDING THE DISTANCE BETWEEN TWO SETS, THE UNITY OF AN EXTREMAL ELEMENT FOR ITS EQUIVALENT PROBLEM, THE PROPERTIES OF THE FUNCTION OF THE DISTANCE

The theory of approximation of a function is a direction of mathematics which is intensively developing. The work of P. L. Chebyshev in 1857 is considered the beginning of the modern theory of approximations. It is devoted to polynomials that deviate the least from zero. In this work, the concept of the best approximation was introduced.

Later, problems were investigated in which individual functions approached with polynomials, trigonometric polynomials, rational functions, etc. in different metrics. These tasks are a partial case of the problem of the best approximation of an element of linear normed space by convex set of this space. General theorems of existence, uniqueness of an extremal element, properties of the best approximation functional, duality theorems and criteria of an extremal element for this problem are established [1].

The more general problem are problem of finding the distance between two sets of linear normalized space is also considered [2, 3]. In [4, 5] the relations of duality, criteria of extremal element and sequence are proved for this problem.

In this article established the conditions of the existence of an extremal element for the problem of finding the distance between two sets of linearly normalized space, the conditions of the unity of an extremal element for its equivalent problem, the properties of the function of the distance and formulas for finding an extremal element for the problem of finding the distance between two closed spheres of this space.

Key words: *the linear normed space, the distance between sets, the extremal element, the conditions of the existence and the unity, the properties of the function of the distance.*

Отримано: 29.09.2020

УДК 519.87+519.176

DOI: 10.32626/2308-5878.2020-21.99-114

Н. А. Гук, д-р фіз.-мат. наук, професор,

С. В. Диханов, аспірант,

І. О. Долотов, магістрант

Дніпровський національний університет
імені Олеся Гончара, м. Дніпро

АНАЛІЗ СТРУКТУРИ САЙТУ З ВИКОРИСТАННЯМ ПОНЯТТЯ МОДУЛЯРНІСТІ

У роботі здійснюється аналіз структури веб-сайту, який має ієрархічну організацію розділів. Ієрархічна структура передбачає розбиття всієї інформації на окремі категорії за темами. Гіпертекстову модель веб-сайту зображено математичною моделлю у вигляді орієнтованого незваженого веб-графу, вершинами якого є веб-сторінки, а ребрами — гіперпосилання між ними. Висувається гіпотеза, що сторінка, яка посилається на іншу, має з нею тематичну схожість, а групи пов'язаних між собою сторінок утворюють кластер.

З використанням локальної інформації про гіперпосилання між сторінками сайту здійснюється кластеризація сторінок. Для оцінки якості кластеризації використовується функціонал модулярності, який характеризує різницю між долею ребер у середині кластеру при заданому розбитті та долею ребер, якщо б вони були сгенеровані в графі випадковим чином. Випадковий граф обирається у якості нульової моделі.

Для максимізації значень функціоналу модулярності застосовується Лувенський метод. Розроблено жадібну схему алгоритму, яка зводить задачу до послідовності локальних задач оптимізації. Пропонується здійснювати відбір пар «вершина — кластер», з'єднання яких призводить до збільшення значення функціоналу модулярності. Для довільної вершини гра-

фу відшукується цільовий кластер виходячи з аналізу списків суміжності вершини.

Алгоритм було реалізовано у вигляді прикладного програмного забезпечення, побудованого із використанням принципів функціонального програмування, та застосовано для аналізу структури сайту інтернет-магазину. Досліджено залежність значення функціоналу від кількості кластерів розбиття та параметрів ітераційного процесу.

Здійснено аналіз контенту сторінок веб-сайту всередині кластера, який виявив їх тематичну схожість. Для більшості кластерів є можливим формування семантичного опису. Виконано порівняння результатів кластеризації з експертним розбиттям, обчислено значення точності та повноти розбиття на кластери.

Ключові слова: *веб-сайт, веб-граф, ієрархічна структура, гіперпосилання, функціонал модулярності, кластеризація, тематична зв'язність сторінок, Лувенський метод, жадібний алгоритм.*

Вступ. Сьогодні веб-ресурси стають ефективним інформаційним інструментом для просування компаній на ринку та відіграють важливу роль у розвитку бізнесу. Грамотний підхід до визначення цілей функціонування ресурсу та проектування його структури забезпечує успішне просування сайту в мережі Інтернет та сприяє розширенню цільової аудиторії.

Аналіз функціонування веб-сайту є актуальною задачею, оскільки дозволяє виявити помилки в організації структури, оцінити потенційні можливості та перспективи його розвитку, своєчасно виконати оптимізацію веб-ресурсу, що сприяє підвищенню його ефективності. Результати такого аналізу можна використовувати при проведенні процедури реінжинірингу сайтів.

Підґрунтям для проведення аналізу веб-сайтів є необхідність якісної оптимізації веб-ресурсів та визначення перспектив його розвитку, планування маркетингової або рекламної кампанії підприємства, створення нового або оновлення старого проекту. При здійсненні аналізу сайту важливо визначити ціль дослідження та обрати методи для проведення аналізу.

Структура веб-сайту представляє собою логічну схему розміщення сторінок ресурсу, із використанням якої легко бачити, які сторінки та в якій ієрархії будуть розміщені на сайті, а також визначити шляхи до категорій, підкатегорій, карток товарів.

Аналіз структури сайту дозволяє виявляти помилки в логічній організації веб-ресурсу, визначати, чи якісно налаштовано внутрішні зв'язки між сторінками ресурсів, чи зручно для користувачів знаходити необхідну інформацію. Подібний аналіз також є найважливішим техні-

чним інструментом з точки зору SEO (Search Engine Optimization) при виконанні заходів пошукової оптимізації.

Правильна структура веб-сайту суттєво впливає на ранжування. Швидкий обхід веб-сайту пошуковим роботом забезпечує швидку індексацію сторінок сайту пошуковими системами. Важливим елементом аналізу структури є відшукання посилань, які ведуть на неіснуючі сторінки, а також визначення сторінок, що містять інформацію, але на них не існує жодного посилання з інших сторінок ресурсу. Такі помилки заважають швидкої індексації ресурсу пошуковим роботом та можуть бути усунені при перелінкуванні веб-сайту.

Крім того, веб-сайт із логічною структурою розподіляє внутрішню посилальну вагу по всіх сторінках в залежності від їх важливості, як для користувача, так і для просування ресурсу у мережі Інтернет.

Тому розробка методів та інструментів для проведення аналізу структури веб-сайту є актуальною задачею, розв'язання якої дозволить виявити помилки в логічній організації ресурсу та надати рекомендації щодо їх усунення.

Аналіз літературних джерел. Сайти, розташовані в мережі Інтернет, мають різноманітну структуру, яка визначається обраною моделлю. Для корпоративних сайтів, інтернет-магазинів, каталогів продукції найчастіше використовується тематична організація структури, яка має рівні ієрархії та виконує класифікацію великого обсягу інформації. Така структура передбачає розбиття всієї інформації на окремі категорії за темами. З використанням такої організації матеріалу користувач має змогу легко та швидко відшукувати на сайті необхідну для нього інформацію.

Аналіз структур існуючих сайтів найчастіше здійснюється веб-мастером або веб-аналітиком за допомогою візуального оцінювання. Структура сайту, яку побудовано з використанням одного зі спеціальних сканерів, наприклад, Website auditor от SEO Powersuite, ScreamingFrog, дозволяє оцінити обсяг тематичних розділів, проаналізувати внутрішні гіперпосилання та наочно представити, які сторінки веб-ресурсу є найбільш популярними при внутрішньому перелінкуванні, а які не мають вихідних зв'язків з іншими сторінками. Однак якщо ресурс має великий обсяг і складну ієрархію розділів, візуальний аналіз є трудомістким процесом та може стати неефективним з точки зору виявлення помилок.

Сьогодні в літературі для аналізу зв'язності веб-простору та структури окремих сайтів широко застосовується представлення сайту у вигляді веб-графу [1].

Практично кожен сайт організовано як набір веб-сторінок, навігація по яких здійснюється за допомогою гіперпосилань. Якщо зобразити сайт у вигляді графа, то вершинами графа будуть веб-сторінки, а дугами — гіперпосилання [2]. Запропонована модель зображення сайту є логічною та відображає його структуру [3].

Для дослідження структури веб-простору широко застосовуються теоретико-графові методи, які ґрунтуються на відшуканні компонент зв'язності, пошуку найкоротших шляхів, побудові основних дерев, спектральні методи аналізу графів [4], а також спеціальні методи для аналізу веб-простору [5].

В роботі [6] запропоновано використовувати графічну модель для аналізу структури контент-орієнтованих сайтів з метою оптимізації навігації для користувачів. Дослідження моделі у вигляді графу дозволяє здійснювати автоматизований аналіз веб-сайту з метою виявлення проблемних місць у його структурі та можливих шляхах її оптимізації. Крім того, з використанням графів виконується візуалізація структури веб-сайтів, що спільно з накопиченими статистичними даними веб-аналітики (кількість унікальних відвідувань, показник відмов, кількість переходів з однієї сторінки на інші) робить можливим їх наочний аналіз та обробку.

Часто, для аналізу структури веб-простору або веб-сайту застосовується кластеризація, з використанням якої здійснюється розбиття множини вершин графу на підмножини відповідно до деяких ознак.

В роботі [7] запропоновано метод побудови семантичних кластерів у гіпертекстовій структурі веб-сайту на основі даних статистики переходів користувачів між сторінками сайту.

Кластеризацію графу можна також здійснити шляхом мінімізації (максимізації) деякого функціоналу якості. Найчастіше для побудови такого функціоналу використовується поняття модулярності графу [8], на її максимізації ґрунтується багато алгоритмів виділення кластерів. Значення модулярності показує, наскільки отримане розбиття є якісним у тому сенсі, що вершини всередині кластеру мають більшу високу щільність зв'язків одна з одною, ніж з вершинами інших кластерів.

У роботі для аналізу структури веб-сайту пропонується використовувати локальну інформацію про веб-граф, а саме посилання між сторінками. Вважається, що сторінка, яка посилається на іншу, має з нею тематичну схожість, тобто можна припустити, що вони є тематично локалізованими. На основі інформації про посилання необхідно виконати кластеризацію сторінок веб-ресурсу шляхом максимізації функціоналу модулярності. Отримане розбиття необхідно проаналізувати шляхом перевірки тематичної схожості сторінок веб-сайту, які опинились у одному кластері.

Постановка задачі. Розглядається веб-сайт інтернет-магазину з ієрархічною структурою, в якій виділено головну сторінку, інформаційні сторінки про компанію та способи торгівлі, сторінки з тематичними статтями, каталог товарів із зазначеними категоріями, підкатегоріями та карточками товарів. Передбачається, що існує певна градація інформації на окремі категорії у відповідності до тематики. Для товарів магазину передбачена можливість фільтрації за певними ознаками. Навігацію на

веб-сайті організовано таким чином, що користувач має можливість, як з головної, так і з будь-якої сторінки сайту, перейти в будь-яку категорію, підкатегорію та на конкретну сторінку з товаром. Сторінки сайту є html-документами та мають власні URL адреси, які є стандартизованим способом запису адреси в мережі Інтернет. Сторінки сайту містять внутрішні гіперпосилання, за допомогою яких здійснюється перехід до інших сторінок цього сайту, таким чином будується внутрішня структура сайту.

Використовуючи інформацію про гіперпосилання необхідно виконати кластеризацію сторінок ресурсу та здійснити перевірку тематичної схожості сторінок, які потрапили до одного кластеру.

Гіпертекстову модель веб-сайту можна зобразити математичною моделлю у вигляді орієнтованого незваженого графа $G = (V, E)$, де V — множина вершин, елементи якої відповідають сторінкам сайту, E — множина ребер графу, елементи якої відповідають гіперпосиланням між сторінками. Граф зображується матрицею суміжності $[A_{ij}]$.

Задачу кластеризації сторінок веб-сайту сформулюємо у такій спосіб: необхідно побудувати розбиття множини V вершин веб-графу на кластери C_k , $C_k \subset C$, $k = 1, \overline{K}$, $\forall i, j; i, j = 1, \overline{K}$; $i \neq j : C_i \cap C_j = \emptyset$,

$V = \bigcup_{k=1}^K C_k$ за допомогою відображення $\varphi : V \rightarrow C$, для якого виконується:

$$\varphi^* = \arg \max_{\varphi \in \Phi} Q(\varphi),$$

де $Q(\varphi)$ — функціонал якості розбиття.

Метод розв'язання задачі. Припустимо, що веб-граф має кластерну структуру, в якій щільність зв'язків між вершинами всередині кластеру вище, ніж щільність зв'язків в іншій частині графу. Крім того, передбачається, що щільність зв'язків всередині кластерів у такому графі значно вища, ніж щільність зв'язків у довільному графі, який не має структури.

Однією з можливих метрик якості розбиття є значення модулярності [9]. Модулярність характеризує різницю між долею ребер усередині кластера при заданому розбитті та долею ребер, якщо б вони були генеровані в графі випадковим чином.

Випадковий граф обирається у якості нульової моделі, передбачається, що він зберігає степені вершин вихідного графа, а ймовірність того, що кінці ребер потраплять у вершину i дорівнює:

$$d_i / (2m - 1),$$

де d_i — степінь вершини i ; m — загальна кількість ребер в графі.

Тоді ймовірність існування ребра між парою вершин $i, j \in V^2$ дорівнює $d_i d_j / 2m$. Для великих значень m відніманням 1 в знаменнику можна знехтувати.

Тоді функціонал модулярності можна зобразити у такій спосіб:

$$Q = \frac{1}{2m} \sum_{i,j \in V^2} \left[A_{ij} - \alpha \frac{d_i d_j}{2m} \right] \delta(i, j), \quad (1)$$

де A_{ij} — елемент матриці суміжності графа; α — параметр для регулювання числа кластерів у розбитті, який залежить від розміру графа та зазвичай обирається з інтервалу $[0;2]$; дельта-функція

$$\delta(i, j) = \begin{cases} 1, & \text{якщо вершини } i, j \text{ належат одному кластеру,} \\ 0, & \text{інакше.} \end{cases}$$

Алгоритм, запропонований у роботі [8], передбачає побудову розбиття графу на кластери таким чином, щоб значення Q було максимальним.

Функціонал (1) не є неперервним, тому задача оптимізації відноситься до класу задач дискретної оптимізації. Пошук глобального максимуму функціоналу (1) є NP-повною задачею у сильному сенсі [10] тому алгоритми повного перебору не є ефективними, кількість варіантів розбиття m вузлів по C_k кластерам зростає експоненційно зі збільшенням числа k .

Однак існує ряд евристичних прийомів, які дозволяють знайти значення модулярності близьке до максимального за поліноміальний час. Для розв'язання задач кластеризації розробляються жадібні алгоритми, які зводять задачу до послідовності локальних задач оптимізації. Для їх розв'язання здійснюється вибір пар «кластер-кластер» [11, 12] або «вершина — кластер» [13], з'єднання яких призводить до збільшення значення модулярності.

Ефективним підходом до розв'язання задач кластеризації веб-графів є Лувенський метод максимізації модулярності (Louvain Modularity Maximization), який відноситься до жадібних евристик [13].

Для побудови алгоритмічної схеми визначається деяке початкове розбиття множини вершин графу на кластери, як правило, кожна вершина асоціюється з власним кластером. На першому етапі роботи алгоритму вершини перебираються у деякому заданому порядку, для довільної вершини u по чергово розглядаються всі кластери крім того, до якого ця вершина зараз належить. Цільовий кластер C_k відшукується серед тих кластерів, у яких є вершини суміжні з вершиною u . Серед розглянутих кластерів обирається той, переміщення вершини у який призводить до максимального збільшення значення прирощення модулярності.

Тоді задачу пошуку цільового кластеру можна сформулювати як локальну задачу оптимізації у такий спосіб:

$$C_{loc} = \arg \max_{C_k} \Delta Q(u, C_k), \quad (2)$$

де прирощення модулярності при переміщенні вершини до кластеру обчислюється:

$$\Delta Q(u, C_k) = Q_{C_k \cup u} - Q_{C_k/u}, \quad k = \overline{1, K-1},$$

K — кількість кластерів.

Оскільки $\delta(i, j)$ дорівнює 1 тільки у тому випадку, коли вершини i та j знаходяться в одному кластері, значення модулярності можна отримати шляхом підсумовування значень модулярності по кожному кластеру окремо

$$Q = \frac{1}{2m} \sum_{k=1}^K \left(\sum_{i, j \in C_k} A_{ij} - \frac{\alpha}{2m} \sum_{i, j \in C_k} d_i d_j \right).$$

Вводячи позначення $\sum_{i, j \in C_k} d_i d_j = \sum_{i \in C_k} d_i \sum_{j \in C_k} d_j = \left(\sum_{i \in C_k} d_i \right)^2$, обчис-

лимо прирощення модулярності, яке викликано переміщенням вершини u в кластер C_k :

$$\begin{aligned} \Delta Q(u, C_k) &= \left[\frac{\sum_{i, j \in C_k} A_{ij} + d_{u \rightarrow C_k}}{2m} - \alpha \left(\frac{\sum_{i \in C_k} d_i + d_u}{2m} \right)^2 \right] - \\ &- \left[\frac{\sum_{i, j \in C_k} A_{ij}}{2m} - \alpha \left(\frac{\sum_{i \in C_k} d_i}{2m} \right)^2 \right] - \alpha \left(\frac{d_u}{2m} \right)^2 = \frac{d_{u \rightarrow C_k}}{2m} - \alpha \frac{\sum_{i \in C_k} d_i d_u}{2m^2}, \end{aligned}$$

де $\sum_{i \in C_k} d_i$ — загальна кількість ребер, які зв'язують вершину i кластеру C_k з вершинами графу; $d_{u \rightarrow C_k}$ — кількість ребер, які зв'язують вершину u з вершинами кластера C_k ; d_u — степінь вершини u .

Якщо знайдено максимальне та додатне значення прирощення модулярності, то вершина u переміщується до кластеру C_k . Якщо всі значення прирощення модулярності від'ємні, то вершина залишається у своєму кластері. Процес повторюється послідовно для всіх

вершин доти, доки вдається досягти збільшення значення модулярності при переміщенні вершини у кластер.

На другому етапі алгоритму граф, який поділено на кластери на попередньому етапі, перетворюється у метаграф G' . У метаграфі вершинами стають кластери, які отримано в результаті виконання процедури першого етапу.

Кратні ребра між кожною парою вершин у метаграфі G' замінюються на одне ребро, якому у відповідність ставлять вагу. Вага дорівнює кількості ребер, що з'єднують вершини відповідних кластерів. Локальна оптимізація значення прирощення модулярності та побудова метаграфа з'єднуються в одну ітерацію. Такі ітерації виконуються, поки існує можливість збільшити значення модулярності.

Запропонований підхід реалізовано у вигляді алгоритму.

Алгоритм кластеризації.

Вхід: граф $G = (V, E)$, який подано матрицею суміжності.

Вихід: множина кластерів $\{C_k\}$, $k = \overline{1, K}$.

0. Для графу $G = (V, E)$ виконати:

Перший етап:

1. Задати розбиття множини вершин графу V на кластери $\{C_k^{(t)}\}$, $k = \overline{1, K}$.
2. Задати значення параметру α .
3. Визначити порядок обходу вершин.
4. Повторювати для $u \in V$: знайти кластер для переміщення вершини u із розв'язання задачі (2)

$$C_{loc} = \arg \max_{C_k} \Delta Q(u, C_k).$$

5. Якщо $\Delta Q_{u \rightarrow C_k} > 0$, то перенести вершину u в кластер $C_k^{(t+1)}$ оновити інформацію о кластерах: $C_k^{(t+1)} = C_k^{(t)} \cup u$, $C_j^{(t+1)} = C_j^{(t)} / u$.
6. Якщо жодна з вершин не переміщується в новий кластер, то перейти до шагу 7.
7. Для отриманого розбиття $\{C_k^{(t+1)}\}$, $k = \overline{1, K}$ на кластери обчислити значення модулярності (1), перейти до другого етапу.

Другий етап:

1. Побудувати метаграф $G' = (V', E')$, де $V' = \{C_k\}$
2. Якщо $|V'| = |V|$, то вихід, інакше перейти до шагу 0.
3. Вихід.

Обчислювальна складність алгоритму дорівнює $O(m \log m)$.

Наведений алгоритм було реалізовано у вигляді прикладного програмного забезпечення, побудованого із застосуванням принципів функціонального програмування. Застосування такого підходу передбачає референційну прозорість усіх функцій у програмі. Функції працюють лише з переданими ним змінними, що дозволяє виключити помилки при зверненні до пам'яті комп'ютера. Крім того, при використанні такого підходу порядок виконання операцій не є важливим, що дозволяє легко виконувати обчислення паралельно.

При обробці графів великої вимірності це дозволяє суттєво скоротити час на обчислення.

Аналіз отриманих результатів. Тестування розробленого програмного забезпечення було виконано на прикладі графа, наведеного у роботі [14], кластеризацію якого виконано шляхом побудови блочно-діагональних матриць сильної зв'язності. На рис. 1 наведено вихідний граф з результатами розбиття на кластери [14], які відокремлено пунктирною лінією, та результат роботи розробленого програмного забезпечення.

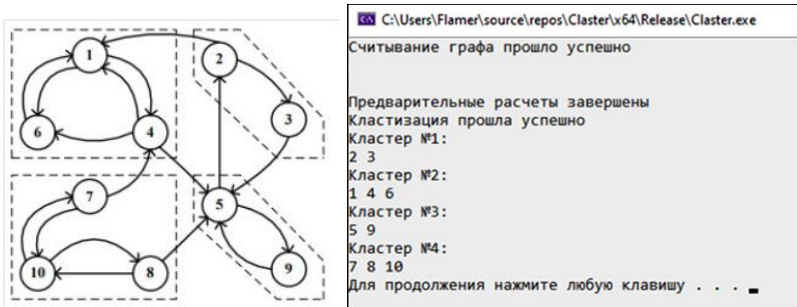


Рис. 1. Результат розбиття на кластери із використанням матриць сильної зв'язності [14] та розробленого алгоритму

За результатами застосування розробленого програмного забезпечення отримано таке ж саме розбиття на кластери, як і у роботі [14]. Кластери об'єднують вершини, які мають більшу кількість зв'язків одна з одною, ніж з вершинами інших кластерів. Значення функціоналу (1) на кожній ітерації виконання алгоритму поступово збільшувалося.

З літературних джерел [11] відомо, що застосування функціоналу модулярності в якості метрики кластеризації призводить до проблеми роздільної здатності, невеличкі кластери не відокремлюються. В разі, коли розглядався граф з [14], у якого потужність множин $|V|=10$ та $|E|=18$, вказана проблема не виявилась, однак зі збільшенням розмірів графу функціонал модулярності потребує модифікації шляхом підбору параметра масштабу α .

Далі описаний алгоритм було застосовано для аналізу структури сайту інтернет-магазину <http://semena-dnepr.org.ua>.

Із застосуванням спеціального програмного забезпечення, яке реалізує обхід графу та виконує процедуру краулінгу, було побудовано веб-граф сайту. Усі вершини графа є унікальними, тобто одна html-сторінка відповідає одній вершині, в побудованому графі $|V| = 486$, $|E| = 12096$. За результатами кластеризації отримано 33 кластера, на рис. 2 наведено залежність значення функціоналу (1) від номеру ітерації алгоритму та залежність значення модулярності від кількості кластерів на етапах виконання алгоритму (рис. 3). З аналізу залежностей можна бачити, що значення функціоналу дорівнює 0,368 та стабілізується після виконання 6 ітерацій алгоритму.

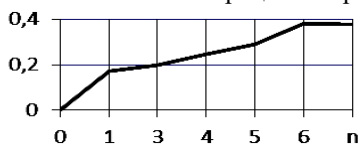


Рис. 2. Залежність значення модулярності від номеру ітерації алгоритму

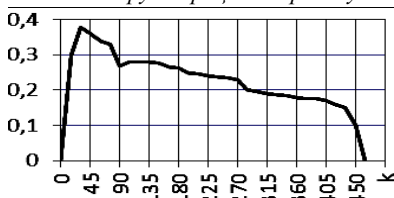


Рис. 3. Залежність значення модулярності від кількості кластерів

Аналіз контенту сторінок сайту, які опинились у одному кластері, дозволяє виявити тематичну схожість елементів всередині кластеру. В табл. 1, табл. 2 наведено приклади формування кластерів розбиття та їх характеристики.

Таблиця 1

Опис кластеру групи товарів Кабачки

Характеристика кластеру	Номер вершини в графі	Гіперпосилання	Семантичний опис кластеру
Номер кластеру: 5 Кількість елементів в кластері: 16	33	http://semena-dnepr.org.ua/product-category/semena-ovoshhej/kabachki/	Сторінка категорії товарів Кабачки
	154	http://semena-dnepr.org.ua/product/nasinnja-kraini-cukkini-ajeronavt-2-g/	Сторінки товарів, які знаходяться у категорії Кабачки
	155	http://semena-dnepr.org.ua/product/nasinnja-kraini-bjanka-2-g/	

Продовження таблиці 1

156	http://semena-dnepr.org.ua/product/kab-gribovskij-10-g/	
157	http://semena-dnepr.org.ua/product/nasinnja-kraini-gribovskij-2-g/	
158	http://semena-dnepr.org.ua/product/cukkini-zolotinka-10-g/	
167	http://semena-dnepr.org.ua/product/nasinnja-kraini-cukkini-zolotinka-2-g/	
168	http://semena-dnepr.org.ua/product/iskander-f1-5-sht/	
169	http://semena-dnepr.org.ua/product/kavili-f1-5-sht/	
170	http://semena-dnepr.org.ua/product/nasinnja-kraini-cukeshha-2-g/	
171	http://semena-dnepr.org.ua/product/nasinnja-kraini-patisson-belyj-2-g/	
172	http://semena-dnepr.org.ua/product/nasinnja-kraini-patisson-oranzhevij-2-g/	
178	http://semena-dnepr.org.ua/product/nasinnja-kraini-svekla-cilindra-3g-kabachok-bjanka-2g/	
179	http://semena-dnepr.org.ua/product/kabachok-kustovoj-10-g/	
180	http://semena-dnepr.org.ua/product/kabachok-kustovoj-2-g/	
186	http://semena-dnepr.org.ua/product/nasinnja-kraini-ogurec-kustovoj-0-5g-kabachok-gribovskij-2-g/	

Таблиця 2

Опис кластеру групи товарів Кавуни

Характеристика кластеру	Номер вершини в графі	Гіперпосилання	Семантичний опис кластеру
Номер кластеру 10	46	http://semena-dnepr.org.ua/product-category/semena-ovoshhej/arbuzy/	Сторінка категорії товарів Кавуни
Кількість елементів в кластері: 9	195	http://semena-dnepr.org.ua/product/nasinnja-kraini-ogonek-5-g/	Сторінки товарів, які знаходяться у категорії Кавуни
	210	http://semena-dnepr.org.ua/product/arbuz-ogonek-500-g/	
	226	http://semena-dnepr.org.ua/product/nasinnja-kraini-astrahanskij-1-g/	

Продовження таблиці 2

227	http://semena-dnepr.org.ua/product/nasinnja-kraini-bingo-1-g/
228	http://semena-dnepr.org.ua/blog/vyrashhivanie-rassady-ovoshhnyh-kultur/
232	http://semena-dnepr.org.ua/product/nasinnja-kraini-krimson-svit-10-sht/
233	http://semena-dnepr.org.ua/product/nasinnja-kraini-melitopolskij-1-g/
239	http://semena-dnepr.org.ua/product/nasinnja-kraini-ogonek-1-g/

Для більшості кластерів, отриманих в результаті розбиття, виявилось можливим сформулювати семантичний опис, який відповідає або назві категорії товарів, або пошуковим запитам за конкретними критеріями та ознаками товарів.

Однак у розбитті існують і такі кластери, для яких не вдалось сформулювати семантичний опис. Найчастіше це великі за кількістю елементів кластери. Так до кластеру №1 належить близько 100 вершин, частину з яких можна віднести до сторінок навігації сайту, сторінок сортування товарів за певними критеріями, сторінок із контактною інформацією та сторінок форуму із запитаннями. Зазначені сторінки за будовою сайту мають велику кількість гіперпосилань одна на одну, що пояснює їх привласнення до одного кластеру.

Також до цього кластеру було віднесено сторінки товарів, які за семантичними ознаками повинні були опинитися у окремих кластерах. Наприклад, це сторінки товарів з продажу насіння кукурудзи та саджанців винограду. Це пояснюється тим, що кількість сторінок з товарами, що належать до цих груп, є замалою. Так на сайті у категорії Насіння кукурудзи наявними є лише три сторінки із товарами, з яких міг би складатися окремий кластер за семантичним описом. Таким чином, було виявлено суттєвий недолік алгоритму по відокремленню невеличких кластерів.

Оскільки застосування поняття модулярності у якості метрики розбиття дозволяє отримати розв'язок близький до оптимального, в роботі для оцінювання якості кластеризації було виконано порівняння отриманого розбиття з експертним.

Експертне розбиття було побудовано виходячи зі структури інтернет-магазину, кластерам відповідали категорії товарів, а сторінки з товарами в певних категоріях ставали елементами кластеру. Результат кластеризації із застосуванням запропонованого підходу було оцінено відносно запропонованого експертного розбиття. Використовувалися стандартні для подібного класу задач метрики: точність та повнота, які обчислювались наступним чином [15]:

$$P = \frac{T}{T + F}; R = \frac{T}{T + FN}$$

де T — кількість кластерів експертного розбиття, відокремлених алгоритмом; F — кількість кластерів, що є відсутніми у експертному розбитті, але відокремлені алгоритмом; FN — кількість кластерів експертного розбиття, що є відсутніми у розбитті, яке отримано із застосуванням алгоритму.

Будемо вважати, що кластер C_k експертного розбиття знайдено алгоритмом, якщо серед знайдених алгоритмом кластерів існує такий, який складається більше ніж з половини вершин кластеру C_k та менше ніж з половини вершин будь-якого з інших кластерів експертного розбиття. За результатами роботи алгоритму було досягнуто значення точності кластеризації — 0,83, значення повноти — 0,7.

За аналогічними формулами розраховується точність та повнота в середині кластеру, значення T дорівнює максимальній кількості вершин експертного кластеру, які виділено алгоритмом у окремий кластер під час розбиття, F та FN — число вершин, доданих та виключених алгоритмом з експертного розбиття відповідно. У табл. 2 наведено відповідні значення метричних характеристик для окремих кластерів. Середні значення точності та повноти по усім кластерам розбиття дорівнюють 0,8 та 0,76 відповідно.

Таблиця 3

Значення метрик якості для досліджуваного графу

Номер кластеру у розбитті	Кількість елементів у кластері	Значення точності у кластері	Значення повноти у кластері
1	103	0,58	0,62
5	16	0,87	0,91
10	10	0,81	0,76
18	5	0,67	0,63
31	12	0,83	0,86

З аналізу табл. 3 можна бачити, що для великих та маленьких кластерів спостерігається менша точність та повнота, що обумовлено нездатністю алгоритму відокремлювати невеличкі кластери та привласнювати їх елементи до великих за кількістю елементів кластерів.

Висновки. У роботі здійснюється аналіз структури веб-сайту, який має ієрархічну організацію розділів. З аналізу публікацій за темою роботи сформульовано гіпотезу щодо тематичної зв'язності сторінок сайту, які посилаються одна на одну, а також обрано математичну модель та метод розв'язання задачі.

Гіпертекстову модель веб-сайту зображено математичною моделлю у вигляді орієнтованого незваженого веб-графу, вершинами

якого є web-сторінки, а ребрами — гіперпосилання між ними. Для аналізу структури веб-сайту здійснюється кластеризація веб-сторінок. В якості метрики для оцінки результату розбиття вершин на кластери використовується функціонал модулярності. Вершини веб-графу, щільність зв'язків між якими значно вища, ніж щільність зв'язків між вершинами у довільному графі, який не має структури, відносяться до одного кластеру. Граф, у якому ребра розташовані випадковим чином обирається у якості нульової моделі.

Для максимізації значень функціоналу модулярності застосовується Лувенський метод. Розроблено жадібну схему алгоритму, яка зводить задачу до послідовності локальних задач оптимізації. У якості евристики пропонується здійснювати відбір пар «вершина — кластер», з'єднання яких призводить до збільшення значення функціоналу модулярності.

Алгоритм реалізовано у вигляді прикладного програмного забезпечення, побудованого із застосуванням принципів функціонального програмування. Здійснено аналіз структури веб-сайту інтернет-магазину. Досліджено залежність значення функціоналу модулярності від кількості кластерів розбиття та параметрів ітераційного процесу.

Здійснено аналіз тематичної зв'язності сторінок веб-сайту всередині кластеру. Для більшості кластерів сформульовано семантичний опис. Виконано порівняння результатів кластеризації з експертним розбиттям, обчислено значення точності та повноти розбиття на кластери.

Список використаних джерел:

1. Ольшевский А. И. Описание способов представления web-сайтов в виде фреймовой модели для реализации функциональных операций в Интернет-клиентских системах. *Искусственный интеллект*. 2008. № 1. С. 110-116.
2. Chandresh P. S., Suman S., Suman K., Saurabh L. Analysis to Visualize a Web Graph. *International Journal of Computer Science Issues*. 2012. Vol. 9. Issue 3. № 2. P. 247-253.
3. Tint S., Aung M. Web graph clustering using hyperlink structure. *Advanced Computational Intelligence: An International Journal (ACII)*. 2014. Vol. 1. № 2. P. 17-24.
4. Ying X., Wu X., Barbara D. Spectrum based fraud detection in social networks. *27 th Intern. Conf. on Data Engineering: ICDE'2011 (Hannover, Germany, April 11-16, 2011): Proc. Wash.: IEEE*. 2011. P. 912-923.
5. Flake G. W., Lawrence S. R., Giles C. L., Coetzee F. M. Self-Organization and Identification of Web Communities. *IEEE Computer*. 2002. Vol. 35 (3). P. 66-71.
6. Салин В. С., Папшев С. В., Сытник А. А. Графовая модель веб-сайта как основа для анализа его структуры. *Телематика'2012*: тр. XIX всерос. науч.-метод. конф., г. Санкт-Петербург. 2012. С. 190-191.
7. Салин В. С., Папшев С. В. Семантическая сегментация веб-гипертекста на основе дискретных математических моделей. *Компьютерная лингвистика и вычислительные онтологии*: сб. науч. ст. XVIII Объединенной

- конф. «Интернет и современное общество» IMS-2015, Санкт-Петербург, 23-25 июня 2015 г. ун-т ИТМО. 2015. С. 119-129.
8. Newman M. E. J., Girvan M. Finding and evaluating community structure in networks. *Physical Review E: Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics*. 2004. Vol. 69. № 2. Article ID 026113.
 9. Girvan M., Newman M. E. J. Community structure in social and biological networks. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* 99. 2002. P. 7821-7826.
 10. Brandes U., Delling D., Gaertler M., Goerke R., Hoefer M., Nikoloski Z., Wagner D. Maximizing modularity is hard. URL: <https://arxiv.org/pdf/physics/0608255v2.pdf>.
 11. Clauset A., Newman M. E. J., Moore C. Finding community structure in very large networks. *Phys. Rev. E*. 2004. Vol. 70, № 6. Article ID 066111.
 12. Newman M. E. J. Fast algorithm for detecting community structure in networks. *Phys. Rev. E*. 2004. Vol. 69. Article ID 066133.
 13. Blondel V., Guil-laume J., Lambiotte R., Lefebvre E. Fast Unfolding of Communities in Large Networks. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*. 2008. № 10. P. 10008-10020.
 14. Шестопалова О. Е., Кизин П. В. Модификация матричного алгоритма разбиения графов для решения задач декомпозиции. *Вестник Полоцкого Государственного Университета. Серия С*. 2011. С. 26-32.
 15. Olson D. L., Delen D. *Advanced Data Mining Techniques*. Springer, 2008. 180 p.

ANALYSIS OF THE SITE STRUCTURE USING THE CONCEPT OF MODULARITY

The analysis of the structure of the website, which has a hierarchical organization of sections, is carried out. The hierarchical structure the division of all information into separate categories by topic is involved. The hypertext model of a website is represented by a mathematical model in the form of an oriented unweighted web graph. Web pages are vertices of a graph, and hyperlinks between them are edges of a graph. A hypothesis is put forward about the thematic coherence of pages that link to each other. Groups of related pages are thought to form a cluster.

Using local information about hyperlinks between site pages, site pages are clustered. As a clustering quality metric the modularity functional is used. Modularity characterizes the difference between the fraction of edges within a cluster at a given partition and the fraction of edges if they were generated in the graph at random. A random graph as the zero model is chosen.

The Louvain method to maximize the values of the modularity functional is used. A greedy scheme of the algorithm, which reduces the problem to a sequence of local optimization problems, is developed. It is proposed to select vertex-cluster pairs, the connection of which leads to an increase in the value of the modularity functional. For an arbitrary vertex of the graph, the target cluster is found based on the analysis of the lists of adjacency of the vertex.

Using the principles of functional programming application software that implements the algorithm is developed. The software to analyze the structure of the online store site is used. The dependence of the value of the modularity functional on the number of partition clusters and the parameters of the iterative process is investigated.

Analysis of the content of the website pages within the cluster, which revealed their thematic similarity, was performed. For most clusters the formation of a semantic description is possible. The results of clustering are compared with the expert partition. The values of accuracy and completeness of division into clusters are calculated.

Key words: *website, web-graph, hierarchical structure, hyperlinks, modularity functional, clustering, thematic coherence of pages, Louvain method, greedy algorithm.*

Отримано: 18.09.2020

УДК 519.6

DOI: 10.32626/2308-5878.2020-21.114-126

М. Р. Петрик, д-р фіз.-мат. наук,
Д. М. Михалик, канд. техн. наук,
І. В. Гоянюк, аспірант

Тернопільський національний технічний університет
імені Івана Пулюя, м. Тернопіль

ВИСОКОПРОДУКТИВНІ ОБЧИСЛЕННЯ ДЛЯ МОДЕЛЮВАННЯ ФІЛЬТРАЦІЙНОГО МАСОПЕРЕНОСУ В СЕРЕДОВИЩІ МІКРОПОРИСТИХ ЧАСТИНОК З УРАХУВАННЯМ ЗВОРОТНІХ ЗВ'ЯЗКІВ

Методами інтегральних перетворень Лапласа і Фур'є побудований високошвидкісний точний аналітичний розв'язок крайової задачі фільтраційного масопереносу, що включає два взаємозв'язаних типи переносу: на мікрорівні — в мікропорах вологовмістких частинок та макрорівні — в системі макропор міжчастинкового простору в обмеженому середовищі мікропористих частинок. Шляхом розв'язання оберненої задачі з використанням експериментальних концентраційних розподілів в системі Microsoft Visual C++ розраховані профілі приведення коефіцієнтів консолідації для частинок та системи макропор і виконана перевірка моделі на адекватність.

Процеси фільтраційного масо переносу є важливими технологічними операціями при розділенні сумішей, екстрагуванні рідин із різних біологічних матеріалів в багатьох галузях промисловості. Тому дослідження методології математичного моделювання з використанням методів інтегральних перетворень Фур'є і Лапласа і побудови високошвидкісного та точного аналітичного розв'язку дозволять реалізувати високопродуктивні обчислення з ефективним розпаралелюванням обчислювального процесу для багатоядерних комп'ютерів, що є досить необхідним в переробній, хімічній, фармакології та інших галузях індустрії. Таким чином, це забезпечення виконання ефективних процедур перевірки моделі на

адекватність та побудову просторово розподілених та змінних в часі розподілів параметрів досліджуваних процесів.

Ключові слова: *високопродуктивні обчислення, математична модель фільтраційного масопереносу, інтегральне перетворення Лапласа, скінченне інтегральне перетворення Фур'є, мікропористі частинки, розподіл інтегральної сухості, ступінь адекватності математичної моделі, мікропори, макропори, математичний опис проблеми, мікропори з високим ступенем місткості і низькою проникністю у частинках, макропори з низьким рівнем місткості та високою проникністю.*

Вступ. Процеси фільтраційного масопереносу є важливими технологічними операціями при розділенні сумішей, екстрагуванні рідин із різних біологічних матеріалів в переробній, хімічній індустрії, фармакології та інших галузях. Структура біологічних матеріалів містить розгалужену систему вологовмістких клітин, міжклітинних порождин, мікропор, через які здійснюється масоперенос [1-5]. При фільтраційному переносі — відтиску у попередньо сформованому пласті мікропористих частинок біологічної природи, що піддається стискуванню, виникають внутрішні і зовнішні градієнти тисків відповідно в частинках і міжчастинковому просторі, які спричиняють відтоки рідини із пласти і частинок. При цьому внутрішні потоки маси спрямовані з середини мікропор вологовмістких частинок до їх поверхонь. Далі формуються проміжні (транзитні) потоки, спрямовані від зовнішніх поверхонь частинок в макропори міжчастинкового простору. В макропорах *intraparticle spaces* виникають зовнішні відтоки рідини на зовні пласти середовища. Така феноменологічна модель фільтраційного масопереносу з частинок для середовища клітинної структури розглянута в [4, 5]. Ця модель ґрунтується на відповідних рівняннях балансу маси у внутрічастинковому просторі (*intraparticle spaces*), включаючи і міжклітинний простір, та міжчастинковому просторі (*extraparticle spaces*). Згідно такої моделі, потік рідини з мікропорів *intraparticle spaces* розглядається як такий що є незначним у порівнянні з потоком з частинок на зовні — в макропори *extraparticle spaces* та потоком з *extraparticle spaces* назовні пласти у середовища. До того ж, розглядувана в [5] модель включає припущення про псевдо статичність потоку між *intraparticle spaces* і *extraparticle spaces*. Це означає, що інтенсивність потоку — з середини частинки на зовні частинки є пропорціональна різниці тисків всередині і назовні частинки, що є дуже наближено.

У праці розглядається математична модель масопереносу в середовищі мікропористих частинок клітинних матеріалів, яка враховує складний механізм взаємовпливів і зворотніх зв'язків внутрішні мікропотоки з частинок та макропотоки міжчастинкового простору.

Математичний опис проблеми. Припускається, що пласт мікропористого середовища частинок, що містять рідину піддається сти-

скуванню. Потоки, що виникають в intraparticle spaces спрямовані в extraparticle spaces і відтак назовні пласту середовища. Тонкі мікро частинки розглядаються нами як паралелепіпеди (прямокутні пласти-ни), відокремлені одна від одної системою макропор. Середовище частинок розглядається як дворівнева система пор: мікропори з висо-ким ступенем місткості і низькою проникністю у частинках, і макро-пори з низьким рівнем місткості та високою проникністю. Детальний аналіз дискретної і континуальної концепції для дворівневої системи пор є добре описаний в механіці руйнування та механіці ґрунтів [1]. Незважаючи на окремі аналогії між такими моделями, рідинних по-токів в дворівневих системах пор, відмінність фізики переносу ріди-ни в механічних системах руйнування і середовищах біологічних ча-стинка є значною і потребує окремого дослідження.

Математична модель такого фільтраційного масопереносу в мік-ропористому середовищі частинок біологічної природи в одновимір-ній постановці по товщині пласту частинок середовища та двовимір-ній для мікропористих частинок може бути сформульована як насту-пна система крайових задач для рівнянь в частинних похідних [6, 7]:

Задача А: Побудувати в області $D_1 = \{(t, z) : t > 0, 0 < z < h\}$ обмежений розв'язок рівняння консолидації для обмеженого середо-вища мікропористих частинок:

$$\frac{\partial P_1(t, z)}{\partial t} = b_1 \frac{\partial^2 P_1}{\partial z^2} + \beta_2 \frac{\partial \bar{P}_2}{\partial t} \quad (1)$$

з початковою умовою:

$$P_1(t, z)|_{t=0} = P_E = const, \quad (2)$$

крайовими умовами (по змінній z)

$$P_1(t, z)|_{z=0} = 0; \quad \frac{\partial P_1}{\partial z}|_{z=h} = 0 \quad (3)$$

Задача В: Побудувати в області $D_2 = \{(t, x, z) : t > 0, 0 < x < R, 0 < z < h\}$ обмежений розв'язок рівняння консолидації для частинки

$$\frac{\partial P_2}{\partial t} = b_2 \frac{\partial^2 P_2}{\partial x^2} \quad (4)$$

з початковою умовою:

$$P_2|_{t=0} = P_E, \quad (5)$$

крайовими умовами:

$$\frac{\partial P_2}{\partial x}|_{x=0} = 0 \text{ (умова симетрії); } P_2|_{x=R} = P_1(t, z). \quad (6)$$

Тут P_1 — функція розподілу тиску в макропорах extraparticle spaces середовища, P_2 — функція розподілу тиску в мікропорах intraparticle

spaces (частинці), $\bar{P}_2(t, z) = \frac{1}{R} \int_0^R P_2(t, x, z) dx$ — усереднений по r роз-

поділ P_2 в частинці, b_1, b_2 — коефіцієнти консолідації в extraparticle spaces і intraparticle spaces середовища.

Високопродуктивний аналітичний розв’язок моделі: профілі тисків в extraparticle spaces і intraparticle spaces. З використанням методів скінченного інтегрального перетворення Фур’є [8] та інтегрального перетворення Лапласа [9] та підходів, викладених в [6, 7], побудовано високошвидкісний аналітичний розв’язок моделі (1)-(6), що дозволяє ефективно розпаралелювання обчислювального процесу для багатоядерних комп’ютерів у вигляді:

$$P_1(t, z) = P_E \cdot \frac{2}{h} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \left[\frac{1}{1 - \frac{\beta_2}{2} \left(\frac{\sqrt{b_2}}{v_{jn} \cdot R} \operatorname{tg} \frac{v_{jn} R}{\sqrt{b_2}} + \frac{1}{\cos^2 \frac{v_{jn} R}{\sqrt{b_2}}} \right)} \right] \times \quad (7)$$

$$\times \left[e^{-v_{jn}^2 t} - \beta_2 \cdot \frac{2}{R^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-b_2 \eta_k^2 t} - e^{-v_{jn}^2 t}}{\frac{v_{jn}^2}{b_2} - \eta_k^2} \right] \cdot \frac{\sin \lambda_n z}{\lambda_n}$$

$$P_2(t, x, z) = P_E \cdot \frac{2}{R} \sum_{m=0}^{\infty} \left[e^{-b_2 \eta_m^2 t} + b_2 \eta_m^2 \int_0^t e^{-b_2 \eta_m^2 (t-\tau)} \cdot P_1(\tau, z) dz \right] \frac{(-1)^m \cdot \cos \eta_m x}{\eta_m}$$

або

$$P_2(t, x, z) = P_E \cdot \frac{2}{R} \sum_{m=0}^{\infty} \left[e^{-b_2 \eta_m^2 t} + \frac{2}{h} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \left[\frac{1}{1 - \frac{\beta_2}{2} \left(\frac{\sqrt{b_2}}{v_{jn} R} \operatorname{tg} \frac{v_{jn} R}{\sqrt{b_2}} + \frac{1}{\cos^2 \frac{v_{jn} R}{\sqrt{b_2}}} \right)} \right] \times \right. \quad (8)$$

$$\left. \times \left[\frac{\omega_{mk}(t) - \frac{e^{-v_{jn}^2 t} - e^{-b_2 \eta_m^2 t}}{v_{jn}^2}}{1 - \frac{v_{jn}^2}{b_2 \eta_m^2}} - \beta_2 \cdot \frac{2}{R^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1 - \frac{v_{jn}^2}{b_2 \eta_m^2}}{\frac{v_{jn}^2}{b_2} - \eta_k^2} \right] \cdot \frac{\sin \lambda_n z}{\lambda_n} \right] \cdot \frac{(-1)^m \cos \eta_m x}{\eta_m}$$

$$\omega_{mk}(t) = \begin{cases} \frac{e^{-b_2\eta_k^2 t} - e^{-b_2\eta_m^2 t}}{b_2(\eta_m^2 - \eta_k^2)}; & m \neq k; \\ b_2\eta_m^2 \cdot e^{-b_2\eta_m^2 t}; & m = k; \end{cases}$$

$$\bar{P}_2(t, z) = \frac{1}{R} \int_0^R P_2(t, x, z) dx =$$

$$= P_E \cdot \frac{2}{R^2} \sum_{m=0}^{\infty} \left[e^{-b_2\eta_m^2 t} + \frac{2}{h} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \left[\frac{1}{1 - \frac{\beta_2}{2} \left(\frac{\sqrt{b_2}}{v_{jn}R} \operatorname{tg} \frac{v_{jn}R}{\sqrt{b_2}} + \frac{1}{\cos^2 \frac{v_{jn}R}{\sqrt{b_2}}} \right)} \right] \times \right.$$

$$\left. \times \left[\frac{e^{-v_{jn}^2 t} - e^{-b_2\eta_m^2 t}}{1 - \frac{v_{jn}^2}{b_2\eta_m^2}} - \beta_2 \cdot \frac{2}{R^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\omega_{mk}(t) - \frac{e^{-v_{jn}^2 t} - e^{-b_2\eta_m^2 t}}{1 - \frac{v_{jn}^2}{b_2\eta_m^2}}}{\frac{v_{jn}^2}{b_2} - \eta_k^2} \right] \cdot \frac{\sin \lambda_n z}{\lambda_n} \right] \frac{1}{\eta_m^2}. \quad (9)$$

де $\lambda_n = \frac{2n+1}{2h} \pi$; $n = \overline{0, \infty}$; $\eta_k = \frac{2k+1}{2R} \pi$, $k = \overline{0, \infty}$ v_{jn} ; $j = \overline{1, \infty}$ — корені трансцендентного рівняння

$$v^2 - b_1\lambda_n^2 - \beta_2 \cdot v \frac{\sqrt{b_2}}{R} \operatorname{tg} \frac{vR}{\sqrt{b_2}} = 0. \quad (10)$$

Моделювання та ідентифікація параметрів. В процесі моделювання з використанням спеціально розроблених моделюючих програмних засобів в системі **Microsoft Visual C++** було розв'язано дві задачі: 1) обернена задача — визначення згідно експериментальних розподілів сухості мікропористого середовища та аналітичного

розв'язку моделі розподілів приведених коефіцієнтів консолідації $\frac{b_2}{b_1}$

для розробки процедури перевірки моделі на адекватність та подальшого моделювання профілів тиску в середовищі та частинках та інших параметрів; 2) пряма задача — використовуючи отримані розподіли приведених коефіцієнтів консолідації $\frac{b_2}{b_1}$, знаходження розподіли

лів тисків в extraparticle spaces $P_1(t, z)$ і intraparticle spaces $P_2(t, x, z)$ та $\bar{P}_2(t, z)$ середовища, інтегральної функції сухості частинок середовища $S(t) = \frac{1}{h} \int_0^h [1 - \bar{P}_2(t, z)] dz$, швидкості фільтраційного відтиску $-\frac{1}{\mu r} \frac{\partial}{\partial z} P_1(t, z)$.

Обернена задача. В якості експериментальних даних для знаходження розподілів приведенних коефіцієнтів консолідації $\frac{b_2}{b_1}$ використовувався експериментальний розподіл інтегральної сухості для intraparticle spaces, отриманий в [7] (рис. 1) В якості аналітичного модельного розподілу сухості частинки використовувався розподіл $S(t)$, що включає розподіл тисків $\bar{P}_2(t, z)$ згідно (9). В результаті чисельного розв'язання відповідних нелінійних систем рівнянь, отримали згідно даних рис. 2 профіль приведенних коефіцієнтів консолідації $\frac{b_2}{b_1}$ (рис. 3) від часу. Початкові дані, що використовувались при моделюванні подані у Microsoft Visual C++ — вікні (рис. 3). Тут P_e — безрозмірний початковий тиск на просторі extrae space; h , — товщина пласту мікропористого; R — половина товщини частинки; β_2 — фактор еластичності.

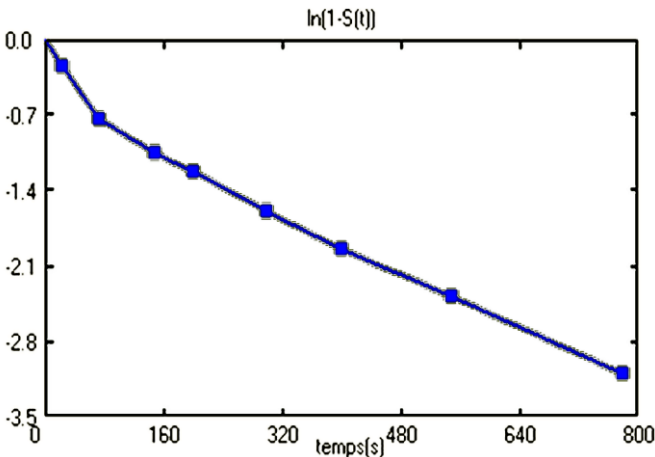


Рис. 1. Експериментальний розподіл інтегральної сухості згідно [7]

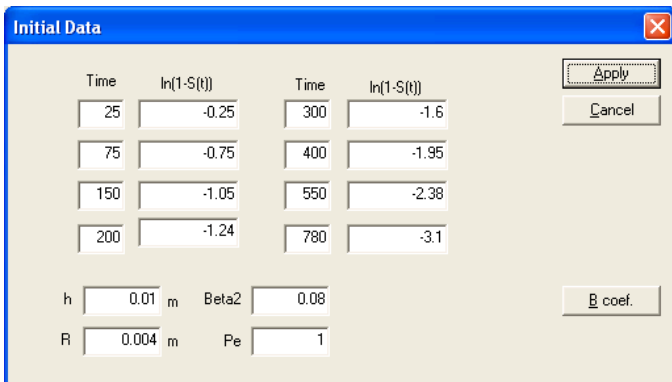


Рис. 2. Microsoft Visual-C++ — вікно даних для моделювання оберненої задачі

Пряма задача. Використовуючи отриманий профіль приведенних коефіцієнтів консолідації $\frac{b_2}{b_1}$ (рис. 3), обчислюємо модельні роз-

поділи тиску в макропорах extraparticle spaces $P_1(t, z)$ згідно формули (7) і розподіли тисків в мікропорах intraparticle spaces (частинках) $P_2(t, x, z)$, $\bar{P}_2(t, z)$, згідно (8)-(9), та інтегральної сухості частинок $S(t)$ і швидкості фільтраційного масопереносу $-\frac{1}{\mu r} \frac{\partial}{\partial z} P_1(t, z)$.

Числове моделювання розподілів тисків та інтегральної функції сухості подано в залежності від зміни часу і безрозмірних геометричних координат $X = x / R$; $Z = z / h$ та згідно даних рис. 4.

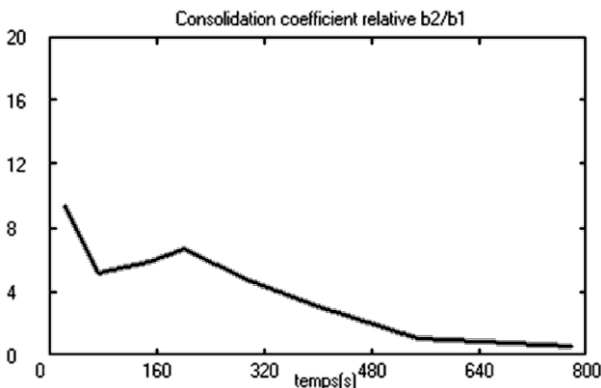
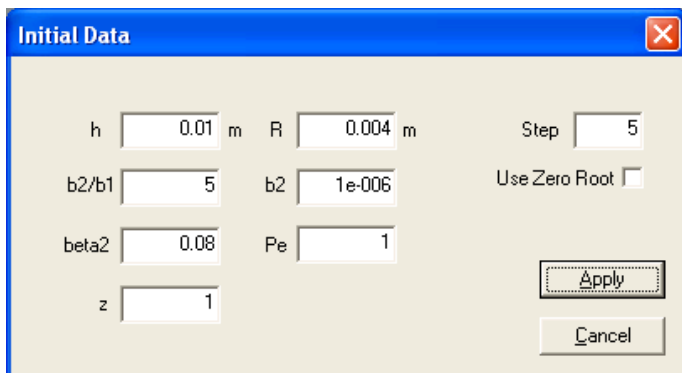


Рис. 3. Профіль ідентикованих приведених коефіцієнтів консолідації $\frac{b_2}{b_1}$



a)



b)

Рис. 4. Microsoft Visual-C++ — вікна даних для моделювання прямої задачі
a) вхідні дані, b) дані ідентифікації кривих розподілів тисків

На рис. 5. подана обчислена матриця коренів трансцендентного рівняння (10) в залежності від вхідних даних (рис. 5), які використовуються для в обчисленнях функціональних рядів розподілів (7)-(9). На рис. 6. подані профілі тисків в макропорах extraparticle spaces середовищі $P_1(t, z)$ від часу t , [s] і безрозмірної товщини пласту середовища Z . Як видно з рис.6, криві розподілів тиску $P_1(t, z)$ для різних положень безрозмірної товщини пласту середовища Z майже експоненціально спадають в часі до нуля. При великих значення часу (більше 800 s) тиск $P_1(t, z)$ для різних значень безрозмірної координати Z спадає до нуля. По мірі наближення координати Z до положення фільтрувальної мембрани $Z = 0$, криві тиску $P_1(t, z)$ спадають до нуля, що визначається крайовою умовою (2)).

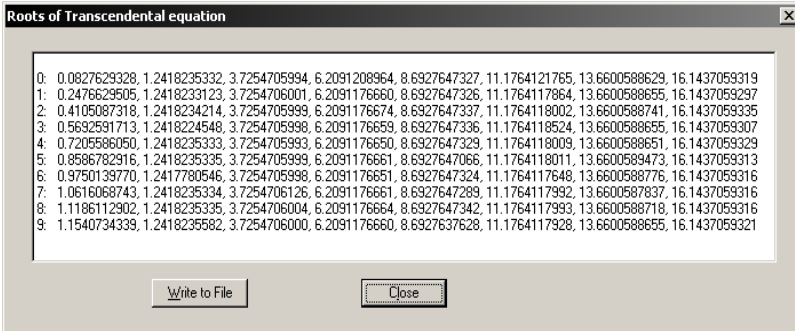


Рис. 5. Visual-C++ — вікно матриці коренів трансцендентного рівняння (10)

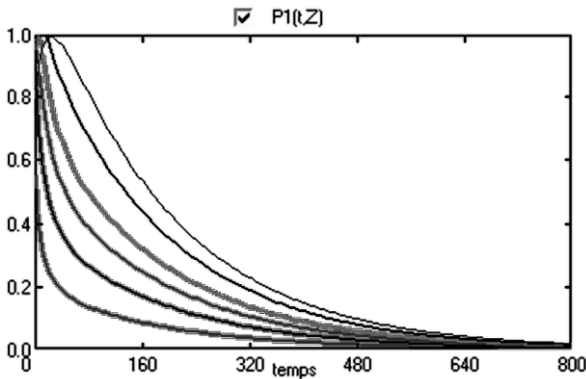
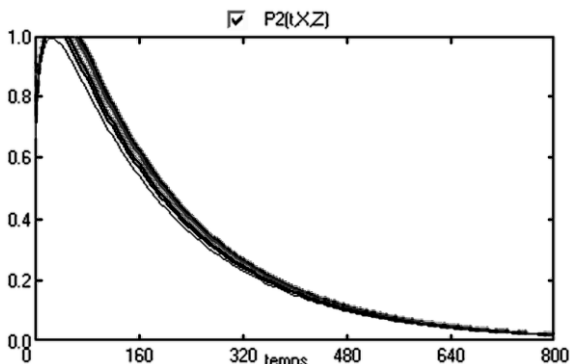
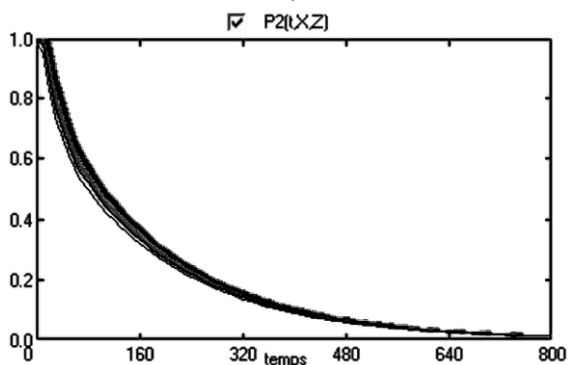


Рис. 6. Модельні профілі тисків в макропорах *extraparticle spaces* $P_1(t, Z)$ від часу $t, [s]$ для різних значень безрозмірної товщини пласти Z

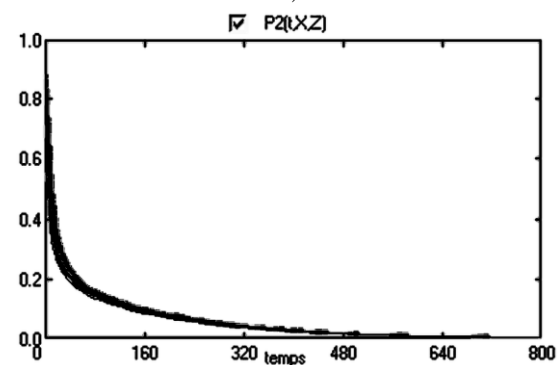
На рис. 7. подані модельні профілі в безрозмірного тиску в мікропорах *intraparticle spaces* (частинці) $P_2(t, X, Z)$ як функції від часу $t, [s]$ і безрозмірної напівтовщини частинки X для різних положень розташування частинки по товщині пласти Z середовища згідно формули (8). Тут $Z = 1$ відповідає положенню частинок на вершині пласти, $Z = 0.5$ — всередині, $Z = 0$ — на фільтрувальній мембрані. Як видно з рис. 8, профілі безрозмірного тиску в мікропорах *intraparticle spaces* $P_2(t, X, Z)$ мають найбільше значення в центрі частинки ($X = 0$) і спадають в напрямі поверхні краю частинки при $X = 1$ ($x = R$), рівний значенню тиску в макропорах *extraparticle spaces* $P_1(t, Z)$ згідно крайової умови (6), що забезпечує збіжність розподілу до крайової умови. Збіжність до крайової умови спостерігається візуально для усіх трьох розглянутих випадків і забезпечується теоретично в силу методики побудови аналітичного розв'язку вихідної моделі (1)-(6) [1].



a)



b)



c)

Рис. 7. Модельні профілі тисків в мікропорах *intraparticle spaces* $P_2(t, X, Z)$ від часу $t, [s]$ для різних положень розташування частинки по товщині пласти: a) $Z = 1$; b) $Z = 0.5$; c) $Z = 0$

На рис. 8 показаний модельний розподіл усередненого тиску в мікропорах *intraparticle spaces* $\bar{P}_2(t, Z)$ згідно (9) від часу t , [s] для різних значень безрозмірної товщини пласту середовища Z . Як видно з рис. 9, криві розподілів усередненого тиску в *intraparticle spaces* $\bar{P}_2(t, Z)$ для різних положень безрозмірної товщини пласту середовища Z псевдо експоненціально спадають в часі до нуля. При великих значеннях часу (більше 800 s) тиск $\bar{P}_2(t, Z)$ як і $P_1(t, z)$ для різних значень безрозмірної координати Z спадає до нуля. По мірі наближення координати Z до положення фільтрувальної мембрани $Z = 0$, криві тиску $\bar{P}_2(t, Z)$ спадають до нуля.

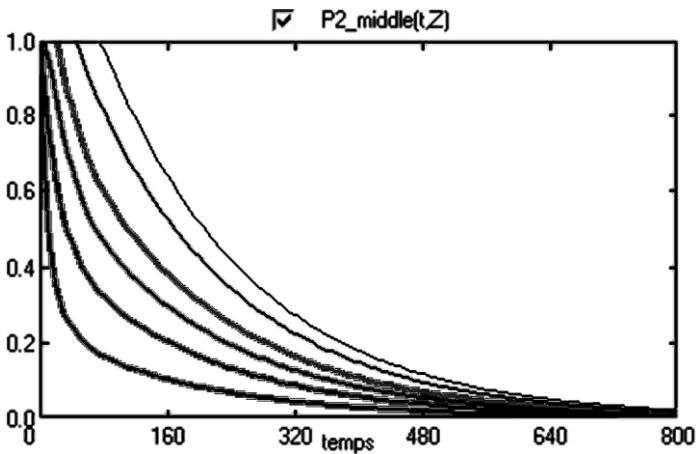
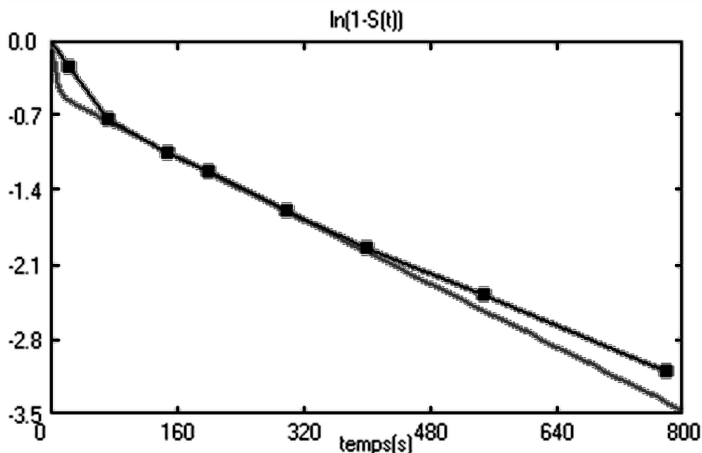


Рис. 8. Модельні профілі усередненого тиску в мікропорах *intraparticle spaces* $\bar{P}_2(t, Z)$ від часу t , [s] для різних значень безрозмірної товщини пласту Z

Рис. 9. ілюструє порівняльну картину кривих модельного (суцільна крива зеленого кольору) і експериментального профілів (синя крива з квадратиками) інтегральної сухості для *intraparticle spaces* $S_2(t)$ від часу t , [s]. Як видно з рис. 10, величини модельного і експериментального профілів інтегральної сухості для *intraparticle spaces* $S_2(t)$ добре узгоджуються між собою. Це забезпечено якісними результатами зворотної задачі, тобто отриманим профілем безрозмірних коефіцієнтів консолідації $\frac{b_2}{b_1}$. Величина відносної похибки для усього розподілу не перевищує 3-5%. Такий підхід забезпечує достатньо високий ступінь адекватності математичної моделі досліджуваного процесу.



*Рис. 9. Модельний і експериментальний профілі інтегральної сухості $S_2(t)$ для *intraparticle spaces* від часу t , [s]*

Висновки. Пропонована методологія математичного моделювання з використанням методів інтегральних перетворень Фур'є і Лапласа і побудований високошвидкісний точний аналітичний розв'язок в загальному вигляді дозволяють реалізовувати висопродуктивні обчислення з ефективним розпаралелюванням обчислювального процесу для багатоядерних комп'ютерів, здійснювати інтенсифікацію внутрішньої кінетики з врахуванням зворотніх впливів мікро- і макропотоків між просторами мікропор *intraparticle space* та макропор *extraparticle space* середовища мікропористих частинок. Це забезпечує виконання ефективних процедур перевірки моделі на адекватність та побудову просторово розподілених та змінних в часі розподілів параметрів досліджуваних процесів.

Список використаних джерел:

1. Barenblatt G. I., Entov V. M., Ryzhik V. Theory of fluid flows through natural rocks. Dordrecht: Kluwer, 1990.
2. Lanoiselle J.-L., Bouvier J.-M. Le Pressage des Oleagineux. Mise au Point. *Rev. Fr. Corps Gras*. 1994. Vol. 41 (3/4). P. 61-72.
3. Schwartzberg H.G.. Expression of fluid from biological solids. *Separation and Purification Methods*. 1997. Vol. 26 (1). P. 1-213.
4. Shirato M., Murase T. Iwata M., Nakatsuka S. The Terzaghi-Voigt combined model for constant pressure consolidation of filter cakes and homogeneous semi-solid materials. *Chemical Engineering Science*. 1986. Vol. 41. P. 3213-3218.
5. Lanoiselle J.-L., Vorobyov (Vorobiev) E., Bouvier J.-M. Modélisation du Pressage à Pression Constant. Cas de Produits à Structure Cellulaire, *Entropie*. 1994. Vol. 30 (186). P. 39-50.

6. Petryk M., Vorobiev E. Liquid Flowing from Porous particles During the Pressing of Biological Materials. *Computer & Chem. Eng.* 2007. Issue 31. P. 1336-1345.
7. Petryk M., Vorobiev E. Numerical and Analytical Modeling of Solid-Liquid Expression from Soft Plant Materials. *AIChE Journal*. Wiley. 2013. Vol. 59. Issue 12. P. 4762-4771.
8. Ленюк М. П., Петрик М. Р. Інтегральні перетворення Фур'є, Бесселя із спектральним параметром в задачах математичного моделювання масо-переносу в неоднорідних середовищах. Київ: Наукова думка, 2000. 372 с.
9. Лавреннтьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функции комплексного переменного. М.: Наука, 1973. 736 с.

HIGH PERFORMANCE CALCULATIONS FOR SIMULATION OF FILTRATION MASS TRANSFER IN MICROPOROUS PARTICLES FEEDBACK CONSIDERED

The problem of mass transfer during the filtration transfert of liquid containing biological particles is presented in one-dimensional formulation. The liquid flowing during pressing is conceptualised as a double-porosity flowing in two volumes: 1) in a porous medium of sliced particles and 2) in the extra particle network. Interporosity flowing occurs between these two porous volumes. The mathematical model consists the system of two differential equations of consolidation with feedback influences ant initial and boundary conditions. The high performance analytical solution of the problem is found by application of integral Laplace and Fourier transformations. The numerical analysis of problem for some values of process parameters is evaluated.

Filtration mass transfer processes are important technological operations in the separation of mixtures, extraction of liquids from various biological materials in many industries. Therefore, the study of the methodology of mathematical modeling using the methods of integral Fourier and Laplace transforms and the construction of high-speed and accurate analytical solution will implement high-performance computations with efficient parallelization of the computational process for multicore computers, which is very necessary in processing and chemistry. other industries. Thus, it is to ensure the implementation of effective procedures for testing the model for adequacy and construction of spatially distributed and time-varying distributions of the parameters of the studied processes.

Key words: *high- high-performance calculations, mathematical model of filtration mass transfer, integral Laplace transformation, finite integral Fourier transform, microporous particles, distribution of integral dryness, degree of adequacy of mathematical model, micropores, macropores, mathematical description of the problem. micropores with a high degree of capacity and low permeability in particles, macropores with a low level of capacity and high permeability.*

Отримано: 12.10.2020

УДК 517.928, 517.929

DOI: 10.32626/2308-5878.2020-21.127-137

І. Д. Скутар, асистент,

Я. Й. Бігун, д-р фіз.-мат. наук, професор

Чернівецький національний університет
імені Юрія Федьковича, м. Чернівці

ОБҐРУНТУВАННЯ МЕТОДУ УСЕРЕДНЕННЯ ДЛЯ НЕЛОКАЛЬНОЇ m -ЧАСТОТНОЇ ЗАДАЧІ ІЗ ЛІНІЙНО ПЕРЕТВОРЕНИМИ АРГУМЕНТАМИ

Досліджено систему диференціальних рівнянь із запізненням на скінченному проміжку із повільними та швидкими змінними. Запізнення в системі характеризується лінійно перетвореними аргументами у повільних і в швидких змінних. Для повільних і швидких змінних задано інтегральні умови. Характерною особливістю таких систем є поява резонансів у процесі еволюції. Умова резонансу в системі містить залежність від запізнень у швидких змінних.

Ефективним методом дослідження багаточастотних систем є метод усереднення, обґрунтування якого для систем без запізнення аргументу отримано в працях В.І. Арнольда, Є. О. Гребенікова, М. М. Хапаєва, А. М. Самойленка, Р. І. Петришина. У даній роботі використано методу, запропоновану А. М. Самойленком, яка ґрунтується на оцінці осциляційних інтегралів. У даній роботі процедура усереднення за швидкими змінними здійснена як у системі рівнянь, так і в інтегральних умовах. В усередненій задачі змінні відокремлені й задача для повільних змінних розв'язується незалежно від швидких змінних. Знаходження швидких змінних зводиться до задачі інтегрування.

Доведено існування єдиного розвитку задачі в класі неперервно-диференційованих функцій. Отримано оцінку похибки методу усереднення, яка явно залежить від малого параметра та кількості швидких змінних і лінійно перетворених аргументів у них. Також знайдено оцінку величини малого параметра. Умова проходження резонансних зон зводиться до перевірки відмінності від нуля визначника Вронського, побудованого системою частот із врахуванням кількості лінійно перетворених аргументів.

Побудовано приклад одночастотної системи з інтегральними умовами, на якому проілюстровано отриманий результат, одержано оцінки похибки та величини малого параметра.

Ключові слова: *лінійно перетворений аргумент, метод усереднення, малий параметр, резонанс, інтегральна умова, оцінка похибки.*

Вступ. Багаточастотні системи диференціальних рівнянь досліджувалися у працях В. І. Арнольда [1], Є. О. Гребенікова [2], М. М. Хапаєва [3], А. І. Нейштадта [4] та ін. Значний внесок у дослідження таких

систем належить київській школі з нелінійних коливань і відображено в працях М.М. Боголюбова і Ю. О. Митропольського [5], А. М. Самойленка [6, 7]. Зокрема, новий підхід у дослідженні багаточастотних систем, які в процесі еволюції проходять через резонанс, висвітлено в працях А. М. Самойленка і Р. І. Петришина [7, 8].

Системи із m частотами і запізненням, яке задається лінійно перетвореними аргументами на $[0, L]$ у резонансному випадку з інтегральними умовами досліджені у працях [9, 10]. Такого типу рівняння застосовуються у багатьох прикладних задачах, наприклад, при моделюванні зміни величини струму під час проходження електровозом контактних опор [11].

Значна кількість праць присвячена задачам із нелокальними умовами. У праці [12] досліджувалися властивості розв'язку скалярного диференціального рівняння другого порядку із сталим запізненням й інтегральною умовою.

$$u(1) = \int_0^1 u(t) d\beta(t).$$

Задачі з іншими інтегральними умовами вивчалися в [13, 14] та ін.

Постановка задачі. У даній роботі розглянуто m -частотну систему диференціальних рівнянь із лінійно перетвореними аргументами вигляду

$$\frac{da}{d\tau} = X(\tau, a_\Lambda, \varphi_\Theta), \quad (1)$$

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{\omega(\tau)}{\varepsilon} + Y(\tau, a_\Lambda, \varphi_\Theta), \quad (2)$$

де $\tau \in [0, L]$, малий параметр $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, $\varepsilon_0 \ll 1$, $a_{\lambda_i}(\tau) = a(\lambda_i \tau)$, $\Lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_p)$, $0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_p \leq 1$, $\varphi_{\theta_j}(\tau) = \varphi(\theta_j \tau)$, $\Theta = (\theta_1, \dots, \theta_q)$, $0 < \theta_1 < \dots < \theta_q \leq 1$. Вектор-функції X , Y і ω достатньо гладкі за всіма аргументами при $\tau \in [0, L]$, $a \in D$, D — обмежена замкнена опукла область в \mathbb{R}^n , $\varphi \in \mathbb{R}^m$, $m \geq 1$, 2π -періодичні за змінними φ_{θ_j} .

Для системи рівнянь (1), (2) задано інтегральні умови:

$$a(0) = f\left(\int_0^L A(\tau) a(\tau) d\tau\right), \quad (3)$$

$$\varphi(0) = \int_0^L h(\tau, a_\Lambda, \varphi_\Theta) d\tau, \quad (4)$$

де вектор функція h того ж класу, що й X і Y , $A(\tau)$ — матриця порядку n .

Усереднена за швидкими змінними задача набуває вигляду

$$\frac{d\bar{a}}{d\tau} = X(\tau, \bar{a}_\Lambda), \quad (5)$$

$$\frac{d\bar{\varphi}}{d\tau} = \frac{\omega(\tau)}{\varepsilon} + Y(\tau, \bar{a}_\Lambda), \quad (6)$$

$$\bar{a}(0) = f\left(\int_0^L A(\tau)\bar{a}(\tau)d\tau\right), \quad (7)$$

$$\bar{\varphi}(0) = \int_0^L h_0(\tau, \bar{a}_\Lambda)d\tau. \quad (8)$$

Отримана після усереднення задача значно простіша, ніж точна (1)-(4), оскільки окремо розв'язується задача (5), (7). Якщо розв'язок $\bar{a} := \bar{a}(\tau; \bar{y})$, $\bar{a}(0; \bar{y}) = \bar{y}$, $\tau \in [0, L]$ знайдено, то розв'язок $\bar{\varphi} := \bar{\varphi}(\tau; \bar{y}, \bar{\psi}, \varepsilon)$, $\bar{\varphi}(0; \bar{y}, \bar{\psi}, \varepsilon) = \bar{\psi}$, знаходиться шляхом інтегрування. Задача полягає у знаходженні достатніх умов існування та єдиності розв'язку задачі (1)-(4) та отримання оцінки відхилення розв'язків задач точної й усередненої задач, яка явно залежить від малого параметра ε .

Позначення. Введемо такі позначення:

$$\tilde{a}(\tau) := \bar{a}(\tau; \bar{y} + \mu), \quad z(a) := \int_0^L A(\tau)a(\tau)d\tau;$$

$V(\tau)$ — визначник Вронського порядку mq , побудований за системою функцій $\{\omega(\theta_1\tau), \dots, \omega(\theta_q\tau)\}$.

Відомо [10], що

$$\|\tilde{a}(\tau) - \bar{a}(\tau)\| \leq c_1 \|\mu\| \leq \rho/2, \quad (9)$$

якщо

$$\|\mu\| \leq (2c_1)^{-1} \rho, \quad c_1 = L \exp(\rho\sigma_1). \quad (10)$$

Також виконується оцінка

$$\begin{aligned} \|\kappa(\tau; y, \psi, \varepsilon) - \bar{\kappa}(\tau; y, \psi, \varepsilon)\| &:= \|a(\tau; y, \psi, \varepsilon) - \bar{a}(\tau; y)\| + \\ &+ \|\varphi(\tau; y, \psi, \varepsilon) - \bar{\varphi}(\tau; y, \psi, \varepsilon)\| \leq c_2 \varepsilon^\alpha, \quad \tau \in [0, L], \end{aligned} \quad (11)$$

де $\alpha = (mq)^{-1}$, $\varepsilon \leq \varepsilon_1 \leq \varepsilon_0$, $c_2 > 0$ і не залежить від ε . Така ж оцінка правильна і для похідних за початковими значеннями y і ψ [10].

Нехай I — одинична матриця порядку n ,

$$P(\bar{y}) := I - \frac{\partial f(\bar{z})}{\partial z} \int_0^L A(\tau) \frac{\partial \bar{a}(\tau, \bar{y})}{\partial \bar{y}} d\tau,$$

$$\gamma_k(\tau) := \sum_{\nu=1}^q (k_\nu, \omega(\theta_\nu \tau)) \theta_\nu.$$

Резонанс в системі (1), (2) у точці τ задається умовою

$$\gamma_k(\tau) = 0, k \neq 0.$$

Центральною умовою в обґрунтуванні методу усереднення є умова «незастрягання» системи в малому околі резонансів і зводиться до накладання деяких умов на вектор частот.

Існування єдиного розв'язку та обґрунтування методу усереднення.

Терема. Нехай виконуються такі умови:

- 1) $(X, Y, g) \in C_{\tau, a_\lambda, \varphi_0}^{2, 2, mq+2}(G, \sigma_1), G = [0, L] \times D^p \times R^{mq}$;
- 2) $\omega \in C^{mq-1}[0, L]$;
- 3) визначник Вронського $V(\tau)$ відмінний від нуля на $[0, L]$;
- 4) існує єдиний розв'язок усередненої задачі (5)-(8), компонента $\bar{a}(\tau; \bar{y})$ якого належить області D із деяким ρ -околом;
- 5) матриця $P(\bar{y})$ невинроджена і $\|P^{-1}(\bar{y})\| \leq \sigma_2$;
- 6) $A_{ij} \in C[0, L], f \in C^2(G_1), \left\| \frac{\partial f}{\partial z} \right\| \leq \sigma_3; \left\| \frac{\partial f}{\partial z_i \partial z_j} \right\| \leq \sigma_4, i, j = \overline{1, n}$.

Тоді для кожного досить малого $\varepsilon^* \in (0, \varepsilon_0]$, існує єдиний розв'язок задачі (1)-(4) і виконується оцінка

$$\|\kappa(\tau; y, \psi, \varepsilon) - \bar{\kappa}(\tau; \bar{y}, \bar{\psi}, \varepsilon)\| \leq c_{12} \varepsilon^\alpha, \forall \tau \in [0, L].$$

Доведення. Нехай $\varepsilon \leq \varepsilon_2 = \min(\varepsilon_1, (\rho / 2c_2)^{1/\alpha})$. Тоді в класі $C^1[0, L]$ існує єдиний розв'язок задачі (1)-(4) із початковими умовами $(y, \psi) := (\bar{y} + \mu, \bar{\psi} + \xi)$, визначений при $\tau \in [0, L]$ і справджується оцінка [9]

$$\|\kappa(\tau; \bar{y} + \mu, \bar{\psi} + \xi, \varepsilon) - \bar{\kappa}(\tau; \bar{y} + \mu, \bar{\psi} + \xi, \varepsilon)\| \leq c_2 \varepsilon^\alpha / 2. \quad (12)$$

Покажемо, що цей розв'язок задовольняє для $\varepsilon \leq \varepsilon_3$ інтегральну умову (3).

Із умов (1), (5) теореми маємо

$$\mu = f(z) - f(\bar{z}) = \frac{\partial f(\bar{z})}{\partial z}(z - \bar{z}) + \frac{\partial f(\bar{z})}{\partial \bar{z}}(\bar{z} - z) + R_1(\mu, \xi, \varepsilon),$$

$$\bar{z} - z = \int_0^L A(\tau)(\tilde{a} - \bar{a}) d\tau = \int_0^L A(\tau) \frac{\partial \bar{a}}{\partial y}(\tau; \bar{y}) \mu d\tau + R_2(\mu),$$

де

$$R_1(\mu, \xi, \varepsilon) = f(z) - f(\bar{z}) - \frac{\partial f(\bar{z})}{\partial z}(z - \bar{z}),$$

$$R_2(\mu) = \int_0^L A(\tau) \left[\tilde{a} - \bar{a} - \frac{\partial \bar{a}}{\partial y}(\tau; \bar{y}) \mu \right] d\tau.$$

Оскільки матриця $P(\bar{y})$ невироджена, то

$$\mu = \Phi_1(\mu, \xi, \varepsilon) := P^{-1}(\bar{y}) \left[\frac{\partial f(\bar{z})}{\partial z}(z - \bar{z} + R_2(\mu)) + R_1(\mu, \xi, \varepsilon) \right].$$

На підставі оцінок для розкладів вектор-функцій із монографії [2], одержимо

$$\|R_1\| \leq \frac{\sigma_4 n^2}{2} \|z - \bar{z}\|^2 \leq \frac{\sigma_4 \sigma_5 n^2}{2} (\|a - \tilde{a}\| + \|\tilde{a} - \bar{a}\|)^2.$$

Тоді на підставі (9) і (12) одержимо

$$\|R_1(\mu, \xi, \varepsilon)\| \leq c_3 \left(c_2^2 \varepsilon^{2\alpha} + 4c_1 c_2 \varepsilon^\alpha \|\mu\| + 4c_1 \|\mu\|^2 \right), \quad c_3 = \sigma_4 \sigma_5 n^2 / 8.$$

Аналогічно одержимо

$$\|R_2(\mu)\| \leq \sigma_3 c_4 \|\mu\|^2, \quad c_4 = \text{const} > 0.$$

Нехай $c_5 = c_2 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_5$, $\mu \leq c_5 \varepsilon^\alpha$, $\varepsilon \leq \varepsilon_3 = \min(\varepsilon_2, \bar{\varepsilon}_3)$,

$$\bar{\varepsilon}_3 = \min \left(\rho(2c_1 c_5)^{-1}, c_5 \left(4c_2^2 c_3 \sigma_2 \right)^{-1}, (32c_1 c_2 c_3)^{-1} \right).$$

Тоді

$$\|\Phi_1(\mu, \xi, \varepsilon)\| \leq 0.5 \sigma_2 [c_2 \sigma_3 \sigma_5 \varepsilon^\alpha + 2c_2^2 c_3 \varepsilon^{2\alpha} + 8c_1 c_2 c_3 \varepsilon^\alpha \|\mu\| + 2(c_4 \sigma_3 \sigma_4 + 4c_1^2 c_3) \|\mu\|^2] \leq c_5 \varepsilon^\alpha.$$

Отже, $\Phi_1 : S_1 \rightarrow S_1$, де $S_1 = \{\|\mu\| : \|\mu\| \leq c_5 \varepsilon^\alpha\}$.

Покажемо, що відображення Φ_1 — стискаюче. Маємо,

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial \mu} = P^{-1}(\bar{y}) \left[\frac{\partial f(\bar{z})}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \mu}(z - \bar{z}) + \frac{\partial f(\bar{z})}{\partial z} \frac{\partial R_2(\mu)}{\partial \mu} + \frac{\partial R_1}{\partial \mu} \right].$$

$$\text{Оскільки } \left\| \frac{\partial R_2}{\partial \mu} \right\| = O(\|\mu\|), \left\| \frac{\partial R_1}{\partial \mu} \right\| = O(\|\mu\| + \varepsilon^\alpha), \text{ то}$$

$$\left\| \frac{\partial \Phi_1}{\partial \mu} \right\| \leq \sigma_2 \left[c_2 \sigma_3 \varepsilon^\alpha / 2 + c_1 \sigma_3 \|\mu\| + c_7 (\|\mu\| + \varepsilon^\alpha) \right] \leq \frac{1}{2},$$

якщо $\varepsilon \leq \varepsilon_4 = \min \left(\varepsilon_3, \left[\sigma_2 (c_2 \sigma_3 + 2c_5 (c_1 \sigma_3 + c_7 + 1)) \right]^{-mq} \right)$.

Отже, для кожного ξ і ε існує єдина нерухома точка μ відображення Φ_1 , таке що $\|\mu\| \leq c_5 \varepsilon^\alpha$.

Розглянемо інтегральні умови (4) і (8). Маємо

$$\begin{aligned} \xi &= \Phi_2(\xi(\mu), \varepsilon) := \int_0^L \left[g(\tau, a_\Lambda(\tau), \varphi_\Theta(\tau)) - g_0(\tau, \bar{a}_\Lambda(\tau)) \right] d\tau = \\ &= \sum_{\|k\| > 0}^L \int g_k(\tau, \bar{a}_\Lambda(\tau)) \exp \left[i \sum_{\nu=1}^q (\kappa_\nu, \varphi_{\theta_\nu}) \right] d\tau + \\ &\quad + \int_0^L \left[g_0(\tau, a_\Lambda(\tau)) - g_0(\tau, \bar{a}_\Lambda(\tau)) \right] d\tau + \\ &\quad + \int_0^L \left[g_0(\tau, \tilde{a}_\Lambda(\tau)) - g_0(\tau, \bar{a}_\Lambda(\tau)) \right] d\tau = R_3 + R_4 + R_5. \end{aligned}$$

Із гладкості вектор-функції g за змінними $\tau, a_\nu, \nu = \overline{1, p}$, до другого порядку і за змінними $\varphi_\nu, \nu = \overline{1, q}$ до порядку $mq+2$ для осциляційних інтегралів

$$I_k(\tau; y, \psi, \varepsilon) = \int_0^\tau g_k(s, a_\Lambda(s; y, \psi, \varepsilon)) \exp \left[\frac{i}{\varepsilon} \int_0^s \gamma_\theta(s_1) ds_1 \right] ds$$

для $\varepsilon \leq \varepsilon_5$ правильні оцінки [9]

$$\begin{aligned} \|I_k(\tau, y, \psi, \varepsilon)\| &\leq \sigma_6 \varepsilon^\alpha \left[\left(1 + \frac{1}{\|k\|_\theta} \right) \sup_{\tau, \varepsilon} \|g_k(s, a_\Lambda(s, y, \psi, \varepsilon))\| + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\|k\|_\theta} \sup_{\tau, \varepsilon} \left\| \frac{\partial g_k(s, a_\Lambda(s, y, \psi, \varepsilon))}{\partial s} \right\| \right], \end{aligned} \quad (13)$$

де $\|k\|_\theta := \sum_{\nu=1}^q \theta_\nu \|k_\nu\|$.

На підставі оцінки (13) й аналогічної оцінки для похідної $I_k(\tau, y, \psi, \varepsilon)$ за змінними ψ одержимо

$$\|R_3(\mu, \xi, \varepsilon)\| \leq c_8 \varepsilon^\alpha, \quad \varepsilon \leq \varepsilon_5. \quad (14)$$

Застосувавши оцінку (12), отримаємо

$$\|R_2(\mu, \xi, \varepsilon)\| \leq \sigma_1 \sum_{v=1}^p \int_0^L \|A(\tau)\| \|a_{\lambda_j}(\tau) - \tilde{a}_{\lambda_j}(\tau)\| d\tau \leq c_2 \sigma_1 \sigma_5 \varepsilon^\alpha / 2. \quad (15)$$

На підставі оцінки (9) маємо

$$\|R_3\| \leq c_1 \sigma_1 \sigma_5 \|\mu\| \leq c_1 c_5 \sigma_1 \sigma_5 \varepsilon^\alpha, \quad (16)$$

якщо $\varepsilon \leq (2c_2 \sigma_3)^{-mq} = \varepsilon_6$.

$$\text{Отже, } \|\Phi_2(\xi(\mu), \varepsilon)\| \leq \left(c_8 + \frac{\sigma_1 \sigma_5 (c_2 + 2c_1 c_5)}{2} \right) \varepsilon^\alpha =: c_9 \varepsilon^\alpha.$$

Для $\xi \in \mathbb{R}^m$ такого, що $\xi \leq c_9 \varepsilon^\alpha$ маємо

$$\Phi_2 : S_2 \rightarrow S_2, \quad S_2 = \left\{ \xi : \|\xi\| \leq c_9 \varepsilon^\alpha \right\}.$$

Розглянемо матричну функцію

$$\frac{\partial \Phi_2(\xi(\mu), \varepsilon)}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial \xi} R_3(\mu, \xi, \varepsilon) + \frac{\partial}{\partial \xi} R_2(\mu, \xi, \varepsilon).$$

Із оцінки похідної по ξ осциляційного інтеграла й відхилення розв'язків $a(\tau, \bar{y} + \mu, \bar{\psi} + \xi, \varepsilon) - \bar{a}(\tau, \bar{y} + \mu, \bar{\psi} + \xi, \varepsilon)$ одержимо

$$\left\| \frac{\partial \Phi_2(\xi(\mu), \varepsilon)}{\partial \xi} \right\| \leq c_{10} \varepsilon^\alpha + c_1 \sigma_1 \sigma_5 \varepsilon^\alpha =: c_{11} \varepsilon^\alpha.$$

Отже, $\forall \varepsilon \leq \varepsilon^* = \min(\varepsilon_4, \varepsilon_5, \varepsilon_6, (2c_{11})^{-mq})$ на підставі теореми про стискаючі відображення [15] існує єдине значення (μ, ξ) таке, що $\|\mu\| \leq c_5 \varepsilon^\alpha, \|\xi\| \leq c_9 \varepsilon^\alpha$ для якого задовольняються умови (2) і (3), тобто існує єдиний розв'язок задачі (1)-(4).

Відповідна оцінка для похибки методу усереднення впливає із такої нерівності

$$\begin{aligned} \|\kappa(\tau, y, \psi, \varepsilon) - \bar{\kappa}(\tau, \bar{y}, \bar{\psi}, \varepsilon)\| &\leq \|\kappa(\tau, y, \psi, \varepsilon) - \tilde{\kappa}(\tau, \bar{y}, \bar{\psi}, \varepsilon)\| + \\ &+ \|\tilde{\kappa}(\tau, y, \psi, \varepsilon) - \bar{\kappa}(\tau, \bar{y}, \bar{\psi}, \varepsilon)\| \leq \frac{1}{2} c_2 \varepsilon^\alpha + c_1 \varepsilon^\alpha =: c_{12} \varepsilon^\alpha. \end{aligned}$$

Теорему доведено.

Приклад. Розглянемо одночастотну систему з одним лінійно перетвореним аргументом

$$\frac{da}{d\tau} = b_1 + b_2 \cos(k\varphi + l\varphi_\theta), \quad \frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{1}{\varepsilon} (d_1 + d_2 \tau).$$

де $0 < k < -l, \theta = -k/l$, b_ν і d_ν — додатні числа, $\nu = 1, 2$.

Інтегральні умови мають вигляд

$$a(0) = A \int_0^L a(\tau) d\tau,$$

$$\varphi(0) = \beta \int_0^L \cos(k\varphi + l\varphi_\theta) d\tau,$$

де сталі $A > 0$, $\beta > 0$, $1 - \alpha L \neq 0$.

Резонанс досягається при $\tau = 0$, оскільки $\gamma_{kl}(\tau) = d_2(k + \theta^2 l)\tau$.

Визначник Вронського $V(\tau) = d_1 d_2 (1 - \theta) \neq 0$, тобто умова 3 теореми виконується, як і 1, 2 та 4.

Розв'язки точної задачі і відповідної їй усередненої задачі

$$\frac{d\bar{a}}{d\tau} = b_1, \quad \bar{a}(0) = A \int_0^L \bar{a}(\tau) d\tau,$$

$$\frac{d\bar{\varphi}}{d\tau} = \frac{1}{\varepsilon}(d_1 + d_2\tau), \quad \bar{\varphi}(0) = 0,$$

набувають вигляду

$$a(\tau, \mu, \xi, \varepsilon) = \bar{y} + \mu + b_1\tau + b_2 \int_0^T \cos\left(\frac{c\tau^2}{\varepsilon} + (k+l)\xi\right) d\tau,$$

$$\varphi(\tau, \xi, \varepsilon) = \xi + \frac{d_1 + d_2\tau}{\varepsilon} + \int_0^T \cos\left(\frac{c\tau^2}{\varepsilon} + (k+l)\xi\right) d\tau,$$

$$\bar{a}(\tau) = \bar{y} + b_1\tau, \quad \bar{\varphi}(\tau, \varepsilon) = \frac{d_1 + d_2\tau}{\varepsilon},$$

де $y = \frac{Ab_1L^2}{2(1-AL)}$, $c = d_2(k + l\theta^2)/2$.

Початкове значення знаходиться із рівняння

$$\xi = \beta \int_0^1 \cos\left(\frac{c\tau^2}{\varepsilon} + (k+l)\xi\right) d\tau =: \Phi_2(\xi).$$

Якщо

$$\varepsilon \leq \varepsilon_0 = c / \left(8\pi\beta^2(k+l)^2\right),$$

то з асимптотики інтеграла Френеля [16] випливає, що виконується умова стисту відображення Φ_2 , тобто існує єдина нерухома точка з

відображення $\Phi_2 : S_2 \rightarrow S_2$. Тут $S_2 = \{\xi : |\xi| \leq c_1\sqrt{\varepsilon}, c_1 = \beta\sqrt{\pi}/\sqrt{2c}\}$.

Значення набуває вигляду

$$\mu := \Phi_1(\xi) = \frac{A}{|1-AL|} \int_0^1 \cos\left(\frac{c\tau^2}{\varepsilon} + (k+l)\xi\right) d\tau.$$

З асимптотики інтеграла Френеля випливає, що при $\tau = 0$

$$|a(\tau, \mu, \xi, \varepsilon) - \bar{a}(\tau)| \leq c_2 \sqrt{\varepsilon},$$

$$|\varphi(\tau, \xi, \varepsilon) - \bar{\varphi}(\tau, \varepsilon)| \leq c_1 \sqrt{\varepsilon},$$

$$\text{де } c_2 = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2|c|}} \left(\frac{A}{|1-AL|} + |b_2| \right).$$

Зауважимо, що для одночастотної системи без запізнення оцінка похибки має порядок ε , при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Висновки. Для спрощення m -частотної системи диференціальних рівнянь із лінійно перетвореними аргументами й нелінійними інтегральними умовами застосовано процедуру усереднення за швидкими змінними. Доведено існування єдиного розв'язку точної задачі. Одержано оцінку похибки методу усереднення, яка явно залежить від малого параметра та кількості швидких змінних і лінійно перетворених аргументів у них. Побудовано приклад одночастотної системи з інтегральними умовами, на якому проілюстровано отриманий результат.

Список використаних джерел:

1. Арнольд В. И., Козлов В. В., Нейштадт А. И. Математические аспекты классической и небесной механики. Москва: УРСС, 2002. 416 с.
2. Гребеников Е. А., Рябов Ю. А. Новые качественные методы в небесной механике. Москва: Наука, 1971. 444 с.
3. Хапаев М. М. Усреднение в теории устойчивости. Москва: Наука, 1986.
4. Neishtadt A. I. Averaging, passage through resonances and capture into resonance in two-frequency system. *Russian Mathematical Surveys*. 2014, Vol. 69 (5). P. 771-843.
5. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. Москва: Наука, 1974. 503 с.
6. Самойленко А. М. К вопросу обоснования метода усреднения для многочастотных колебательных систем. *Дифференц. уравнения*. 1987. Вип. 23 (2). С. 267-278.
7. Самойленко А. М., Петришин Р. И. Математичні аспекти теорії нелінійних коливань. Київ: Наукова думка, 2004. 475 с.
8. Самойленко А. М., Петришин Р. И. Метод усреднения в некоторых краевых задачах. *Дифференц. уравнения*. 1989. Вип. 25 (6). С. 956-964.
9. Бігун Я. Й. Існування розв'язку та усереднення багаточастотних крайових задач для багаточастотних систем із лінійно перетвореним аргументом. *Нелінійні коливання*. 2008. Вип. 11 (4). С. 462-471.

10. Бігун Я. Й., Краснокутська І. В., Петришин Р. І. Усреднення в багаточастотних системах із лінійно перетвореними аргументами і багаточисловими та інтегральними умовами. *Буковинський математичний журнал*. 2016. Вип. 4 (3-4). С. 30-35.
11. Гребенщиков Б. Г., Ложников А. Б. Стабилизация системы, содержащей постоянное и линейное запаздывание. *Дифференц. уравнения*. 2004. Вип. 40 (1-2). С. 1587-1595.
12. Dingyong Rai, Yuantong Xu. Positive solution and eigenvalue intervals of nonlocal boundary value problem with delays. *Math. Analysis and Appl.* 2007. Vol. 334. P. 1152-1166.
13. Henderson J., Rodica L. Boundary Value Problems for Systems of Differential, Difference and Fractional Equation. Kluwer, Dordrecht-Boston-London, 2016.
14. Jankowski T. First-order differential equations with nonlocal boundary conditions. *Dynamic Systems and Applications*. 2015. Vol. 24. P. 195-210.
15. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. Москва: Наука, 1981. 544 с.
16. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Москва: Наука, 1974. Т. 2. 296 с.

SUBSTANTIATION OF THE AVERAGING METHOD FOR A NONLOCAL m -FREQUENCY PROBLEM WITH LINEARLY TRANSFORMED ARGUMENTS

The system of differential equations with delay on a finite interval with slow and fast variables is investigated. The delay in the system is characterized by linearly transformed arguments in slow and fast variables. Integral conditions are given for slow and fast variables. A characteristic feature of such systems is the appearance of resonances in the process of evolution. The condition for the resonance in the system contains a dependence on the delays in fast variables.

An effective method for the research of multi-frequency systems is the method of averaging, the substantiation of which for systems without delay of the argument is obtained in the works of V. I. Arnold, E. O. Grebenikov, M. M. Khapaiev, A. M. Samoilenko, R. I. Petryshyn. This paper uses the method proposed by A. M. Samoilenko which is based on the estimation of oscillating integrals. In this paper, the procedure of averaging over fast variables is carried out both in the system of equations and in integral conditions. In the average problem, the variables are separated and the problem for slow variables is solved independently of the fast variables. Finding fast variables is reduced to the problem of integration.

The existence of a unique solution for the problem in the class of continuously differentiated functions is proved. The accuracy estimation of the averaging method is obtained, which clearly depends on the small parameter and the number of fast variables and linearly transformed arguments in them. An estimate of the value of the small parameter was also found. The condition of passing resonant zones is reduced to checking the difference from zero of the Vronsky determinant, constructed by the frequency system taking into account the number of linearly transformed arguments.

An example of a single-frequency system with integral conditions is constructed, on which the obtained result is illustrated; accuracy estimation and values of the small parameter are obtained.

Key words: *linearly transformed argument, averaging method, small parameter, resonance, integral condition, estimation of accuracy.*

Отримано: 8.10.2020

УДК 517.9

DOI: 10.32626/2308-5878.2020-21.137-144

Ю. В. Теплінський, д-р фіз.-мат. наук, професор

Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

НАБЛИЖЕНИЙ МЕТОД ПОБУДОВИ МАЙЖЕ-ПЕРІОДИЧНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ЛІНІЙНИХ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ, ВИЗНАЧЕНИХ НА НЕСКІНЧЕННОВИМІРНИХ ТОРАХ

Відомо, що велика кількість прикладних задач у різних розділах математики, фізики, техніки потребує досліджень проблем існування коливних розв'язків диференціальних систем, що є їх математичними моделями. У наш час коливними рухами динамічних систем за В. В. Немицьким [1] називають їх рекурентні рухи. Як відомо з теорем Біркгофа, траєкторії таких рухів містять мінімальні компактні множини динамічних систем. До класу рекурентних рухів зокрема належать квазіперіодичні та майже-періодичні рухи. Широко відомі фундаментальні теореми Америкю і Фавара [2], що стосуються існування майже-періодичних розв'язків нелінійних та лінійних систем. Становить також інтерес дослідження поведінки динамічної системи в околі рекурентної траєкторії. Пізніше стало зрозумілим, що питання існування таких траєкторій тісно пов'язане з існуванням у таких систем інваріантних торів, для побудови яких зручно застосовувати метод функції Гріна-Самойленка [1, 3, 4]. Туг розглядається лінійна система диференціальних рівнянь, яка визначена на нескінченновимірному торі (випадок зліченного частотного базису щодо кутової змінної), причому відносно нормальної змінної ця система може бути як скінченною, так і зліченною. Задача полягає у відшуканні достатніх умов, при яких задана система рівнянь має сім'ю майже-періодичних у сенсі Бора розв'язків, кожен з яких можна наблизити із наперед заданою точністю квазіперіодичним у сенсі Боля розв'язком відповідної укороченої за кутовою змінною системи рівнянь, що визначена на скінченновимірному торі.

Ключові слова: *інваріантний тор, функція Гріна-Самойленка, квазіперіодичні та майже-періодичні функції.*

Вступ. Розглянемо лінійну систему диференціальних рівнянь

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega, \quad \frac{dx}{dt} = A(\varphi)x + f(\varphi), \quad (1)$$

де вектор частот $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots) \in \mathbf{m}$, $\omega_i > 0$ при всіх натуральних i , $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots)$, $A(\varphi)$ — матриця розмірності $n \times n$ з дійсними елементами, \mathbf{m} — простір обмежених послідовностей дійсних чисел, $\|\omega\| = \sup_i \{\omega_i\} = \omega_0 < \infty$, вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n$, $f(\varphi) = (f_1(\varphi), f_2(\varphi), \dots, f_n(\varphi))$ — вектор-функція з дійсними координатами, причому матриця $A(\varphi)$ та функція $f(\varphi)$ 2π -періодичні відносно φ_i ($i = 1, 2, 3, \dots$), що дозволяє вважати їх множиною визначення нескінченновимірний тор T_∞ . Підставивши розв'язок першого рівняння системи (1) $\varphi = \omega t + \phi$, $\varphi(0) = \phi \in T_\infty$ у друге її рівняння, одержимо систему

$$\frac{dx}{dt} = A(\omega t + \phi)x + f(\omega t + \phi), \quad (2)$$

залежну від $\phi \in T_\infty$ як від параметра, $\phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3, \dots)$.

Одночасно будемо розглядати укорочену відносно φ до m -го порядку визначену на m — вимірному торі T_m систему рівнянь виду

$$\frac{d\varphi^{(m)}}{dt} = \omega^{(m)}, \quad \frac{dx^{(m)}}{dt} = A_0(\varphi^{(m)})x^{(m)} + f_0(\varphi^{(m)}). \quad (3)$$

Аналогічно від системи (3) перейдемо до системи рівнянь

$$\frac{dx^{(m)}}{dt} = A_0(\omega^{(m)}t + \phi^{(m)})x^{(m)} + f_0(\omega^{(m)}t + \phi^{(m)}), \quad (4)$$

де

$$\varphi^{(m)} = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m), \quad \omega^{(m)} = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m),$$

$$\phi^{(m)} = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_m),$$

$$A_0(\varphi^{(m)}) = A(\varphi^{(m)}, 0, 0, \dots), \quad f_0(\varphi^{(m)}) = f(\varphi^{(m)}, 0, 0, \dots),$$

причому у позначенні $x^{(m)}$ тут і надалі символ (m) не означає порядку укорочення вектора x , оскільки укорочення здійснюється лише відносно змінної φ .

Задача полягає у відшуванні достатніх умов, при яких система рівнянь (2) має сім'ю майже-періодичних у сенсі Бора [2] розв'язків,

залежних від параметра ϕ , кожен з яких можна наблизити із наперед заданою точністю квазіперіодичним у сенсі Боля [4, 5] розв'язком системи рівнянь (4).

Основний результат та його обґрунтування. Множину обмежених за нормою 2π -періодичних по φ_i ($i = 1, 2, 3, \dots$) вектор-функцій і матриць виду $f(\varphi)$ та $A(\varphi)$ з неперервними відносно φ координатами та елементами будемо позначати через $C^0(\mathcal{T}_\infty)$. У цій множині виділимо підмножину $C_{Lip}^0(\mathcal{T}_\infty)$, елементи якої задовольняють умову Лівшиця відносно φ . Говорять, що функція $w(\varphi)$ (векторна або матрична) з множини $C_{Lip}^0(\mathcal{T}_\infty)$ задовольняє посилену умову Коші-Лівшиця відносно φ з коефіцієнтом $\varepsilon(m)$, якщо

$$\begin{aligned} & \|w(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m, \overline{\varphi_{m+1}}, \dots) - w(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m, \overline{\overline{\varphi_{m+1}}}, \dots)\| \leq \\ & \leq \varepsilon(m) \sup \left\{ \left| \overline{\varphi_{m+1}} - \overline{\overline{\varphi_{m+1}}} \right|, \left| \overline{\varphi_{m+2}} - \overline{\overline{\varphi_{m+2}}} \right|, \dots \right\}, \end{aligned}$$

де $\varepsilon(m) \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$, а $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m, \overline{\varphi_{m+1}}, \overline{\overline{\varphi_{m+2}}}, \dots)$ та $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m, \overline{\overline{\varphi_{m+1}}}, \overline{\overline{\overline{\varphi_{m+2}}}}, \dots)$ — довільні точки з \mathcal{T}_∞ , перші m відповідних координат яких попарно співпадають. Множину таких функцій позначимо через $C_{Lip}^0(\mathcal{T}_\infty)$. При цьому норми вектора $f(\varphi)$ і матриці $A(\varphi)$ з елементами $a_{ij}(\varphi)$ ($i, j = \overline{1, n}$) визначимо рівностями:

$$\begin{aligned} \|f(\varphi)\| &= \max \{ |f_1(\varphi)|, |f_2(\varphi)|, \dots, |f_n(\varphi)| \}, \\ \|\varphi\| &= \sup_i \{ |\varphi_i| \}, \quad \|A(\varphi)\| = \sup_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}(\varphi)|. \end{aligned}$$

Надалі вважатимемо, що виконуються нерівності:

$$\|A(\varphi)\| \leq A, \quad \|f(\varphi)\| \leq F, \quad \|\phi\| \leq 2\pi,$$

де A та F — додатні сталі.

Нагадаємо, що інваріантним тором системи рівнянь (2) називають поверхню $T: x = u(\phi) = \{u_1(\phi), u_2(\phi), \dots, u_n(\phi)\}$, $\phi \in \mathcal{T}_\infty$, якщо $u(\phi) \in C^0(\mathcal{T}_\infty)$, функції $u_i(\omega t + \phi)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) неперервно диференційовні по t і

$$\frac{du(\omega t + \phi)}{dt} = A(\omega t + \phi)u(\omega t + \phi) + f(\omega t + \phi)$$

для всіх $t \in \mathbb{R}^1$, $\phi \in \mathcal{T}_\infty$. Поняття інваріантного тору системи рівнянь (4) вводиться цілком аналогічно.

Теорема. Нехай система рівнянь (2) така, що:

1. $\{A(\phi), f(\phi)\} \subset C_{Lip}^0(\mathcal{T}_\infty)$ з коефіцієнтами $\alpha(m)$ та $\beta(m)$ відповідно.
2. Норми матрицантів $\Omega_\tau^t(\phi)$ та $\tilde{\Omega}_\tau^t(\phi^{(m)})$ однорідних систем, що відповідають системам (2) та (4) відповідно в тоці $t=0$ при всіх $\tau \leq 0$ не перевищують виразу $Ke^{\gamma\tau}$, де K та γ — додатні сталі, що не залежать від ϕ, τ та m .
3. $\gamma > 1$.
4. $\sum_1^\infty k_i \omega_i \neq 0$ для всіх ненульових цілочислових векторів (k_1, k_2, k_3, \dots) .

Тоді система рівнянь (2) має сім'ю майже-періодичних у сенсі Бора розв'язків, залежних від параметра ϕ , кожен з яких можна наблизити із наперед заданою точністю квазіперіодичним у сенсі Боля розв'язком системи рівнянь (4).

Доведення. Легко переконатися, що при виконанні першої умови теореми матрицанти $\Omega_\tau^t(\phi)$ та $\tilde{\Omega}_\tau^t(\phi^{(m)})$ дійсно існують. Друга умова теореми забезпечує існування для кожної з систем рівнянь (2) та (4) функцій Гріна-Самойленка задачі про інваріантні тори, що мають вигляд

$$G_0(\tau, \phi) = \begin{cases} \Omega_\tau^0(\phi) & \text{при } \tau \leq 0, \\ 0 & \text{при } \tau > 0 \end{cases}$$

та

$$G_0(\tau, \phi^{(m)}) = \begin{cases} \tilde{\Omega}_\tau^0(\phi^{(m)}) & \text{при } \tau \leq 0, \\ 0 & \text{при } \tau > 0. \end{cases}$$

Тоді системи рівнянь (2) та (4) визначають у просторі \mathbb{R}^n інваріантні тори Γ та Γ_m , що породжуються функціями

$$u(\phi) = \int_{-\infty}^0 \Omega_\tau^0(\phi) f(\omega\tau + \phi) d\tau \text{ та}$$

$$\tilde{u}(\phi^{(m)}) = \int_{-\infty}^0 \tilde{\Omega}_\tau^0(\phi^{(m)}) f_0(\omega^{(m)}\tau + \phi^{(m)}) d\tau$$

відповідно. При цьому ці тори містять залежні від параметра ϕ множини розв'язків

$$x(t) = u(\omega t + \phi) = \int_{-\infty}^0 \Omega_\tau^t(\phi) f(\omega\tau + \phi) d\tau$$

та

$$x^{(m)}(t) = \tilde{u}(\omega^{(m)}t + \phi^{(m)}) = \int_{-\infty}^0 \tilde{\Omega}_\tau^t(\phi^{(m)}) f_0(\omega^{(m)}\tau + \phi^{(m)}) d\tau$$

систем (2) та (4) відповідно. Зрозуміло, що з четвертої умови теореми випливає квазіперіодичність функцій $x^{(m)}(t)$, починаючи з $m = 2$.

Покажемо тепер, що послідовність функцій $\tilde{u}(\phi^{(m)})$ при $m \rightarrow \infty$ збігається до функції $u(\phi)$ в сенсі векторної норми рівномірно відносно $\phi \in \mathcal{T}_\infty$. Очевидно, що справджується оцінка

$$\|u(\phi) - \tilde{u}(\phi^{(m)})\| \leq I_1 + I_2, \tag{5}$$

де

$$I_1 = \int_{-\infty}^0 \|\Omega_\tau^0(\phi)\| \|f(\omega\tau + \phi) - f_0(\omega^{(m)}\tau + \phi^{(m)})\| d\tau,$$

$$I_2 = \int_{-\infty}^0 \|\Omega_\tau^0(\phi) - \tilde{\Omega}_\tau^0(\phi^{(m)})\| \|f_0(\omega^{(m)}\tau + \phi^{(m)})\| d\tau.$$

Для інтеграла I_1 виконуються наступні нерівності:

$$\begin{aligned} I_1 &\leq \int_{-\infty}^0 K e^{\gamma\tau} \beta(m) \|(\omega_{m+1}\tau + \phi_{m+1}, \omega_{m+2}\tau + \phi_{m+2}, \dots)\| d\tau \leq \\ &\leq K \beta(m) \int_{-\infty}^0 e^{\gamma\tau} (\omega_0|\tau| + 2\pi) d\tau \leq K \beta(m) \int_{-\infty}^0 e^{\gamma\tau} (\omega_0 + 2\pi) e^{|\tau|} d\tau \leq \\ &\leq K \beta(m) \int_{-\infty}^0 e^{(\gamma-1)\tau} (\omega_0 + 2\pi) d\tau \leq \beta(m) \frac{K(\omega_0 + 2\pi)}{\gamma - 1}. \end{aligned}$$

Поклавши $L(t) = \Omega_\tau^t(\phi) - \tilde{\Omega}_\tau^t(\phi^{(m)})$ і врахувавши рівність

$$\frac{dL(t)}{dt} = A(\omega t + \phi)L(t) + G(t), \tag{6}$$

в якій

$$G(t) = \left\{ A(\omega t + \phi) - A_0 \left(\omega^{(m)} t + \phi^{(m)} \right) \right\} \tilde{\Omega}_\tau^t \left(\phi^{(m)} \right),$$

оцінемо норму різниці $L(0)$. Оскільки $L(t)$ є обмеженим розв'язком рівняння (6), то в силу єдиності такого розв'язку, він повинен визначатися рівністю

$$\begin{aligned} L(t) &= \int_{-\infty}^0 \Omega_s^t(\phi) G(s) ds = \\ &= \int_{-\infty}^0 \Omega_s^t(\phi) \left\{ A(\omega s + \phi) - A_0 \left(\omega^{(m)} s + \phi^{(m)} \right) \right\} \tilde{\Omega}_\tau^s \left(\phi^{(m)} \right) ds, \end{aligned}$$

звідки

$$L(0) = \int_{-\infty}^0 \Omega_s^0(\phi) \left\{ A(\omega s + \phi) - A_0 \left(\omega^{(m)} s + \phi^{(m)} \right) \right\} \tilde{\Omega}_\tau^s \left(\phi^{(m)} \right) ds.$$

Тоді

$$\begin{aligned} \|L(0)\| &\leq \int_{-\infty}^0 K^2 e^{-\gamma|s|-\gamma|s-\tau|} \alpha(m) (\omega_0 |s| + 2\pi) ds \leq \\ &\leq \alpha(m) K^2 \left\{ \int_{-\infty}^{\tau} e^{-\gamma|s|-\gamma|s-\tau|} (\omega_0 |s| + 2\pi) ds + \int_{\tau}^0 e^{-\gamma|s|-\gamma|s-\tau|} (\omega_0 |s| + 2\pi) ds \right\} \leq \\ &\leq \alpha(m) K^2 (\omega_0 + 2\pi) \left\{ \int_{-\infty}^{\tau} e^{2\gamma s - \gamma\tau - s} ds + \int_{\tau}^0 e^{\gamma\tau - s} ds \right\} \leq \\ &\leq \alpha(m) K^2 (\omega_0 + 2\pi) \left\{ \frac{e^{(\gamma-1)\tau}}{2\gamma-1} + e^{(\gamma-1)\tau} \right\} = \alpha(m) \frac{2\gamma K^2 (\omega_0 + 2\pi)}{2\gamma-1} e^{(\gamma-1)\tau}. \end{aligned}$$

Таким чином

$$I_2 \leq \int_{-\infty}^0 \|L(0)\| F d\tau \leq \alpha(m) \frac{2\gamma K^2 F (\omega_0 + 2\pi)}{(2\gamma-1)(\gamma-1)}.$$

Використавши рівність (5), одержуємо оцінку

$$\|u(\phi) - \tilde{u}(\phi^{(m)})\| \leq \beta(m) \frac{K(\omega_0 + 2\pi)}{\gamma-1} + \alpha(m) \frac{2\gamma K^2 F (\omega_0 + 2\pi)}{(2\gamma-1)(\gamma-1)},$$

з якої випливає, що

$$\|u(\phi) - \tilde{u}(\phi^{(m)})\| \rightarrow 0 \text{ при } m \rightarrow \infty$$

рівномірно відносно $\phi \in \mathcal{T}_\infty$. Тоді також рівномірно відносно $t \in \mathcal{R}^1$ та $\phi \in \mathcal{T}_\infty$

$$\|x^{(m)}(t) - x(t)\| \rightarrow 0 \text{ при } m \rightarrow \infty,$$

де $x(t)$ — майже-періодична функція, що завершує доведення теореми.

Цей результат неважко розповсюдити на більш загальний випадок. Розглянемо лінійну систему диференціальних рівнянь

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega, \quad \frac{dx}{dt} = A^*(\varphi)x + f^*(\varphi),$$

що має вигляд системи (1), в якій $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots) \in \mathbf{m}$,

$\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots)$, $A^*(\varphi) = (a_{ij}(\varphi))_{i,j=1}^{\infty}$ — нескінченна матриця,

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \in \mathbf{m}$, $f^*(\varphi) = (f_1^*(\varphi), f_2^*(\varphi), \dots, f_n^*(\varphi), \dots)$ — дійснозначна вектор-функція, причому матриця $A^*(\varphi)$ та функція $f^*(\varphi)$ 2π -періодичні відносно φ_i ($i = 1, 2, 3, \dots$) та визначені на торі \mathcal{T}_{∞} .

Аналогічно до рівняння (2) одержимо систему

$$\frac{dx}{dt} = A^*(\omega t + \phi)x + f^*(\omega t + \phi). \quad (7)$$

Норми матриці $A^*(\varphi)$ та функції $f^*(\varphi)$ визначимо рівностями:

$$\|A^*(\varphi)\| = \sup_i \sum_{j=1}^{\infty} \sup_{\varphi \in \mathcal{T}_{\infty}} |a_{ij}(\varphi)|,$$

$$\|f^*(\varphi)\| = \sup_i \left\{ \sup_{\varphi \in \mathcal{T}_{\infty}} |f_i^*(\varphi)| \right\}.$$

Ввівши позначення

$$A_0^*(\varphi^{(m)}) = A_0^*(\varphi^{(m)}, 0, 0, \dots), \quad f_0^*(\varphi^{(m)}) = f_0^*(\varphi^{(m)}, 0, 0, \dots),$$

від системи (7) перейдемо до рівняння

$$\frac{dx^{(m)}}{dt} = A_0^*(\omega^{(m)}t + \phi^{(m)})x^{(m)} + f_0^*(\omega^{(m)}t + \phi^{(m)}). \quad (8)$$

Якщо $\{A^*(\varphi), f^*(\varphi)\} \subset C_{Lip}^0(\mathcal{T}_{\infty})$, то існують матрицанти

$\Omega_{\tau}^t(\phi)$ та $\tilde{\Omega}_{\tau}^t(\phi^{(m)})$ однорідних систем, що відповідають системам (7) та (8), але у цьому разі вони є нескінченними матрицями (див. [3]). При виконанні для них другої умови сформульованої вище теореми для вказаних систем існують функції Гріна-Самойленка, породжуючі інваріантнітори систем (7) та (8), що містять залежні від параметра ϕ множини їх розв'язків. Тоді при умовах вказаної теореми система рівнянь (7) має сім'ю майже-періодичних у сенсі Бора розв'язків, залежних від параметра ϕ , кожен з яких можна наблизити

із наперед заданою точністю квазіперіодичним у сенсі Боля розв'язком системи рівнянь (8).

Висновки. Робота має теоретичний характер. У ній одержано достатні умови, при яких задана система рівнянь має сім'ю майже-періодичних розв'язків, які можна наблизити квазіперіодичними розв'язками відповідної укороченої за кутовою змінною системи рівнянь, що визначена на скінченновимірному торі. Одержаний в роботі результат можна буде використати при розв'язуванні аналогічної більш складної задачі для випадку, коли задана система рівнянь є нелінійною або квазілінійною.

Список використаних джерел:

1. Самойленко А. М. Элементы математической теории многочастотных колебаний : монография. М. : Наука, 1987. 302 с.
2. Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости : монография. М. : Наука, 1967. 472 с.
3. Samoilenko A. M., Teplinskii Yu. V. Countable Systems of Differential Equations : монография. VSP, Utrecht-Boston, 2003. 287 p.
4. Боль П. Г. Избранные труды : монография. Рига : Изд-во АН Латв. ССР, 1961. 238 с.
5. Левитан Б. М. Почти-периодические функции : монография. М. : Гостехиздат, 1953. 396 с.

APPROXIMATE METHOD OF CONSTRUCTION OF ALMOST PERIODIC SOLUTIONS OF LINEAR SYSTEMS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS, DEFINED ON THE INFINITE-DIMENSIONAL TORUS

It is known that a large number of application problems in different sections of mathematics, physics, technology needs research of the problems of vibrational solutions of differential systems, which are their mathematical models. In our time, the oscillated motions of dynamical systems by V. V. Nemytsky are called their recurrent movements, including quasi-periodic and almost-periodic movements. The fundamental theorem of Amerio and Favard is widely known, which refers to the existence of nearly-periodic solutions of nonlinear and linear systems. Later it became clear that the issue of such solutions is closely related to the existence of such systems of other facilities, for which construction is convenient to use the method of Green-Samoilenko function. Here the linear system of differential equations is considered, which is defined on the infinite-dimensional Torus (the case of the angular frequency base for the corner variable), and the relative normal variable, this system can be both finite and angular. The problem lies in finding the sufficient conditions, in which the specified system of equations has almost-periodic family in the sense of Bohr solutions, each of which can be adapted to the predefined accuracy of quasi-periodic in the sense of Bol solution of corresponding shortened by the angular variable of the system of equations, which is defined on a finite-dimensional Torus.

Key words: *the invariant torus, Green-Samoilenko function, quasi-periodic and almost periodic functions.*

Отримано: 23.09.2020

УДК 004.942:619.64

DOI: 10.32626/2308-5878.2020-21.145-163

В. А. Федорчук*, д-р техн. наук, професор,

О. А. Дячук**, канд. техн. наук,

Л. О. Митько***, канд. фіз.-мат. наук

* Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський,

** ДУ «Інститут економіки та прогнозування НАН України», м. Київ,

*** Інститут проблем моделювання в енергетиці
імені Г. Є. Пухова НАН України, м. Київ

ЕКВІВАЛЕНТНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ В'ЯЗКОПРУЖНИХ ДИНАМІЧНИХ ОБ'ЄКТІВ

Стаття присвячена задачі отримання ефективних в обчислювальному сенсі математичних моделей динамічних об'єктів з в'язкопружними властивостями на основі еквівалентних перетворень первинних математичних описів у вигляді інтегро-диференціальних рівнянь до інтегральних рівнянь Вольтерри. При цьому враховано значно зростаючі у останні роки можливості обчислювальної техніки та програмної інженерії, а також позитивні властивості інтегральних моделей при їх числовій реалізації: обчислювальна стійкість, хороша збіжність, стійкість до високочастотних спектрів завад, обчислювальна ефективність. Наведено методи перетворення динамічних моделей, що дозволяють зводити інтегро-диференціальні рівняння до інтегральних рівнянь з оператором Вольтерри, що спрощує задачу створення алгоритмів моделювання. Зокрема наведено застосування в задачах комп'ютерного моделювання інтегральних моделей, які отримуються з первинних інтегро-диференціальних моделей за допомогою наступних методів еквівалентних перетворень: методу варіації постійних, методу старшої похідної, модифікованого методу заміни змінних, який при чисельній реалізації з використанням квадратурних формул дає рекурентні співвідношення. Наведено приклад застосування зазначеного методу. Продемонстровано можливість розв'язування прямої та оберненої задачі визначення впливу на багатомасову систему за допомогою інтегральної форми задачі Коші. Показано що проблема розробки більш повних та ґрунтовних математичних моделей динамічних систем, а саме у вигляді інтегро-диференціальних рівнянь, є важливою та актуальною, а їх чисельна реалізація необхідною для широкого кола прикладних задач моделювання.

Ключові слова: *модель в'язкопружного динамічного об'єкту, інтегральна модель, еквівалентні перетворення моделей.*

Вступ. При моделюванні динамічних систем важливим способом виявлення їх особливостей та можливості чисельної реалізації є подання моделей в різних еквівалентних формах [2], що вимагає розвитку методів еквівалентних перетворень. Використання еквівалентних форм математичних моделей динамічних систем є загальноприйнятим підходом [13]. Наприклад, при дослідженнях систем управління широко використовуються аналіз різних властивостей заданої системи [9], а саме: часові моделі — у вигляді диференціальних рівнянь; операторні — у вигляді передатних функцій; частотні — у вигляді амплітудно-частотних характеристик. В більшості випадків зручно отримувати модель в одній формі відштовхуючись від її фізичних властивостей, а для чисельної реалізації використовувати іншу, еквівалентну вихідній.

Щодо в'язкопружних динамічних об'єктів, природньою формою опису яких є інтегро-диференціальні рівняння, важливе прикладне значення мають еквівалентні перетворення вихідної математичної моделі до моделі у вигляді інтегральних рівнянь, методи чисельної реалізації яких добре розвинуті та мають ряд переваг: збіжність, стійкість, ефективність. Крім того, перетворення дозволяє розширити клас обчислювальних методів шляхом застосування швидкозбіжних ітераційних методів з високою стійкістю розв'язування інтегральних рівнянь, наприклад, метод Ньютона-Канторовича [12]. У зв'язку з цим розглянемо декілька варіантів такого еквівалентного переходу.

Розглянемо нелінійне інтегро-диференціальне рівняння [10] вигляду

$$u^{(n)}(x) + \sum_{j=1}^{n-1} b_j(x) u^{(j)}(x) = \lambda \int_a^x K(x, s; u(s), u'(s), \dots, u^{(m)}(s)) ds + f(x) \quad (1)$$

з нульовими початковими умовами $u(a) = u'(a) = \dots = u^{(n-1)}(a) = 0$, де $b_j(x)$ — неперервні функції, $n \geq m$. Нехай $u_i(x)$, $i = \overline{1, n}$ — фундаментальна система розв'язків однорідного диференціального рівняння.

Загальний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння можна записати у вигляді

$$u(x) = C_1(x) u_1(x) + C_2(x) u_2(x) + \dots + C_n(x) u_n(x). \quad (2)$$

Відповідно до методу варіації довільних сталих, коефіцієнти C_i , $i = \overline{1, n}$ визначаються за формулою

$$C_i(x) = \int_a^x \frac{W_{ni}(s)}{W(s)} \varphi(s) ds, \quad (3)$$

$$\text{де } W(s) = \begin{vmatrix} u_1(s) & \vdots & u_n(s) \\ u_1'(s) & \vdots & u_n'(s) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ u_1^{(n-1)}(s) & \vdots & u_n^{(n-1)}(s) \end{vmatrix}, \quad W_{ni}(s) \text{ — мінор елемента } n\text{-го рядка}$$

j -го стовпчика визначника $W(s)$.

З урахуванням (3) вираз (2) перетвориться на

$$u(s) = \int_a^x G(x, s) \varphi(s) ds, \quad (4)$$

$$\text{де } G(x, s) = \frac{W_i(x, s)}{W(s)}; \quad W_i(x, s) = \begin{vmatrix} u_1(s) & \dots & u_n(s) \\ u_1'(s) & \dots & u_n'(s) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ u_1^{(n-2)}(s) & \dots & u_n^{(n-2)}(s) \\ u_1(x) & \dots & u_n(x) \end{vmatrix}.$$

Використовуючи вираз (4), рівняння (1) можна привести до вигляду

$$u(x) - \lambda \int_a^x G(x, s) \left\{ \int_a^x K(x, t; u(t), u'(t), \dots, u^{(m)}(t)) dt \right\} ds = \\ = \int_a^x G(x, s) f(s) ds \quad (5)$$

і після цього, провівши заміну $y(x) = u^{(m)}(x)$, отримуємо з рівняння (1) еквівалентне інтегральне рівняння [8]

$$\int_a^x \frac{(x-s)^{(m-1)}}{(m-1)!} y(s) ds - \\ - \lambda \int_a^x G(x, s) \left\{ \int_a^x K(x, t; y(t), y_1(t), \dots, y_m(t)) dt \right\} ds = \int_a^x G(x, s) f(s) ds, \quad (6)$$

$$\text{де } y_i = \int_a^x \frac{(x-s)^{(n-i-1)}}{(n-i-1)!} y(s) ds, \quad i = \overline{1, m}.$$

У випадку ненульових початкових умов $u^{(i)}(a) = c_i, \quad i = \overline{0, n-1}$, провівши заміну змінних $u(x) = y(x) + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{c_i}{i!} (x-a)^i$, задача зводиться до задачі з нульовими початковими умовами.

Іншим методом еквівалентного перетворення динамічних моделей є метод старшої похідної, який за допомогою заміни змінної

$$u^{(n)}(x) = y(x),$$

$$u^{(k)}(x) = \int_a^x \frac{(x-s)^{(n-k-1)}}{(n-k-1)!} y(s) ds + \sum_{j=0}^{n-k-1} \frac{(x-s)^j}{j!} u^{(n-j-1)}(a) = y_k(x), \quad (7)$$

де $k = 0, n-1$, дозволяє перетворити рівняння (1) з початковими умовами $u^{(i)}(a) = c_i, i = 0, n-1$ на еквівалентне інтегральне рівняння Вольтерри [3]

$$y(x) = \int_a^x \tilde{K}(x, s; y(s)) dt + \varphi(x),$$

де

$$\begin{aligned} \tilde{K}(x, s; y(s)) &= K(x, s; y_1(s), \dots, y_m(s), y(s)) + \\ &+ \sum_{j=0}^{n-1} b_j(x) \frac{(x-s)^{(n-j-1)}}{(n-j-1)!} y(s); \\ \varphi(x) &= f(x) - \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-k-1} b_j(x) \frac{(x-s)^j}{j!} u^{(n-j-1)}(a). \end{aligned}$$

Для розв'язування отриманих інтегральних рівнянь існує велика кількість обчислювальних методів [2, 9, 12], в більшості яких лежить заміна інтеграла квадратурними формулами або використання сплайнів [14]. Крім того, широке використання знаходять ітераційні методи [11], методи Рунге-Кутта [7]. Для нелінійних рівнянь, ефективним є використання спеціалізованих ітераційних методів.

Розглянемо наступний метод зведення інтегро-диференціального рівняння до інтегрального рівняння [6]. Якщо виходити з нелінійних залежностей між напруженнями та деформаціями [3], динамічні задачі теорії в'язкопружності можуть бути зведені до системи інтегро-диференціальних рівнянь вигляду:

$$\begin{aligned} \ddot{U}_i(t) + \omega_i^2 U_i(t) = \\ = X_i \left\{ t, U_1(t), \dots, U_n(t), \int_0^t \varphi_i(t, \tau, U_1(\tau), \dots, U_n(\tau)) d\tau \right\} \end{aligned} \quad (8)$$

з початковими умовами

$$U_i(0) = U_{0i}, \dot{U}_i(0) = \bar{U}_{oi}, \quad (9)$$

де ω_i — стала величина, $i = \overline{1, n}$; $U_i(t)$ — невідомі функції від t ; X_i, φ_i — задані функції.

Подвійним інтегруванням системи (8) по t з врахуванням початкових умов (9) отримаємо

$$U_i(t) = U_{0i} + \bar{U}_{0i}t - \omega_i^2 \int_0^t (t-\tau)U_i(\tau) d\tau + \int_0^t (t-\tau)X_i \left\{ \tau, U_1(\tau), \dots, U_n(\tau), \int_0^\tau \varphi_i(\tau, s, U_1(s), \dots, U_n(s)) ds \right\}. \quad (10)$$

Для чисельного розв'язування системи (10) використаємо метод прямої заміни інтегралів квадратурною формулою. Тоді наближені розв'язки системи (10) у вузлах $t_m = (m-1)\Delta t$, $m = 1, 2, 3, \dots$, (Δt — крок інтегрування) послідовно визначаються із системи

$$U_{mi} = U_{0i} + \bar{U}_{0i}t_m - \omega_i^2 \sum_{j=1}^{m-1} A_j(t_m - t_j)U_{ji} + \sum_{j=1}^{m-1} B_j^{(i)}(t_m - t_j)X_i \left\{ t_j, U_{j1}, \dots, U_{jn}, \sum_{k=1}^j C_k^{(i)}\varphi_i(t_j, t_k, U_{k1}, \dots, U_{kn}) \right\}, \quad (11)$$

де A_j , $B_j^{(i)}$, $C_k^{(i)}$ — коефіцієнти, які не залежать від вибору функцій X_i та φ_i , $i = \overline{1, n}$ та мають різні значення в залежності від використаних квадратурних формул.

Завдяки подвійному інтегруванню вихідної системи по t та використанню квадратурної формули отримано просту рекурентну залежність (11) для знаходження чисельних значень функції $U_i(t)$.

Для системи інтегро-диференціальних рівнянь (8) нижче запропоновано ще один спосіб чисельного розв'язування, заснований на використанні квадратурних формул.

Модифікований метод зведення інтегро-диференціального рівняння до інтегрального рівняння. Використовуючи метод варіації довільних сталих довільна система (8) зводиться до вигляду

$$U_i(t) = U_{0i} \cos \omega_i t + \frac{\bar{U}_{0i}}{\omega_i} \sin \omega_i t + \frac{1}{\omega_i} \int_0^t X_i \left\{ \tau, U_1(\tau), \dots, U_n(\tau), \int_0^\tau \varphi_i(\tau, s, U_1(s), \dots, U_n(s)) ds \right\} \times \sin \omega_i(t-\tau) d\tau. \quad (12)$$

Провівши заміну інтегралів квадратурними формулами наближене значення $U_{mi} = U_i(t_m)$, $m = 2, 3, \dots$, як розв'язок системи (12) у точках $t_m = (m-1)\Delta t$ послідовно знаходяться за формулою

$$U_{mi} = U_{0i} \cos \omega_i t_m + \frac{\bar{U}_{0i}}{\omega_i} \sin \omega_i t_m + \frac{1}{\omega_i} \sum_{j=1}^{m-1} A_j X_i \times$$

$$\times \left\{ t_j, U_{j1}, \dots, U_{jn}, \sum_{k=1}^j B_k^{(i)} \varphi_i(t_j, t_k, U_{k1}, \dots, U_{kn}) \sin \omega_i (t_m - \tau_j) \right\}, \quad (13)$$

$$i = \overline{1, n}, m = 2, 3, \dots$$

Формула (13) має рекурентний характер, що дозволяє будувати ефективний комп'ютерний алгоритм її реалізації.

Приклад 1. Розглянемо вертикальні коливання трьох тіл (див. рис. 1) з масами m_1, m_2, m_3 , які з'єднані нелінійними в'язкопружними пружинами [4].

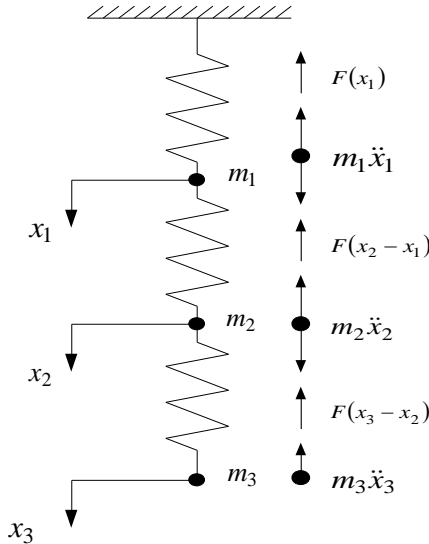


Рис. 1. Принципова та силова схема задачі

Позначимо зміщення мас m_1, m_2, m_3 від положення статичної рівноваги через x_1, x_2, x_3 а силу дії пружини на масу — через $F(z)$. Використовуючи принцип Даламбера та розглядаючи уявний стан рівноваги мас до яких прикладені сили інерції та сила відновлення, отримаємо:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + F(x_1) - F(x_2 - x_1) = 0, \\ m_2 \ddot{x}_2 + F(x_2 - x_1) - F(x_3 - x_2) = 0, \\ m_3 \ddot{x}_3 + F(x_3 - x_2) = 0. \end{cases} \quad (14)$$

Для функції $F(z)$ візьмемо вираз

$$F(z) = k \left\{ z(1 + \beta z^2) - \int_0^t R(t, \tau) z(\tau) [1 + \beta z^2(\tau)] d\tau \right\}, \quad (15)$$

де k — жорсткість пружини; β — коефіцієнт нелінійності, який залежить від фізичних властивостей матеріалу пружини; $R(t, \tau)$ — ядро релаксації.

Якщо k_1, k_2, k_3 — відповідно жорсткість першої, другої та третьої пружин, тоді з урахуванням (15) система (14) отримує вигляд

$$\left\{ \begin{aligned} \ddot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 &= \omega_{21}^2 (x_2 - x_1) [1 + \beta_2 (x_2 - x_1)^2] - \\ &- \omega_1^2 \beta_1 x_1^3 + \omega_1^2 \int_0^t R_1(t, \tau) x_1(\tau) [1 + \beta_1 x_1^2(\tau)] d\tau - \\ &- \omega_{21}^2 \int_0^t R_2(t, \tau) [x_2^\circ(\tau) - x_1(\tau)] \{1 + \beta_2 [x_2(\tau) - x_1(\tau)]^2\} d\tau, \\ \ddot{x}_2 + \omega_2^2 x_2 &= \omega_2^2 x_1 [1 + \beta_2 (x_2 - x_1)^2] - \\ &+ \omega_{32}^2 (x_3 - x_2) [1 + \beta_3 (x_3 - x_2)^2] - \omega_2^2 \beta_2 x_2 (x_2 - x_1)^2 + \\ &+ \omega_2^2 \int_0^t R_2(t, \tau) [x_2(\tau) - x_1(\tau)] \{1 + \beta_2 [x_2(\tau) - x_1(\tau)]^2\} d\tau - \\ &- \omega_{31}^2 \int_0^t R_3(t, \tau) [x_3(\tau) - x_2(\tau)] \{1 + \beta_3 [x_3(\tau) - x_2(\tau)]^2\} d\tau, \\ \ddot{x}_3 + \omega_3^2 x_3 &= \omega_3^2 x_2 [1 + \beta_3 (x_3 - x_2)^2] - \omega_3^2 \beta_3 x_3 (x_3 - x_2)^2 + \\ &+ \omega_3^2 \int_0^t R_3(t, \tau) [x_3(\tau) - x_2(\tau)] \{1 + \beta_3 [x_3(\tau) - x_2(\tau)]^2\} d\tau, \end{aligned} \right. \quad (16)$$

$$\text{де } \frac{k_i}{m_i} = \omega_i^2, \quad i = \overline{1 \dots 3}, \quad \frac{k_2}{m_1} = \omega_{21}^2, \quad \frac{k_3}{m_2} = \omega_{32}^2.$$

Для проведення обчислень повинні бути задані початкові значення зміщень та швидкостей, тобто $x_i(0) = x_{0i}$, $\dot{x}_i(0) = V_i$, $i = \overline{1 \dots 3}$.

Для підготовки розрахункових виразів систему (16) запишемо у формі (12). Вважаючи, що у отриманій системі $t = t_m = mh$, $m = 1, 2, \dots$ для обчислення наближених значень функцій $x_i(t)$, ($i = 1, 2, 3$) у точках t_m , $m = 1, 2, \dots$ аналогічно (13) отримуємо:

$$\left\{ \begin{aligned}
 & x_{m1} = x_{01} \cos \omega_1 t_m + \frac{V_1}{\omega_1} \sin \omega_1 t_m + \\
 & + \frac{1}{\omega_1} \sum_{j=0}^{m-1} A_j^{(1)} \left\{ \omega_{21}^2 (x_{j2} - x_{j1}) \left[1 + \beta_2 (x_{j2} - x_{j1})^2 \right] - \right. \\
 & - \omega_1^2 \beta_1 x_{j1}^3 + \omega_1^2 \sum_{k=0}^j B_k^{(1)} R_1(t_j, t_k) x_{k1} (1 + \beta_1 x_{k1}^2) - \\
 & \left. - \omega_{21}^2 \sum_{k=0}^j C_k^{(1)} R_2(t_j, t_k) (x_{k2} - x_{k1}) \left[1 + \beta_2 (x_{k2} - x_{k1})^2 \right] \right\} \sin \omega_1 (t_m - t_j), \\
 & x_{m2} = x_{02} \cos \omega_2 t_m + \frac{V_2}{\omega_2} \sin \omega_2 t_m + \\
 & + \frac{1}{\omega_2} \sum_{j=0}^{m-1} A_j^{(2)} \left\{ \omega_2^2 x_{j1} \left[1 + \beta_2 (x_{j2} - x_{j1})^2 \right] + \right. \\
 & \left. + \omega_{32}^2 (x_{j3} - x_{j2}) \left[1 + \beta_3 (x_{j3} - x_{j2})^2 \right] - \omega_2^2 \beta_2 x_{j2} (x_{j2} - x_{j1})^2 \right. \\
 & + \omega_2^2 \sum_{k=0}^j B_k^{(2)} R_2(t_j, t_k) (x_{k2} - x_{k1}) \left[1 + \beta_2 (x_{k2} - x_{k1})^2 \right] - \\
 & \left. - \omega_{32}^2 \sum_{k=0}^j C_k^{(2)} R_3(t_j, t_k) (x_{k3} - x_{k2}) \left[1 + \beta_3 (x_{k3} - x_{k2})^2 \right] \right\} \sin \omega_2 (t_m - t_j), \\
 & x_{m3} = x_{03} \cos \omega_3 t_m + \frac{V_3}{\omega_3} \sin \omega_3 t_m + \\
 & + \frac{1}{\omega_3} \sum_{j=0}^{m-1} A_j^{(3)} \left\{ \omega_3^2 x_{j2} \left[1 + \beta_3 (x_{j3} - x_{j2})^2 \right] - \omega_3^2 \beta_3 x_{j3} (x_{j3} - x_{j2})^2 - \right. \\
 & \left. - \omega_3^2 \sum_{k=0}^j B_k^{(3)} R_3(t_j, t_k) (x_{k3} - x_{k2}) \left[1 + \beta_3 (x_{k3} - x_{k2})^2 \right] \right\} \sin \omega_3 (t_m - t_j), \\
 & m = 1, 2, 3.
 \end{aligned} \right. \quad (17)$$

Таким чином задача підготовлена для обчислення значень x_{mi} , $m = 1, 2, \dots, i = 1, 2, 3$ за формулою (17).

Спосіб визначення впливу на багатомасову систему, який є еквівалентним впливу початкових умов. При дослідженні динаміки багатомасових механічних систем (також систем іншої фізичної природи, наприклад електричних кіл) важливе значення має задача визначення зовнішніх сил (збурень) еквівалентних впливу початкових умов.

Для розв'язування цієї задачі можна скористатись операційним методом або теорією δ -функцій [1], в результаті отримуємо праві частини диференціальних рівнянь (функції навантаження) дія яких при нульових початкових умовах дорівнює збуренню від початкових значень координат та їх похідних у випадку однорідного рівняння. Розглянемо інший підхід до розв'язування такої задачі [5].

Інтегральний спосіб. Нехай диференціальне рівняння перехідного процесу відносно зміщення i -ї маси від положення рівноваги у i , $(i + 1)$ -й ланці має вигляд

$$Lx = f(t), \quad (18)$$

де L — диференціальний оператор n -го порядку.

Надамо рівнянню (18) загальні початкові умови для $t = 0$:

$$x^{(n-1)} \Big|_{t=0} = x^{(n-1)}(0), \quad x^{(n-2)} \Big|_{t=0} = x^{(n-2)}(0), \quad \dots, \quad x \Big|_{t=0} = x(0).$$

Припустивши, що

$$U(t) = x^{(n)}(t), \quad (19)$$

приведемо рівняння (18) до інтегрального рівняння вигляду [2]

$$U(t) + \int_0^t K(t, y)u(y)dy = f(t) + G(t), \quad (20)$$

де $G(t)$ — функція, утворена початковими умовами, яку запишемо у формі

$$G(t) = -\sum_{\nu=1}^n \sum_{\mu=1}^{\nu} x^{n-\mu}(0) a_{\nu-1} \frac{t^{\nu-\mu}}{(\nu-\mu)!}, \quad (21)$$

де $a_{\nu-1}$ — коефіцієнти диференціального оператора L .

Припустивши, що

$$F(t) = f(t) + G(t) \quad (22)$$

запишемо диференціальне рівняння наступним чином:

$$Lx = F(t).$$

Якщо привести диференціальне рівняння (22) до інтегрального, отримуємо рівняння (20), яке буде еквівалентне диференціальному рівнянню (18) з початковими умовами (19). Зауважимо, що права частина рівняння (22) має елемент $G(t)$, який дає в якості часткового розв'язку фіктивний рух системи, як «твердого тіла».

Оскільки функція $G(t)$ являє собою поліном (21), то її частковий розв'язок легко знаходиться за відомою лівою частиною диференціального рівняння. Визначаючи частковий розв'язок у вигляді поліному з невизначеними коефіцієнтами

$$x^* = P(t), \quad (23)$$

знаходимо їх значення з рівняння

$$L[P(t)] = G(t).$$

Зрозуміло, що частковий розв'язок (23) повинен бути усунутий із загального розв'язку рівняння (22).

Приклад 2. Нехай задано диференціальне рівняння перехідного процесу

$$x^{IV} + a_0 \ddot{x} + a_1 x = f(t) \quad (24)$$

з початковими умовами загального вигляду

$$x|_{t=0} = x_0, \dot{x}|_{t=0} = \dot{x}_0, \ddot{x}|_{t=0} = \ddot{x}_0, \ddot{\ddot{x}}|_{t=0} = \ddot{\ddot{x}}_0. \quad (25)$$

Вважаючи що $x^{IV} = u(t)$, приводимо (24) до наступних залежностей:

$$\begin{aligned} x^{IV} &= u(t), \\ \ddot{x} &= \int_0^t u(t) dt + \ddot{x}_0, \\ \ddot{x} &= \int_0^t (t-y) u(y) dy + \ddot{x}_0 t + \ddot{x}_0, \\ \dot{x} &= \int_0^t \frac{(t-y)^2}{2!} u(y) dy + \frac{\ddot{x}_0 t^2}{2!} + \dot{x}_0 t + \dot{x}_0, \\ x &= \int_0^t \frac{(t-y)^3}{3!} u(y) dy + \frac{\ddot{x}_0 t^3}{3!} + \frac{\ddot{x}_0 t^2}{2!} + \dot{x}_0 t + x_0. \end{aligned} \quad (26)$$

Підставивши значення x та його похідних у диференціальне рівняння (24), отримаємо наступне інтегральне рівняння

$$u(t) + \int_0^t K(t, y) u(y) dy = f(t) - G(t). \quad (27)$$

Ядро рівняння

$$K(t, y) = a_0(t-y) + a_1 \frac{(t-y)^3}{3!}.$$

Функція, яка утворена початковими умовами руху, буде мати вигляд:

$$G(t) = \ddot{x}_0 \left(a_0 t + a_1 \frac{t^3}{3!} \right) + \ddot{\ddot{x}}_0 \left(a_0 + a_1 \frac{t^2}{2!} \right) + \dot{x}_0 a_1 t + x_0 a_1. \quad (28)$$

Рівнянню (27), або диференціальному рівнянню (24), відповідає диференціальне рівняння

$$x^{IV} + a_0 \ddot{x} + a_1 x = f(t) + G(t) \quad (29)$$

при нульових початкових умовах. В цьому випадку частковий розв'язок, записаний у вигляді інтеграла Коші буде також його загальним розв'язком.

Нехай реакція системи на одиничний імпульс представлена функцією $B_1(t)$. Тоді

$$x = \int_0^t [f(t) - G(y)] B_1(t - y) dy. \quad (30)$$

Перший інтеграл $I_1 = \int_0^t f(y) B_1(t - y) dy$ представляє собою частковий розв'язок рівняння (24) від правої частини $f(t)$. Другий інтеграл $I_2 = -\int_0^t G(y) B_1(t - y) dy$ повинен дати частковий розв'язок того ж рівняння, еквівалентний збуренням, які внесені початковими умовами. Підставивши у другий інтеграл значення $G(t)$ (28), отримаємо

$$I_2 = -\ddot{x}_0 \int_0^t \left(a_0 y + a_1 \frac{y^3}{3!} \right) B_1(t - y) dy - \ddot{x}_0 \int_0^t \left(a_0 + a_1 \frac{y^2}{2!} \right) B_1(t - y) dy - \dot{x}_0 a_1 \int_0^t y B_1(t - y) dy - x_0 a_1 \int_0^t B_1(t - y) dy. \quad (31)$$

Враховуючи, що $\int_0^t \frac{y^k}{k!} B_1(t - y) dy = B_1^{(-k-1)}(t)$ та проінтегрувавши рівність (31), знайдемо

$$I_2 = -\ddot{x}_0 \left[a_0 B_1^{(-2)}(t) + a_1 B_1^{(-4)}(t) \right] - \ddot{x}_0 \left[a_0 B_1^{(-1)}(t) + a_1 B_1^{(-3)}(t) \right] - \dot{x}_0 a_1 B_1^{(-2)}(t) - x_0 a_1 B_1^{(-1)}(t).$$

Скориставшись співвідношенням

$$B_1^{(k)}(t) = \left(\frac{t^3}{3!} \right)^k - a_0 B_1^{(k-2)}(t) - a_1 B_1^{(k-4)}(t), \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

та виконавши перетворення, отримаємо

$$I_2 = x_0 \left[1 - a_1 B_1^{(-1)}(t) \right] + \dot{x}_0 \left[t - a_1 B_1^{(-2)}(t) \right] + \ddot{x}_0 B_1^{(-1)}(t) + \ddot{x}_0 B_1(t) - \ddot{x}_0 \frac{t^3}{3!} - \ddot{x}_0 \frac{t^2}{2!} - \dot{x}_0 t - x_0, \quad (32)$$

або після підстановки $t = \frac{\tau}{\sqrt{a_0}}$:

$$I_2 = x_0 \left[1 - c_1 B_1^{(-1)}(\tau) \right] + \dot{x}_0 \frac{1}{\sqrt{a_0}} \left[\tau - c_1 B_1^{(-2)}(\tau) \right] + \ddot{x}_0 \frac{1}{a_0} B_1^{(1)}(\tau) + \ddot{x}_0 \frac{1}{a_0 \sqrt{a_0}} B_1(\tau) - \ddot{x}_0 \frac{1}{a_0 \sqrt{a_0}} \frac{\tau^3}{3!} - \ddot{x}_0 \frac{1}{a_0} \frac{\tau^2}{2!} - \dot{x}_0 \frac{1}{\sqrt{a_0}} \tau - x_0. \quad (33)$$

Розв'язок однорідного диференціального рівняння (24) з початковими умовами (25) у перехідних функціях B_1 записується в наступній формі:

$$x = x_0 \left[1 - c_1 B_1^{(-1)}(\tau) \right] + \dot{x}_0 \frac{1}{\sqrt{a_0}} \left[\tau - c_1 B_1^{(-2)}(\tau) \right] + \ddot{x}_0 \frac{1}{a_0} B_1^{(1)}(\tau) + \ddot{x}_0 \frac{1}{a_0 \sqrt{a_0}} B_1^{(1)}(\tau). \quad (34)$$

Порівнявши розв'язки (33) та (34) відмічаємо їх відмінність на один поліном $-\ddot{x}_0 \frac{1}{a_0 \sqrt{a_0}} \frac{\tau^3}{3!} - \ddot{x}_0 \frac{1}{a_0} \frac{\tau^2}{2!} - \dot{x}_0 \frac{1}{\sqrt{a_0}} \tau - x_0$, який утворений початковими умовами руху. Цей поліном є частковим розв'язком (23) диференціального рівняння

$$x^{IV} + a_0 \ddot{x} + a_1 x = -G(t), \quad (35)$$

де $G(t)$ — функція, що визначена рівністю (28).

Знайдемо частковий розв'язок рівняння (35) у вигляді

$$x^* = At^3 + Bt^2 + Ct + D. \quad (36)$$

Диференціюючи поліном (36) та підставляючи значення його похідних в рівняння (35), а потім прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях t , отримаємо $A = -\frac{\ddot{x}_0}{3!}$, $B = -\frac{\ddot{x}_0}{2!}$, $C = -\dot{x}_0$, $D = -x_0$. Тоді частковий розв'язок рівняння (36) записуємо у вигляді

$$x^* = -\frac{\ddot{x}_0}{3!} t^3 - \frac{\ddot{x}_0}{2!} t^2 - \dot{x}_0 t - x_0, \text{ або після переходу до аргументу } \tau:$$

$$x^* = -\frac{\ddot{x}_0}{a_0 \sqrt{a_0}} \frac{\tau^3}{3!} - \frac{\ddot{x}_0}{a_0} \frac{\tau^2}{2!} - \frac{\dot{x}_0}{\sqrt{a_0}} \tau - x_0. \quad (37)$$

Обернена задача. Обернена задача — це задача, коли зовнішні навантаження, тобто праві частини диференціальних рівнянь, представляють у вигляді еквівалентних їм початкових умов руху. Припустимо

$$F_{i,i+1} \equiv x.$$

Розглянемо диференціальне рівняння перехідного процесу

$$Lx = G_i(t). \quad (38)$$

Вважаючи початкові умови нульовими та $x^{(r)} = u(t)$, приведемо рівняння (18) до інтегрального рівняння Вольтерри II роду:

$$u(t) + \int_0^t K(t, y) u(y) dy = G_i(t). \quad (39)$$

Розглянемо однорідне диференціальне рівняння

$$Lx = 0 \quad (40)$$

з диференціальним оператором

$$L = \frac{d^r}{dt^r} + p_1 \frac{d^{r-1}}{dt^{r-1}} + p_2 \frac{d^{r-2}}{dt^{r-2}} + \dots + p_r$$

та початковими умовами для $t = 0$:

$$x^{(r-1)}(0) = x_0^{(r-1)}, x^{(r-2)}(0) = x_0^{(r-2)} \dots, \dot{x}(0) = \dot{x}_0, x(0) = x_0. \quad (41)$$

Вважаючи, що $x^{(r)} = u(t)$ запишемо наступне інтегральне рівняння еквівалентне рівнянню (40) з початковими умовами (41):

$$u(t) + \int_0^t K(t, y)u(y)dy = F(t). \quad (42)$$

У рівнянні (42) функція $F(t)$ утворена за рахунок початкових умов руху (41). У відповідності до рівності (21) вона записується наступним чином:

$$F(t) = -\sum_{v=1}^r \sum_{\mu=1}^v x_0^{r-\mu} p_{v-1} \frac{t^{v-\mu}}{(v-\mu)!}, \quad (43)$$

де p_{v-1} — коефіцієнти диференціального оператора L . Розписуючи подвійну суму (43), отримаємо

$$\begin{aligned} F(t) = & -\left[p_1 x_0^{(r-1)} + p_2 x_0^{(r-2)} + \dots + p_r x_0 \right] - \\ & -\left[p_2 x_0^{(r-1)} + p_3 x_0^{(r-2)} + \dots + p_r \dot{x}_0 \right] \frac{t}{1!} - \\ & -\left[p_3 x_0^{(r-1)} + p_4 x_0^{(r-2)} + \dots + p_r \ddot{x}_0 \right] \frac{t^2}{2!} - \dots - \\ & -\left[p_{r-1} x_0^{(r-1)} + p_r x_0^{(r-2)} \right] \frac{t^{(r-2)}}{(r-2)!} - p_r x_0^{(r-1)} \frac{t^{(r-1)}}{(r-1)!}. \end{aligned} \quad (44)$$

Припустимо, що права частина диференціального рівняння (38) має вигляд поліному

$$G_i(t) = \sum_{k=0}^{r-1} b_k \frac{t^k}{k!}. \quad (45)$$

Вимагатимемо рівності функцій (44) та (45) та припустимо рівність коефіцієнтів при однакових степенях аргументу t . В результаті отримаємо наступну систему алгебраїчних рівнянь

$$\begin{aligned} b_{r-1} &= -x_0^{(r-1)} p_r; \\ b_{r-2} &= -x_0^{(r-1)} p_{r-1} - x_0^{(r-2)} p_r; \\ &\dots\dots\dots; \\ b_0 &= -x_0^{(r-1)} p_1 - x_0^{(r-2)} p_2 - \dots - x_0 p_r. \end{aligned} \quad (46)$$

Оскільки матриця рівнянь (46) має трикутний вигляд

$$\begin{pmatrix} p_r & 0 & \dots & 0 \\ p_{r-1} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_1 & p_2 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

тому пошук невідомих легко провести за допомогою методу Гауса, а саме:

$$\begin{aligned} x_0^{(r-1)} &= \frac{b_{r-1}}{p_r}, \\ x_0^{(r-2)} &= \frac{b_{r-2} - \frac{p_{r-1}}{p_r} b_{r-1}}{p_r}, \\ &\dots \end{aligned} \tag{47}$$

Визначивши початкові умови рівняння (40) за формулою (47) отримаємо, що інтегральні рівняння (39) та (42) є еквівалентними. З цього можна зробити висновок про еквівалентність неоднорідних рівнянь з ненульовими початковими умовами (38).

При такому способі рівняння (40) втратить частинний розв'язок, який відповідає правій частині рівняння (38). Оскільки права частина рівняння (38) представлена поліномом (45), то його частинний розв'язок визначає статику системи тобто його рух, як «твердого тіла» та може бути знайдений методом невизначених коефіцієнтів. Висновок пояснимо прикладом.

Приклад 3. Розглянемо трьохмасову систему з вільними кінцями. Нехай до першої маси цієї системи прикладена зовнішня сила $f_1(t)$. Диференціальне рівняння такої системи:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_{12} + \omega_{12}^2 x_{12} - \frac{c_{12}}{m_2} x_{23} &= \frac{c_{12}}{m_1} f_1(t), \\ \ddot{x}_{23} + \omega_{23}^2 x_{23} - \frac{c_{23}}{m_2} x_{12} &= 0, \end{aligned} \tag{48}$$

де $\omega_{12}^2 = c_{12} \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}$, $\omega_{23}^2 = c_{23} \frac{m_2 + m_3}{m_2 m_3}$. Рівняння для визначення пружної сили у вузлі

$$\begin{aligned} x_{12}^{IV} + c_{12} \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} + c_{23} \frac{m_2 + m_3}{m_2 m_3} \ddot{x}_{12} + c_{12} c_{23} \frac{m_1 + m_2 + m_3}{m_1 m_2 m_3} x_{12} &= \\ = \frac{c_{12}}{m_1} \left[\ddot{f}_1(t) + c_{23} \frac{m_2 + m_3}{m_2 m_3} f_1(t) \right], \end{aligned} \tag{49}$$

$$x_{23}^{IV} + c_{12} \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} + c_{23} \frac{m_2 + m_3}{m_2 m_3} \ddot{x}_{23} + c_{12} c_{23} \frac{m_1 + m_2 + m_3}{m_1 m_2 m_3} x_{23} = \frac{c_{12} c_{23}}{m_1 m_2} f_1(t).$$

Для диференціальних рівнянь (48) задані початкові умови для $t = 0$:

$$x_{12}(0) = 0, \quad \dot{x}_{12}(0) = 0, \quad x_{23}(0) = 0, \quad \dot{x}_{23}(0) = 0. \quad (50)$$

З системи (48) при підстановці $t = 0$ та початкових умов (50) знаходимо

$$\ddot{x}_{12}(0) = \frac{c_{12}}{m_1} f_1(0), \quad \ddot{x}_{12}(0) = \frac{c_{12}}{m_1} f_1(0), \quad \ddot{x}_{23}(0) = \ddot{x}_{23}(0) = 0. \quad (51)$$

Нехай $f_1(t) = f_0(t) = const$, тоді початкові умови рівняння (49) з урахуванням значень (50) та рівності (51), будуть наступними:

$$x_{12}(0) = 0, \quad \dot{x}_{12}(0) = 0, \quad \ddot{x}_{12}(0) = \frac{c_{12}}{m_1} f_0, \quad \ddot{x}_{12}(0) = 0, \quad (52)$$

$$x_{23}(0) = 0, \quad \dot{x}_{23}(0) = 0, \quad \ddot{x}_{23}(0) = 0, \quad \ddot{x}_{23}(0) = 0,$$

а праві частини рівняння (49) отримають вигляд:

$$f_{12} = c_{12}c_{23} \frac{m_2 + m_3}{m_1 m_2 m_3} f_0, \quad f_{23} = c_{12}c_{23} \frac{f_0}{m_1 m_2}. \quad (53)$$

Оскільки задані рівняння є неповними, тому що відсутні непарні похідні, то при $r = 4$ коефіцієнти формул (46) будуть наступними: $p_4 = a_1, p_3 = 0, p_2 = a_0, p_1 = 0$.

Разом з цим, праві частини диференціальних рівнянь (53) є постійними величинами і тому коефіцієнти у розкладі функції навантаження (45), за виключенням b_0 , дорівнюватимуть нулю. З урахуванням цієї обставини рівності (46) для першого рівняння (49) з правою частиною f_{12} будуть наступними:

$$\begin{aligned} 0 &= -\ddot{x}_0 a_1, \\ 0 &= -\ddot{x}_0 \cdot 0 - \ddot{x}_0 a_1, \\ 0 &= -\ddot{x}_0 \cdot 0 - \ddot{x}_0 a_0 - \dot{x}_0 a_1, \\ c_{12}c_{23} \frac{(m_2 + m_3) f_0}{m_2 m_3} &= -\ddot{x}_0 \cdot 0 - \ddot{x}_0 a_0 - \dot{x}_0 \cdot 0 - x_0 a_1, \end{aligned} \quad (54)$$

звідки еквівалентні початкові умови мають вигляд

$$\ddot{x}_0 = 0, \quad \ddot{x}_0 = 0, \quad x_0 = -c_{12}c_{23} \frac{m_2 + m_3}{m_1 m_2 m_3} \cdot \frac{f_0}{a_1}.$$

Підставляючи значення a_1 з формули (21) отримаємо

$$x_0 = -\mu_1 f_0, \quad (55)$$

$$\text{де } \mu_1 = \frac{m_2 + m_3}{m_1 + m_2 + m_3}.$$

Еквівалентні початкові умови для правої частини f_{23} знаходяться схоже: $\ddot{x}_0 = 0, \quad \ddot{x}_0 = 0, \quad \dot{x}_0 = 0, \quad x_0 = -c_{12}c_{23} \frac{m_2 + m_3}{m_1 m_2 m_3} \times \frac{f_0}{a_1}$. Розділивши,

знайдемо що $x_0 = -\mu_2 f_0$, де $\mu_2 = \frac{m_3}{m_1 + m_2 + m_3}$.

Запишемо розрахункові початкові умови диференціальних рівнянь у вигляді суми умов (52) та (55):

$$\begin{aligned} x_{12}(0) &= -\mu_1 f_0, \quad \dot{x}_{12}(0) = 0, \quad \ddot{x}_{12}(0) = \frac{c_{12}}{m_1} f_0, \quad \ddot{\ddot{x}}_{12}(0) = 0, \\ x_{23}(0) &= \mu_2 f_0, \quad \dot{x}_{23}(0) = 0, \quad \ddot{x}_{23}(0) = 0, \quad \ddot{\ddot{x}}_{23}(0) = 0. \end{aligned} \quad (56)$$

Розв'язок рівняння (49) при початкових умовах (56) відповідно до (22) буде наступним:

$$\begin{aligned} x_{12} &= -\mu_1 f_0 \left[1 - c_1 B_1^{(-1)}(\tau) \right] + \frac{c_{12} f_0}{m_1 a_0} B_1^{(1)}(\tau), \\ x_{23} &= -\mu_2 f_0 \left[1 - c_1 B_1^{(-1)}(\tau) \right]. \end{aligned} \quad (57)$$

Покажемо, що розв'язок (57) не містить статичних переміщень та відповідно статичної складової пружної сили, яка виникає у ланках системи. Провівши заміну у рівнянні (49) з правими частинами (53)

аргументу $t = \frac{\tau}{\sqrt{a_0}}$, отримаємо

$$\begin{aligned} F_{12}^{IV} + \ddot{F}_{12} + c_1 F_{12} &= c_{12} c_{23} \frac{m_2 + m_3}{m_1 m_2 m_3 a_0^2} f_0, \\ F_{23}^{IV} + \ddot{F}_{23} + c_1 F_{23} &= c_{12} c_{23} \frac{1}{m_1 m_2 a_0^2} f_0. \end{aligned} \quad (58)$$

Перетворюємо праві частини рівнянь (58) наступним чином:

$$f_{12} = c_{12} c_{23} \frac{(m_2 + m_3 + m_1 - m_1)}{m_1 m_2 m_3 a_0^2} f_0 = \frac{a_1}{a_0^2} f_0 - \frac{c_{12} c_{23} m_1}{m_1 m_2 m_3 a_0^2} f_0$$

або

$$\begin{aligned} f_{12} &= c_1 f_0 - \frac{c_{12} c_{23} m_1 (m_1 + m_2 + m_3)}{m_1 m_2 m_3 a_0^2 (m_1 + m_2 + m_3)} = \\ &= c_1 f_0 - c_1 \frac{m_1}{m_1 + m_2 + m_3} f_0. \end{aligned}$$

Звідки

$$\begin{aligned} c_1 \frac{m_2 + m_3}{m_1 + m_2 + m_3} f_0 &= \mu_1 c_1 f_0, \\ f_{23} = \frac{c_{12} c_{23}}{m_1 m_2 a_0^2} f_0 &= c_{12} c_{23} \frac{m_3 (m_2 + m_3 + m_1)}{m_1 m_2 m_3 (m_2 + m_3 + m_1) a_0^2} f_0 = \mu_2 c_1 f_0. \end{aligned} \quad (59)$$

Оскільки диференціальні рівняння вже приведені до аргументу τ , частковий розв'язок у формі Коші наступний

$$x_{12}^* = \mu_1 c_1 \int_0^\tau B(\tau - y) dy = \mu_1 c_1 B^{(-1)}(\tau),$$

$$x_{23}^* = \mu_2 c_1 \int_0^\tau B(\tau - y) dy = \mu_2 c_1 B^{(-1)}(\tau). \quad (60)$$

Частковий розв'язок записаний у формі (60) враховує дію статичних сил. Але величина статичних сил може бути отримана, як частковий розв'язок рівняння (58) знайдений іншим методом.

Наприклад, при постійних правих частинах рівняння (58) доцільно шукати часткові розв'язки також у вигляді постійних величин x_{12}^* та x_{23}^* .

Підставляємо постійну величину x_{12}^* у ліву частину першого рівняння системи (58) та враховуючи значення правої частини рівності (59), знаходимо $c_1 F_{12}^* = \mu_1 c_1 f_0$, або

$$x_{12}^* = \mu_1 f_0. \quad (61)$$

Якщо врахувати прискорення системи, як твердого тіла, тоді

$$(x_{12})_{cm} = f_0 - \mu_1 f_0 = f_0 (1 - \mu_1),$$

$$\text{де } \mu_1 = \frac{m_1}{m_1 + m_2 + m_3}.$$

$$\text{Тому } (x_{12})_{cm} = f_0 \left(1 - \frac{m_1}{m_1 + m_2 + m_3} \right).$$

Таким чином, форма часткового розв'язку (61) визначає статичну складову дії пружної сили у ланці. Так само визначимо, що для правої частини (59) частковий розв'язок другого рівняння (58)

$$x_{23}^* = (x_{23})_{cm} = \mu_2 f_0. \quad (62)$$

Запишемо загальний розв'язок рівняння (58) для заданих початкових умов (52) з врахуванням (60):

$$x_{12} = \frac{c_{12}}{m_1 a_0} f_0 B_1^{(1)}(\tau) + \mu_1 f_0 c_1 B_1^{(-1)}(\tau),$$

$$x_{23} = \mu_2 f_0 c_1 B_1^{(-1)}(\tau). \quad (63)$$

Ці розв'язки відрізняються від розв'язків (57) тільки на величини (61) та (62). Додаючи до правої частини рівності (57) величини статичних сил (61) та (62), отримуємо формули (63). Тому у наведеному неоднорідному рівнянні початковими умовами не враховані лише статичні складові розв'язку.

Висновки. Отже, задача визначення зовнішніх збурень на динамічну систему еквівалентних дії початкових значень вихідних координат системи, розв'язана використовуючи інтегральну форму задачі Коші.

Запропонований метод дозволяє розв'язувати як прямі так і обернені задачі аналізу багатомасових систем.

Список використаних джерел:

1. Бадалов Ф. Б., Абдукаримов Р. Х., Худаяров Б. А. Численное исследование влияния реологических параметров на характер колебаний наследственно-деформируемых систем. *Вычислительные технологии*. 2007. Т. 12. № 4. С. 17-26. ISSN 1560-7534.
2. Верлань А. Ф., Сизиков В. С. Интегральные уравнения: Методы, алгоритмы, программы: Справочное пособие. Киев: Наукова думка, 1986. 545 с.
3. Дячук О. А. Перетворення моделей динамічних систем. *Наукові праці Донецького національного технічного університету. Серія «Інформатика, кібернетика і обчислювальна техніка»*. Донецьк: ДонНТУ, 2007. Вип. 8 (120). С. 99-106.
4. Партон В. З., Морозов Е. М. Интегральные уравнения теории упругости. М.: Наука, 1985. 504 с.
5. Победря Б. Е. Математическая теория нелинейной вязкоупругости. *Сборник Упругость и неупругость*. М.: Изд-во МГУ, 1973. Вип. 3. С. 95-173.
6. Федорчук В. А. Интегральный метод математического моделирования некоторых видов объектов с распределенными параметрами. *Збірник наукових праць ІПМЕ ім. Г. Є. Пухова*. 2005. Вип. 28. С. 25-31. ISSN XXXX-0067.
7. Day J. T. Note on the numeric solution of integro-differential equations. URL: <http://comjnl.oxfordjournals.org/content/9/4/394.full.pdf+html>.
8. Feldstein A., Sopka J. R. Numerical methods for nonlinear Volterra integrodifferential equations. *SIAM Journal on Numerical Analysis*. 1974. № 11. P. 826-846. ISBN 0036-1429.
9. Hochstadt H. *Integral Equations*. New York: John Wiley & Sons, 1973. 282 p. ISBN 0-471-50404-1.
10. Tiller M. *Introduction to physical modeling with Modelica*. NY.: Springer, 2001. 344 p. ISBN 0-79-239005-9.
11. Linz P. Linear multistep methods for Volterra integro-differential equations. *Journal of the Association of Computing Machinery*. 1969. № 16. P. 295-301. ISSN 0004-5411.
12. Porter D., Stirling D. S. G. *Integral Equations: A Practical Treatment, from spectral theory to applications*. Cambridge: Cambridge University Press, 1990. 372 p. ISBN 0-52-133742-9.
13. Quarteroni A., Sacco R., Saleri F. *Numerical Mathematics*. New York: Springer-Verlag, 2000. 655 p. ISBN 9-78-354034-65-86.
14. Riley K. F., Hobson M. P., Bence S. J. *Mathematical Methods for Physics and Engineering*. New York: Cambridge university press, 2006. 1333 p. ISBN 0-52-189067-5.
15. Wang Y. Spline integral equation method for analysis of variable thickness plate. *Comput. Struct. Mech. and Appl.* 1991. № 1. P. 33-40.

16. Problems of electrical engineering, Lviv, Ukraine: Lviv Polytechnic National University, 2016. Vol. 6, № 1. P. 9-16.

EQUIVALENT TRANSFORMATIONS OF MATHEMATICAL MODELS OF VISCOELASTIC DYNAMIC OBJECTS

The article is devoted to the problem of obtaining computationally efficient mathematical models of dynamic objects with viscoelastic properties on the basis of equivalent transformations of primary mathematical descriptions in the form of integro-differential equations to Volterra integral equations. This takes into account the significantly growing in recent years, the possibilities of computer engineering and software engineering, as well as the positive properties of integral models in their numerical implementation: computational stability, good convergence, resistance to high-frequency spectra of noise, a computational efficiency. Methods of transformation of dynamic models are given, which allow to reduce integro-differential equations to integral equations with Volterra operator, which simplifies the problem of creating modelling algorithms. In particular, the application of integral models in computer modelling problems, which are obtained from primary integro-differential models using the following methods of equivalent transformations: the method of variation of constants, the method of senior derivative, the modified method of substituting variables, which in numerical implementation using quadrature formulas allows to obtain recurrent formulas. An example of application of this method is given. The possibility of solving the direct and inverse problem of determining the impact on a multimass system using the integral form of the Cauchy problem is demonstrated. It is shown that the problem of developing more complete and thorough mathematical models of dynamical systems, namely in the form of integro-differential equations, is important and relevant, and their numerical implementation is necessary for a wide range of applied modelling problems.

Key words: *viscoelastic dynamic object model, integral model, equivalent model transformations*

Отримано: 25.09.2020

УДК 517.929

DOI: 10.32626/2308-5878.2020-21.164-173

І. М. Червко, д-р фіз.-мат. наук, професор,**А. Б. Дорош**, канд. фіз.-мат. наук,**А. С. Перцов**, канд. фіз.-мат. наук,**І. М. Гаюк**, аспірантЧернівецький національний університет
імені Юрія Федьковича, м. Чернівці

МОДЕЛЮВАННЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯНЬ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПУ

У задачах космічної навігації, оптимальному керуванні системами з післядією, задачах екології та імунології виникають крайові задачі для диференціально-різницевих та інтегро-диференціальних рівнянь із запізненням, які є важливим розділом сучасної теорії диференціально-функціональних рівнянь. Знаходження точних розв'язків крайових задач для диференціально-різницевих рівнянь можливе тільки для найпростіших класів таких задач.

На даний час для крайових задач із запізненням та нейтрального типу запропоновано проєкційно-ітераційні методи, чисельно-аналітичний метод та інші. Метод сплайн-колокацій для розв'язування крайових задач для диференціально-різницевих рівнянь є одним із найефективніших алгоритмів, що дозволяє побудувати прості обчислювальні схеми.

У роботі досліджується схема моделювання крайових задач для лінійних диференціально-різницевих рівнянь нейтрального типу із багатьма змінними відхиленнями аргументу. Визначено функціональний простір, якому належать розв'язки розглянутих крайових задач, досліджено властивості гладкості розв'язків залежно від структури відхилень аргументу. Наведено прості для перевірки достатні умови існування розв'язку крайової задачі.

Для знаходження розв'язку крайової задачі запропоновано ітераційну обчислювальну схему, що базується на методі сплайн-апроксимацій. Для врахування можливих розривів похідних розв'язків крайової задачі для рівнянь нейтрального типу застосовуються кубічні сплайни дефекту два. Встановлено коефіцієнтні умови на вихідне рівняння, що забезпечують збіжність ітераційного процесу. Здійснено оцінку похибки знаходження наближеного розв'язку.

У роботі наведено модельний приклад крайової задачі для диференціально-різницевого рівняння нейтрального типу, на якому продемонстровано запропоновану ітераційну схему. Чисельні експерименти підтверджують одержані теоретичні результати.

Ключові слова: *крайова задача, диференціально-різницеве рівняння, нейтральний тип, метод сплайн-апроксимації.*

Вступ. Крайові задачі для диференціально-різницевих рівнянь виникають при дослідженні варіаційних задач та задач автоматичного керування системами з післядією. При цьому важливими є дослідження розв'язності таких крайових задач та вивчення властивостей їх розв'язків.

Умови існування розв'язків крайових задач для різних класів диференціально-різницевих рівнянь розглядалися у працях [1-3]. Достатні умови існування розв'язку крайової задачі для інтегродиференціальних рівнянь нейтрального типу досліджено в [4].

Точні розв'язки крайових задач для диференціально-різницевих рівнянь можна знайти тільки для найпростіших класів таких рівнянь, тому важливою і актуальною є розробка наближених алгоритмів їх знаходження.

Метод сплайн-колокацій для розв'язування крайових задач із запізненням та нейтрального типу розглядався в [3, 5, 6].

У роботі для крайової задачі для лінійних диференціально-різницевих рівнянь нейтрального типу запропоновано ітераційну схему із застосуванням кубічних сплайнів дефекту два, яка дозволяє врахувати можливі розриви похідних у розв'язках.

Постановка задачі. Існування та єдиність розв'язку. Розглянемо крайову задачу

$$y''(x) = \sum_{i=0}^n (a_i(x) y(x - \tau_i(x)) + b_i(x) y'(x - \tau_i(x)) + c_i(x) y''(x - \tau_i(x))) + f(x), \quad (1)$$

$$y^{(p)}(x) = \varphi^{(p)}(x), \quad p = 0, 1, 2, \quad x \in [a^*; a], \quad y(b) = \gamma, \quad (2)$$

де запізнення $\tau_0(x) = 0$, а $\tau_i(x), i = \overline{1, n}$ — неперервні невід'ємні функції, визначені на $[a, b]$, $\varphi(x)$ — задана двічі неперервно-диференційовна функція на $[a^*; a]$, $\gamma \in R$,

$$a^* = \min_{0 < i \leq n} \left\{ \inf_{x \in [a; b]} (x - \tau_i(x)) \right\}.$$

Нехай функції $a_i(x), b_i(x), c_i(x), i = \overline{0, n}, f(x)$ — неперервні на $[a; b]$.

Введемо множини точок, що визначаються запізненнями $\tau_1(x), \dots, \tau_n(x)$:

$$E_{j1} = \{x_j \in [a, b] : x_j - \tau_j(x_j) = a, j = 1, 2, \dots\},$$

$$E_{i2} = \{x_j \in [a, b] : x_0 = a, x_{j+1} - \tau_i(x_{j+1}) = x_j, j = 0, 1, 2, \dots\},$$

$$E_2 = \bigcup_{i=1}^n (E_{i1} \cup E_{i2}).$$

Припустимо, що запізнення $\tau_i(x), i = \overline{1, n}$ — такі функції, що множини $E_{i1}, E_{i2}, i = \overline{1, n}$ є скінченними. Занумеруємо точки множини E_2 в порядку зростання.

Введемо позначення:

$$J = [a^*; a], I = [a, b],$$

$$I_1 = [a, x_1], I_2 = [x_1, x_2], \dots, I_k = [x_{k-1}, x_k], I_{k+1} = [x_k, b],$$

$$B_2(J \cup I) = \{y(x) : y(x) \in (C(J \cup I) \cap (C^1(J) \cup C^1(I))) \cap$$

$$\cap (\bigcup_{j=1}^{k+1} C^2(I_j)), |y(x)| \leq P_1, |y'(x)| \leq P_2, |y''(x)| \leq P_3\},$$

де P_1, P_2, P_3 — додатні сталі.

Розв'язком крайової задачі (1)-(2) вважатимемо функцію $y = y(x)$, якщо вона задовольняє рівняння (1) на $[a; b]$ (за можливим винятком точок множини E_2) і крайові умови (2). Будемо шукати розв'язок задачі (1)-(2), який належить простору $B_2(J \cup I)$.

Із означення простору $B_2(J \cup I)$ випливає, що розв'язок задачі (1)-(2) буде неперервно-диференційовним для будь-якого $x \in [a, b]$, де $y'(a)$ — права похідна, а в точках множини E_2 існують скінченні односторонні другі похідні розв'язку, які можуть не співпадати.

Обчислювальна схема. Збіжність ітераційного процесу. Виберемо нерівномірну сітку $\Delta = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_m = b\}$ на відрізку $[a; b]$, таку що $E_2 \subset \Delta$. Позначимо через $S(x, y)$ інтерполяційний кубічний сплайн дефекту два на Δ для функції $y(x)$, який належить простору $B_2(J \cup I)$. Будемо шукати розв'язок крайової задачі (1)-(2) у вигляді послідовності кубічних сплайнів дефекту 2 за наступною схемою:

A. Виберемо кубічний сплайн $S(y^{(0)}, x) = \frac{\gamma - \varphi(a)}{b - a}(x - a) + \varphi(a)$,

який задовольняє крайові умови (2) при $x = a$ та $x = b$.

B. Використовуючи вихідне рівняння (1) та сплайн $S(y^{(k)}, x)$, знаходимо для $k = 0, 1, \dots$:

$$M_j^{+(k+1)} = \sum_{i=0}^n (a_i(x_j)S(y^{(k)}, x_j - \tau_i(x_j) + 0) + b_i(x_j)S'(y^{(k)}, x_j - \tau_i(x_j) + 0) + c_i(x_j)S''(y^{(k)}, x_j - \tau_i(x_j) + 0)) + f(x_j), j = \overline{0, m-1}, \quad (3)$$

$$M_j^{-(k+1)} = \sum_{i=0}^n (a_i(x_j)S(y^{(k)}, x_j - \tau_i(x_j) - 0) + b_i(x_j)S'(y^{(k)}, x_j - \tau_i(x_j) - 0) + c_i(x_j)S''(y^{(k)}, x_j - \tau_i(x_j) - 0)) + f(x_j), j = \overline{1, m}. \quad (4)$$

У співвідношеннях (3)-(4), підставляємо $S^{(p)}(x, y^{(k)}) = \varphi^{(p)}(x)$, $p = 0, 1, 2$ при $x < a$.

С. Обчислюємо $y_j^{(k+1)}$, $j = \overline{0, m}$, розв'язуючи систему лінійних алгебраїчних рівнянь, яку задовольняють величини M_{j-1}^+ і M_j^- ($j = 1, 2, \dots, m$).

$$\begin{cases} h_{j+1}y_{j-1} - (h_j + h_{j+1})y_j + h_jy_{j+1} = \frac{h_jh_{j+1}}{6} \times \\ \times (h_jM_{j-1}^+ + 2h_jM_j^- + 2h_{j+1}M_j^+ + h_{j+1}M_{j+1}^-), \\ j = \overline{1, m-1}. \end{cases} \quad (5)$$

Д. Одержуємо кубічний сплайн $S(x, y^{(k+1)})$ у формі

$$S(x, y) = M_{j-1}^+ \frac{(x_j - x)^3}{6h_j} + M_j^- \frac{(x - x_{j-1})^3}{6h_j} + \left(y_{j-1} - \frac{M_{j-1}^+h_j^2}{6} \right) \frac{x_j - x}{h_j} + \left(y_j - \frac{M_j^-h_j^2}{6} \right) \frac{x - x_{j-1}}{h_j}, x \in [x_{j-1}; x_j], j = 1, 2, \dots, m, \quad (6)$$

використовуючи знайдені значення $y_j^{(k+1)}$, $j = \overline{0, m}$, $M_j^{+(k+1)}$, $j = \overline{0, m-1}$, $M_j^{-(k+1)}$, $j = \overline{1, m}$. Цей сплайн виступає в якості наступного наближення.

Введемо позначення:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \sum_{i=0}^n \max_{x \in [a; b]} |a_i(x)|, \lambda_2 = \sum_{i=0}^n \max_{x \in [a; b]} |b_i(x)|, \lambda_3 = \sum_{i=0}^n \max_{x \in [a; b]} |c_i(x)|, \\ u &= \frac{K^5}{8}(b-a)^2 + \frac{H^2}{8}, v = \frac{K^5}{2}(b-a) + \frac{2H}{3}, \\ \mu &= 5 \left(1 + \frac{1}{2} \lambda_1 H^2 + \lambda_2 H + \lambda_3 \right). \end{aligned} \quad (7)$$

Теорема. Нехай розв'язок крайової задачі (1)-(2) існує та належить простору $B_2(J \cup I)$. Тоді при виконанні нерівності

$$\theta = u\lambda_1 + v\lambda_2 + \lambda_3 < 1 \quad (8)$$

існує таке H^* , що при всіх $0 < H < H^*$ послідовність сплайнів $\{S(y^{(k)}, x)\}$, $k = 0, 1, \dots$ рівномірно збігається на $[a; b]$ і справджується співвідношення

$$\left\| \lim_{k \rightarrow \infty} S^{(p)}(y^{(k)}, x) - y^{(p)}(x) \right\| \leq R_p \omega(y''(x), H), \quad p = 0, 1, 2, \quad (9)$$

$$R_0 = \sup_{H \leq H^*} \left(\frac{u\mu}{1-\theta} + \frac{5H^2}{2} \right), \quad R_1 = \sup_{H \leq H^*} \left(\frac{v\mu}{1-\theta} + 5H \right),$$

$$R_2 = \sup_{H \leq H^*} \left(\frac{\mu}{1-\theta} + 5 \right), \quad \omega(y''(x), H) = \max_{1 \leq r \leq l+1} \omega_r(y''(x), H).$$

Доведення. Покажемо, що ряди

$$S^{(p)}(y^{(0)}, x) + \sum_{i=1}^{\infty} \left[S^{(p)}(y^{(i)}, x) - S^{(p)}(y^{(i-1)}, x) \right], \quad p = 0, 1, 2$$

рівномірно збігаються на $[a; b]$, і тим самим одержимо рівномірну збіжність послідовностей $S^{(p)}(y^{(k)}, x)$, $k = 0, 1, \dots$, $p = 0, 1, 2$.

Визначимо скалярні функції $y(x), M(x)$ на $[a; b]$ і позначимо вектори

$$\begin{aligned} \bar{y} &= (y(x_1), \dots, y(x_{m-1}))^T, \\ \bar{M} &= (M(x_0 + 0), M(x_1 - 0), M(x_1 + 0), \dots, M(x_{m-1} - 0), \\ &M(x_{m-1} + 0), M(x_m - 0))^T. \end{aligned}$$

Ітераційний алгоритм A)-D) представимо у матричній формі:

$$\bar{y}^{(k+1)} = A^{-1} B \bar{M}^{k+1} + A^{-1} d, \quad (10)$$

де компоненти вектора \bar{M} визначені згідно (3)-(4), а сталий вектор d залежить лише від крайових умов (2). Легко помітити, що матриця A — невинроджена, отже побудова ітераційної послідовності кубічних сплайнів $S(y^{(k)}, x)$, $k = 0, 1, \dots$ можлива.

Із представлення (10) випливають наступні оцінки:

$$\left\| y^{(k+1)} - y^{(k)} \right\| = \left\| A^{-1} B M^{k+1} - A^{-1} B M^k \right\| \leq \left\| A^{-1} \right\| \left\| B \right\| \left\| \bar{M}^{k+1} - \bar{M}^k \right\|. \quad (11)$$

Враховуючи (3)-(4) та вигляд правої частини рівняння (1), одержуємо нерівності

$$\begin{aligned}
 & \left\| M_j^{+(k+1)} - M_j^{+(k)} \right\| \leq \lambda_1 \max_{x \in [a; b]} \left| S \left(y^{(k)}, x \right) - S \left(y^{(k-1)}, x \right) \right| + \\
 & \quad + \lambda_2 \max_{x \in [a; b]} \left| S' \left(y^{(k)}, x \right) - S' \left(y^{(k-1)}, x \right) \right| + \\
 & \quad + \lambda_3 \max_{x \in [a; b]} \left| S'' \left(y^{(k)}, x \right) - S'' \left(y^{(k-1)}, x \right) \right|, j = \overline{0, m-1}, \\
 & \left\| M_j^{-(k+1)} - M_j^{-(k)} \right\| \leq \lambda_1 \max_{x \in [a; b]} \left| S \left(y^{(k)}, x \right) - S \left(y^{(k-1)}, x \right) \right| + \\
 & \quad + \lambda_2 \max_{x \in [a; b]} \left| S' \left(y^{(k)}, x \right) - S' \left(y^{(k-1)}, x \right) \right| + \\
 & \quad + \lambda_3 \max_{x \in [a; b]} \left| S'' \left(y^{(k)}, x \right) - S'' \left(y^{(k-1)}, x \right) \right|, j = \overline{1, m}.
 \end{aligned} \tag{12}$$

Нерівність (11) можна записати наступним чином:

$$\begin{aligned}
 & \left\| y^{(k+1)} - y^{(k)} \right\| \leq \frac{K^5}{8} (b-a)^2 \left[\lambda_1 \left\| S \left(y^{(k)}, x \right) - S \left(y^{(k-1)}, x \right) \right\| + \right. \\
 & \quad \left. + \lambda_2 \left\| S' \left(y^{(k)}, x \right) - S' \left(y^{(k-1)}, x \right) \right\| + \lambda_3 \left\| S'' \left(y^{(k)}, x \right) - S'' \left(y^{(k-1)}, x \right) \right\| \right].
 \end{aligned} \tag{13}$$

Позначимо

$$\begin{aligned}
 d = \lambda_1 \left\| S \left(y^{(k)}, x \right) - S \left(y^{(k-1)}, x \right) \right\| + \lambda_2 \left\| S' \left(y^{(k)}, x \right) - S' \left(y^{(k-1)}, x \right) \right\| + \\
 + \lambda_3 \left\| S'' \left(y^{(k)}, x \right) - S'' \left(y^{(k-1)}, x \right) \right\|.
 \end{aligned}$$

Ітеруючи нерівність (13) і враховуючи позначення (7) та умову (8), одержуємо

$$\begin{aligned}
 & \left\| S \left(y^{(k+1)}, x \right) - S \left(y^{(k)}, x \right) \right\| \leq u \theta^{k-1} d, \\
 & \left\| S' \left(y^{(k+1)}, x \right) - S' \left(y^{(k)}, x \right) \right\| \leq v \theta^{k-1} d, \\
 & \left\| S'' \left(y^{(k+1)}, x \right) - S'' \left(y^{(k)}, x \right) \right\| \leq \theta^{k-1} d.
 \end{aligned} \tag{14}$$

Співвідношення (14), при виконанні умови (8), забезпечують збіжність послідовностей сплайнів $\left\{ S^{(p)} \left(y^{(k)}, x \right) \right\}, k = 0, 1, \dots, p = 0, 1, 2$.

Позначимо

$$\begin{aligned}
 \lim_{k \rightarrow \infty} S^{(p)} \left(y^{(k)}, x \right) &= S^{(p)} \left(\tilde{y}, x \right), p = 0, 1, 2, \\
 M_j^+ &= S'' \left(\tilde{y}, x_j + 0 \right), j = \overline{0, m-1}, \\
 M_j^- &= S'' \left(\tilde{y}, x_j - 0 \right), j = \overline{1, m}, \\
 y_j &= S \left(\tilde{y}, x_j \right), j = \overline{1, m}.
 \end{aligned}$$

При цьому

$$M_j^+ = \sum_{i=0}^n (a_i(x_j)S(\tilde{y}, x_j - \tau_i(x_j) + 0) + b_i(x_j)S'(\tilde{y}, x_j - \tau_i(x_j) + 0) + c_i(x_j)S''(\tilde{y}, x_j - \tau_i(x_j) + 0)) + f(x_j), j = \overline{0, m-1},$$

$$M_j^- = \sum_{i=0}^n (a_i(x_j)S(\tilde{y}, x_j - \tau_i(x_j) - 0) + b_i(x_j)S'(\tilde{y}, x_j - \tau_i(x_j) - 0) + c_i(x_j)S''(\tilde{y}, x_j - \tau_i(x_j) - 0)) + f(x_j), j = \overline{1, m}.$$

Параметри M_j^+ , M_j^- сплайна $S(\tilde{y}, x)$ задовольняють систему (5) та рівняння (3)-(4).

Нехай $S(y, x)$ — кубічний сплайн дефекту 2, який інтерполює розв'язок $y(x)$ крайової задачі (1)-(2). Тоді

$$\begin{aligned} \left\| S^{(p)}(\tilde{y}, x) - y^{(p)}(x) \right\| &\leq \left\| S^{(p)}(\tilde{y}, x) - S^{(p)}(y, x) \right\| + \\ &+ \left\| S^{(p)}(y, x) - y^{(p)}(x) \right\|, p = 0, 1, 2. \end{aligned} \quad (15)$$

Для другого доданка у правій частині (15) справджуються нерівності [7]:

$$\begin{aligned} \left\| S^{(p)}(y, x) - y^{(p)}(x) \right\| &\leq K_p H^{2-p} \omega(y''(x), H), \\ p = 0, 1, 2, K_0 &= \frac{5}{2}, K_1 = K_2 = 5, \end{aligned} \quad (16)$$

де $\omega(y''(x), H) = \max_{1 \leq r \leq k+1} \omega_r(y''(x), H)$, $\omega_r(y''(x), H)$ — модуль неперервності функції $y''(x)$ на $I_r = [x_{r-1}; x_r]$.

Для оцінки першого доданка у правій частині (15), згідно вигляду правої частини рівняння (1), введемо позначення:

$$\begin{aligned} \max_{x \in [a; b]} \left| S^{(p)}(\tilde{y}, x) - S^{(p)}(y, x) \right| &= \alpha_p, p = 0, 1, 2, \\ \max_j \left| M_j - M_j^+ \right| &= \max \left\{ \max_{j=0, m-1} \left| M_j^+ - M_j^+ \right|, \max_{j=1, m} \left| M_j^- - M_j^- \right| \right\}. \end{aligned}$$

Враховуючи структуру правих частин рівнянь (3) та (4), дістаємо оцінки:

$$\left| M_j^+ - M_j^+ \right| \leq \lambda_1 \alpha_0 + \lambda_2 \alpha_1 + \lambda_3 \alpha_2 + \mu \omega(y''(x), H), j = \overline{0, m-1}, \quad (17)$$

$$\left| M_j^- - M_j^- \right| \leq \lambda_1 \alpha_0 + \lambda_2 \alpha_1 + \lambda_3 \alpha_2 + \mu \omega(y''(x), H), j = \overline{1, m}. \quad (18)$$

Нескладно показати, що має місце оцінка

$$|y_j - y_j| \leq \frac{K^5}{8} (b-a)^2 \max \left\{ \max_{j=0, m-1} |M_j^+ - M_j^+|, \max_{j=1, m} |M_j^- - M_j^-| \right\}. \quad (19)$$

Використовуючи формули для $S(\tilde{y}, x), S(y, x)$ та нерівності (17)-(19), отримуємо наступну систему нерівностей:

$$\begin{aligned} \alpha_0 &\leq u(\alpha_0 \lambda_1 + \alpha_1 \lambda_2 + \alpha_2 \lambda_3 + \mu \omega(y''(x), H)), \\ \alpha_1 &\leq v(\alpha_0 \lambda_1 + \alpha_1 \lambda_2 + \alpha_2 \lambda_3 + \mu \omega(y''(x), H)), \\ \alpha_2 &\leq \alpha_0 \lambda_1 + \alpha_1 \lambda_2 + \alpha_2 \lambda_3 + \mu \omega(y''(x), H). \end{aligned} \quad (20)$$

Розв'язуючи систему (20), знаходимо оцінки для перших доданків у правій частині (15):

$$\begin{aligned} \alpha_0 &\leq \frac{u \mu \omega(y''(x), H)}{1 - \theta}, \\ \alpha_1 &\leq \frac{v \mu \omega(y''(x), H)}{1 - \theta}, \\ \alpha_2 &\leq \frac{\mu \omega(y''(x), H)}{1 - \theta}. \end{aligned}$$

Тепер, враховуючи (16), нерівності (15) можна записати у вигляді (9).

Теорему доведено.

Зауваження. При використанні описаного алгоритму розв'язування крайових задач (1)-(2) за наближений розв'язок вибирається $S(y^{(k)}, x)$ при деякому $k > 0$. Оцінимо похибку, яка буде при цьому допущена. Із нерівностей (14) маємо:

$$\left\| S^{(p)}(y^{(k+j)}, x) - S^{(p)}(y^{(k)}, x) \right\| \leq \theta^{k-1} \max(u, v, 1) d \frac{1 - \theta^j}{1 - \theta}, \quad p = 0, 1, 2.$$

Нехай $H < H^*$. Тоді з попередньої нерівності одержуємо:

$$\left\| S^{(p)}(\tilde{y}, x) - S^{(p)}(y^{(k)}, x) \right\| \leq \frac{\theta^{k-1}}{1 - \theta} \max(u, v, 1) d.$$

Отже, для довільного $\varepsilon > 0$ існує кількість ітерацій k_0 , така що при $k > k_0$

$$\left\| S^{(p)}(\tilde{y}, x) - S^{(p)}(y^{(k)}, x) \right\| \leq \varepsilon, \quad p = 0, 1, 2.$$

Тоді при $k > k_0$ і виконанні умов теореми одержуємо оцінку похибки

$$\left\| S^{(p)}(y^{(k)}, x) - y^{(p)}(x) \right\| \leq \varepsilon + K_p \omega(y''(x), H), \quad p = 0, 1, 2. \quad (21)$$

Приклад. Розглянемо крайову задачу для рівняння нейтрального типу:

$$y''(x) = \frac{1}{4}y''(x-1) + 1, x \in [0; 2],$$

$$y(x) = x, y'(x) = 1, y''(x) = 0, x \in [-1; 0], y(2) = \frac{5}{2}.$$

Точний розв'язок $y(x)$ було знайдено методом кроків. Наближений розв'язок, згідно запропонованої в роботі ітераційної схеми, $y_s^{20}(x)$ та $y_s^{40}(x)$ одержано на 2-й ітерації при 20 та 40 точках розбиття відрізка відповідно. Δ_s^{20} та Δ_s^{40} — абсолютні похибки наближених розв'язків. Результати наведено в таблиці 1.

Таблиця 1

x	$y(x)$	$y_s^{20}(x)$	Δ_s^{20}	$y_s^{40}(x)$	Δ_s^{40}
0.5	0.21875	0.21552	0.00323	0.21716	0.00159
1	0.6875	0.68146	0.00604	0.68443	0.00307
1.5	1.4375	1.43448	0.00302	1.43596	0.00154

При порівнянні точного та наближеного розв'язків видно, що абсолютна похибка при 20 точках розбиття не перевищує 0,006, а відносна — 0,8%, а при 40 точках розбиття абсолютна похибка не перевищує 0,003, а відносна — 0,4%.

Висновки. Застосування методу сплайн-апроксимацій із використанням кубічних сплайнів дефекту два дозволяє побудувати зручні для реалізації та ефективні алгоритми розв'язання крайових задач для рівнянь нейтрального типу. Одержані достатні умови збіжності обчислювальної схеми є простими для перевірки. Здійснені числові експерименти для модельного прикладу підтверджують одержані в роботі теоретичні результати.

Список використаних джерел:

1. Grim L. J., Schmitt K. Boundary Value Problems for Delay Differential Equations. *Bull. Amer. Math. Soc.* 1968. Vol. 74, № 5. P. 997-1000.
2. Каменский Г. А., Мышкин А. Д. Краевые задачи для нелинейного дифференциального уравнения с отклоняющимся аргументом нейтрального типа. *Дифференц. уравнения.* 1972. Т. 8, № 12. С. 2171-2179.
3. Cherevko I., Dorosh A. Existence and Approximation of a Solution of Boundary Value Problems for Delay Integro-Differential Equations. *J. Numer. Anal. Approx. Theory.* 2016. Vol. 44, № 2. P. 154-165.
4. Дорош А. Б., Черевко І. М. Існування розв'язку крайової задачі для інтегро-диференціальних рівнянь нейтрального типу. *Буковинський математичний журнал.* 2017. Т. 19, № 1. С. 11-16.

- тичний журнал*. Чернівці: Чернівецький національний університет, 2016. Т. 4, № 3-4. С. 43-46.
5. Nikolova T. S., Vainov D. D. Application of spline-functions for the construction of an approximate solution of boundary problems for a class of functional-differential equations. *Yokohama Math. J.* 1981. Vol. 29, № 1. P. 108-122.
 6. Настасьєва Н. П., Черевко І. М. Кубічні сплайни дефекту 2 та їх застосування до крайових задач. *Вісник Київського університету. Серія: Фізико-математичні науки*. 1999. Вип. 1. С. 69-73.
 7. Alberg J., Nilson E., Walsh J. The theory of splines and their applications. New York: Academic, 1967. 296 p.

MODELING OF BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR LINEAR NEUTRAL DELAY DIFFERENTIAL-DIFFERENCE EQUATIONS

In space navigation problems, optimal control of systems with aftereffect, ecology and immunology problems, boundary value problems for differential-difference and integro-differential equations with delays arise, which are an important part of modern theory of differential-functional equations. Finding precise solutions of boundary value problems for differential-difference equations is possible only for the simplest classes of such problems.

At present, projection-iterative methods, numerical-analytical method and others are suggested for boundary value problems with delay and of neutral type. The spline-collocation method for solving boundary value problems for differential-difference equations is one of the most efficient algorithms that allows building simple computational schemes.

In this paper, we investigate the scheme of modeling boundary value problems for linear differential-difference equations of neutral type with many variable deviations of the argument. A functional space is defined to which the solutions of the considered boundary value problems belong, the properties of the solution smoothness are investigated depending on the structure of the argument deviations. Simple and verifiable sufficient conditions for the boundary value problem solution existence are given.

For finding the solution of the boundary value problem, an iterative computational scheme based on the spline approximation method is described. In order to take into account possible discontinuities of the boundary value problem solution derivatives, cubic splines of defect two are used for neutral-type equations. Coefficient conditions for the initial equation which ensure the convergence of the iterative process are obtained. An estimate of the approximate solution error is conducted.

A model example of a boundary value problem for a neutral type differential-difference equation is presented on which the iterative scheme is demonstrated. Numerical experiments confirm the obtained theoretical results.

Key words: *boundary value problem, differential-difference equation, neutral type, spline approximation method.*

Отримано: 12.10.2020

ВІДОМОСТІ ПРО АВТОРІВ

Бак Сергій Миколайович — кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри математики та інформатики Вінницького державного педагогічного університету імені Михайла Коцюбинського, м. Вінниця, Sergiy.bak@gmail.com

Бігун Ярослав Йосипович — доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри прикладної математики та інформаційних технологій Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича, м. Чернівці, y.bihun@chnu.edu.ua

Верлань Андрій Анатолійович — доктор технічних наук, Норвезький університет науки і технологій, м. Йовік, Норвегія, Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», м. Київ

Верлань Анатолій Федорович — доктор технічних наук, професор, член кореспондент НАПН України, Інститут проблем моделювання в енергетиці імені Г. Є. Пухова НАН України, м. Київ, a.f.verlan@gmail.com

Верлань Дмитро Анатолійович — кандидат технічних наук, ТОВ «Науково-виробниче підприємство «ІНФОТЕХ», м. Київ

Вотякова Леся Андріївна — кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри алгебри і методики навчання математики Вінницького державного педагогічного університету імені Михайла Коцюбинського, м. Вінниця, tomusiak.lesia@gmail.com

Гаюк Іван Миколайович — аспірант кафедри математичного моделювання Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича, м. Чернівці, ivan.gauk.777@gmail.com

Геселева Катерина Григорівна — аспірант Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський, geseleva1702@gmail.com

Гнатюк Василь Олексійович — кандидат фізико-математичних наук, доцент, професор кафедри математики Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

Гоянюк Іван Васильович — аспірант Тернопільського національного технічного університету імені Івана Пулюя, м. Тернопіль, ivan.goyanyuk@gmail.com

Громик Андрій Петрович — кандидат технічних наук, доцент, завідувач кафедри математичних дисциплін і моделювання Подільського державного аграрно-технічного університету, м. Кам'янець-Подільський, garpon74@gmail.com

Гудима Уляна Василівна — кандидат фізико-математичних наук, доцент, завідувач кафедри математики Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

Гук Наталія Анатоліївна — доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри комп'ютерних технологій Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара, м. Дніпро, natalyuk29@gmail.com

Диханов Станіслав Віталійович — аспірант Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара, м. Дніпро, dykhanovstas@gmail.com

Долотов Іван Олександрович — магістрант Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара, м. Дніпро, vadol@ua.fm

Дорош Андрій Богданович — кандидат фізико-математичних наук, асистент кафедри математичного моделювання Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича, м. Чернівці, a.dorosh@chnu.edu.ua

Дячук Олександр Анатолійович — кандидат технічних наук, старший науковий співробітник, провідний науковий співробітник Державної установи «Інститут економіки та прогнозування НАН України», м. Київ, oadyachuk@ukr.net

Іванюк Віталій Анатолійович — доктор технічних наук, доцент, завідувач кафедри інформатики Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський, wivanyuk@gmail.com

Конет Іван Михайлович — доктор фізико-математичних наук, професор, проректор з наукової роботи Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський, konet51@ukr.net

Кріль Сергій Олександрович — кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри математики Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

Митько Лідія Олексіївна — кандидат фізико-математичних наук, Інститут проблем моделювання в енергетиці ім. Г. Є. Пухова НАН України, м. Київ

Михалик Дмитро Михайлович — кандидат технічних наук, доцент, доцент Тернопільського національного технічного університету імені Івана Пулюя, м. Тернопіль

Назарчук Олександр Адамович — доктор медичних наук, доцент, доцент кафедри мікробіології Вінницького національного медичного університету імені М. І. Пирогова, м. Вінниця, nazarchukoa@gmail.com

Перцов Андрій Сергійович — кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри математичного моделювання Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича, м. Чернівці, a.pertsov@chnu.edu.ua

Петрик Михайло Романович — доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри програмної інженерії Тернопільського національного технічного університету імені Івана Пулюя, м. Тернопіль, petrykmr@gmail.com

Пилипюк Тетяна Михайлівна — кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри інформатики Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

Положаснко Сергій Анатолійович — доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри комп'ютеризованих систем управління Одеського національного політехнічного університету, м. Одеса, sanp277@gmail.com

Понеділок Вадим Віталійович — кандидат технічних наук, старший викладач кафедри інформатики Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський, ponedilok@gmail.com

Скутар Ігор Дмитрович — асистент кафедри прикладної математики та інформаційних технологій Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича, м. Чернівці, i.skutar@chnu.edu.ua

Теплінський Юрій Володимирович — доктор фізико-математичних наук, професор, професор кафедри математики Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

Туржанська Оксана Степанівна — кандидат педагогічних наук, доцент кафедри математики та інформатики Вінницького державного педагогічного університету імені Михайла Коцюбинського, м. Вінниця, turganskaoksana@gmail.com

Федорчук Володимир Анатолійович — доктор технічних наук, професор, професор кафедри інформатики Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський, fedvld@ukr.net

Фомін Олександр Олексійович — доктор технічних наук, доцент, професор кафедри комп'ютеризованих систем управління Одеського національного політехнічного університету, м. Одеса, fomip@ori.ua

Черевко Ігор Михайлович — доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри математичного моделювання Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича, м. Чернівці, i.cherevko@chnu.edu.ua

АЛФАВІТНИЙ ПОКАЖЧИК АВТОРІВ

Б		М	
Бак С. М.	5	Митько Л. О.	145
Бігун Я. Й.	127	Михалик Д. М.	114
В		Н	
Верлань А. Ф.	17	Назарчук О. А.	54
Верлань А. А.	26	П	
Верлань Д. А.	42	Перцов А. С.	164
Вотякова Л. А.	54	Петрик М. Р.	114
Г		Пилишок Т. М.	69
Гаюк І. М.	164	Положаєнко С. А.	26
Геселева К. Г.	62	Понеділок В. В.	17
Гнатюк В. О.	84	С	
Гоянюк І. В.	114	Скутар І. Д.	127
Громик А. П.	69	Т	
Гудима У. В.	84	Теплінський Ю. В.	137
Гук Н. А.	99	Туржанська О. С.	54
Д		Ф	
Диханов С. В.	99	Федорчук В. А.	145
Долотов І. О.	99	Фомін О. О.	42
Дорош А. Б.	164	Ч	
Дячук О. А.	145	Черевко І. М.	164
І			
Іванюк В. А.	42		
К			
Конет І. М.	69		
Кріль С. О.	62		

ЗМІСТ

Бак С. М.

Існування періодичних розв'язків в системі нелінійних осциляторів зі степеневими потенціалами на двовимірній ґратці..... 5

Верлань А. Ф., Понеділок В. В.

Про деякі результати дослідження інтегрального методу розв'язування лінійних диференціальних рівнянь..... 17

Верлань А. А., Положаєнко С. А.

Аналіз можливостей вибору та адаптації алгоритмів чисельної реалізації диференціальних динамічних моделей 26

Верлань Д. А., Іванюк В. А., Фомін О. О.

Інтегральні динамічні моделі в задачах ідентифікації і діагностики 42

Вотякова Л. А., Туржанська О. С., Назарчук О. А.

Математична модель одноканальної системи масового обслуговування з двоетапним надходженням вимоги..... 54

Геселева К. Г., Кріль С. О.

Застосування колокаційно-ітеративного методу до нелінійних інтегро-функціональних рівнянь..... 62

Gromyk A., Konet I., Pylypiuk T.

Parabolic Boundary Value Problems in Unlimited Piecewise Homogeneous Wedge-Shaped Hollow Cylinder 69

Гудима У. В., Гнатюк В. О.

Умови існування екстремального елемента для задачі відшукування відстані між двома множинами, єдиності екстремального елемента еквівалентної їй задачі, властивості функції відстані..... 84

Гук Н. А., Диханов С. В., Долотов І. О.

Аналіз структури сайту з використанням поняття модулярності..... 99

Петрик М. Р., Михалик Д. М., Гоянюк І. В.

Високопродуктивні обчислення для моделювання фільтраційного масопереносу в середовищі мікропористих частинок з урахуванням зворотніх зв'язків 114

Скутар І. Д., Бігун Я. Й.

Обґрунтування методу усереднення для нелокальної m -частотної задачі із лінійно перетвореними аргументами..... 127

Теплінський Ю. В.

Наближений метод побудови майже-періодичних
розв'язків лінійних систем диференціальних рівнянь,
визначених на нескінченновимірних торах 137

Федорчук В. А., Дячук О. А., Митько Л. О.

Еквівалентні перетворення математичних моделей
в'язкопружних динамічних об'єктів 145

Черевко І. М., Дорош А. Б., Перцов А. С., Гаюк І. М.

Моделювання крайових задач для лінійних
диференціально-різницевих рівнянь нейтрального типу 164

Відомості про авторів 174

Алфавітний покажчик авторів 177

Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова
Національної академії наук України
Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка

НАУКОВЕ ВИДАННЯ

МАТЕМАТИЧНЕ ТА КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ

Серія: Фізико-математичні науки

Збірник наукових праць

Випуск 21

Підписано до друку 2.11.2020 р. Гарнітура «Таймс».
Папір офісний. Друк різнографічний.
Формат 60x84/16. Умовн. друк. арк. 10,5. Обл.-вид. арк. 11,6.
Тираж 50. Зам. № 917.

Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка,
вул. Огієнка, 61, м. Кам'янець-Подільський, 32300.
Свідоцтво серії ДК № 3382 від 05.02.2009 р.

Надруковано в Кам'янець-Подільському національному
університеті імені Івана Огієнка,
вул. Огієнка, 61, м. Кам'янець-Подільський, 32300.