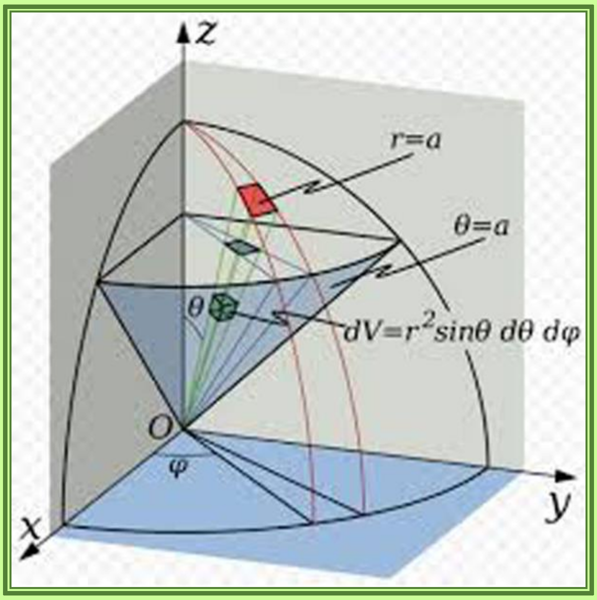
Міністерство освіти і науки України
Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка

Н. М. СОРИЧ,
В. А. СОРИЧ

ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ КІЛЬКОХ ЗМІННИХ

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК



ЕЛЕКТРОННЕ ВИДАННЯ

Кам’янець-Подільський
2023

УДК 517.5(075.8)
ББК 22.16я73
С65
Рекомендувала вчена рада Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка (протокол № 1 від 26.01.2023 року)

РЕЦЕНЗЕНТИ:

І. М. Конет, доктор фізико-математичних наук, професор,
професор кафедри теорії функцій та методики навчання математики
Волинського національного університету імені Лесі Українки;
У. В. Гудима, кандидат фізико-математичних наук, доцент,
доцент кафедри математики Кам'янець-Подільського
національного університету імені Івана Огієнка;
І. В. Семенишина, кандидат фізико-математичних наук, доцент,
асистент кафедри математики, інформатики та академічного письма
закладу вищої освіти «Подільський державний університет».

Сорич Н. М., Сорич В. А.
С65 Інтегральне числення функцій кількох змінних: навчальний посібник [Електронний ресурс]. Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2023. 128 с.

Електронна версія посібника доступна за покликаннями:
URL: http://elar.kpnu.edu.ua/xmlui/handle/123456789/7337

В навчальному посібнику викладено такі теми інтегрального числення функцій кількох змінних, як подвійні та потрійні інтеграли, криволінійні інтеграли першого та другого роду. До кожної з тем наведено зразки розв'язування типових завдань. Вміщено рекомендації, які мають на меті допомогу при самостійному вивченні читачем цих тем.

Посібник назначений студентам вузів, що вивчають дисципліни «Математичний аналіз» та «Вища математика» (при умові, що «Інтегральне числення функцій кількох змінних» входить до переліку програмних тем).

УДК 159.9.018:311.21(075.8)
ББК 88+60.6я73

ПЕРЕДМОВА

Математична освіта студентів фізико-математичних та прикладних спеціальностей базується на трьох основних математичних дисциплінах, а саме: математичному аналізі, аналітичній геометрії та вищій алгебрі. Запропонований навчальний посібник з математичного аналізу присвячений вивченню інтегрального числення функцій багатьох змінних. В ньому читачеві пропонується ознайомитися з подвійними, потрійними та криволінійними інтегралами і на приведених прикладах із розв'язками навчитися самостійно розв'язувати задачі по даних розділах. Тому даний навчальний посібник може стати в нагоді кожному, хто намагатиметься самостійно опановувати ці теми.

При вивченні даних розділів автори передбачають, що читачі уже знайомі із граничним переходом у послідовностях та функціях, диференціальним численням функції однієї та багатьох дійсних змінних, інтегральним численням функцій однієї змінної, а також деякими розділами лінійної алгебри («Детермінанти») та аналітичної геометрії («Лінії на площині та в просторі», «Поверхні другого порядку»).

Задля концентрації уваги на основному деякі теореми сформульовані не в найбільш загальному вигляді, а також відсутні доведення деяких властивостей, що на думку авторів не повинно зашкодити початковому ознайомленню із інтегральним численням функцій кількох змінних.

Спираючись на багаторічний досвід читання лекцій та практичних занять з математичного аналізу в Кам'янець-Подільському національному університеті імені Івана Огієнка, автори наводять ряд рекомендацій та зауважень щодо практичних застосувань теоретичного матеріалу. Це на нашу думку повинно значно полегшити процес успішного самостійного розв'язування різноманітних задач, які стосуються інтегрального числення функцій кількох змінних.

Посібник складається із трьох розділів. Перший розділ присвячено подвійним інтегралам, він складається із п'яти параграфів і списку завдань для самостійного виконання. В цьому розділі висвітлено питання про поняття подвійного інтеграла, властивості та обчислення подвійних інтегралів, заміну змінних, основні фізичні та геометричні застосування подвійних інтегралів. В другому розділі, який структурно аналогічний першому, ці ж питання розглянуті для потрійних інтегралів. Третій розділ, який називається «Криволінійні інтеграли», складається із шести параграфів. В ньому в перших двох параграфах викладено теоретичний матеріал, який стосується криволінійних інтегралів першого роду (тобто розглядається диференціал по довжині дуги): поняття, властивості, обчислення та основні застосування. В §§ 3-6 розглянуто криволінійні інтеграли другого роду (диференціал за координатами). В цих параграфах викладено питання поняття криволінійних інтегралів 2-го роду, властивості та обчислення цих інтегралів, зв'язок із кратними інтегралами, незалежність криволінійних інтегралів від шляху інтегрування та застосування криволінійних інтегралів за координатами.

Слід зауважити, що в даний навчальний посібник по інтегруванню функцій кількох змінних не увійшов важливий розділ «Поверхневі інтеграли». Автори планують у наступному виданні доповнити посібник ним.

Відгуки і побажання просимо надсилати на адресу: nina.sorich@gmail.com

Розділ I

ПОДВІЙНІ ІНТЕГРАЛИ

§ 1. ПОНЯТТЯ ТА ІСНУВАННЯ ПОДВІЙНИХ ІНТЕГРАЛІВ

Нехай функція $z = f(x;y)$ задана на обмеженій замкненій квадровній області $P \subset R^2$. Подамо цю область P у вигляді скінченного об'єднання квадровних частин без спільних внутрішніх точок: $P = \bigcup_{i=1}^{n} P_i$, і назвемо це τ-поділом області P. Позначимо через ΔP_i площу фігури P_i, тоді $\sum_{i=1}^{n} \Delta P_i = S(P)$. Нагадаємо, що за діаметр множини M в деякому метричному просторі приймають найбільшу відстань між точками цієї множини $d(M) = \sup\limits_{x,y \in M} \rho(x;y)$. Величину $\lambda(\tau) = \max\limits_{1 \le i \le n} d(P_i)$ називають діаметром τ-поділу. У кожній частині візьмемо довільну точку $T_i(x_i;y_i) \in P_i$ і утворимо суму

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i;y_i)\Delta P_i = \sigma_f(\tau;T_i) = \sigma(\tau;T_i), \qquad (1)$$

яку назвемо інтегральною сумою для функції $f(x;y)$ по області P, що відповідає τ-поділу області та вибору точок T_i.

1^0. Якщо справедливе висловлення $(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists \delta > 0)\ (\forall \tau : \lambda(\tau) < \delta)$ $(\forall T_i \in P_i) \Rightarrow \left|\sigma(\tau;T_i) - I\right| < \varepsilon$, то кажуть, що число I є границею інтегральних сум при умові прямування до нуля діаметра поділу: $I = \lim\limits_{\lambda(\tau)\to 0} \sigma(\tau;T_i)$. Крім того, число I називають подвійним інтегралом і позначають символом $\iint\limits_P f(x;y)dxdy$, при цьому кажуть, що функція $f(x;y)$ інтегровна по області P.

Зауважимо, границя інтегральних сум при умові її існування не залежить ні від способу τ-поділу області, ні від способу вибору точок T_i.

Наслідок 1. $\iint\limits_P dxdy = S(P)$.

Доведення. Для функції $f(x;y) \equiv 1$ при будь-якому τ-поділі та будь-якому виборі точок $T_i \in P_i$ маємо $\sigma(\tau;T_i) = \sum_{i=1}^{n} 1 \cdot \Delta P_i = S(P)$.

Тому і $\lim\limits_{\lambda(\tau)\to 0} \sigma(\tau;T_i) = S(P)$. **Наслідок доведено.**

Розглянемо основні властивості подвійних інтегралів.

Теорема 1 (необхідна умова інтегровності). Якщо функція інтегровна по обмеженій квадровній області *P,* то $f(x;y)$ обмежена на *P.*

Доведення. З інтегровності $f(x;y)$ по області P випливає існування границі $\lim\limits_{\lambda(\tau)\to 0} \sigma(\tau;T_i) = I$, звідки для $\varepsilon = 1$ існує $\delta_0 > 0$ таке, що для τ-поділу із діаметром меншим δ_0 при будь-якому виборі $T_i \in P_i$ справедлива нерівність $\left|\sigma(\tau;T_i) - I\right| < 1$, або

$$I - 1 < \sigma(\tau;P_i) < I + 1. \qquad (2)$$

Припустимо, що функція $f(x;y)$ необмежена зверху на *P*. Якщо для деякого τ^*-поділу діаметр $\lambda(\tau^*) < \delta_0$, то функція $f(x;y)$ буде необмеженою зверху хоча б на одній з множин P_i даного поділу. Нехай для простоти це буде P_1.

Зафіксуємо точки $T_i \in P_i, i = \overline{2;n}$, позначимо $K = \sum_{i=2}^{n} f(T_i)\Delta P_i$, тоді з (2) випливає, що $I - 1 - K < f(T_1)\Delta P_1 < I + 1 - K$, звідки $f(T_1) < \dfrac{I + 1 - K}{\Delta P_1}$ при $\forall T_1 \in P_1$. З останньої нерівності випливає обмеженість зверху на P_1 функції $f(x;y)$. Одержали протиріччя, яке доводить хибність припущення.

Аналогічно можемо довести обмеженість знизу інтегровної функції. **Теорема доведена.**

Суми Дарбу та їх властивості

Нехай $f(x;y)$ обмежена на P функція, τ-довільний поділ області: $P=\bigcup\limits_{i=1}^{n}P_i$. Позначимо $m_i=\inf\limits_{(x;y)\in P_i} f\left(x;y\right)$, $M_i=\sup\limits_{(x;y)\in P_i} f\left(x;y\right), i=\overline{1,n}.$

2^0. Суми вигляду $\sum\limits_{i=1}^{n}m_i\Delta P_i=s(\tau)$ $\left(\sum\limits_{i=1}^{n}M_i\Delta P_i=S(\tau)\right)$ називають нижніми (верхніми) сумами Дарбу для функції $f(x;y)$, що відповідають τ-поділу.

Із цього означення випливає справедливість такого твердження.

Наслідок 2. $s\left(\tau\right)=\inf\limits_{\substack{T_i\in P_i\\ i=\overline{1,n}}}\sigma\left(\tau;T_i\right)$, $S\left(\tau\right)=\sup\limits_{\substack{T_i\in P_i\\ i=\overline{1,n}}}\sigma\left(\tau;T_i\right)$.

Суми Дарбу мають наступні властивості.

Властивість 1. Для будь-якого τ-поділу при будь-якому виборі $T_i\in P_i$ справедлива нерівність $s\left(\tau\right)\le\sigma(\tau;T_i)\le S\left(\tau\right)$.

Доведення. Оскільки при $\forall\, i=\overline{1,n}$ $m_i\le f\left(T_i\right)\le M_i$, а $\Delta P_i>0$, то

$$m_i\Delta P_i\le f\left(T_i\right)\Delta P_i\le M_i\Delta P_i\Rightarrow\sum_{i=1}^{n}m_i\Delta P_i\le\sum_{i=1}^{n}f(T_i)\Delta P_i\le\sum_{i=1}^{n}M_i\Delta P_i,$$

або $s\left(\tau\right)\le\sigma(\tau;T_i)\le S\left(\tau\right)$. **Властивість доведено.**

Якщо хоча б одну з квадровних частин τ-поділу розбити принаймні на дві квадровні без спільних внутрішніх точок частини, то одержимо новий τ'-поділ області *P*, який назвемо дробленням τ-поділу і будемо цей факт позначати так $\tau\subset\tau'$. Можна довести справедливість наступного твердження.

Властивість 2. При дробленні нижні суми Дарбу не меншають, а верхні – не більшають, тобто із включення $\tau\subset\tau'$ випливає, що $s\left(\tau\right)\le s\left(\tau'\right)$, а $S\left(\tau\right)\ge S\left(\tau'\right)$.

Властивість 3. Будь-яка нижня сума Дарбу не більша за будь-яку верхню суму Дарбу, тобто для довільних τ_1 та τ_2-поділів $s\left(\tau_1\right)\le S\left(\tau_2\right)$.

Доведення. Нехай $\tau'=\tau_1\cup\tau_2$, тоді $\tau_1\subset\tau'$, $\tau_2\subset\tau'$. За властивістю 2 $s\left(\tau_1\right)\le s\left(\tau'\right)$, $S\left(\tau'\right)\le S\left(\tau_2\right)$, а за властивістю 1 $s\left(\tau'\right)\le S\left(\tau'\right)$. Тоді за транзитивністю $s\left(\tau_1\right)\le s\left(\tau'\right)\le S\left(\tau'\right)\le S\left(\tau_2\right)$. **Властивість доведено.**

Теорема 2 (критерій інтегровності). Для того, щоб обмежена функція $f(x;y)$ була інтегровною по області *P*, необхідно та досить, щоб $\lim\limits_{\lambda(\tau)\to 0} s(\tau) = \lim\limits_{\lambda(\tau)\to 0} S(\tau)$, при цьому $\iint\limits_P f(x;y)dxdy = \lim\limits_{\lambda(\tau)\to 0} s(\tau) = \lim\limits_{\lambda(\tau)\to 0} S(\tau)$.

Доведення. *Необхідність*. Нехай функція $f(x;y)$ інтегровна по області *P*, тобто існує $\lim\limits_{\lambda(\tau)\to 0} \sigma(\tau;T_i) = I$, звідки випливає справедливість твердження

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists \delta > 0)\ (\forall \tau : \lambda(\tau) < \delta) \Rightarrow (\forall T_i \epsilon\ P_i)$$

$$\Rightarrow \left|\sigma(\tau;T_i) - \mathrm{I}\right| < \frac{\varepsilon}{2} \Leftrightarrow I - \frac{\varepsilon}{2} < \sigma(\tau;T_i) < I + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Застосуємо наслідок 2 до останньої подвійної нерівності і одержимо $I - \frac{\varepsilon}{2} \le \inf\limits_{\substack{T_i \in P_i \\ i=\overline{1,n}}} \sigma(\tau;T_i) = s(\tau) \le I + \frac{\varepsilon}{2}$ та $I - \frac{\varepsilon}{2} \le \sup\limits_{\substack{T_i \in P_i \\ i=\overline{1,n}}} \sigma(\tau;T_i) = S(\tau) \le I + \frac{\varepsilon}{2}$, звідки

$\left|s(\tau) - I\right| \le \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$; $\left|S(\tau) - I\right| \le \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$.

Отже, $(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists \delta > 0)\ (\forall \tau : \lambda(\tau) < \delta) \Rightarrow \left|s(\tau) - \mathrm{I}\right| < \varepsilon$, або $\lim\limits_{\lambda(\tau)\to 0} s(\tau) = I$.

Аналогічно $\lim\limits_{\lambda(\tau)\to 0} S(\tau) = I$. Дві границі, що дорівнюють одному числу, рівні між собою. Необхідність доведено.

Достатність. Нехай $\lim\limits_{\lambda(\tau)\to 0} s(\tau) = \lim\limits_{\lambda(\tau)\to 0} S(\tau) = I$. Згідно властивості 1 маємо: $s(\tau) \le \sigma(\tau;T_i) \le S(\tau)$ при будь-якому виборі $T_i \in P_i$, тому для проміжних інтегральних сум $\sigma(\tau;T_i)$ існує границя, якщо $\lambda(\tau) \to 0$, і $\lim\limits_{\lambda(\tau)\to 0} \sigma(\tau;T_i) = I$. Згідно означення 1 функція $f(x;y)$ інтегровна в області *P*.

Теорема доведена.

Нехай функція $f(x;y)$ задана на множині *M* і обмежена на ній.

2^0. Коливанням функції f на множині *M* називають величину

$$\sup\limits_{x \in M} f(x) - \inf\limits_{x \in M} f(x) = \omega_M(f).$$

Нехай τ-довільний поділ області $P = \bigcup\limits_{i=1}^{n} P_i$, позначимо $\omega_{P_i}(f) = \omega_i(f)$.

Тоді $S(\tau)-s(\tau)=\sum_{i=1}^{n}\omega_i(f)\Delta P_i$, тому теорему 2 можна сформулювати так.

Теорема 2′. Для того, щоб обмежена функція $f(x;y)$ була інтегровною в області P, необхідно та досить, щоб $\lim_{\lambda(\tau)\to 0}\sum_{i=1}^{n}\omega_i(f)\Delta P_i=0$.

Застосовуючи дане твердження, покажемо, що неперервна на обмеженій та замкненій множині функція буде інтегровною на цій множині.

Теорема 3. Якщо P – обмежена і замкнена на R^2 множина, функція $f(x;y)$ неперервна на P, то $f(x;y)$ інтегровна на P.

Доведення. Згідно теореми Кантора неперервна на обмеженій та замкненій множині функція є рівномірно неперервною на ній. Тому згідно означення рівномірної неперервності справедливе висловлення $(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)\left(\forall T,T'\in P:\rho(T,T')<\delta\Rightarrow\left|f(T)-f(T')\right|<\frac{\varepsilon}{S(P)}\right)$. Нехай τ-поділ задовольняє обмеженню $\lambda(\tau)<\delta$, тоді $\forall T_i,T_i'\in P_i:\rho(T_i,T_i')\le d(P_i)\le\lambda(\tau)<\delta$, і тому $\left|f(T_i)-f\left(T_i'\right)\right|<\frac{\varepsilon}{S(P)}$ $\left(i=\overline{1;n}\right)$. Оскільки $\omega_M(f)=\sup_{T,T'\in M}\left|f(T)-f(T')\right|$, то $\omega_i(f)\le\frac{\varepsilon}{S(P)}$.

Помножимо дані нерівності на додатні числа ΔP_i, одержані нерівності підсумуємо, матимемо: $0\le\sum_{i=1}^{n}\omega_i(f)\Delta P_i\le\sum_{i=1}^{n}\frac{\varepsilon}{S(P)}\Delta P_i=\varepsilon$.

Отже, справедливе висловлення $(\forall\varepsilon>0)$ $(\exists\delta>0)$ $(\forall\tau:\lambda(\tau)<\delta)\Rightarrow$ $\Rightarrow\left|\sum_{i=1}^{n}\omega_i(f)\Delta P_i-0\right|\le\varepsilon\Leftrightarrow\lim_{\lambda(\tau)\to 0}\sum_{i=1}^{n}\omega_i(f)\Delta P_i=0$. Згідно теореми $2'$ доведення завершено.

§ 2. ВЛАСТИВОСТІ ПОДВІЙНИХ ІНТЕГРАЛІВ

Теорема 1 (лінійність). Якщо функції $f(x;y)$ та $g(x;y)$ інтегровні на області *P*, то при довільних сталих α та β функція $\alpha f(x;y)+\beta g(x;y)$ також буде інтегровною на *P*, причому справедлива рівність

$$\iint\limits_P \left(\alpha f(x;y)+\beta g(x;y)\right)dxdy=\alpha\iint\limits_P f(x;y)dxdy+\beta\iint\limits_P g(x;y)dxdy\,,\alpha,\beta\in R.$$

Доведення. До очевидної рівності

$$\sigma_{\alpha f+\beta g}(\tau;T_i)=\sum_{i=1}^{n}\left(\alpha f(T_i)+\beta g(T_i)\right)\Delta P_i=$$

$$=\alpha\sum_{i=1}^{n}f(T_i)\Delta P_i+\beta\sum_{i=1}^{n}g(T_i)\Delta P_i=\alpha\sigma_f(\tau;T_i)+\beta\sigma_g(\tau;T_i)$$

застосуємо означення 1 із § 1. **Теорему доведено.**

Наслідок 1. Інтеграл від суми двох інтегровних функцій дорівнює сумі інтегралів від цих функцій.

Наслідок 2. В подвійному інтегралі сталий множник можна виносити за знак інтеграла.

Можна довести справедливість такого твердження.

Теорема 2 (адитивність). Нехай квадровні фігури P_1 та P_2 не мають спільних внутрішніх точок, $P=P_1\bigcup P_2$. Якщо функція $f(x;y)$ інтегровна на P_1 та P_2, то вона буде інтегровною на *P*, причому

$$\iint\limits_P f(x;y)dxdy=\iint\limits_{P_1} f(x;y)dxdy+\iint\limits_{P_2} f(x;y)dxdy.$$

Теорема 3 (монотонність). Якщо функції $f(x;y)$ та $g(x;y)$ інтегровні на області *P* і в кожній точці області $f(x;y)\le g(x;y)$, то

$$\iint\limits_P f(x;y)dxdy\le\iint\limits_P g(x;y)dxdy.$$

Доведення. Для довільного τ-поділу при будь-якому виборі $T_i\in P_i$ з умови теореми випливає, що $f\left(T_i\right)\le g\left(T_i\right)$ $(i=\overline{1;n})$, тому $\sum_{i=1}^{n}f(T_i)\Delta P_i\le\sum_{i=1}^{n}g(T_i)\Delta P_i$, або $\sigma_f\left(\tau;T_i\right)\le\sigma_g\left(\tau;T_i\right)$. Перейдемо в останній нерівності до $\lim\limits_{\lambda(\tau)\to 0}$, і з урахуванням інтегровності функцій $f(x;y)$ та $g(x;y)$ одержимо

$$\iint\limits_P f(x;y)dxdy \le \iint\limits_P g(x;y)dxdy.$$

Теорему доведено.

Справедливе твердження.

Лема. Для будь-якої функції $f(x;y)$ на довільній множині M справедлива нерівність $\omega_M(|f|)\le\omega_M(f)$.

Доведення. Оскільки в силу властивостей модуля

$$\big||f(T)|-|f(T')|\big| \le |f(T)-f(T')|,\ \forall T,T'\in M,$$

то

$$\omega_M(|f|)=\sup_{T,T'\in M}\big||f(T)|-|f(T')|\big| \le \sup_{T,T'\in M}|f(T)-f(T')| = \omega_M(f).$$

Лема доведена.

Теорема 4 (інтегровність модуля). Якщо функція $f(x;y)$ інтегровна на області *P*, то функція $|f(x;y)|$ також інтегровна на *P*, причому

$$\left|\iint\limits_P f(x;y)dxdy\right| \le \iint\limits_P |f(x;y)|dxdy.$$

Доведення. Для довільного τ-поділу $P=\bigcup\limits_{i=1}^{n}P_i$ в силу леми $\omega_i(|f|)\le\omega_i(f)$, тому $0\le\sum\limits_{i=1}^{n}\omega_i(|f|)\Delta P_i\le\sum\limits_{i=1}^{n}\omega_i(f)\Delta P_i$. Для інтегровної функції за теоремою 3 § 1 $\lim\limits_{\lambda(\tau)\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}\omega_i(f)\Delta P_i=0$, тоді для проміжних сум матимемо, що $\lim\limits_{\lambda(\tau)\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}\omega_i(|f|)\Delta P_i=0$. Згідно теореми 3 (§ 1) функція $|f(x;y)|$ інтегровна на *P*.

Для $\forall(x;y)\in P$ $-|f(x;y)|\le f(x;y)\le|f(x;y)|$, тому за властивістю монотонності $-\iint\limits_P|f(x;y)|dxdy\le\iint\limits_P f(x;y)dxdy\le\iint\limits_P|f(x;y)|dxdy$. Оскільки

$-\varepsilon \le a \le \varepsilon \Leftrightarrow |a| \le \varepsilon$, то при $\varepsilon = \iint\limits_P |f(x;y)| dxdy$ одержимо, що

$\left| \iint\limits_P f(x;y)dxdy \right| \le \iint\limits_P |f(x;y)| dxdy$. **Теорему доведено.**

Теорема 5 (про середнє у подвійному інтегралі). Якщо функція $f(x;y)$ інтегровна на області *P*, то існує число $\mu \in [m;M]$ таке, що

$$\iint\limits_P f(x;y)dxdy = \mu S(P), \text{ де } m = \inf_{(x;y)\in P} f(x;y),\ M = \sup_{(x;y)\in P} f(x;y).$$

Доведення. Із інтегровності функції $f(x;y)$ на *P* в силу теореми 1 § 1 випливає існування величин m та *M*, та, крім того, виконуються нерівності $m \le f(x;y) \le M$, $\forall (x;y) \in P$. Тоді в силу монотонності, лінійності та наслідку 1 § 1 із даної подвійної нерівності одержимо, що

$$mS(P) = m\iint\limits_P dxdy \le \iint\limits_P f(x;y)dxdy \le M\iint\limits_P dxdy = MS(P),$$

звідки $m \le \dfrac{1}{S(P)} \iint\limits_P f(x;y)dxdy \le M$. Нехай $\mu = \dfrac{1}{S(P)} \iint\limits_P f(x;y)dxdy$.

Очевидно, що таке число μ задовольняє всім умовам даної теореми. **Теорема доведена.**

Наслідок 3. Якщо в теоремі 5 область *P* обмежена замкнена і зв'язна, а функція $f(x;y)$ неперервна на цій області, то значення μ функція $f(x;y)$ досягає в деякій точці, тобто існує точка $(x_0;y_0) \in P$ така, що $\iint\limits_P f(x;y)dxdy = f(x_0;y_0)\cdot S(P)$.

Доведення. За другою теоремою Вейєрштрасса значень m та M функція $f(x;y)$, що задовольняє умови наслідку, досягає в деяких точках: $\exists T, T' \in P \quad f(T) = m,\ f(T') = M$. Оскільки область P однозв'язна, то неперервна функція $f(x;y)$ досягає на P всіх проміжних значень, тому і значення μ із теореми 5 також, тобто існує точка $(x_0;y_0) \in P$ така, що $f(x_0;y_0) = \mu$. **Наслідок доведено.**

§ 3. ОБЧИСЛЕННЯ ПОДВІЙНИХ ІНТЕГРАЛІВ

Нехай P – прямокутник зі сторонами паралельними координатним осям, тобто це множина точок координатної площини, яку можемо задати так: $P=\left\{(x;y)\middle| a\le x\le b; c\le y\le d\right\}$. Нехай функція $f(x;y)$ задана на P, причому для будь-якого $x\in[a;b]$ існує інтеграл $\int_c^d f(x;y)dy=\Phi(x)$.

1^0. Якщо існує інтеграл $\int_a^b \Phi(x)dx=\int_a^b\left(\int_c^d f(x;y)dy\right)dx=\int_a^b dx\int_c^d f(x;y)dy$, то його називають *повторним*.

По прямокутній області можна ввести ще один повторний інтеграл, а саме:

2^0. Нехай для будь-якого $y\in[c;d]$ існує інтеграл $\int_a^b f(x;y)dx=\Psi(y)$. Якщо існує інтеграл $\int_c^d \Psi(y)dy=\int_c^d\left(\int_a^b f(x;y)dx\right)dy=\int_c^d dy\int_a^b f(x;y)dx$, то його називають *повторним*.

Зауваження. Оскільки обчислення повторних інтегралів базується на обчисленні звичайних визначених інтегралів (інтегралів Рімана), то ми в змозі це зробити.

Приклад 1. Нехай $P=\left\{(x;y)\middle|0\le x\le 1; 1\le y\le\sqrt{3}\right\}$, $f(x;y)=\dfrac{x}{1+y^2}$. Обчислити обидва повторні інтеграли.

Розв’язання.

$$\Phi(x)=\int_1^{\sqrt{3}}\frac{x}{1+y^2}dy=x\int_1^{\sqrt{3}}\frac{dy}{1+y^2}=x\cdot arctg\, y\Big|_{y=1}^{y=\sqrt{3}}=x(arctg\sqrt{3}-atctg 1)=\frac{\pi}{12}x.$$

Тоді $\int_0^1\Phi(x)dx=\dfrac{\pi}{12}\int_0^1 xdx=\dfrac{\pi}{12}\cdot\dfrac{x^2}{2}\Big|_0^1=\dfrac{\pi}{24}$.

Обчислимо другий повторний інтеграл.

$$\Psi(y)=\int_0^1\frac{x}{1+y^2}dx=\frac{1}{1+y^2}\int_0^1 xdx=\frac{1}{1+y^2}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_{x=0}^{x=1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+y^2}.$$

Тоді $\int_1^{\sqrt{3}} \Psi(y)dy = \frac{1}{2}\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dy}{1+y^2} = \frac{1}{2} arctg\, y\Big|_1^{\sqrt{3}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{24}$.

Приклад 2. Нехай $P = \{(x;y) | 1 \le x \le 2; 0 \le y \le 1\}$, $f(x;y) = \sqrt{x-y}$. Обчислити обидва повторні інтеграли.

Розв'язання.

$$\Phi(x) = \int_0^1 \sqrt{x-y}dy = -\int_0^1 (x-y)^{\frac{1}{2}} d(x-y) = -\frac{2}{3}(x-y)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_{y=0}^{y=1} = \frac{2}{3}\left(x^{\frac{3}{2}} - (x-1)^{\frac{3}{2}}\right).$$

Тоді

$$\int_1^2 \Phi(x)dx = \frac{2}{3}\int_1^2 \left(x^{\frac{3}{2}} - (x-1)^{\frac{3}{2}}\right)dx = \frac{4}{15}\left(x^{\frac{5}{2}} - (x-1)^{\frac{5}{2}}\right)\Bigg|_1^2 = \frac{4}{15}(4\sqrt{2}-2) = \frac{8}{15}(2\sqrt{2}-1).$$

Обчислимо другий повторний інтеграл.

$$\Psi(y) = \int_1^2 \sqrt{x-y}dx = \frac{2}{3}(x-y)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_{x=1}^{x=2} = \frac{2}{3}\left((2-y)^{\frac{3}{2}} - (1-y)^{\frac{3}{2}}\right),$$

тому

$$\int_0^1 \Psi(y)dy = \frac{2}{3}\int_0^1 \left((2-y)^{\frac{3}{2}} - (1-y)^{\frac{3}{2}}\right)dy =$$

$$= \frac{4}{15}\left((1-y)^{\frac{5}{2}} - (2-y)^{\frac{5}{2}}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{4}{15}(0-1-1+4\sqrt{2}) = \frac{8}{15}(2\sqrt{2}-1).$$

Як бачимо, в цих прикладах обидва повторні інтеграли по прямокутних областях рівні. І це не випадково, далі буде доведено, що для неперервних функцій $f(x;y)$ така рівність виконуватиметься завжди.

Крім того, виходячи із розв'язання прикладу 1, можемо зробити такий висновок: якщо $f(x;y) = g(x) \cdot h(y)$, то

$$\int_a^b dx \int_c^d f(x;y)dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x;y)dx = \int_a^b g(x)dx \cdot \int_c^d h(y)dy. \qquad (3)$$

Теорема 1 (обчислення подвійних інтегралів по прямокутних областях). Якщо функція $f(x;y)$ інтегровна на прямокутнику $P=[a;b]\times[c;d]$ і для будь-якого $x\in[a;b]$ існує $\int\limits_c^d f(x;y)dy=\Phi(x)$, то існує повторний інтеграл $\int\limits_a^b \Phi(x)dx$, причому $\iint\limits_P f(x;y)dxdy=\int\limits_a^b \Phi(x)dx$.

Доведення. Нехай τ_1,τ_2 – довільні поділи відрізків $[a;b]$ та $[c;d]$, а $\tau=\tau_1\times\tau_2$ (через точки поділу τ_1 проведемо прямі, паралельні осі Oy, а через точки поділу τ_2 – прямі, паралельні до Ox). Одержимо наступне

$$\tau_1 : a=x_0<x_1<x_2<...<x_n=b;\ \ \tau_2 : c=y_0<y_1<y_2<...<y_m=d;$$

$$\tau : P=\bigcup_{k=0}^{n-1}\bigcup_{i=0}^{m-1}T_{ki}\text{, де } T_{ki}=\left\{(x;y)\middle| x_k\le x\le x_{k+1}, y_i\le y\le y_{i+1}\right\},$$

тоді $\Delta T_{ki}=\Delta x_k\Delta y_i$. Нехай $m_{ki}=\inf\limits_{(x;y)\in T_{ki}} f(x;y)$; $M_{ki}=\sup\limits_{(x;y)\in T_{ki}} f(x;y)$.

Виберемо довільні точки $c_k\in[x_k;x_{k+1}]$, $k=\overline{0,n-1}$, розглянемо інтегральну суму $\sigma_\Phi(\tau_1;c_k)$ і оцінимо її через верхню та нижню суми Дарбу для функції $f(x;y)$, які відповідають τ-поділу прямокутника P.

Для інтеграла Рімана, як відомо, інтегральна сума має вигляд: $\sigma_\Phi(\tau_1;c_k)=\sum\limits_{k=0}^{n-1}\Phi(c_k)\Delta x_k$, причому $\Phi(c_k)=\int\limits_c^d f(c_k;y)dy=\sum\limits_{i=0}^{m-1}\int\limits_{y_i}^{y_{i+1}} f(c_k;y)dy$.

Якщо $y\in[y_i;y_{i+1}]$, то $(c_k;y)\in T_{ki}$, тому $m_{ki}\le f(c_k;y)\le M_{ki}$, $\forall\, y\in[y_i;y_{i+1}]$, $i=\overline{0,m-1}$. Застосуємо властивість монотонності визначеного інтеграла і одержимо, що при $i=\overline{0,m-1}$ $m_{ki}\Delta y_i\le\int\limits_{y_i}^{y_{i+1}} f(c_k;y)dy\le M_{ki}\Delta y_i$; далі нерівності однакового знаку пододаємо:

$$\sum_{i=0}^{m-1}m_{ki}\Delta y_i\le\sum_{i=0}^{m-1}\int\limits_{y_i}^{y_{i+1}} f(c_k;y)dy=\Phi(c_k)\le\sum_{i=0}^{m-1}M_{ki}\Delta y_i,$$

остання нерівність виконується при $k=\overline{0,n-1}$. Помножимо ці нерівності на додатні числа Δx_k і одержані нерівності однакового знаку пододаємо, будемо мати

$$\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{m-1} m_{ki}\Delta y_i \Delta x_k \le \sum_{k=0}^{n-1} \Phi(c_k)\Delta x_k \le \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{m-1} M_{ki}\Delta y_i \Delta x_k ,$$

або (оскільки $\Delta T_{ki}=\Delta x_k \Delta y_i$) $s_f(\tau)\le \sigma_\Phi(\tau_1;c_k)\le S_f(\tau)$.

За умовою функція $f(x;y)$ інтегровна на області P, тому згідно теореми 2 §1 $\lim\limits_{\lambda(\tau)\to 0} s_f(\tau)=\lim\limits_{\lambda(\tau)\to 0} S(\tau)=\iint\limits_P f(x;y)dxdy$. Оскільки $\lambda(\tau_1)\le\lambda(\tau)$ та $\lambda(\tau_2)\le\lambda(\tau)$, то із того, що $\lambda(\tau)\to 0$, випливає, що $\lambda(\tau_1)\to 0$ та $\lambda(\tau_2)\to 0$. Отже, існує границя проміжних величин $S_f(\tau)$, якщо $\lambda(\tau)\to 0$, і при цьому справедливі рівності

$$\lim_{\lambda(\tau_1)\to 0} \sigma_\Phi(\tau_1;c_k)=\int_a^b \Phi(x)dx=\lim_{\lambda(\tau)\to 0} s_f(\tau)=\iint_P f(x;y)dxdy .$$

Отже, повторний та подвійний інтеграли рівні. **Теорема доведена.**

Аналогічно до доведення теореми 1 можна переконатися в справедливості наступного твердження.

Теорема 2. Якщо функція $f(x;y)$ інтегровна на прямокутнику $P=[a;b]\times[c;d]$ і для будь-якого $y\in[c;d]$ існує $\int\limits_a^b f(x;y)dx=\Psi(y)$, то існує повторний інтеграл $\int\limits_c^d \Psi(y)dy$, причому $\iint\limits_P f(x;y)dxdy=\int\limits_c^d \Psi(y)dy$.

Із теорем 1 та 2 як наслідок можна отримати наступне твердження.

Наслідок. Якщо функція $f(x;y)$ неперервна на прямокутнику $P=[a;b]\times[c;d]$, то обидва повторні інтеграли по P від $f(x;y)$ рівні між собою.

Доведення. За теоремою 3 §1 функція $f(x;y)$ буде інтегровною на множині P. При будь-якому $y\in[c;d]$ функція $F(x)=f(x;y)$ неперервна на сегменті $[a;b]$, тому інтегровна на ньому: $\exists\int\limits_a^b F(x)dx=\int\limits_a^b f(x;y)dx=\Psi(y)$. Отже, існує повторний інтеграл $\int_c^d \Psi(y)dy$, який за теоремою 2 рівний подвійному. Аналогічно існує інший повторний інтеграл, що теж рівний $\iint_P f(x;y)dxdy$.

Повторні інтеграли, що рівні одному числу, рівні між собою. **Наслідок доведено.**

Приклад 3. Обчислити $\iint_P \frac{x^2}{1+y^2}dxdy$, якщо $P=[0;1]\times[0;1]$.

Розв'язання. Функція $f(x;y)=\frac{x^2}{1+y^2}$ неперервна на *P*, тому можемо використати як теорему 1, так і теорему 2. Згідно теореми 1та рівності 3

$$I=\iint_P \frac{x^2}{1+y^2}dxdy=\int_0^1 dx\int_0^1 \frac{x^2}{1+y^2}dy=\int_0^1 x^2dx\cdot\int_0^1 \frac{dy}{1+y^2}=$$

$$=\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1\cdot arctg\, y\Big|_0^1=\frac{1}{3}(arctg1-arctg0)=\frac{\pi}{12}.$$

Відповідь. $\frac{\pi}{12}$.

Розглянемо більш загальні випадки областей інтегрування.

3^0. Криволінійною областю I типу, або правильною в напрямі осі *Oy*, будемо називати таку множину точок на координатній площині $P=\{(x;y)\big|a\le x\le b, f(x)\le y\le g(x)\}$ (див. рис. 1)

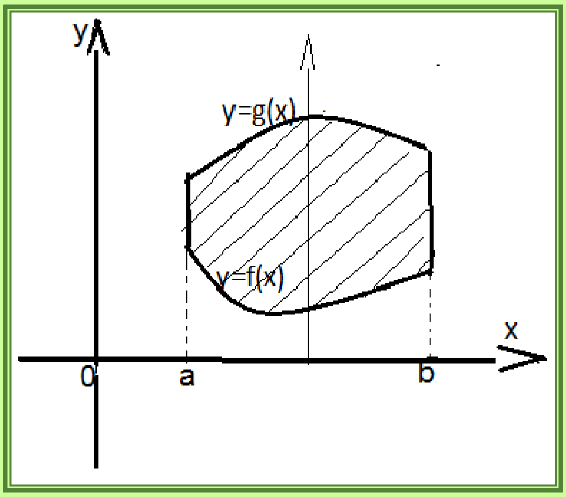


Рис. 1.

4^0. Криволінійною областю II типу, або правильною в напрямі осі Ox будемо називати таку множину точок на координатній площині $P=\{(x;y)|c\le y\le d, f(y)\le x\le g(y)\}$ (див. рис. 2).

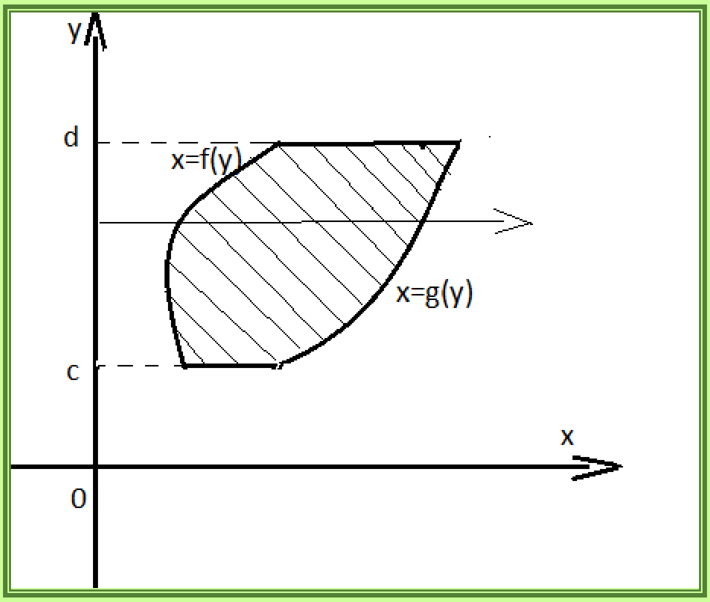


Рис. 2.

Розглянемо питання обчислення подвійних інтегралів по таких областях.

Будемо надалі вважати, що функції $f(x)$ та $g(x)$ неперервні на сегменті $[a;b]$ (аналогічно $f(y)$ та $g(y)$ неперервні на сегменті $[c;d]$).

Теорема 4. Нехай функція $f(x;y)$ інтегровна в області $P=\{(x;y)|a\le x\le b, \varphi_1(x)\le y\le \varphi_2(x)\}$ і $\forall x\in[a;b]$ існує $\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x;y)dy=\Phi(x)$, тоді існує $\int\limits_a^b \Phi(x)dx$, причому $\iint\limits_P f(x;y)dxdy=\int\limits_a^b \Phi(x)dx=\int\limits_a^b dx\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x;y)dy$.

Доведення. Нехай $c=\min\limits_{x\epsilon[a;b]}\varphi_1(x)$, $d=\max\limits_{x\epsilon[a;b]}\varphi_2(x)$, $\Delta=[a;b]\times[c;d]$,

$$F(x;y)=\begin{cases} f(x;y) & ,(x;y)\in P \\ 0 & ,(x;y)\in\Delta\setminus P \end{cases}.$$

Тоді функція $F(x;y)$ інтегровна на прямокутнику Δ .

З одного боку при будь-якому $x\in[a;b]$

$$[c;d]=\left[c;\varphi_1(x)\right]\cup\left[\varphi_1(x);\varphi_2(x)\right]\cup\left[\varphi_2(x);d\right],$$

тому

$$\int_c^d F(x;y)dy=\int_c^{\varphi_1(x)} F(x;y)dy+\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} F(x;y)dy+\int_{\varphi_2(x)}^{d} F(x;y)dy=$$

$$=0+\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x;y)dy+0=\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x;y)dy.$$

Застосуємо теорему 1 до функції $F(x;y)$ та прямокутника Δ, одержимо

$$\iint_{\Delta} F(x;y)dxdy=\int_a^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x;y)dy. \tag{4}$$

З іншого боку в силу адитивності подвійного інтеграла (теорема 2 § 2)

$$\begin{aligned}\iint_{\Delta} F(x;y)dxdy&=\iint_{P} F(x;y)dxdy+\iint_{\Delta\setminus P} F(x;y)dxdy=\\&=\iint_{P} f(x;y)dxdy+0=\iint_{P} f(x;y)dxdy.\end{aligned} \tag{5}$$

Із співвідношень (4) та (5) випливає, що **теорему доведено.**

Аналогічно можна довести теорему про обчислення подвійних інтегралів по криволінійних областях другого типу.

Теорема 5. Нехай функція $f(x;y)$ інтегровна в області $P=\left\{(x;y)\middle|c\le y\le d,\varphi_1(y)\le x\le\varphi_2(y)\right\}$ і $\forall y\in[c;d]$ існує $\int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x;y)dx=\Psi(y)$, тоді існує $\int_c^d \Psi(y)dy$, причому $\iint_P f(x;y)dxdy=\int_c^d \Psi(y)dy=\int_c^d dy\int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x;y)dx$.

Зауваження 1. Інтеграли від функцій $\Phi(x)$ та $\Psi(y)$ в теоремах 4 та 5 також називають *повторними* по криволінійних областях першого та відповідно другого типів.

Зауваження 2. Якщо область інтегрування P не є областю першого чи другого типу, то її слід розбити на скінченне число таких областей, а потім застосувати властивість адитивності.

Приклад 4. Обчислити $\iint\limits_P \frac{x^2}{y^2}dxdy$, якщо область P обмежена лініями $y=x$, $xy=1$, $x=2$.

Розв'язання. Зобразимо область інтегрування на координатній площині:

- рівнянням $y=x$ задається бісектриса першого-третього координатних кутів,
- рівнянням $xy=1$ – гіпербола $y=\frac{1}{x}$, а рівністю $x=2$ – вертикальна пряма (див. рис. 3).

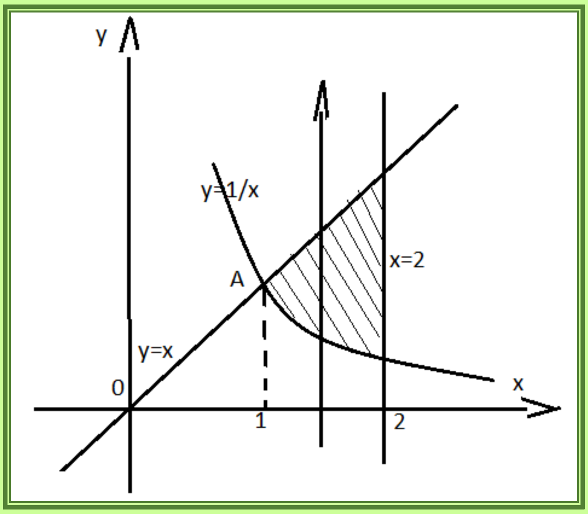


Рис. 3.

Якщо заштриховану фігуру розглядати як криволінійну область другого типу, то їх буде дві, а, отже доведеться обчислювати два повторні інтеграли. Якщо ж розглядати цю фігуру як криволінійну область першого типу, то P задовольнятиме таким обмеженням:

$$P:\ 1 \le x \le 2$$

$$\frac{1}{x} \le y \le x.$$

Як одержують ці обмеження? Спочатку шукаємо координати крайніх точок, в даному випарку це точка А, як розв'язок системи рівнянь, що задають лінії, на перетині яких лежить ця точка. Маємо $\begin{cases} y=x \\ y=\frac{1}{x} \end{cases}$, звідки

$x = \pm 1$. Область інтегрування лежить в першій чверті, тому $A(1; 1)$. Далі шукаємо ортогональну проекцію області на вісь Ox, одержаний проміжок дає обмеження на змінну x. В нашому випадку $1 \le x \le 2$.

З довільної точки сегмента $[a;b]$ проводимо промінь співнапрямлений з віссю Oy. Цей промінь перетне межу області інтегрування у двох точках. Нижню точку назвемо точкою входу в область, а верхню – точкою виходу. Лінію, на якій лежать точки входу в область, описуємо як графік залежності $y = \varphi_1(x)$, а лінію точок виходу – як графік залежності $y = \varphi_2(x)$. Тоді на змінну y накладаємо обмеження $\varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)$. В нашому випадку $\frac{1}{x} \le y \le x$.

Далі застосовуємо теорему 4 і маємо

$$\iint_P \frac{x^2}{y^2}dxdy = \int_1^2 dx \int_{\frac{1}{x}}^{x} x^2 y^{-2} dy = \int_1^2 x^2 dx \left.\frac{y^{-1}}{-1}\right|_{y=\frac{1}{x}}^{y=x} = \int_1^2 x^2 \left(-\frac{1}{x} + x\right) dx =$$

$$= \int_1^2 (x^3 - x)dx = \left.\left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right)\right|_1^2 = \frac{9}{4}.$$

Відповідь. 9/4.

Приклад 5. Обчислити $\iint_P ydxdy$, якщо область P обмежена лініями $x = y^2$, $x - y = 2$.

Розв'язання. Рівністю $x = y^2$ задається парабола з вершиною в початку координат та вітками направо, а рівністю $x - y = 2$ пряма, що перетинає координатні осі в точках (0;-2) та (2;0), тому область інтегрування має такий вигляд (див. рис. 4). Дану фігуру оптимально розглядати як криволінійну область другого типу. Знайдемо координати точок A та B із системи рівнянь

$$\begin{cases} x = y^2 \\ x - y = 2, \end{cases} \text{ звідки } y_1 = -1;\, y_2 = 2.$$

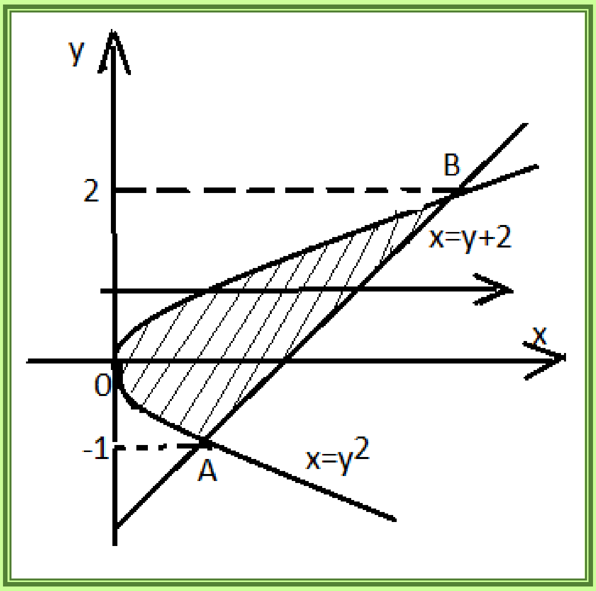


Рис. 4.

Отже, ортогональною проекцією області інтегрування на вісь Oy буде сегмент $[-1;2]$. Якщо з довільної точки цього проміжку провести промінь, співнапрямлений з віссю Ох, то точка входу в область лежить на дузі AB, яка є графіком залежності $x = y^2$, а точка виходу з області лежить на відрізку прямої $x = y+2$. Тому точки області P задовольняють таким обмеженням:

$$P: \quad -1 \le y \le 2,\; y^2 \le x \le y+2.$$

За теоремою 5

$$\iint\limits_P ydxdy = \int\limits_{-1}^{2} dy \int\limits_{y^2}^{y+2} ydx = \int\limits_{-1}^{2} ydy\, x\Big|_{x=y^2}^{x=y+2} = \int\limits_{-1}^{2} y(y+2-y^2)dy =$$

$$= \left(\frac{y^3}{3} + y^2 - \frac{y^4}{4}\right)\Bigg|_{-1}^{2} = \frac{8}{3} + 4 - 4 - \left(-\frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{9}{4}.$$

Відповідь. $9/4$.

Інколи спосіб обчислення подвійного інтеграла залежить не від типу області, а від підінтегральної функції. Проілюструємо це на такому прикладі.

Приклад 6. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_P e^{\frac{y}{x}}dxdy$, якщо область P обмежена прямими $y = x$, $y = 0$, $x = 1$.

Розв'язання. Область інтегрування має наступний вигляд (рис. 5).

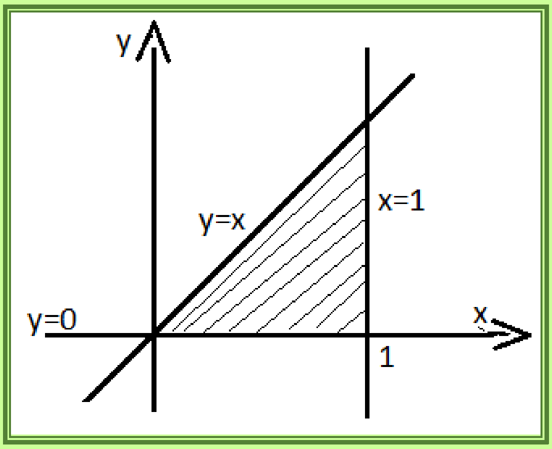


Рис. 5.

Вона є областю і першого, і другого типу одночасно. Проте при використанні теореми 5 потрібно знайти первісну для функції $e^{\frac{y}{x}}$ по аргументу x, якої в елементарних функціях не існує. Отже, потрібно застосовувати теорему 4. Як криволінійна область першого типу P задовольняє таким обмеженням: $0 \le x \le 1$; $0 \le y \le x$, тому згідно теореми 4 маємо:

$$\iint\limits_P e^{\frac{y}{x}} dxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x e^{\frac{y}{x}} dy = \int\limits_0^1 \left(xe^{\frac{y}{x}} \Bigg|_{y=0}^{y=x} \right) dx = \int\limits_0^1 x(e-1)dx = \frac{1}{2}(e-1)x^2 \Big|_0^1 = \frac{e-1}{2}.$$

Відповідь. $\dfrac{e-1}{2}$.

Якщо область інтегрування є областю першого та другого типу одночасно, то подвійний інтеграл по ній дорівнює одному із повторних, тобто ці повторні інтеграли між собою рівні. Перехід від одного з них до іншого називається зміною порядку інтегрування. Якщо ж область P не є областю першого чи другого типу, то її можна подати у вигляді об'єднання скінченної кількості таких областей. Тоді при зміні порядку інтегрування доведеться ще, крім того, застосувати властивість адитивності.

Приклад 7. Змінити порядок інтегрування в повторному інтегралі

$$\int\limits_1^2 dx \int\limits_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x;y)dy.$$

Розв'язання. Відновимо область інтегрування. Як криволінійна область першого типу вона задовольняє таким обмеженням:

$$\begin{cases} 1 \le x \le 2, \\ 2 - x \le y \le \sqrt{2x - x^2}. \end{cases}$$

Рівністю $y = 2 - x$ задається пряма, що відтинає на координатних осях відрізки по дві одиниці, а рівністю $y = \sqrt{2x - x^2}$ – півколо $\begin{cases} y \ge 0, \\ (x-1)^2 + y^2 = 1, \end{cases}$ тому область інтегрування має такий вигляд (див. рис. 6). Права частина кола $(x-1)^2 + y^2 = 1$ описується рівністю $x = 1 + \sqrt{1 - y^2}$.

Отже, заштрихована область як криволінійна область другого типу задовольняє обмеженням $\begin{cases} 0 \le y \le 1, \\ 2 - y \le x \le 1 + \sqrt{1 - y^2} \end{cases}$

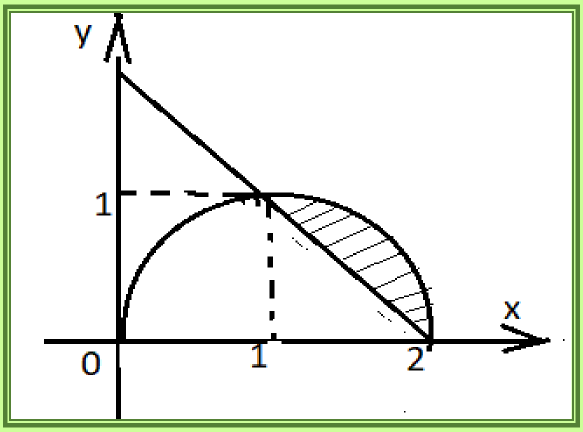


Рис. 6.

Таким чином, одержуємо рівність

$$\int_1^2 dx \int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x;y)dy = \int_0^1 dy \int_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x;y)dy.$$

Відповідь. $\int_1^2 dx \int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f\left(x;y\right)dy = \int_0^1 dy \int_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f\left(x;y\right)dy.$

§ 4. ЗАМІНА ЗМІННИХ В ПОДВІЙНИХ ІНТЕГРАЛАХ

Нехай в прямокутній системі координат O_1uv обмежена замкнена область Q за допомогою співвідношень

$$\begin{cases} x = x(u;v) \\ y = y(u;v) \end{cases} \tag{1}$$

взаємно однозначно відображається на область $P \subset Oxy$. Якщо функції $x(u;v)$ та $y(u;v)$ мають на Q обидві неперервні частинні похідні і визначник

$$I(u;v) = \begin{vmatrix} x'_u(u;v) & x'_v(u;v) \\ y'_u(u;v) & y'_v(u;v) \end{vmatrix} \neq 0 \tag{2}$$

на Q, то відомо, що із квадровності фігури Q випливає квадровність фігури P та площа образу Р може бути обчислена за допомогою наступного подвійного інтеграла

$$S(P) = \iint\limits_Q |I(u;v)| dudv. \tag{3}$$

Функціональний визначник (2) називають *якобіаном* відображення (1).

Справедлива така теорема.

Теорема 1. Нехай перетворення (1) переводить замкнену обмежену область Q в область P і є взаємно однозначним, причому функції $x(u;v)$ та $y(u;v)$ мають на Q обидві неперервні частинні похідні і визначник $I(u;v) \neq 0$. Якщо функція $f(x;y)$ неперервна на P, то має місце рівність

$$\iint\limits_P f(x;y) dxdy = \iint\limits_Q f\big(x(u;v); y(u;v)\big) |I(u;v)| dudv. \tag{4}$$

Доведення. Нехай τ' – довільний поділ області Q: $Q = \bigcup\limits_{i=1}^{n} Q_i$. Тоді в силу (1) одержимо τ-поділ області P: $P = \bigcup\limits_{i=1}^{n} P_i$, так що P_i – є образом Q_i. Покажемо, що при виконанні умов теореми із $\lambda(\tau') \to 0$ випливає, що і $\lambda(\tau) \to 0$.

Якщо функції $x(u;v)$ та $y(u;v)$ мають на області Q неперервні частинні похідні, то ці похідні є обмеженими функціями на обмеженій та замкненій області Q. Тому існує додатна стала K така, що в силу рівності Тейлора для функцій двох змінних при $n=1$ будемо мати

$$|x(u+\Delta u;v+\Delta v)-x(u;v)|=$$

$$=|x'_u(u+\theta\Delta u;v+\theta\Delta v)\Delta u+x'_v(u+\theta\Delta u;v+\theta\Delta v)\Delta v|\le K\sqrt{\Delta u^2+\Delta v^2}$$

та

$$|y(u+\Delta u;v+\Delta v)-y(u;v)|\le K\sqrt{\Delta u^2+\Delta v^2},0<\theta<1.$$

Нехай точки $M_1(u;v)$ та $M_2(u+\Delta u;v+\Delta v)$ належать множині Q_i, а точки $N_1(x(u;v);y(u;v))$ та $N_2(x(u+\Delta u;v+\Delta v);y(u+\Delta u;v+\Delta v))$ є їхніми образами при відображенні (1). Тоді

$$|N_1N_2|=\sqrt{(x(u+\Delta u;v+\Delta v)-x(u;v))^2+(y(u+\Delta u;v+\Delta v)-y(u;v))^2}\le$$

$$\le\sqrt{2}K\sqrt{\Delta u^2+\Delta v^2}=\sqrt{2}K|M_1M_2|.$$

З останньої нерівності слідує, що $d(P_i)\le\sqrt{2}d(Q_i)$, а, отже, $\lambda(\tau)\le\sqrt{2}K\lambda(\tau')$.

Тому при $\lambda(\tau')\to 0$ будемо мати, що і $\lambda(\tau)\to 0$.

Згідно рівності (3) $S(P_i)=\Delta P_i=\iint\limits_{Q_i}|I(u;v)|dudv$. Функція $I(u;v)$ (див. (2)) як результат арифметичних операцій над неперервними частинними похідними є неперервною функцією. Не втрачаючи загальності, можемо вважати, що всі множини Q_i замкнені та однозв'язні, тому за наслідком 3 із § 2 існують точки $\mathcal{A}_i\in Q_i$ такі, що $\Delta P_i=|I(A_i)|\Delta Q_i$, $i=\overline{1;n}$. Нехай T_i – образ точки $\mathcal{A}_i$ при відображенні (2), тоді $T_i=T_i(x(\mathcal{A}_i);y(\mathcal{A}_i))\in P_i$. В силу проведених міркувань справедлива наступна рівність

$$\sigma_f(\tau;T_i)=\sum_{i=1}^{n}f(T_i)\Delta P_i=\sum_{i=1}^{n}f(x(\mathcal{A}_i);y(\mathcal{A}_i))|I(\mathcal{A}_i)|\Delta Q_i=\sigma_{f(x;y)|\mathcal{I}|}(\tau';\mathcal{A}_i).$$

Оскільки функція $f(x;y)$ неперервна на P, то $f(x;y)$ інтегровна на P. Тому границя будь-яких інтегральних сум $\sigma_f(\tau;T_i)$ як тільки $\lambda(\tau)\to 0$ рівна $\iint\limits_P f(x;y)dxdy$. Аналогічно

$$\lim_{\lambda(\tau')\to 0}\sigma_{f(x;y)|I|}(\tau';A_i)=\iint\limits_Q f\left(x(u;v);y(u;v)\right)\left|I(u;v)\right|dudv.$$

Отже,

$$\lim_{\lambda(\tau')\to 0}\sigma_{f(x;y)|I|}(\tau';\mathcal{A}_i)=\lim_{\lambda(\tau')\to 0}\sigma_f(\tau;T_i)=\lim_{\lambda(\tau)\to 0}\sigma_f(\tau;T_i).$$

Теорему доведено.

Приклад 1. Обчислити інтеграл $\iint\limits_P(6x-3y)dxdy$, якщо область P – паралелограм, обмежений прямими $x+y=1$, $x+y=2$, $2x-y=1$, $2x-y=3$.

Розв'язання. Область інтегрування має такий вигляд (див. рис. 7)

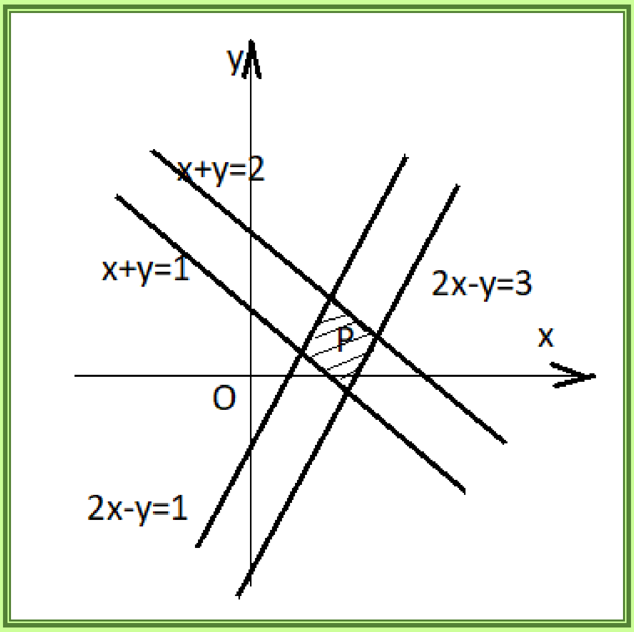


Рис. 7.

Безпосереднє обчислення інтеграла по такій області надто громіздке, тому що як в напрямі осі *Ox*, так і в напрямі осі *Oy* область *P* треба спочатку розбити на три частини, а потім по кожній з них обчислити три подвійні інтеграли.

Виконаємо таку заміну змінних:

$$\begin{cases} u = x + y; \\ v = 2x - y. \end{cases} \qquad (5)$$

Тоді прямі $x + y = 1$, $x + y = 2$ в системі координат Oxy переходять у прямі $u = 1$ та $u = 2$ в системі O_1uv, а прямі $2x - y = 1$ та $2x - y = 3$ відповідно в прямі $v = 1$ та $v = 3$. Таким чином, паралелограм P за допомогою відображення (5) переходить в системі координат O_1uv в прямокутник Q: $\begin{cases} 1 \le u \le 2; \\ 1 \le v \le 3. \end{cases}$

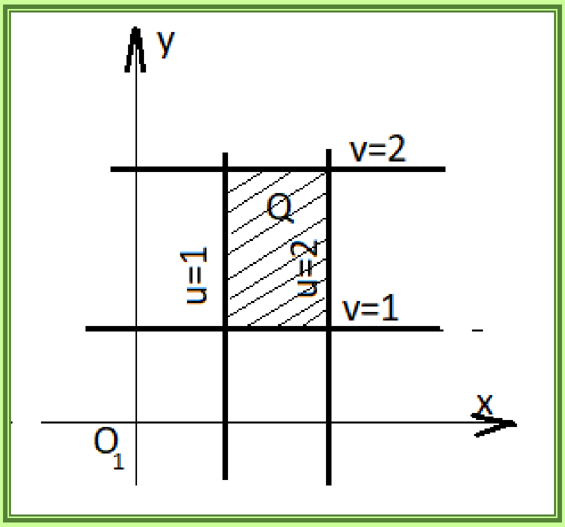


Рис. 8.

Далі знайдемо якобіан відображення (5). Для цього потрібно залежність між координатами x, y, u, v подати у вигляді (1):

$$\begin{cases} u = x + y; \\ v = 2x - y; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3}(u + v); \\ y = \frac{1}{3}(2u - v). \end{cases}$$

Отже, $I(u;v) = \begin{vmatrix} x'_u(u;v) & x'_v(u;v) \\ y'_u(u;v) & y'_v(u;v) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{vmatrix} = -\frac{1}{3}$, тому $|I(u;v)| = \frac{1}{3}$.

За формулою (4)

$$\iint\limits_P (6x - 3y)dxdy = \iint\limits_Q \left(6 \cdot \frac{1}{3}(u + v) - 3 \cdot \frac{1}{3}(2u - v)\right)\frac{1}{3}dudv =$$

$$=\frac{1}{3}\iint_Q 3v\,du\,dv=\frac{1}{3}\int_1^2 du\int_1^3 3v\,dv=4.$$

Відповідь. 4.

Найчастіше вживаним є перехід від декартових координат x,y до полярних ρ,φ. Як відомо, зв'язок між декартовими та полярними координатами описується співвідношеннями $\begin{cases} x=\rho\cdot\cos\varphi \\ y=\rho\cdot\sin\varphi \end{cases}$, причому $\rho\ge 0$, а $\varphi\in[a;a+2\pi)$.

Знайдемо якобіан цього переходу:

$$I(\varphi;\rho)=\begin{vmatrix} x'_\varphi(\varphi;\rho) & x'_\rho(\varphi;\rho) \\ y'_\varphi(\varphi;\rho) & y'_\rho(\varphi;\rho) \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -\rho\sin\varphi & \cos\varphi \\ \rho\cos\varphi & \sin\varphi \end{vmatrix}=-\rho\Rightarrow\left|I(\varphi;\rho)\right|=\rho.$$

Тому перехід від декартових координат до полярних в подвійному інтегралі здійснюється згідно рівності

$$\iint_P f(x;y)dxdy=\iint_Q f\left(\rho\cos\varphi;\rho\sin\varphi\right)\rho d\varphi d\rho, \tag{6}$$

де Q – це область P, подана як криволінійний сектор.

Зауваження 1. У багатьох випадках формулу (6) доцільно застосовувати тоді, коли підінтегральна функція або рівняння границі області P містить суму x^2+y^2, оскільки в полярних координатах ця сума має простий вигляд:

$$x^2+y^2=\rho^2cos^2\varphi+\rho^2sin^2\varphi=\rho^2.$$

Зауваження 2. Якщо область P обмежена променями $\varphi=\alpha$, $\varphi=\beta$ $(\alpha<\beta)$, кривими $\rho=\rho_1(\varphi)$, $\rho=\rho_2(\varphi)$ $(\rho_1(\varphi)\le\rho_2(\varphi))$ (див. рис. 9), то формулу (6) можна записати у вигляді

$$\iint_P f(x;y)dxdy=\int_\alpha^\beta d\varphi\int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} f(\rho\cos\varphi;\rho\sin\varphi)\rho d\rho.$$

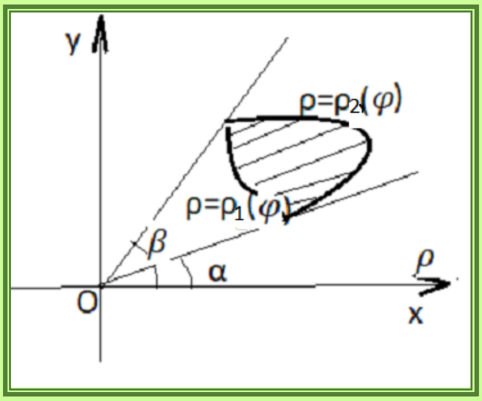


Рис. 9

Зауваження 3. Якщо область P охоплює початок координат, тобто точка $O(0;0)$ є внутрішньою точкою області P (див. рис. 10), то

$$\iint_P f(x;y)dxdy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\rho(\varphi)} f(\rho\cos\varphi;\rho\sin\varphi)\rho d\rho \;,$$

де $\rho = \rho(\varphi)$ – полярне рівняння межі області *P.*

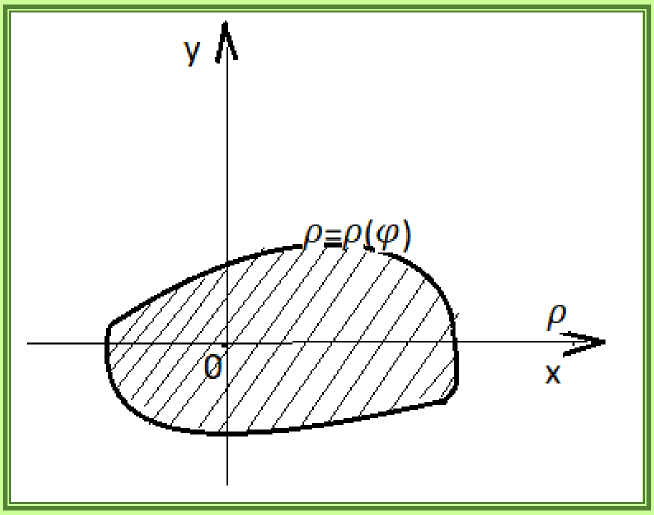


Рис. 10.

Зауваження 4. Коли підінтегральна функція або рівняння границі області P містить суму $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$, то буває доцільним перехід до узагальненої полярної системи координат, а саме: $\begin{cases} x = a\cos\varphi \\ y = b\sin\varphi \end{cases}$, при цьому $\left|I(\varphi;\rho)\right| = ab\rho$.

Приклад 2. Обчислити $\iint_P \sqrt{x^2+y^2}dxdy$, якщо область P обмежена колами $x^2+y^2=2x$, $x^2+y^2=4x$.

Розв’язання.

$x^2+y^2=2x \Leftrightarrow (x-1)^2+y^2=1$; $x^2+y^2=4x \Leftrightarrow (x-2)^2+y^2=2^2$,тому область інтегрування має наступний вигляд:(див. рис. 11)

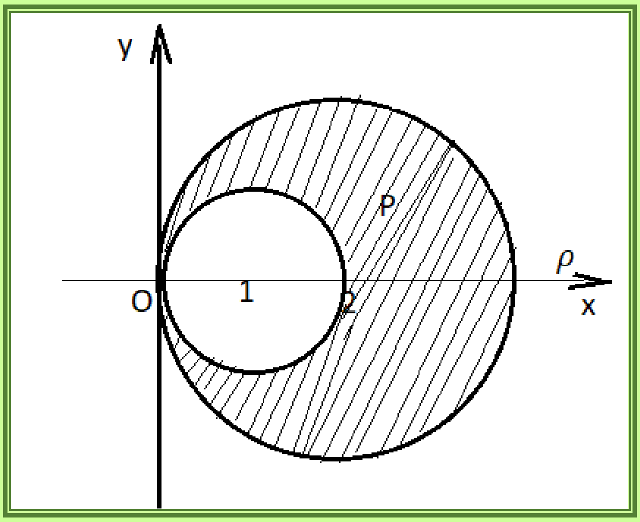


Рис. 11.

Знайдемо рівняння межі області P в полярних координатах: $\rho^2 cos^2\varphi+\rho^2 sin^2\varphi=2\rho\cos\varphi$, звідси $\rho=2\cos\varphi$ – полярне рівняння малого кола; аналогічно знаходимо, що $\rho=4\cos\varphi$ – полярне рівняння великого кола. Якщо кут змінюватиметься в межах від $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$, то змінна ρ матиме межі від $2\cos\varphi$ до $4\cos\varphi$. Отже, за формулою (6) маємо

$$\iint\limits_P \sqrt{x^2+y^2}dxdy=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_{2\cos\varphi}^{4\cos\varphi} \rho^2 d\rho=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\rho^3}{3}\Bigg|_{\rho=2cos\varphi}^{\rho=4\cos\varphi} d\varphi=$$

$$=\frac{56}{3}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\varphi d\varphi=\frac{56}{3}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(1-\sin^2\varphi\right)d(\sin\varphi)=\frac{56}{3}\left(\sin\varphi-\frac{\sin^3\varphi}{3}\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{224}{9}.$$

Відповідь. $\frac{224}{9}$.

Приклад 4. Обчислити $\iint\limits_P \sqrt{xy}dxdy$, якщо область P обмежена лінією $\left(\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3}\right)^4=\frac{xy}{\sqrt{6}}$ і лежить в першій чверті.

Розв'язання. Перейдемо в подвійному інтегралі до узагальнених полярних координат за формулами $\begin{cases} x=\sqrt{2}\rho\cos\varphi \\ y=\sqrt{3}\rho\sin\varphi \end{cases}$, тоді $\left|I(\varphi;\rho)\right|=\sqrt{6}\rho$, а рівняння кривої набуде такого вигляду $\rho^8=\rho^2\sin\varphi\cos\varphi$, або $\rho=\sqrt[6]{\sin\varphi\cos\varphi}$. В першій чверті $0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$, тому

$$\iint\limits_P \sqrt{xy}dxdy=\iint\limits_Q \sqrt{\sqrt{6}\rho^2\sin\varphi\cos\varphi}\sqrt{6}\rho d\varphi d\rho=6^{\frac{3}{4}}\iint\limits_Q \rho^2\sqrt{\sin\varphi\cos\varphi}d\varphi d\rho=$$

$$=\frac{6^{\frac{3}{4}}}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cdot\cos\varphi d\varphi=\frac{6^{\frac{3}{4}}}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi d(\sin\varphi)=\frac{1}{\sqrt[4]{6}}.$$

Відповідь. $\frac{1}{\sqrt[4]{6}}$

§ 5. ЗАСТОСУВАННЯ ПОДВІЙНИХ ІНТЕГРАЛІВ

1. Обчислення площ плоских фігур.

Якщо в площині *Oxy* задана обмежена замкнена фігура *P*, то площа цієї фігури обчислюється (див. § 1, наслідок 1) за формулою

$$S(P)=\iint\limits_P dxdy. \qquad (1)$$

Приклад 1. Обчислити площу фігури, що обмежена кривою $\left(x^2+y^2\right)^2=2a^2\left(x^2-y^2\right)$ при обмеженнях $x^2+y^2\ge a^2$, $x>0$.

Розв'язання. При обчисленні інтеграла (1) згідно зауваження 1 § 4 доцільно перейти до полярних координат, тому $S(P)=\iint\limits_Q \rho d\varphi d\rho$.

Подамо область Q як криволінійний сектор. Рівняння межі області набуде в полярних координатах вигляду: $\rho^2 = 2a^2\cos 2\varphi$, а обмеження - $\rho \geq a$.

Отже, Q – це фігура, що обмежена правою віткою лемніскати Бернуллі $\rho = a\sqrt{2cos\,2\varphi}$, та лежить зовні кола $\rho = a$. Зобразимо її (див. рис. 12).

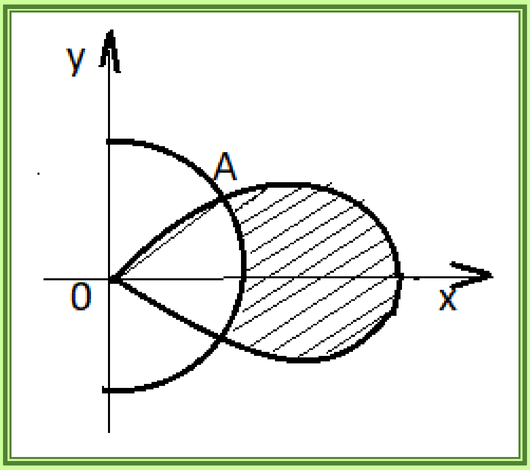


Рис. 12.

Полярний кут точки A (точки перетину лемніскати та кола) знайдемо з рівняння:

$$a\sqrt{2cos\,2\varphi} = a \;\;\Rightarrow\;\; \varphi = \frac{\pi}{6}.$$

На основі симетрії заштрихованої області, площу якої потрібно обчислити, приходимо до висновку, що шукана площа рівна подвійній площі фігури, що задається обмеженнями: $\begin{cases} 0 \leq \varphi \leq \dfrac{\pi}{6}; \\ a \leq \rho \leq a\sqrt{2cos\,2\varphi}. \end{cases}$ Тому маємо:

$$S(P) = 2\int_0^{\frac{\pi}{6}} d\varphi \int_a^{a\sqrt{2\cos 2\varphi}} \rho\, d\rho = 2\int_0^{\frac{\pi}{6}} d\varphi \left.\frac{\rho^2}{2}\right|_{\rho=a}^{\rho=a\sqrt{2\cos 2\varphi}} = a^2\int_0^{\frac{\pi}{6}} (2\cos 2\varphi - 1)d\varphi =$$

$$= a^2(\sin 2\varphi - \varphi)\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{3\sqrt{3}-\pi}{6}a^2.$$

Відповідь. $\dfrac{3\sqrt{3}-\pi}{6}a^2$.

2. Обчислення об'ємів тіл.

Нехай на площині *Oxy* маємо обмежену замкнену квадровну фігуру *P*, межею якої є контур γ. Через *П* позначимо циліндричну поверхню із напрямною γ та твірними паралельними осі *Oz*, а через σ – графік функції $z = f(x;y)$, яка задана на області *P* і невід'ємна на ній. Фігура, що обмежена площиною *Oxy*, поверхнями *П* та σ, називається *циліндричним брусом* (див. рис. 13).

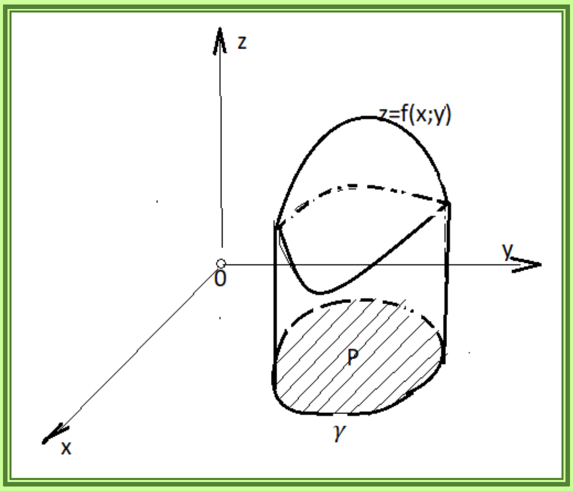


Рис. 13.

Обчислимо об'єм цього тіла. Якби поверхня σ була площиною $z = h$, то об'єм циліндричного бруса був би рівним $h \cdot S(P)$. Влаштуємо τ-поділ області P $\left(P = \bigcup_{i=1}^{n} P_i\right)$ з умовою $\lambda(\tau) < \frac{K}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, $K \in R$. Через лінії поділу проведемо циліндричні поверхні із твірними паралельними осі *Oz*; через $m_i\ (M_i)$ позначимо інфімальне (супремальне) значення функції $f(x;y)$ на множині P_i. Тоді $\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta P_i = V(R_n)$, де R_n – кубовне тіло, вписане в циліндричний брус; $\sum_{i=1}^{n} M_i \Delta P_i = V(Q_n)$, де Q_n – кубовне тіло, описане навколо циліндричного бруса. В результаті ми побудували дві послідовності кубовних тіл (R_n) та (Q_n) відповідно вписаних та описаних навколо циліндричного бруса, причому $V(R_n) = s_f(\tau)$; $V(Q_n) = S_f(\tau)$, де $s_f(\tau)$, $S_f(\tau)$ – нижні та верхні суми Дарбу для функції $f(x;y)$. Нехай функція $f(x;y)$ неперервна на P, тоді згідно теорем 1та 2 § 1

$$\lim_{\lambda(\tau)\to 0} s_f(\tau) = \lim_{\lambda(\tau)\to 0} S_f(\tau) = \iint_P f(x;y)dxdy, \text{ або } \lim_{n\to\infty} V\left(R_n\right) = \lim_{n\to\infty} V\left(Q_n\right).$$

Згідно критерію кубовності тіла циліндричний брус має об'єм

$$V_{ц.б.} = \lim_{\lambda(\tau)\to 0} s_f(\tau) = \lim_{\lambda(\tau)\to 0} S_f(\tau) = \iint_P f(x;y)dxdy. \qquad (2)$$

Зауваження 1. Якщо просторова фігура T має ортогональною проекцією на площину Oxy фігуру P, знизу обмежена поверхнею, що є графіком функції $z = f\left(x;y\right)$, а зверху – поверхнею $z = g\left(x;y\right)$, то при умові неперервності функцій $f\left(x;y\right)$ та $g\left(x;y\right)$ на P тіло T кубовне, причому

$$V(T) = \iint_P \left(g(x;y) - f(x;y)\right)dxdy.$$

Зауваження 2. Межа області P у зауваженні 1 є ортогональною проекцією на площину Oxy просторової лінії, яка одержується в результаті перетину двох поверхонь $z_1 = f(x;y)$, $z_2 = g(x;y)$. Щоб знайти рівняння цієї межі, слід із системи рівнянь даних поверхонь вилучити змінну z.

Приклад 2. Обчислити об'єм тіла, яке обмежене поверхнями $y = x^2$, $z = x^2 + y^2$ та площинами $y = 1$, $z = 0$.

Розв'язання. Рівністю $z = x^2 + y^2$ задається параболоїд обертання навколо осі Oz; оскільки в рівності $y = x^2$ відсутня змінна z, то дане рівняння є рівнянням циліндричної поверхні із твірними паралельними до осі Oz, а напрямною слугує парабола. Площина $z = 0$ – це площина Oxy, а площина $y = 1$ паралельна до площини Oxz. Зобразимо це тіло. (див. рис. 14)

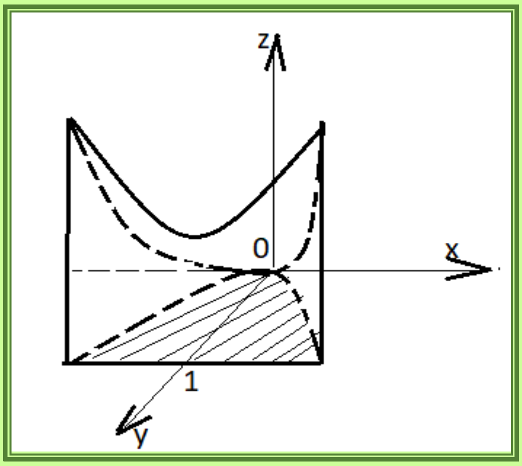


Рис. 14.

Його можемо розглядати як циліндричний брус, який зверху обмежений параболоїдом $z = x^2 + y^2$; а роль області P відіграє множина, що задовольняє обмеженням: $-1 \le x \le 1$; $x^2 \le y \le 1$.

Тому згідно рівності (2) будемо мати:

$$V = \iint_P \left(x^2 + y^2\right) dxdy = \int_{-1}^{1} dx \int_{x^2}^{1} \left(x^2 + y^2\right) dxdy = \int_{-1}^{1} dx \left(x^2 y + \frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_{y=x^2}^{y=1} =$$

$$= \int_{-1}^{1} \left(x^2 + \frac{1}{3} - x^4 - \frac{x^6}{6}\right) dx = 2\left(\frac{x^3}{3} + \frac{x}{3} - \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{68}{105}.$$

Відповідь. $\frac{68}{105}$.

3. Обчислення площ криволінійних поверхонь.

Спочатку з'ясуємо, що ми назвемо площею довільної поверхні. Нагадаємо, що за довжину лінії було прийнято границю довжин вписаних в цю лінію ламаних при умові, що довжина найбільшої ланки ламаної прямує до нуля. Плоску фігуру назвали квадровною (тобто такою, що має площу), якщо верхня межа множини площ вписаних многокутників співпадає із нижньою межею множини площ описаних многокутників для цієї фігури. Просторове тіло назвали кубовним (тобто таким, що має об'єм), якщо верхня межа множини об'ємів вписаних многогранників співпадає із нижньою межею множини об'ємів описаних многогранників. Тому природно було б за площу криволінійної поверхні прийняти граничне значення площ вписаних многогранних поверхонь при умові, що найбільший діаметр многокутників, з яких складена вписана поверхня, прямує до нуля. Але, як показав у 1870 році німецький математик Г. Шварц, від такого шляху довелося відмовитися і дати інше означення площі криволінійної поверхні.

Приклад Шварца. Нехай σ – бічна поверхня прямого кругового циліндра радіуса r з висотою h. Відомо, що $S(\sigma) = 2\pi r$. Давайте впишемо в дану криволінійну поверхню наступну многогранну поверхню. Площинами паралельними висоті розіб'ємо σ на n малих циліндрів. В одержані (n + 1) коло вписуємо правильні m-кутники таким чином: точки поділу верхнього кола лежать над серединами дуг поділу нижнього кола. Розглянемо трикутники, сторонами яких є хорди дуг та відрізки, що з'єднують найближчі точки поділу сусідніх кіл. Таких трикутників буде $2mn$, їх вершини лежать на σ, одержана многогранна поверхня є вписаною в σ. Обчислимо площу даної вписаної поверхні (рис. 15).

Для цього обчислимо площу одного трикутника.

$$S_{\Delta ABD} = \frac{1}{2}|AB| \cdot |DE| = |AE| \cdot |DE|.$$

$$|AE| = |OA| \sin \angle AOE = r \sin \frac{\pi}{m};$$

$$|DE|^2 = |CD|^2 + |CE|^2 = \left(\frac{h}{n}\right)^2 + \left(r - |OE|\right)^2 = \left(\frac{h}{n}\right)^2 + \left(r - r\cos\frac{\pi}{m}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_{\Delta ABD} = r \sin \frac{\pi}{m} \cdot \sqrt{\left(\frac{h}{n}\right)^2 + r^2\left(1 - \cos\frac{\pi}{m}\right)^2}.$$

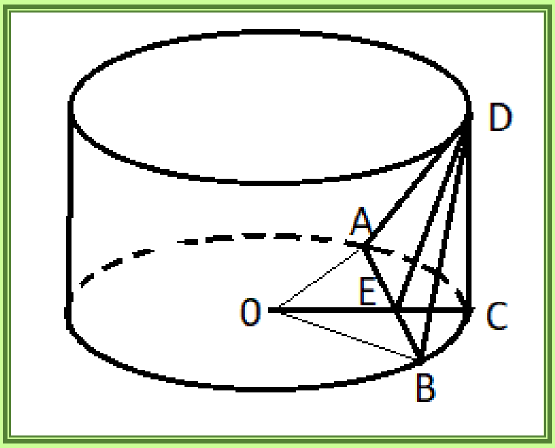


Рис. 15.

Отже, площа всієї вписаної многогранної поверхні дорівнює виразу

$$S_{mn} = 2mnr \sin \frac{\pi}{m} \cdot \sqrt{\left(\frac{h}{n}\right)^2 + r^2\left(1 - \cos\frac{\pi}{m}\right)^2}.$$

Якщо m і $n \to \infty$, то діаметри всіх трикутників, які є гранями вписаної многогранної поверхні, прямують до нуля. Покажемо, що не існує границі S_{mn}, коли $m \to \infty$ i $n \to \infty$ незалежно одне від іншого.

Нехай $m = n \to \infty$, тоді

$$\lim_{n\to\infty} S_{mn} = \lim_{n\to\infty} 2n^2 r \sin\frac{\pi}{m}\cdot\sqrt{\left(\frac{h}{n}\right)^2 + r^2\left(1-\cos\frac{\pi}{m}\right)^2} =$$

$$= 2r\lim_{n\to\infty} n^2\frac{\pi}{n}\sqrt{\left(\frac{h}{n}\right)^2 + 4r^2\sin^4\frac{\pi}{2n}} = 2r\pi\lim_{n\to\infty}\sqrt{h^2 + 4r^2n^2\sin^4\frac{\pi}{2n}} =$$

$$= 2\pi r\sqrt{h^2 + 4r^2\lim_{n\to\infty} n^2\sin^4\frac{\pi}{2n}} = 2\pi r\sqrt{h^2 + 4r^2\lim_{n\to\infty} n^2\left(\frac{\pi}{2n}\right)^4} = 2\pi rh.$$

Якщо вибрати $n = m^2$, то будемо мати

$$\lim_{m\to\infty} S_{mn} = \lim_{m\to\infty} 2rm^3\sin\frac{\pi}{m}\cdot\sqrt{\left(\frac{h}{m^2}\right)^2 + 4r^2\sin^4\frac{\pi}{2m}} =$$

$$= 2r\lim_{m\to\infty} m^3\frac{\pi}{m}\sqrt{\left(\frac{h}{m^2}\right)^2 + 4r^2\sin^4\frac{\pi}{2m}} = 2\pi r\lim_{m\to\infty}\sqrt{h^2 + 4r^2m^4\sin^4\frac{\pi}{2m}} =$$

$$= 2\pi r\sqrt{h^2 + 4r^2\lim_{m\to\infty} m^4\sin^4\frac{\pi}{2m}} = 2\pi r\sqrt{h^2 + 4r^2\lim_{m\to\infty} m^4\frac{\pi^4}{16m^4}} = 2\pi r\sqrt{h^2 + \frac{r^2\pi^4}{4}}.$$

Таким чином, вираз S_{mn} не має границі, коли n і m прямують до нескінченності довільно. Тому для такої простої поверхні як бічна поверхня прямого кругового циліндра не можна обчислювати її площу як границю площ многогранних вписаних поверхонь.

Дамо наступне означення площі криволінійної поверхні.

Нехай поверхня σ є графіком функції $z = f(x;y)$, яка задана в області *P*, нехай поверхня в кожній своїй точці має дотичну площину. Розглянемо довільний τ-поділ області P: $P = \bigcup_{i=1}^{n} P_i$, виберемо $\forall\ T_i \in P_i$ $(i = \overline{1;n})$. Позначимо через α_i – дотичну площину до поверхні σ в точці T_i, через S_i-ту частину α_i, для якої P_i є її ортогональною проекцією на площину *Oxy*, через ΔS_i площу S_i. Складемо суму $\sum_{i=1}^{n}\Delta S_i$.

1°. *Площею поверхні* σ назвемо таку границю

$$S(\sigma)=\lim_{\lambda(\tau)\to 0}\sum_{i=1}^{n}\Delta S_i . \quad (3)$$

Обчислимо цю границю. Справедливе твердження.

Теорема. Нехай функція $f(x;y)$ задана в області P і має на ній неперервні частинні похідні, а поверхня σ є графіком цієї функції. Тоді площа поверхні σ обчислюється за формулою

$$S(\sigma)=\iint_P \sqrt{1+\left(f'_x(x;y)\right)^2+\left(f'_y(x;y)\right)^2}\,dxdy . \quad (4)$$

Доведення. Якщо функція $f(x;y)$ має неперервні частинні похідні, то вона диференційовна на *P,* а тому поверхня σ в кожній своїй точці має дотичну площину. Нехай для τ-поділу області P та вибору точок $\forall\ T_i\in P_i$ точки мають координати $T_i\left(x_i;y_i\right)$, а $f\left(T_i\right)=f\left(x_i;y_i\right)=z_i$, тоді рівняння дотичної площини α_i має вигляд

$$f'_x(T_i)\cdot(x-x_i)+f'_y(T_i)\cdot(y-y_i)-(z-z_i)=0.$$

Зауважимо, що нормальний вектор цієї площини має координати $\overrightarrow{n_i}=\left(f'_x(T_i);f'_y(T_i);-1\right)$.

Якщо фігура P_i – ортогональна проекція фігури S_i на площину *Oxy*, то, як відомо, для площ цих фігур справедлива рівність $\Delta P_i=\Delta S_i\cdot\cos\gamma_i$, де γ_i – кут між площиною *Oxy* та дотичною площиною α_i. Але кут між площинами співпадає із гострим кутом між нормалями до цих площин. Нормаль площини *Oxy* має координати $\vec{n}$ = (0; 0; 1). Знайдемо скалярний добуток векторів $\vec{n}_i$ та $\vec{n}$ по означенню та за правилом обчислення, одержимо рівність

$$\left|\left(\overrightarrow{n_i},\vec{n}\right)\right|=\left|\overrightarrow{n_i}\right|\cdot\left|\vec{n}\right|\cdot\cos\gamma_i=\left|f'_x(T_i)\cdot 0+f'_y(T_i)\cdot 0-1\right|,$$

або

$$\sqrt{\left(f'_x(T_i)\right)^2+\left(f'_y(T)_i\right)^2+1}\cdot\cos\gamma_i=1,$$

звідки

$$\cos\gamma_i = \frac{1}{\sqrt{\left(f'_x(T_i)\right)^2 + \left(f'_y(T_i)\right)^2 + 1}}.$$

Отже, $\Delta S_i = \dfrac{\Delta P_i}{\cos\gamma_i} = \sqrt{\left(f'_x(T_i)\right)^2 + \left(f'_y(T_i)\right)^2 + 1} \cdot \Delta P_i \ , i = \overline{1;n}$.

Підставимо значення ΔS_i в (3), одержимо

$$S(\sigma) = \lim_{\lambda(\tau)\to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\left(f'_x(T_i)\right)^2 + \left(f'_y(T_i)\right)^2 + 1}\Delta P_i.$$

Під знаком границі маємо інтегральну суму для функції $\sqrt{1 + \left(f'_x(x;y)\right)^2 + \left(f'_y(x;y)\right)^2}$, τ-поділу області P і вибору точок $T_i \in P_i$.

Дана функція неперервна на *P,* тому інтегровна на цій області. Отже, дана границя існує і дорівнює подвійному інтегралу в (4).

Теорема доведена.

Приклад 1. Знайти площу частини сфери $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, яка лежить всередині циліндра $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ $(b \le a)$.

Розв'язання. Обидві поверхні симетричні відносно всіх координатних площин. Тому розглянемо восьму частину поверхні, площу якої необхідно обчислити, а саме ту, що знаходиться в першому октанті, тобто при $x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0$. Зобразимо цю поверхню: рис. 16

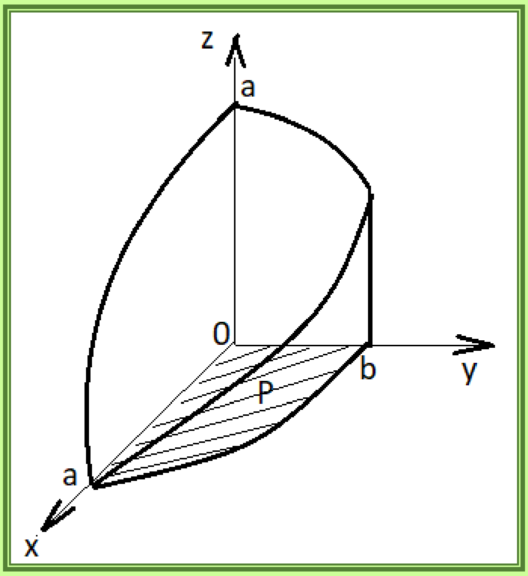


Рис. 16.

Рівняння сфери в першому октанті має наступний вигляд:

$$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}\text{, тому}$$

$$1+z_x'^{\,2}+z_y'^{\,2}=1+\left(\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\right)^2+\left(\frac{-y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\right)^2=\frac{a^2}{a^2-x^2-y^2}.$$

P – це четвертина внутрішності еліпса і як криволінійна область першого типу задовольняє обмеженням

$$\begin{cases} 0\le x\le a; \\ 0\le y\le \dfrac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}. \end{cases}$$

Отже, маємо

$$S(\sigma)=8\iint\limits_P \frac{adxdy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}=8a\int_0^a dx\int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}\frac{dy}{\sqrt{\left(\sqrt{a^2-x^2}\right)^2-y^2}}=$$

$$=8a\int_0^a\left(\arcsin\frac{y}{\sqrt{a^2-x^2}}\Bigg|_{y=0}^{y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}\right)dx=8a\int_0^a\arcsin\frac{b}{a}dx=8a^2\arcsin\frac{b}{a}.$$

Відповідь. $8a^2\arcsin\dfrac{b}{a}$.

4. Обчислення маси матеріальної неоднорідної пластини.

Якщо матеріальна пластина має форму квадровної замкненої області *P*, є однорідною, тобто поверхнева густина скрізь однакова ρ, то маса такого об'єкта рівна добутку площі фігури на густину.

Нехай тепер маса розподілена по області *P* неоднорідно, причому якщо область *P* розташовано на координатній площині Oxy, та відома функція поверхневої щільності $\rho=\rho(x;y)$. Потрібно обчислити масу такої пластини.

Для цього виберемо довільний τ-поділ області P: $P=\bigcup\limits_{i=1}^{n}P_i$.

Нехай функція $\rho(x;y)$ неперервна на P, а $\overline{P_i}$ – замикання області P_i, тоді існують точки $M_i', M_i'' \in \overline{P_i}$ такі, що $\rho(M_i') = \min\limits_{M \in \overline{P_i}} \rho(M)$; $\rho(M_i'') = \max\limits_{M \in \overline{P_i}} \rho(M)$.

Тоді для сум $\sum\limits_{i=1}^{n} \rho(M_i')\Delta\overline{P_i} = s_\rho(\tau)$ та $\sum\limits_{i=1}^{n} \rho(M_i'')\Delta\overline{P_i} = S_\rho(\tau)$ справедливі співвідношення

$$s_\rho(\tau) \le m \le S_\rho(\tau), \tag{5}$$

де m – шукана маса. За побудовою вирази $s_\rho(\tau)$ та $S_\rho(\tau)$ є відповідно нижніми та верхніми сумами Дарбу для функції густини, що відповідають τ-поділу області P.

Функція $\rho(x;y)$ є інтегровною на P, тому за критерієм інтегровності (див. теорема 2 із § 1) $\lim\limits_{\lambda(\tau)\to 0} s_\rho(\tau) = \lim\limits_{\lambda(\tau)\to 0} S_\rho(\tau) = \iint\limits_P \rho(x;y)dxdy$. Тому якщо в (5) перейти до границі при умові $\lambda(\tau)\to 0$, то одержимо наступу формулу для обчислення маси пластини

$$m = \iint\limits_P \rho(x;y)dxdy\,. \tag{6}$$

Приклад 2. Знайти масу пластини *P*, яка обмежена лініями $y=0$, $x+y=2$, $y=x^2$, якщо густина пластини в кожній точці $(x;\,y)$ дорівнює $\rho(x;y) = y^2x$.

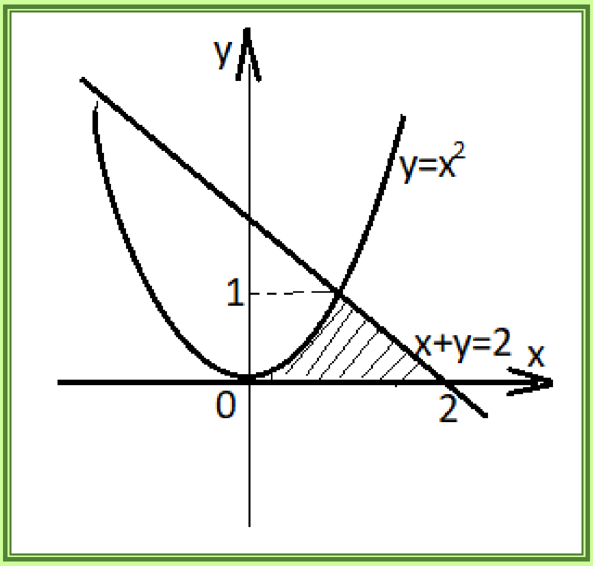


Рис. 17.

Розв'язання. Зобразимо фігуру, яка обмежена прямими $y=0, x+y=2$ та параболою $y=x^2$ (див. рис. 17). Щоб не розбивати дану область на дві криволінійні першого типу прямою $x = 1$, доцільніше розглядати дану область як криволінійну другого типу. Тоді вона задовольняє обмеженням: $\begin{cases} 0 \le y \le 1; \\ \sqrt{y} \le x \le 2-y. \end{cases}$

За формулою (6) будемо мати:

$$m = \iint\limits_P xy^2 dxdy = \int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{2-y} xy^2 dx = \int_0^1 y^2 dy \left. \frac{x^2}{2} \right|_{x=\sqrt{y}}^{x=2-y} =$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{(2-y)^2}{2} y^2 - \frac{y^3}{2} \right) dy = \int_0^1 \left(2y^2 - \frac{5}{2} y^3 + \frac{y^4}{4} \right) dy =$$

$$= \left. \left(\frac{2}{3} y^3 - \frac{5}{8} y^4 + \frac{1}{20} y^5 \right) \right|_0^1 = \frac{11}{120}.$$

Відповідь. $\frac{11}{120}$.

5. Обчислення статичних моментів та координат центра ваги матеріальної пластини.

Якщо в точці з координатами $(x; y)$ розташоване точкове тіло масою m, то добутки xm, ym називають статичними моментами цього тіла відносно осей відповідно Oy та Ox. Якщо в точках $(x_i; y_i), i=\overline{1;n}$, розташовані тіла масами m_i, то кажуть, що маємо дискретно розташовану систему мас. Для неї статичні моменти відносно координатних осей обчислюють за формулами

$$M_x = \sum_{i=1}^n y_i m_i ; \; M_y = \sum_{i=1}^n x_i m_i . \qquad (7)$$

Нехай маємо матеріальну неоднорідну пластину із п. 4, тобто область P розташовано на координатній площині Oxy, та відома функція поверхневої щільності $\rho = \rho(x; y)$, яка неперервна на P. Потрібно обчислити статичні моменти відносно координатних осей даної пластини.

Візьмемо довільний τ-поділ області $P: P=\bigcup_{i=1}^{n} P_i$, в кожній множині P_i довільним чином виберемо точку $T_i(x_i;y_i)\in P_i$ і будемо вважати, що поверхнева щільність на всій P_i стала і дорівнює поверхневій щільності маси в точці T_i. Ми фактично замінюємо кожну неоднорідну матеріальну пластину P_i на конгруентну по формі, але однорідну. Така заміна не приводить до великої помилки, оскільки функція $\rho(x;y)$ неперервна, а діаметр τ-поділу області можемо вибрати достатньо малим. Масу кожної заміненої області зосередимо в точці T_i. В результаті дістанемо дискретний розподіл мас: тіла масою $m_i=\rho(T_i)\Delta P_i$ розташовані в точках $T_i(x_i;y_i)$, $i=\overline{1;n}$. Для цієї системи згідно (7)

$$M_x(\tau;T_i)=\sum_{i=1}^{n} y_i\rho(x_i;y_i)\Delta P_i \;;\; M_y(\tau;T_i)=\sum_{i=1}^{n} x_i\rho(x_i;y_i)\Delta P_i .$$

2°. *Статичними моментами* відносно координатних осей матеріальної неоднорідної пластини із функцією поверхневої щільності $\rho(x;y)$ назвемо відповідні границі

$$M_x=\lim_{\lambda(\tau)\to 0} M_x(\tau;T_i);\; M_y=\lim_{\lambda(\tau)\to 0} M_y(\tau;T_i). \tag{8}$$

Неважко помітити, що суми $M_x(\tau;T_i)$ та $M_y(\tau;T_i)$ є інтегральними сумами для відповідно функцій $y\rho(x;y)$ та $x\rho(x;y)$, що відповідають τ-поділу області P та вибору точок T_i. Дані функції є неперервними на P, тому інтегровними, і, отже, границі (8) існують і не залежать ні від вибору τ-поділу, ні від способу вибору точок T_i. Отже, статичні моменти пластини обчислюють за формулами

$$M_x=\iint_P y\rho(x;y)dxdy,\; M_y=\iint_P x\rho(x;y)dxdy. \tag{9}$$

3°. За *центр ваги* матеріальної пластини приймають таку точку $(x_c;y_c)$, що якби в ній була зосереджена маса всієї пластини, то статичні моменти відносно координатних осей цього точкового тіла співпадали б із відповідними статичними моментами пластини.

Виходячи із цього означення, справедливими будуть рівності

$$M_x = m \cdot y_c\ ,\ M_y = m \cdot x_c.$$

Із них та співвідношень (6) та (9) отримаємо такі формули для обчислення координат центра ваги пластини:

$$x_c = \frac{M_y}{m} = \frac{\iint\limits_P x\rho(x;y)dxdy}{\iint\limits_P \rho(x;y)dxdy}\ ;\ y_c = \frac{M_x}{m} = \frac{\iint\limits_P y\rho(x;y)dxdy}{\iint\limits_P \rho(x;y)dxdy}. \tag{10}$$

Зауваження 1. Якщо в умові задачі відсутня будь-яка інформація про щільність фігури, то зазвичай вважають, що функція $\rho(x;y) \equiv 1$. Тоді формули по обчисленню статичних моментів та координат центра ваги набувають наступного вигляду

$$M_x = \iint\limits_P ydxdy,\ M_y = \iint\limits_P xdxdy; \tag{11}$$

$$x_c = \frac{1}{S(P)}\iint\limits_P xdxdy,\ y_c = \frac{1}{S(P)}\iint\limits_P ydxdy. \tag{12}$$

Зауваження 2. Якщо однорідна фігура має вісь симетрії, то її центр ваги лежить на цій осі.

Приклад 3. Знайти координати центра ваги однорідної пластини, що обмежена лініями $ay = x^2$, $x + y = 2a$ $(a > 0)$.

Розв'язання. Зобразимо область, яка обмежена даними лініями (рис. 18).

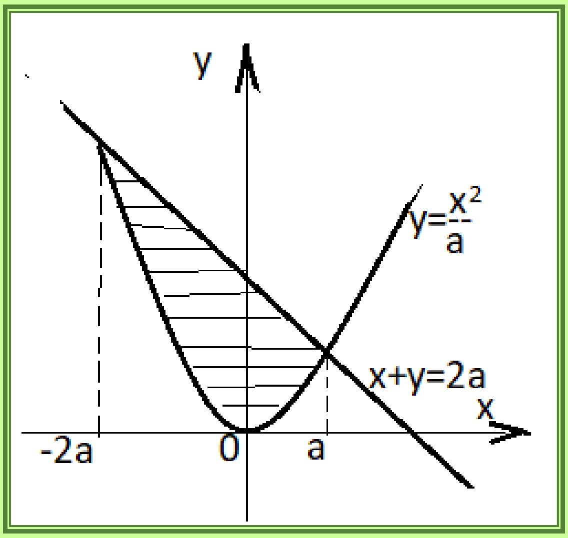


Рис. 18.

Абсциси крайніх точок області шукаємо із системи $\begin{cases} ay = x^2; \\ x + y = 2a; \end{cases} \Rightarrow a(2a - x) = x^2, \quad x_1 = -2a, \; x_2 = a$. Тоді заштрихована множина як криволінійна область першого типу задовольняє обмеженням $\begin{cases} -2a \le x \le a \\ \dfrac{x^2}{a} \le y \le 2a - x \end{cases}$.

Оскільки пластина однорідна, то при відшуканні координат центра ваги скористаємось формулами (12). Маємо:

$$S(P) = \iint\limits_P dxdy = \int\limits_{-2a}^{a} dx \int\limits_{\frac{x^2}{a}}^{2a-x} dy = \int\limits_{-2a}^{a} \left(2a - x - \frac{x^2}{a} \right) dx = \left(2ax - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3a} \right) \Bigg|_{-2a}^{a} = \frac{9}{2} a^2.$$

Тоді

$$x_c = \frac{2}{9a^2} \int\limits_{-2a}^{a} dx \int\limits_{\frac{x^2}{a}}^{2a-x} x dy = \frac{2}{9a^2} \int\limits_{-2a}^{a} x \left(2a - x - \frac{x^2}{a} \right) dx =$$

$$= \frac{2}{9a^2} \int\limits_{-2a}^{a} \left(2ax - x^2 - \frac{x^3}{a} \right) dx = \frac{2}{9a^2} \left(ax^2 - \frac{1}{3} x^3 - \frac{x^4}{4a} \right) \Bigg|_{-2a}^{a} = -\frac{a}{2};$$

$$y_c = \frac{2}{9a^2} \int\limits_{-2a}^{a} dx \int\limits_{\frac{x^2}{a}}^{2a-x} y dy = \frac{2}{9a^2} \int\limits_{-2a}^{a} \left(\frac{y^2}{2} \Bigg|_{y=\frac{x^2}{a}}^{y=2a-x} \right) dx =$$

$$= \frac{1}{9a^2} \int\limits_{-2a}^{a} \left((2a - x)^2 - \frac{x^4}{a^2} \right) dx = \frac{1}{9a^2} \left(-\frac{(2a - x)^3}{3} - \frac{x^5}{5a^2} \right) \Bigg|_{-2a}^{a} = \frac{8}{5} a.$$

Відповідь. $\left(-\frac{1}{2} a; \frac{8}{5} a \right)$.

6. Обчислення моментів інерції матеріальної пластини.

Момент інерції матеріальної точки відносно деякої осі дорівнює добутку маси точки на квадрат відстані від цієї осі, а момент інерції системи матеріальних точок відносно однієї і тієї самої осі дорівнює сумі моментів інерції всіх точок системи.

Нехай маємо матеріальну неоднорідну пластину із п. 4, тобто область P розташовано на координатній площині Oxy, та відома функція поверхневої щільності $\rho=\rho(x;y)$, яка неперервна на P. Потрібно обчислити моменти інерції відносно координатних осей даної пластини.

Якщо поступити із матеріальною пластиною так, як у п. 5), то одержимо дискретно розташовану систему мас, для якої моменти інерції відносно осей Ox та Oy будуть наступними

$$I_x(\tau;T_i)=\sum_{i=1}^{n} y_i^{\,2}\rho(x_i;y_i)\Delta P_i \ ; \ I_y(\tau;T_i)=\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2}\rho(x_i;y_i)\Delta P_i \,.$$

4°. *Моментами інерції* відносно координатних осей Ox, Oy матеріальної неоднорідної пластини із функцією поверхневої щільності $\rho(x;y)$ назвемо відповідні границі

$$I_x=\lim_{\lambda(\tau)\to 0} I_x(\tau;T_i);\ I_y=\lim_{\lambda(\tau)\to 0} I_y(\tau;T_i). \tag{13}$$

Оскільки $I_x(\tau;T_i)=\sigma_{y^2\rho(x;y)}(\tau;T_i); I_y(\tau;T_i)=\sigma_{x^2\rho(x;y)}(\tau;T_i)$, то з урахуванням (13) одержимо наступні формули для обчислення моментів інерції пластини відносно координатних осей

$$I_x=\iint_P y^2\rho(x;y)dxdy\,,\ I_y=\iint_P x^2\rho(x;y)dxdy\,. \tag{14}$$

Знайдемо момент інерції I_0 пластини відносно початку координат. Враховуючи, що момент інерції матеріальної точки $(x;y)$ з масою m відносно початку координат дорівнює $m(x^2+y^2)$, аналогічно дістанемо, що

$$I_o=\iint_P (x^2+y^2)\rho(x;y)dxdy\,. \tag{15}$$

Зауваження 1. Якщо в умові задачі на обчислення моментів інерції відсутня інформація про поверхневу щільність, то зазвичай вважають, що $\rho(x;y)\equiv 1$.

Зауваження 2. Якщо потрібно обчислити статичні моменти а чи моменти інерції відносно прямої a, яка не є координатною віссю, то рекомендовано зробити такий рух (паралельне перенесення + поворот), щоб пряма a зайняла положення якоїсь координатної осі, при цьому слід пам'ятати, що рівняння границі області P та функція поверхневої щільності в новій системі координат будуть, взагалі кажучи, іншими.

ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ
ТА ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ

1. Що називається подвійним інтегралом від функції $f(x;y)$ по області P?
2. Перерахувати властивості подвійного інтеграла.
3. Якщо сума функцій $f(x;y)+g(x;y)$ є інтегровною на деякій множині, то чи будуть інтегровними на цій множині функції-доданки?
4. Якщо функція $f(x;y)$ інтегровна на множині P, то функція $\left|f(x;y)\right|$ також буде інтегровною на P, а чи вірне твердження навпаки?
5. Сформулювати критерій та достатню умову існування подвійного інтеграла.
6. Яка область називається криволінійною I та II типу?
7. Як обчислюється подвійний інтеграл через повторні по криволінійній області I типу (II типу)?
8. Сформулювати теорему про заміну змінних в подвійному інтегралі.
9. Як обчислюється подвійний інтеграл у полярних координатах за допомогою повторного?
10. Обчислити інтеграли:

а) $\int\limits_{-3}^{3} dy \int\limits_{y^2-4}^{5} (x+2y)dx$;

б) $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{y-1}^{2y} xydx$;

в) $\iint\limits_{P} (x+y+1)dxdy$, область P – круг $x^2+y^2 \le 4$;

г) $\iint\limits_{P} \sin(x^3-1)dxdy$, область P обмежена лініями $y=0, x=1, y=x^2$.

11. Змінити порядок інтегрування в інтегралах:

а) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{2x-x^2}} f(x;y)dy$;

б) $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x;y)dx$;

в) $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{\frac{y}{2}}^{2y} f(x;y)dx + \int\limits_1^4 dy \int\limits_{\frac{y}{2}}^{2} f(x;y)dx$;

г) $\int\limits_0^{\sqrt{3}} dx \int\limits_0^{\frac{x}{2}} f(x;y)dy + \int\limits_{\sqrt{3}}^{2} dx \int\limits_{\sqrt{x^2-3}}^{\frac{x}{2}} f(x;y)dy$.

12. Обчислити подвійні інтеграли, перейшовши до полярних координат:

а) $\int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{\sqrt{4-x^2}} \sqrt{4-x^2-y^2}dy$; б) $\int\limits_0^2 dy \int\limits_0^{\sqrt{4-y^2}} (x^2+y^2)dx$.

13. Виконати перехід від декартових координат *x*, *y* до криволінійних *u*, *v* в подвійному інтегралі $\iint\limits_P f(x;y)dxdy$, якщо область *P* обмежена лініями $xy=a, xy=b, y=px, y=qx\,(0<a<b; 0<p<q)$, а $u=xy, v=\frac{y}{x}$.

14. Знайти площу фігури, яка обмежена лініями $y=0, y=x, x^2+y^2=2x$.

15. Знайти площу криволінійного чотирикутника, обмеженого дугами парабол $y=x^2, y=2x^2, x=y^2, x=3y^2$.

16. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями $z=\sqrt{9-x^2-y^2}$, $z=0$, $x^2+y^2=3x$.

17. Зобразити на рисунку тіло, об'єм якого виражається за допомогою інтеграла $\int\limits_0^2 dx \int\limits_{2-x}^{2} (4-x-y)dy$.

18. Обчислити площу частини поверхні параболоїда $2z=x^2+y^2$, яка вирізається циліндром $x^2+y^2=1$.

19. Обчислити площу частини поверхні циліндра $x^2+y^2=2ax$, яка знаходиться між площиною Оху і конусом $x^2+y^2=z^2$ та розташована в першому октанті.
20. Знайти координати центра ваги верхньої половини однорідного круга $x^2+y^2\le 9,\ y\ge 0$.
21. Обчислити момент інерції пластини, обмеженої еліпсом $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ відносно осі Oy.
22. Обчислити статичний момент круга відносно дотичної до круга.

Розділ II

ПОТРІЙНІ ІНТЕГРАЛИ

В попередній главі ми розглянули подвійний інтеграл від функції двох змінних. Означимо інтеграл від функції трьох змінних – так званий потрійний інтеграл. При викладенні даної теми будемо притримуватися термінології та позначень аналогічних до попередньої теми. Більше того, оскільки подвійні та потрійні інтеграли мають багато спільних властивостей, доведення яких аналогічне, то ми не станемо дублювати ці доведення, а лише вказуватимемо на відмінності та особливості при доведенні в багатьох випадках.

§ 1. ОЗНАЧЕННЯ, ІСНУВАННЯ ТА ВЛАСТИВОСТІ ПОТРІЙНИХ ІНТЕГРАЛІВ

Нехай функція $u = f(x;y;z)$ задана на обмеженій замкненій кубовній області $P \subset R^3$. Розіб'ємо область P сіткою поверхонь на n кубовних частин без спільних внутрішніх точок: $P = \bigcup\limits_{i=1}^{n} P_i$, і назвемо це τ-поділом області P. Позначимо через ΔP_i об'єм фігури P_i, тоді $V(P) = \bigcup\limits_{i=1}^{n} \Delta P_i$. Нагадаємо, що за діаметр множини M в деякому метричному просторі приймають найбільшу відстань між точками цієї множини $d(M) = \sup\limits_{x,y\in M} \rho(x;y)$. Величину $\lambda(\tau) = \max\limits_{1\le i\le n} d(P_i)$ називають діаметром $\tau-$поділу. У кожній області візьмемо довільну точку $T_i(x_i;y_i;z_i) \in P_i$ і утворимо суму

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i;y_i;z_i)\Delta P_i = \sigma_f(\tau;T_i) = \sigma(\tau;T_i)\,, \qquad (1)$$

яку назвемо інтегральною сумою для функції $f(x;y;z)$ по області P, що відповідає τ-поділу області та вибору точок T_i.

1^0. Якщо справедливе висловлення $(\forall \varepsilon > 0)$ $(\exists \delta > 0)$ $(\forall \tau : \lambda(\tau) < \delta)$ $(\forall T_i \in P_i) \Rightarrow \left|\sigma(\tau; T_i) - \text{I}\right| < \varepsilon$, то кажуть, що число I є границею інтегральних сум при умові прямування до нуля діаметра поділу: $I = \lim\limits_{\lambda(\tau) \to 0} \sigma(\tau; P_i)$. Крім того, число I називають потрійним інтегралом і позначають символом $\iiint\limits_P f(x;y;z)dxdydz$, при цьому кажуть, що функція $f(x;y;z)$ інтегровна по області *P*.

Зауважимо, границя інтегральних сум при умові її існування не залежить ні від способу τ-поділу області, ні від способу вибору точок T_i.

Наслідок 1. $\iiint\limits_P dxdydz = V(P)$.

Доведення. Для функції $f(x;y;z) \equiv 1$ при будь-якому τ-поділі та будь-якому виборі точок $T_i \in P_i$ маємо $\sigma(\tau; T_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} 1 \cdot \Delta P_i = V(P)$. Тому і $\lim\limits_{\lambda(\tau) \to 0} \sigma(\tau; T_i) = V(P)$. **Наслідок доведено**.

Розглянемо основні властивості потрійних інтегралів.

Теорема 1 (необхідна умова інтегровності). Якщо функція $f(x;y;z)$ інтегровна по обмеженій кубовній області *P*, то $f(x;y;z)$ обмежена на *P*.

Доведення даної теореми аналогічне доведенню теореми 1 з § 1 попереднього розділу (схема та сама, позначення ті самі, тільки символом ΔP_i позначають об'єм фігури P_i).

Для обмеженої на множині P функції $f(x;y;z)$ для τ-поділу $P = \bigcup\limits_{i=1}^{n} P_i$ аналогічно до §1 першої глави можна ввести поняття сум Дарбу таким чином:

нижня сума Дарбу $\sum\limits_{i=1}^{n} m_i \Delta P_i = s(\tau)$, де $m_i = \inf\limits_{(x;y;z) \in P_i} f(x;y;z)$,

верхня сума Дарбу $\sum\limits_{i=1}^{n} M_i \Delta P_i = S(\tau)$, де $M_i = \sup\limits_{(x;y;z) \in P_i} f(x;y;z)$.

Суми Дарбу для функцій трьох змінних мають наступні властивості (можна довести аналогічно, як і в § 1 першої глави).

Властивість 1. Для будь-якого τ – поділу при будь-якому виборі $T_i \in P_i$ справедлива нерівність $s(\tau) \le \sigma(\tau; T_i) \le S(\tau)$.

Якщо хоча б одну з кубовних частин τ-поділу розбити хоча б на дві кубовні без спільних внутрішніх точок частини, то одержимо новий τ'-поділ області P, який назвемо дробленням τ-поділу і будемо цей факт позначати так: $\tau \subset \tau'$

Властивість 2. При дробленні нижні суми Дарбу не меншають, а верхні – не більшають, тобто із включення $\tau \subset \tau'$ випливає, що $s(\tau) \le s(\tau')$, а $S(\tau) \ge S(\tau')$.

Властивість 3. Будь-яка нижня сума Дарбу не більша за будь-яку верхню суму Дарбу, тобто для будь-яких τ_1 та τ_2-поділів $s(\tau_1) \le S(\tau_2)$.

Також справедливі такі теореми.

Теорема 2 (критерій інтегровності). Для того, щоб обмежена функція $f(x;y;z)$ була інтегровною по області P, необхідно та досить, щоб $\lim\limits_{\lambda(\tau)\to 0} s(\tau) = \lim\limits_{\lambda(\tau)\to 0} S(\tau)$, при цьому

$$\iiint\limits_P f(x;y;z)dxdydz = \lim_{\lambda(\tau)\to 0} s(\tau) = \lim_{\lambda(\tau)\to 0} S(\tau).$$

Теорема 2′. Для того, щоб обмежена функція $f(x;y;z)$ була інтегровною в області P, необхідно та досить, щоб $\lim\limits_{\lambda(\tau)\to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} \omega_i(f)\Delta P_i = 0$ $\left(\omega_i(f) = M_i - m_i\right)$.

Теорема 3. Якщо P – обмежена і замкнена на R^3 множина, функція $f(x;y;z)$ неперервна на P, то $f(x;y;z)$ інтегровна на P.

Розглянемо властивості потрійного інтеграла.

Теорема 4 (лінійність). Якщо функції $f(x;y;z)$ та $g(x;y;z)$ інтегровні на області P, то при довільних сталих α та β функція $\alpha f(x;y;z) + \beta g(x;y;z)$ також буде інтегровною на P, причому справедлива рівність

$$\iiint\limits_P \left(\alpha f(x;y;z) + \beta g(x;y;z)\right)dxdydz =$$

$$= \alpha \iiint_P f(x;y;z)dxdydz + \beta \iiint_P g(x;y;z)dxdydz\,,\ \alpha, \beta \in R.$$

Доведення. До очевидної рівності

$$\sigma_{\alpha f+\beta g}(\tau;T_i) = \sum_{i=1}^{n} \left(\alpha f(T_i) + \beta g(T_i)\right)\Delta P_i =$$

$$= \alpha \sum_{i=1}^{n} f(T_i)\Delta P_i + \beta \sum_{i=1}^{n} g(T_i)\Delta P_i = \alpha\sigma_f(\tau;T_i) + \beta\sigma_g(\tau;T_i)$$

застосуємо означення 1. **Теорему доведено.**

Наслідок 1. Потрійний інтеграл від суми двох інтегровних функцій дорівнює сумі потрійних інтегралів від цих функцій.

Наслідок 2. В потрійному інтегралі сталий множник можна виносити за знак інтеграла.

Можна довести справедливість такого твердження.

Теорема 5 (адитивність). Нехай кубовні фігури P_1 та P_2 не мають спільних внутрішніх точок, $P = P_1 \cup P_2$. Якщо функція $f(x;y;z)$ інтегровна на P_1 та P_2, то вона буде інтегровною на P, причому

$$\iiint_P f(x;y;z)dxdydz = \iiint_{P_1} f(x;y;z)dxdydz + \iiint_{P_2} f(x;y;z)dxdydz.$$

Теорема 6 (монотонність). Якщо функції $f(x;y;z)$ та $g(x;y;z)$ інтегровні на області P і в кожній точці області $f(x;y;z) \le g(x;y;z)$, то

$$\iiint_P f(x;y;z)dxdydz \le \iiint_P g(x;y;z)dxdydz.$$

Доведення. Для довільного τ-поділу при будь-якому виборі $T_i \in P_i$ з умови випливає, що $f\left(T_i\right) \le g\left(T_i\right)$ $(i = \overline{1;n})$, тому $\sum_{i=1}^{n} f(T_i)\Delta P_i \le \sum_{i=1}^{n} g(T_i)\Delta P_i$, або $\sigma_f\left(\tau;T_i\right) \le \sigma_g\left(\tau;T_i\right)$. Перейдемо в останній нерівності до $\lim\limits_{\lambda(\tau)\to 0}$, і з урахуванням інтегровності функцій $f\left(x;y;z\right)$ та $g\left(x;y;z\right)$ одержимо, що $\lim\limits_{\lambda(\tau)\to 0} \sigma_f(\tau;T_i) \le \lim\limits_{\lambda(\tau)\to 0} \sigma_g(\tau;T_i)$, або $\iiint_P f(x;y;z)dxdydz \le \iiint_P g(x;y;z)dxdydz..$

Теорему доведено.

Аналогічно до випадку функцій двох змінних для функцій від трьох змінних справедливе твердження.

Лема. Для будь-якої функції $f(x;y;z)$ на довільній множині M справедлива нерівність $\omega_M\left(\left|f\right|\right)\le\omega_M\left(f\right)$.

Теорема 7 (інтегровність модуля). Якщо функція $f(x;y;z)$ інтегровна на області *P*, то функція $\left|f\left(x;y;z\right)\right|$ також інтегровна на *P*, причому

$$\left|\iiint\limits_P f(x;y;z)dxdydz\right|\le\iiint\limits_P\left|f(x;y;z)\right|dxdydz.$$

Доведення. Для довільного τ-поділу області *P*: $P=\bigcup\limits_{i=1}^{n}P_i$ в силу леми $\omega_i\left(\left|f\right|\right)\le\omega_i\left(f\right)$, тому $0\le\sum\limits_{i=1}^{n}\omega_i\left(\left|f\right|\right)\Delta P_i\le\sum\limits_{i=1}^{n}\omega_i(f)\Delta P_i$. Для інтегровної функції $f(x;y;z)$ за теоремою 3 § 1 $\lim\limits_{\lambda(\tau)\to0}\sum\limits_{i=1}^{n}\omega_i(f)\Delta P_i=0$, тоді для проміжних сум матимемо, що $\lim\limits_{\lambda(\tau)\to0}\sum\limits_{i=1}^{n}\omega_i(\left|f\right|)\Delta P_i=0$. Згідно теореми 2′ функція $\left|f\left(x;y;z\right)\right|$ інтегровна на *P*.

Для $\forall\left(x;y;z\right)\in P$, тому за властивістю монотонності

$$-\iiint\limits_P\left|f(x;y;z)\right|dxdydz\le\iiint\limits_P f(x;y;z)dxdydz\le\iiint\limits_P\left|f(x;y;z)\right|dxdydz.$$

Оскільки $-\varepsilon\le a\le\varepsilon\Leftrightarrow\left|a\right|\le\varepsilon$, то при $\varepsilon=\iiint\limits_P\left|f(x;y;z)\right|dxdydz$ одержимо

$$\left|\iiint\limits_P f(x;y;z)dxdydz\right|\le\iiint\limits_P\left|f(x;y;z)\right|dxdydz.$$

Теорему доведено.

Теорема 8 (про середнє у потрійному інтегралі). Якщо функція $f(x;y;z)$ інтегровна на області *P*, то існує число $\mu\in\left[m;M\right]$ таке, що

$$\iiint\limits_P f(x;y;z)dxdydz=\mu V(P),$$

де

$$m=\inf_{(x;y;z)\in P} f(x;y;z),\ M=\sup_{(x;y;z)\in P} f(x;y;z).$$

Доведення. Із інтегровності функції на P в силу теореми 1 випливає існування величин m та M, та, крім того, виконуються нерівності $m\le f(x;y;z)\le M,\ \forall(x;y;z)\in P$. Тоді в силу монотонності, лінійності та наслідку 1 із даної подвійної нерівності одержимо, що

$$mV(P)=m\iiint\limits_P dxdydz\le\iiint\limits_P f(x;y;z)dxdydz\le M\iiint\limits_P dxdydz=MV(P),$$

звідки $m\le\frac{1}{V(P)}\iiint\limits_P f(x;y;z)dxdydz\le M$. Нехай $\mu=\frac{1}{V(P)}\iiint\limits_P f(x;y;z)dxdydz$. Очевидно, що таке число μ задовольняє всім умовам даної теореми.

Теорема доведена.

Наслідок 3. Якщо в теоремі 8 область P обмежена замкнена і зв'язна, а функція $f(x;y;z)$ неперервна на цій області, то значення μ функція $f(x;y;z)$ досягає в деякій точці, тобто існує точка $(x_0;y_0;z_0)\in P$ така, що

$$\iiint\limits_P f(x;y;z)dxdydz=f(x_0;y_0;z_0)\cdot V(P).$$

Доведення. За другою теоремою Вейєрштрасса значень m та M функція $f(x;y;z)$, що задовольняє умови наслідку, досягає в деяких точках: $\exists T,T'\in P\quad f(T)=m,\ f(T')=M$. Оскільки область P однозв'язна, то неперервна функція $f(x;y;z)$ досягає на P всіх проміжних значень, тому і значення μ із теореми 8 також, тобто існує точка $(x_0;y_0;z_0)\in P$ така, що $f(x_0;y_0;z_0)=\mu$.

Наслідок доведено.

Зауваження. Числа $f(x_0;y_0;z_0)$ та μ називають середнім значенням функції $f(x;y;z)$ на множині *P*.

§ 2. ОБЧИСЛЕННЯ ПОТРІЙНИХ ІНТЕГРАЛІВ

Нехай P – паралелепіпед із гранями паралельними координатним площинам, тобто це множина точок простору R^3, яку можемо задати так: $P=\{(x;y;z)|a\le x\le b;c\le y\le d;p\le z\le q\}$, а G – її ортогональна проекція на площину yOz, тоді $G=\{(y;z)|c\le y\le d;p\le z\le q\}$. Нехай функція $f(x;y;z)$ задана на P.

1^0. Якщо для будь-якого $x\in[a;b]$ існує інтеграл $\iint\limits_G f(x;y;z)dydz=\Phi(x)$ і існує $\int\limits_a^b \Phi(x)dx$, то останній інтеграл називають *повторним*.

Зауваження. Повторний інтеграл із 1^0 можемо записати у вигляді

$$\int\limits_a^b dx\int\limits_c^d dy\int\limits_p^q f(x;y;z)dz \text{, або } \int\limits_a^b dx\int\limits_p^q dz\int\limits_c^d f(x;y;z)dy.$$

Аналогічно до T_1 §3 попередньої глави можемо довести таке твердження.

Теорема 1 (про обчислення потрійного інтеграла по паралелепіпеду). Якщо функція $f(x;y;z)$ інтегровна на множині $P=[a;b]\times[c;d]\times[p;q]$ і для $\forall x\in[a;b]$ існує $\iint\limits_G f(x;y;z)dydz=\Phi(x)$, де $G=[c;d]\times[p;q]$, то існує повторний інтеграл $\int\limits_a^b \Phi(x)dx$, причому $\iiint\limits_P f(x;y;z)dxdydz=\int\limits_a^b \Phi(x)dx$.

Якщо паралелепіпед спроектувати на площину xOz чи xOy, то можна означити аналогічно до 1^0 ще два повторні інтеграли, і для них довести аналоги теореми 1.

Приклад 1. Обчислити $\iiint\limits_P \dfrac{dxdydz}{(1+x+y+z)^3}$, де область P задовольняє обмеженням: $0\le x\le 1, 0\le y\le 1, 0\le z\le 1$.

Розв'язання. Згідно теореми 1 та зауваження після означення 1 маємо

$$I=\iiint\limits_{P}\frac{dxdydz}{(1+x+y+z)^3}=\int_0^1 dx\int_0^1 dy\int_0^1\frac{dz}{(1+x+y+z)^3}.$$

При відшуканні інтеграла $\int_0^1\frac{dz}{(1+x+y+z)^3}=\int_0^1(1+x+y+z)^{-3}dz$ змінні x та y вважаємо сталими, тому

$$I=\int_0^1 dx\int_0^1 dy\left.\frac{(1+x+y+z)^{-2}}{-2}\right|_{z=0}^{z=1}=-\frac{1}{2}\int_0^1 dx\int_0^1\Big((2+x+y)^{-2}-(1+x+y)^{-2}\Big)dy.$$

Далі поступаємо так, як і при обчисленні подвійного інтеграла через повторний

$$I=-\frac{1}{2}\int_0^1 dx\left.\left(\frac{(2+x+y)^{-1}}{-1}-\frac{(1+x+y)^{-1}}{-1}\right)\right|_{y=0}^{y=1}=\frac{1}{2}\int_0^1\left(\frac{1}{3+x}-\frac{2}{2+x}+\frac{1}{1+x}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\Big(\ln(3+x)-2\ln(2+x)+\ln(1+x)\Big)\Big|_0^1=\frac{1}{2}\Big(\ln 4-2\ln 3+\ln 2-\ln 3+2\ln 2-\ln 1\Big)=\frac{1}{2}\ln\frac{32}{27}.$$

Відповідь. $\frac{1}{2}\ln\frac{32}{27}$.

Далі розглянемо обчислення потрійних інтегралів по просторових областях довільної конфігурації.

Будемо казати, що область $P\subset R^3$ правильно орієнтована вздовж осі *Oz*, якщо вона має наступний вигляд.

Нехай ортогональна проекція $P\subset R^3$ на площину *xOy* є криволінійною областю I (або може бути II) типу, тобто множиною вигляду

$$\left\{(x;y)\,\middle|\,a\le x\le b;\ y_1(x)\le y\le y_2(x)\right\}.$$

Нехай область *P* обмежена поверхнями, що є графіками функцій $z=z_1(x;y)$ (знизу) і $z=z_2(x;y)$ (зверху) і, можливо, циліндром із твірними паралельними осі Oz та напрямною, що є межею попередньої криволінійної області (див. рисунок 19). Тоді аналітично *P* задовольняє таким обмеженням

$$P=\left\{(x;y;z)\,\middle|\,a\le x\le b;\ y_1(x)\le y\le y_2(x);\ z_1(x;y)\le z\le z_2(x;y)\right\}.$$

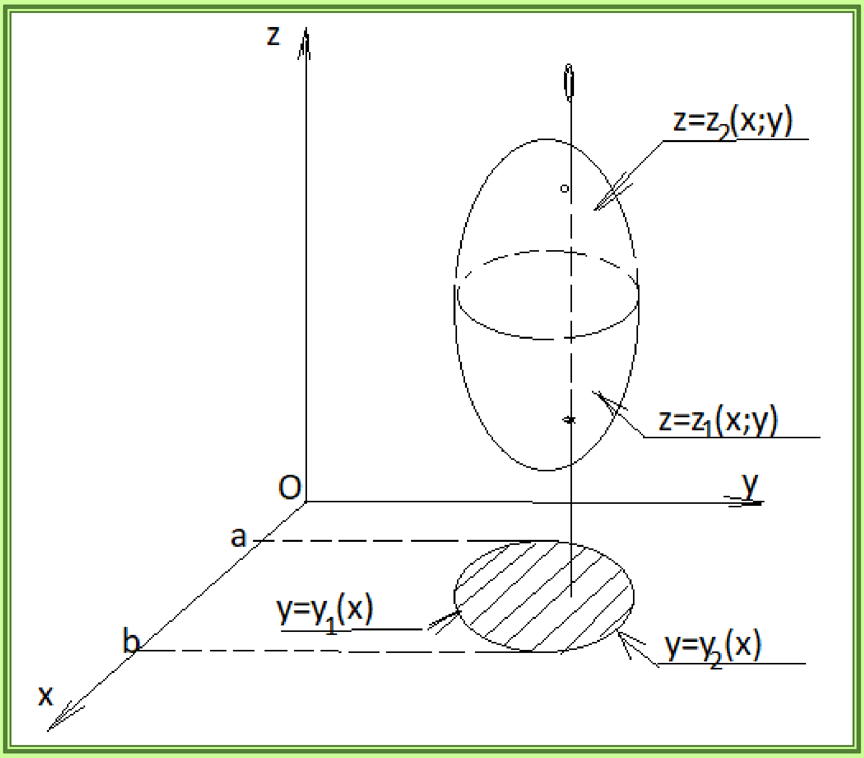


Рис. 19.

При довільному $x\in[a;b]$ перетнемо область P площиною, паралельною координатній площині yOz, одержимо множину такого вигляду $G_x=\{(y;z)|\ y_1(x)\le y\le y_2(x);\ z_1(x;y)\le z\le z_2(x;y)\}$.

2^0. Якщо $\forall x\in[a;b]$ існує $\iint\limits_{G_x} f(x;y;z)dydz=\Phi(x)$ і існує $\int\limits_a^b \Phi(x)dx$, то останній інтеграл називають *повторним*.

Зауваження. Повторний інтеграл із 2^0 можна записати у вигляді

$$\int\limits_a^b dx\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy\int\limits_{z_1(x;y)}^{z_2(x;y)} f(x;y;z)dz.$$

Аналогічно до теореми 4 із §3 попередньої глави можемо довести таке твердження.

Теорема 2 (про обчислення потрійного інтеграла по криволінійній області). Якщо функція $f(x;y;z)$ інтегровна на області $P=\{(x;y;z)|\,a\le x\le b;\ y_1(x)\le y\le y_2(x);\ z_1(x;y)\le z\le z_2(x;y)\}$ і $\forall x\in[a;b]$ існує $\iint\limits_{G_x} f(x;y;z)dydz=\Phi(x)$, де

$$G_x = \{(y;z) \mid y_1(x) \le y \le y_2(x);\ z_1(x;y) \le z \le z_2(x;y)\},$$

то існує повторний інтеграл $\int\limits_a^b \Phi(x)dx$, причому

$$\iiint\limits_P f(x;y;z)dxdydz = \int\limits_a^b \Phi(x)dx = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int\limits_{z_1(x;y)}^{z_2(x;y)} f(x;y;z)dz.$$

Якщо розглянути випадки правильної орієнтації області P відносно координатних осей Oy та Ox, то можемо аналогічно до означення 2^0 ввести поняття інших повторних інтегралів по цих областях та для них довести справедливість аналогів теореми 2.

Розглянемо приклад подання просторової області у вигляді правильно орієнтованої вздовж координатної осі. Але перед цим зробимо кілька зауважень щодо особливостей поверхонь в просторі, ліній в просторі, їх ортогональних проекцій на координатні площини.

Зауваження 1. Рівністю $F(x;y)=0$ на координатній площині xOy задається деяка лінія, а в просторі – циліндрична поверхня, напрямною якої є дана лінія, а твірні паралельні осі Oz.

Зауваження 2. Аналогічно рівністю $F(x;z)=0$ ($F(y;z)=0$) на площині xOz (yOz) задається лінія, а в просторі циліндрична поверхня із напрямною даною лінією та твірними паралельними осі Oy (Ox).

Зауваження 3. Нехай просторова лінія Γ одержана в результаті перетину двох поверхонь, що задаються рівняннями $F(x;y;z)=0$ та $G(x;y;z)=0$. Щоб знайти рівняння ортогональної проекції Γ на площину xOy (xOz, yOz), потрібно в системі рівнянь $\begin{cases} F(x;y;z)=0 \\ G(x;y;z)=0 \end{cases}$ в одному із рівнянь змінну z (змінну y, x) виразити через x та y (через x, z; через y, z) і це вираження підставити в інше рівняння.

Зауваження 4. Рівністю $z = f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$ задається поверхня обертання навколо осі Oz кривої $z=f(x)$, яка лежить в площині xOz. Аналогічно рівностями $y = f\left(\sqrt{x^2+z^2}\right)\left(x = f\left(\sqrt{y^2+z^2}\right)\right)$ задаються поверхні обертання навколо осі Oy (Ox) відповідних кривих.

Приклад 2. Область P обмежена координатними площинами та циліндричною поверхнею $x^2 + y^2 = 1$ $(x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0)$ і площиною $z = 1$. Подати її як правильно орієнтовану відносно всіх координатних осей.

Розв'язання. Зобразимо дану область і опишемо її, як просторову множину правильно орієнтовану вздовж осі Oz. Рівністю $x^2 + y^2 = 1$ згідно зауваження 1 задається циліндрична поверхня із твірними паралельними осі аплікат, а напрямною слугує одиничне коло з центром в початку координат. Рівняння $z = 1$ – це рівняння площини, паралельної до координатної xOy і яка проходить через точку 1 на осі Oz. Область розташована в першому октанті (оскільки $z \geq 0; y \geq 0; z \geq 0$).

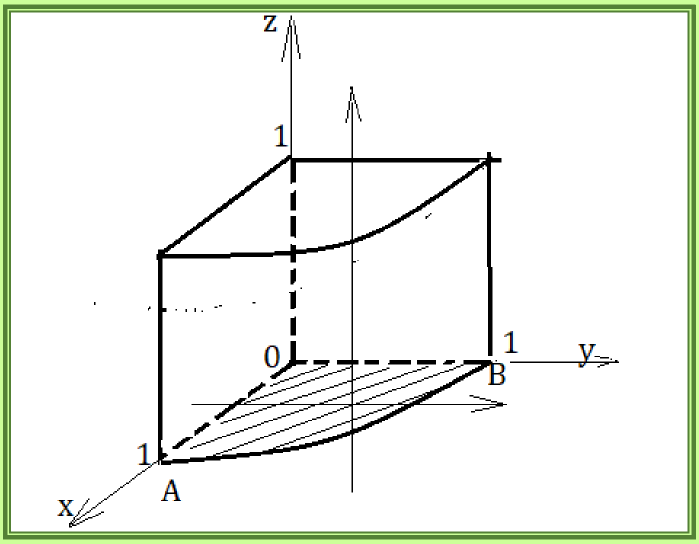


Рис. 20.

Ортогональною проекцією даної області на площину xOy є четвертина круга радіуса 1 з центром в початку координат. Як криволінійна область першого типу проекція задовольняє наступним обмеженням: $0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}$, оскільки дуга AB є графіком функції $y = \sqrt{1-x^2}$. Знизу область обмежена площиною $z = 0$, а зверху – площиною $z = 1$. Отже, область P як правильно орієнтована вздовж осі Oz задається наступними обмеженнями: $P = \left\{(x;y;z)\middle| 0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}; 0 \leq z \leq 1\right\}$.

Якби заштриховану фігуру розглядати як криволінійну область другого типу, то аналогічно до проведених міркувань можемо одержати, що $P=\left\{(x;y;z)\middle|0\le y\le 1;0\le x\le\sqrt{1-y^2};0\le z\le 1\right\}$.

А тепер розглянемо область P як правильно орієнтовану вздовж осі Ox (рис. 21).

Ортогональною проекцією на площину yOz є квадрат: $0\le y\le 1;0\le z\le 1$.

«Знизу» P обмежена площиною yOz, рівняння якої $x = 0$, а «зверху» – циліндричною поверхнею $x^2+y^2=1$, яка в першому октанті є графіком функції $x=\sqrt{1-y^2}$.

Тому область P як правильно орієнтована вздовж осі Ox задовольняє наступні обмеження:

$$P:\quad \begin{array}{l} 0\le y\le 1; \\ 0\le z\le 1; \\ 0\le x\le\sqrt{1-y^2}. \end{array}$$

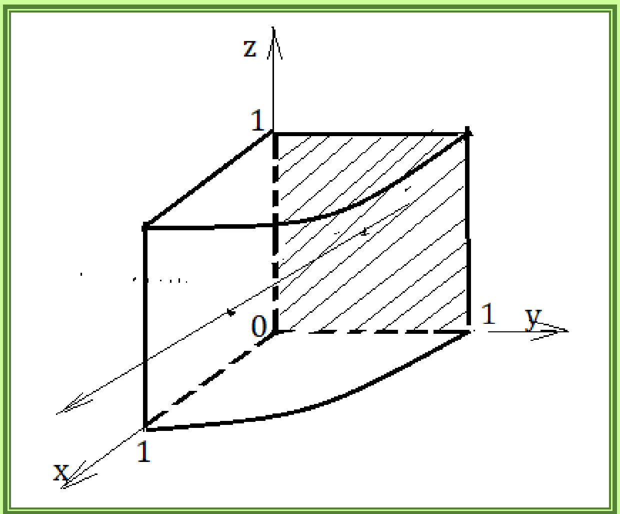


Рис. 21.

Аналогічні обмеження одержимо при дослідженні на правильну орієнтацію вздовж осі Oy: $P:\quad \begin{array}{l} 0\le x\le 1; \\ 0\le z\le 1; \\ 0\le y\le\sqrt{1-x^2}. \end{array}$

Відповідь.

$$P=\left\{(x;y;z)\middle|0\le x\le 1;0\le y\le\sqrt{1-x^2};0\le z\le 1\right\}=$$

$$=\left\{(x;y;z)\middle|0\le y\le 1;0\le z\le 1;0\le x\le \sqrt{1-y^2}\right\}=$$

$$=\left\{(x;y;z)\middle|0\le x\le 1;0\le z\le 1;0\le y\le \sqrt{1-x^2}\right\}.$$

Зауваження. Потрійний інтеграл по області із прикладу 2 згідно теореми 2 та її аналогів рівний будь-якому з повторних інтегралів

$$\iiint\limits_P f(x;y;z)dxdydz=\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}}dy\int_0^1 f(x;y;z)dz=$$

$$=\int_0^1 dy\int_0^1 dz\int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x;y;z)dx=\int_0^1 dx\int_0^1 dz\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x;y;z)dy.$$

Приклад 3. Обчислити $\iiint\limits_P y\cdot\cos(x+z)dxdydz$, якщо область P обмежена поверхнями $y=\sqrt{x}$, $y=0$, $z=0$, $x+z=\frac{\pi}{2}$.

Розв'язання. Побудуємо область, враховуючи, що $z = 0$, $y = 0$ – це рівняння площин xOy та xOz; $x+z=\frac{\pi}{2}$ – рівняння площини, що відтинає на осях Ox та Oz відрізки по $\frac{\pi}{2}$ і паралельна осі Oy; $y=\sqrt{x}$ це рівняння циліндричної поверхні із твірними паралельними до осі Oz. Область має такий вигляд: (рис 22).

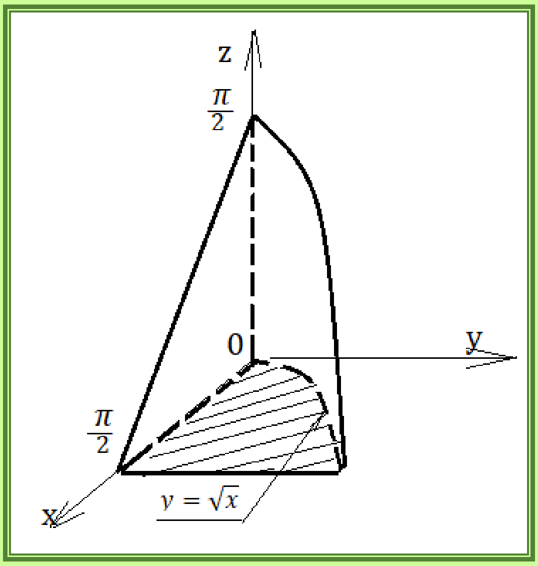


Рис. 22.

Ортогональна проекція на площину xOy як криволінійна область першого типу задовольняє обмеженням: $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$; $0 \le y \le \sqrt{x}$.

Знизу область обмежена площиною $z = 0$, а зверху площиною $z = \frac{\pi}{2} - x$.

Тому згідно теореми 2 будемо мати

$$\iiint\limits_P y \cdot \cos(x+z)dxdydz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int_0^{\sqrt{x}} dy \int_0^{\frac{\pi}{2}-x} y\cos(x+z)dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int_0^{\sqrt{x}} ydy \sin(z+x)\Big|_{z=0}^{z=\frac{\pi}{2}-x} =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int_0^{\sqrt{x}} y(1-\sin x)dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin x)dx \left.\frac{y^2}{2}\right|_{y=0}^{y=\sqrt{x}} = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin x)xdx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} xdx - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin xdx = \frac{1}{4}x^2\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} xd(\cos x) = \frac{\pi^2}{16} + \frac{1}{2}\left(x\,cosx\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos xdx \right) =$$

$$= \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2}\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2}.$$

Відповідь. $\frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2}$.

§ 3. ВІДОБРАЖЕННЯ КУБОВНИХ ОБЛАСТЕЙ. ЗАМІНА ЗМІННИХ В ПОТРІЙНИХ ІНТЕГРАЛАХ

Нехай в декартових системах координат $Oxyz$ та $Ouvw$ маємо дві області: $P \subset Oxyz$, $Q \subset Ouvw$. Нехай область Q кубовна і за допомогою співвідношень

$$\begin{cases} x = x(u;v;w), \\ y = y(u;v;w), \\ z = z(u;v;w), \end{cases} \tag{1}$$

бієктивно відображається на область *P*.

Якщо функції $x(u;v;w), y(u;v;w), z(u;v;w)$ мають в кубовній області Q всі неперервні частинні похідні, то відомо, що область P також буде кубовною, причому об'єм образу обчислюють наступним інтегралом $V(P) = \iiint\limits_Q |I(u;v;w)| dudvdw$, де

$$I(u;v;w) = \begin{vmatrix} x'_u(u;v;w) & x'_v(u;v;w) & x'_w(u;v;w) \\ y'_u(u;v;w) & y'_v(u;v;w) & y'_w(u;v;w) \\ z'_u(u;v;w) & z'_v(u;v;w) & z'_w(u;v;w) \end{vmatrix}. \tag{2}$$

(Якщо $I(u;v;w) \neq 0$ на Q, то відображення (1) буде взаємно однозначним).

Визначник (2) називають якобіаном перетворення (1).

Справедливе твердження

Теорема 1 (заміна змінних у потрійному інтегралі). Якщо функція $f(x;y;z)$ неперервна в області *P*, яка є образом області Q при взаємно однозначному відображенні (1), де x, y, z мають неперервні частинні похідні на Q, то

$$\iiint\limits_P f(x;y;z)dxdydz = \iiint\limits_Q f\left(x(u;v;w); y(u;v;w) z(u;v;w)\right) |I(u;v;w)| dudvdw,$$

а $I(u;v;w)$ вибрано згідно (2).

Доведення даної теореми аналогічне доведенню теореми про заміну змінної у подвійному інтегралі з тією різницею, що під виразом ΔP_i тепер будемо розглядати об'єм просторової фігури P_i.

Приклад 1. Обчислити інтеграл $I = \iiint\limits_P xyzdxdydz$, якщо область P обмежена поверхнями

$$z = \frac{x^2 + y^2}{m},\ z = \frac{x^2 + y^2}{n},\ xy = a^2,\ xy = b^2,\ y = \alpha x,\ y = \beta x,\ x \ge 0,\ y \ge 0.$$

$$(0 \le a \le b; 0 \le \alpha \le \beta; 0 \le m \le n).$$

Розв'язання. Пов'яжемо координати x; y; z та u; v; w наступними рівностями

$$u = xy,\ v = \frac{y}{x},\ w = \frac{x^2 + y^2}{z}. \tag{3}$$

Для застосування теореми 1 потрібно змінні x, y, z виразити через змінні u, v, w.

Для цього записуємо систему трьох останніх рівностей і розв'язуємо її відносно x, y, z як невідомих, одержуємо:

$$\begin{cases} x = u^{\frac{1}{2}} v^{-\frac{1}{2}}; \\ y = u^{\frac{1}{2}} v^{\frac{1}{2}}; \\ z = u\left(v + \frac{1}{v}\right) w^{-1}. \end{cases}$$

Тому якобіан даного відображення згідно (2) матиме вигляд

$$I = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} v^{-\frac{1}{2}} & -\frac{1}{2} u^{\frac{1}{2}} v^{-\frac{3}{2}} & 0 \\ \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} v^{\frac{1}{2}} & \frac{1}{2} u^{\frac{1}{2}} v^{-\frac{1}{2}} & 0 \\ \left(v + \frac{1}{v}\right) w^{-1} & u\left(1 - \frac{1}{v^2}\right) w^{-1} & -u\left(v + \frac{1}{v}\right) w^{-2} \end{vmatrix} = -\frac{u}{2w^2}\left(1 + \frac{1}{v^2}\right).$$

Знайдемо образ області P при відображенні (3). Образом гіперболічних циліндрів $xy = a^2$, $xy = b^2$ будуть площини $u = a^2$ та $u = b^2$; площин $y = \alpha x$, $y = \beta x$ – площини $v = \alpha$, $v = \beta$, параболоїдів обертання $z = \dfrac{x^2 + y^2}{m}$, $z = \dfrac{x^2 + y^2}{n}$ – площини $w = m$, $w = n$. Отже, Q – паралелепіпед

$$Q = \left\{ (u;v;w) \middle| a^2 \le u \le b^2; \alpha \le v \le \beta; m \le w \le n \right\}.$$

Згідно теореми 1 будемо мати

$$I = \iiint\limits_Q u^{\frac{1}{2}} v^{-\frac{1}{2}} u^{\frac{1}{2}} v^{\frac{1}{2}} u \left(v + \frac{1}{v} \right) \frac{1}{w} \cdot \frac{u}{2w^2} \left(1 + \frac{1}{v^2} \right) du dv dw =$$

$$= \frac{1}{2} \iiint\limits_Q u^3 \left(v + \frac{2}{v} + v^{-3} \right) w^{-3} du dv dw = \frac{1}{2} \int\limits_{a^2}^{b^2} u^3 du \int\limits_{\alpha}^{\beta} \left(v + \frac{2}{v} + v^{-3} \right) dv \int\limits_m^n w^{-3} dw =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{u^4}{4} \Bigg|_{a^2}^{b^2} \right) \cdot \left(\left(\frac{v^2}{2} + 2 \ln v - \frac{1}{2v^2} \right) \Bigg|_{\alpha}^{\beta} \right) \cdot \left(-\frac{1}{2w^2} \Bigg|_m^n \right) =$$

$$= \frac{\left(b^8 - a^8\right)\left(m^2 - n^2\right)}{16 m^2 n^2} \left(\frac{1}{2} \left(\beta^2 - \alpha^2 \right) \left(1 + \frac{1}{\alpha^2 \beta^2} \right) + 2 \ln \frac{\beta}{\alpha} \right).$$

Відповідь. $\dfrac{\left(b^8 - a^8\right)\left(m^2 - n^2\right)}{16 m^2 n^2} \left(\dfrac{1}{2} \left(\beta^2 - \alpha^2 \right) \left(1 + \dfrac{1}{\alpha^2 \beta^2} \right) + 2 \ln \dfrac{\beta}{\alpha} \right).$

Перехід у потрійному інтегралі до циліндричних та сферичних координат

А) Перехід до циліндричних координат.

Нехай в декартовій системі координат маємо точку $M(x; y; z)$. Знайдемо ортогональну проекцію M' цієї точки на площину xOy, тоді дана точка матиме наступні координати $(x; y; 0)$. Відстань від M' до початку координат позначимо через ρ, а кут між вектором $\overrightarrow{OM'}$ та додатним напрямом осі абсцис – через φ (див. рис. 23). Числа φ, ρ, z називають циліндричними координатами точки M.

Зв’язок між декартовими та циліндричними координатами задають такі рівності:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi; \\ y = \rho\sin\varphi; \\ \quad z = z \quad . \end{cases} \tag{4}$$

Знайдемо якобіан відображення (4).

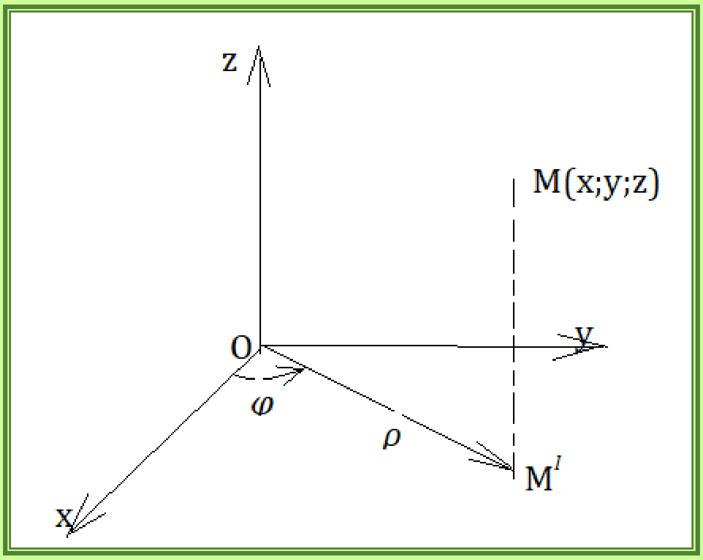


Рис. 23.

$$I(\varphi;\rho;z) = \begin{vmatrix} x'_\varphi & x'_\rho & x'_z \\ y'_\varphi & y'_\rho & y'_z \\ z'_\varphi & z'_\rho & z'_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\rho\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ \rho\cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\rho.$$

Оскільки $\rho \ge 0$, то $|I(\varphi;\rho;z)| = \rho$. Отже, перехід від декартових до циліндричних координат в потрійному інтегралі відбувається згідно рівності

$$\iiint\limits_P f(x;y;z)dxdydz = \iiint\limits_Q f(\rho\cos\varphi;\rho\sin\varphi;z)\rho d\varphi d\rho dz. \tag{5}$$

Постає питання: як потрійний інтеграл в циліндричних координатах обчислити через повторний. Звернемо увагу на те, що в системі (4) перші дві рівності нагадують зв’язок між декартовими та полярними координатами на площині. Тому подаємо область Q правильно орієнтованою вздовж осі Oz, при цьому ортогональну проекцію Q (що є та сама P але в інших координатах) подаємо як криволінійний сектор.

Приклад 2. Обчислити об'єм тіла, що обмежене поверхнями $x^2+y^2+z^2=R^2$, $x^2+y^2\le Ry$.

Розв'язання. Рівністю $x^2+y^2+z^2=R^2$ задається сфера з центром в початку координат і радіусом R, а рівністю $x^2+y^2=Ry$ – циліндрична поверхня із твірними паралельними до осі Oz та напрямною колом $x^2+\left(y-\frac{R}{2}\right)^2=\left(\frac{R}{2}\right)^2$.

Ці дві поверхні симетричні відносно координатних площин xOy та yOz, тому розглянемо ту четвертину P досліджуваного тіла, яка розташована в першому октанті. Для неї $V_1=\iiint\limits_P dxdydz$. Застосуємо до цього інтеграла рівність (5), одержимо, що $V_1=\iiint\limits_Q \rho d\varphi d\rho dz$. Зобразимо P.

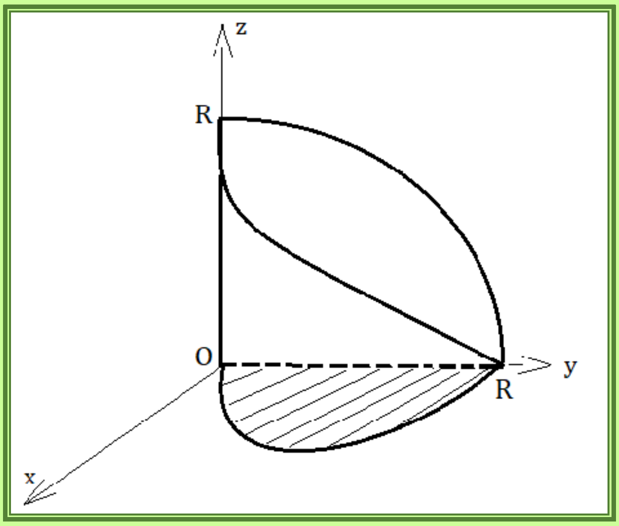


Рис. 24.

Коло $x^2+y^2=Ry$ в полярній системі координат описується рівністю $\rho=R\sin\varphi$, а сферична поверхня в циліндричній системі координат – рівністю $z=\sqrt{R^2-\rho^2}$.

Тому в циліндричній системі координат область Q як правильно орієнтована вздовж осі Oz задовольняє наступним обмеженням:

$$Q:\ \begin{array}{c} 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2} \\ 0\le\rho\le R\sin\varphi \\ 0\le z\le\sqrt{R^2-\rho^2} \end{array}.$$

Приступаємо до безпосереднього обчислення потрійного інтеграла:

$$V_1=\iiint\limits_Q \rho d\varphi d\rho dz=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^{R\sin\varphi}d\rho\int\limits_0^{\sqrt{R^2-\rho^2}}\rho dz=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^{R\sin\varphi}\rho\sqrt{R^2-\rho^2}d\rho=$$

$$=-\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^{R\sin\varphi}\sqrt{R^2-\rho^2}d\left(R^2-\rho^2\right)=-\frac{1}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(R^2-\rho^2\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_{\rho=0}^{\rho=R\sin\varphi}d\varphi=$$

$$=-\frac{1}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left[R^3\left(1-\sin^2\varphi\right)^{\frac{3}{2}}-R^3\right]d\varphi=\frac{R^3}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\cos^3\varphi\right)d\varphi=\frac{R^3}{3}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2!!}{3!!}\right)=\frac{R^3}{3}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right).$$

Отже, $V=4V_1=\dfrac{R^3}{3}\left(2\pi-\dfrac{8}{3}\right).$

Відповідь. $\dfrac{R^3}{3}\left(2\pi-\dfrac{8}{3}\right).$

Рекомендація 1. Якщо підінтегральний вираз, або рівняння поверхонь, що обмежують область інтегрування містять вираз x^2+y^2, то при обчисленні потрійного інтеграла буває доцільним виконати перехід до циліндричних координат. При цьому слід не забувати рівняння обмежуючих ліній та поверхонь також записати в циліндричних координатах.

Рекомендація 2. Якщо підінтегральний вираз, або рівняння поверхонь, що обмежують область інтегрування містять вираз $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}$, то при обчисленні потрійного інтеграла буває доцільним виконати перехід до узагальнених циліндричних координат, а саме $\begin{cases} x=a\rho\cos\varphi \\ y=b\rho\sin\varphi \\ z=z \end{cases}$, тоді якобіан відображення $|I|=ab\rho$. При цьому рівняння обмежуючих ліній та поверхонь також слід записати в узагальнених циліндричних координатах.

Б) Перехід до сферичних координат.

Нехай в декартовій системі координат маємо точку $M(x;\,y;\,z)$. Знайдемо ортогональну проекцію M' цієї точки на площину xOy, тоді проекція матиме наступні координати $(x;\ y;\ 0)$. Відстань від M до початку координат позначимо через ρ, а кут між вектором $\overline{OM'}$ та додатним напрямом осі абсцис – через φ, кут між вектором $\overline{OM}$ та віссю Oz через θ. Числа φ, θ, ρ називають сферичними координатами точки M.

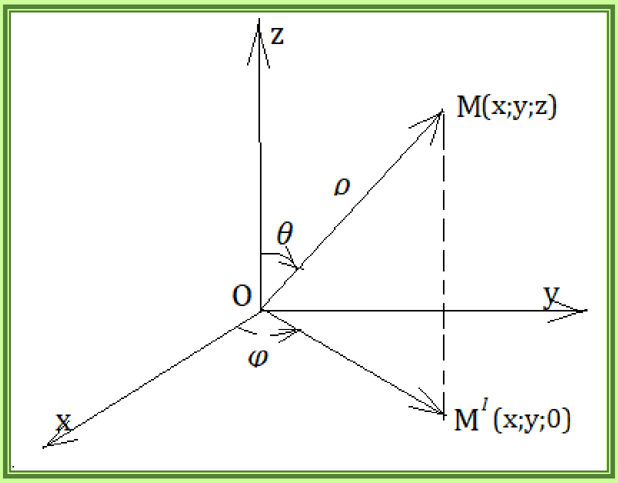


Рис. 25.

З в'язок між декартовими та сферичними координатами задають такі рівності:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi\sin\theta; \\ y = \rho\sin\varphi\sin\theta; \\ z = \rho\cos\theta\ . \end{cases} \tag{6}$$

Зауважимо, що $\rho \geq 0,\ \theta \in [0;\pi]$.

Знайдемо якобіан відображення (6).

$$I(\varphi;\theta;\rho) = \begin{vmatrix} x'_\varphi & x'_\theta & x'_\rho \\ y'_\varphi & y'_\theta & y'_\rho \\ z'_\varphi & z'_\theta & z'_\rho \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\rho\sin\varphi\sin\theta & \rho\cos\varphi\cos\theta & \cos\varphi\sin\theta \\ \rho\cos\varphi\sin\theta & \rho\sin\varphi\cos\theta & \sin\varphi\sin\theta \\ 0 & -\rho\sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix} =$$

$$= \rho^2\sin\theta \begin{vmatrix} -\sin\varphi & \cos\varphi\cos\theta & \cos\varphi\sin\theta \\ \cos\varphi & \sin\varphi\cos\theta & \sin\varphi\sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix} = -\rho^2\sin\theta.$$

Оскільки при $\theta \in [0;\pi]$ $\sin\theta \geq 0$, то формула переходу в потрійному інтегралі від декартових до сферичних координат має такий вигляд

$$\iiint\limits_P f(x;y;z)dxdydz = \iiint\limits_Q f(\rho\cos\varphi\sin\theta;\rho\sin\varphi\sin\theta;\rho\cos\theta)\rho^2\sin\theta d\varphi d\theta d\rho. \tag{7}$$

Приклад 3. Обчислити $I=\iiint\limits_{P}\sqrt{x^2+y^2+z^2}dxdydz$, якщо область інтегрування задовольняє обмеження $x^2+y^2+z^2\le z$.

Розв'язання. При переході до сферичних координат в даному інтегралі згідно рівності (7) отримаємо (оскільки $x^2+y^2+z^2=\rho^2$), що

$$I=\iiint\limits_{Q}\rho\cdot\rho^2\sin\theta d\varphi d\theta d\rho.$$

Рівністю $x^2+y^2+z^2=z$, або $x^2+y^2+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$, описується сфера з центром на осі *Oz* в точці (0; 0; $\frac{1}{2}$) радіуса $\frac{1}{2}$. Рівняння даної сфери в сферичних координатах має вигляд: $\rho^2=\rho\cos\theta\Rightarrow\rho=\cos\theta$.

Щоб перейти в останньому протрійному інтегралі до повторного, необхідно подати кулю Q як множину точок $(\varphi;\theta;\rho)$, яка задовольняє обмеження:

$$\alpha\le\varphi\le\beta;\ \theta_1(\varphi)\le\theta\le\theta_2(\varphi);\ \rho_1(\varphi;\theta)\le\rho\le\rho_2(\varphi;\theta).$$

Щоб знайти ці обмеження, спочатку шукаємо ортогональну проекцію кулі на площину *xOy*, розглядаємо цю проекцію як криволінійний сектор і перетинаємо півплощиною, що проходить через вісь Oz та промінь $\varphi=\varphi_0$. Одержану фігуру розглядаємо знову як криволінійний сектор, для якого знаходимо межі зміни кута θ. І, наостанок, проводимо промінь з початку координат, він при вході в область Q перетинає поверхню $\rho=\rho_1(\varphi;\theta)$, а при виході з області інтегрування відбувається перетин з поверхнею $\rho=\rho_2(\varphi;\theta)$.

В даній задачі куля проектується на площину *xOy* у круг з центром в початку координат радіуса $\frac{1}{2}$. Тому для кута φ можемо вибрати наступні межі: $0\le\varphi\le2\pi$. При перерізі кулі Q будь-якою півплощиною, яка містить вісь *Oz,* одержуємо півкруг вигляду

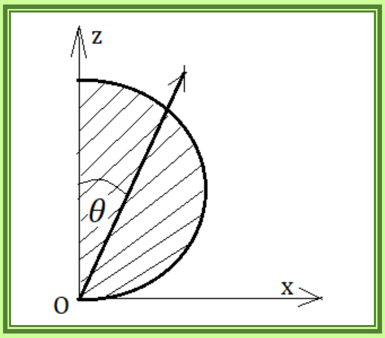


Рис. 26.

Як видно з рисунку кут θ змінюється в межах від 0 до $\frac{\pi}{2}$. Куля дотикається площини *xOy*, тому $\rho \geq 0$, а «виходить» довільний промінь з кулі по сфері $\rho = \cos\theta$.

$$\text{Отже, } Q: \quad \begin{aligned} &0 \leq \varphi \leq 2\pi; \\ &0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}; \\ &0 \leq \rho \leq \cos\theta. \end{aligned}$$

Тому

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\cos\theta} \rho^3 \sin\theta d\rho = \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta d\theta \left. \frac{\rho^4}{4} \right|_{\rho=0}^{\rho=\cos\theta} = \frac{1}{4} 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta \sin\theta d\theta =$$

$$= -\frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta \, d(\cos\theta) = -\frac{\pi}{2} \cdot \left. \frac{\cos^5\theta}{5} \right|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{\pi}{10}(0-1) = \frac{\pi}{10}.$$

Відповідь. $\frac{\pi}{10}$.

Рекомендація 3. Якщо підінтегральний вираз, або рівняння поверхонь, що обмежують область інтегрування, містять вираз $x^2 + y^2 + z^2$, то при обчисленні потрійного інтеграла буває доцільним виконати перехід до сферичних координат. При цьому слід не забувати рівняння обмежуючих поверхонь також записати в сферичних координатах.

Рекомендація 4. Якщо підінтегральний вираз, або рівняння поверхонь, що обмежують область інтегрування містять вираз $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$, то при обчисленні потрійного інтеграла буває доцільним виконати перехід до узагальнених сферичних координат, а саме: $\begin{cases} x = a\rho\cos\varphi\sin\theta \\ y = b\rho\sin\varphi\sin\theta \\ z = c\rho\cos\theta \end{cases}$, при цьому відображенні якобіан $|I| = abc\rho^2\sin\theta$.

Слід зауважити, що випадок доцільності застосування переходу до сферичних координат підпадає до можливості використання і циліндричних координат, при якому перехід до повторного інтеграла простіший. Але тоді зазвичай одержуються більш складніші підінтегральні вирази. Тому в кожному конкретному випадку обираємо той шлях розв'язання, який вимагатиме меншої кількості операцій.

§ 4. ЗАСТОСУВАННЯ ПОТРІЙНИХ ІНТЕГРАЛІВ

1. Обчислення об'ємів тіл.

Якщо в декаровій системі координат Oxyz задано обмежену замкнену кубовну область *P,* то об'єм такого тіла знаходиться (див. § 1, наслідок 1) за формулою

$$V(P) = \iiint\limits_P dxdydz. \tag{1}$$

Приклад 1. Знайти об'єм тіла, яке обмежене поверхнями: циліндром $x^2 + y^2 = 4x$, площинами $z = x$, $z = 2x$.

Розв'язання. Зобразимо тіло, об'єм якого потрібно обчислити. Для циліндра $x^2 + y^2 = 4x$ напрямною служить коло $(x-2)^2 + y^2 = 4$ в площині xOy, а твірні – паралельні осі Oz. Площини $z = x$ та $z = 2x$ паралельні осі Oy.

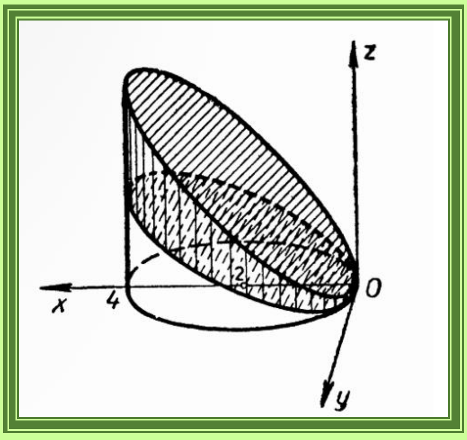


Рис. 27.

Використаємо потрійний інтеграл:

$$V(P) = \iiint\limits_{P} dxdydz .$$

Перейдемо в ньому до циліндричних координат: $\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$, при цьому якобіан відображення $|I| = \rho$. Маємо: $V(P) = \iiint\limits_{Q} \rho d\varphi d\rho dz$.

Ортогональною проекцією фігури Q на площину xOy є круг $x^2 + y^2 \le 4x$, або в полярних координатах $\rho^2 \le 4\rho\cos\varphi$, звідки $\rho \le 4\cos\varphi$. Як криволінійний сектор ця фігура задовольняє обмеженням $-\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$, $0 \le \rho \le 4\cos\varphi$. З рис. 27 бачимо, що для змінної z справедливі нерівності $x \le z \le 2x$, або $\rho\cos\varphi \le z \le 2\rho\cos\varphi$. Тому матимемо такий повторний інтеграл:

$$V = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_{0}^{4\cos\varphi} d\rho \int\limits_{\rho\cos\varphi}^{2\rho\cos\varphi} \rho dz = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_{0}^{4\cos\varphi} \rho d\rho (2\rho\cos\varphi - \rho\cos\varphi) =$$

$$= \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_{0}^{4\cos\varphi} \rho^2 \cos\varphi d\rho = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi d\varphi \left.\frac{\rho^3}{3}\right|_{\rho=0}^{\rho=4\cos\varphi} = \frac{64}{3} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\varphi d\varphi =$$

$$= \frac{128}{3} \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\varphi d\varphi = \frac{128}{3} \cdot \frac{3!!}{4!!} \cdot \frac{\pi}{2} = 8\pi .$$

Відповідь. 8π .

2. Обчислення маси матеріального неоднорідного тіла.

Якщо матеріальне тіло, що займає кубовну замкнену область *P*, є однорідним, тобто густина (об’ємна щільність) скрізь однакова ρ, то маса такого об’єкта рівна добутку об'єму тіла на густину.

Нехай тепер маса розподілена по області P неоднорідно, причому якщо область $P \subset R^3$, то відома функція густини $\rho = \rho(x; y; z)$. Потрібно обчислити масу такого об'єкту.

Розв'язання цієї задачі виконаємо за схемою, яка розглядалася в попередній главі (§ 5 Застосування подвійних інтегралів).

Для цього виберемо довільний τ-поділ області P: $P = \bigcup_{i=1}^{n} P_i$.

Нехай функція $\rho(x; y; z)$ неперервна на P, а $\overline{P_i}$ – замикання області P_i, тоді існують точки $M_i', M_i'' \in \overline{P_i}$ такі, що $\rho(M_i') = \min\limits_{M \in \overline{P_i}} \rho(M)$; $\rho(M_i'') = \max\limits_{M \in \overline{P_i}} \rho(M)$.

Тоді для сум $\sum_{i=1}^{n} \rho(M_i') \Delta \overline{P_i} = s_\rho(\tau)$ та $\sum_{i=1}^{n} \rho(M_i'') \Delta \overline{P_i} = S_\rho(\tau)$ справедливі співвідношення

$$s_\rho(\tau) \le m \le S_\rho(\tau), \tag{2}$$

де m – шукана маса. За побудовою вирази $s_\rho(\tau)$ та $S_\rho(\tau)$ є відповідно нижніми та верхніми сумами Дарбу для функції густини, що відповідають τ-поділу області P.

Функція $\rho(x; y; z)$ є інтегровною на P, тому за критерієм інтегровності (див. теорема 2 із § 1) $\lim\limits_{\lambda(\tau) \to 0} s_\rho(\tau) = \lim\limits_{\lambda(\tau) \to 0} S_\rho(\tau) = \iiint\limits_P \rho(x; y; z) dxdydz$. Тому якщо в (2) перейти до границі при умові $\lambda(\tau) \to 0$, то одержимо наступу формулу для обчислення маси тіла

$$m = \iiint\limits_P \rho(x; y; z) dxdydz. \tag{3}$$

Приклад 2. Знайти масу кульового шару між поверхнями $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ та $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$, якщо густина в кожній точці обернено пропорційна відстані точки до початку координат.

Розв'язання. Рівняння $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ та $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$ є рівнянням сфер з центром в початку координат і радіуса відповідно a та $2a$. В точці (x; y; z) густина згідно умови рівна $\rho(x;y;z)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, тому

$$m=\iiint\limits_P \frac{dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

Згідно зауваження 3 із попереднього параграфу при обчисленні даного інтеграла доцільно перейти до сферичних координат. При цьому якобіан переходу рівний $|I|=\rho^2\sin\theta$, а функція густини в сферичних координатах така $\rho=\rho(\varphi;\theta;\rho)=\dfrac{1}{\rho}$. Отже, $m=\iiint\limits_Q \rho\sin\theta d\varphi d\theta d\rho$.

Щоб подати цей інтеграл через повторний, потрібно з'ясувати межі зміни сферичних координат φ, θ, ρ. Проекцією кульового шару на площину, що проходить через центр кулі, буде круг в цій площині, тому для круга з центром в початку координат в площині xOy координата φ «пробігатиме» сегмент $[0;2\pi]$.

Переріз кульового шару півплощиною, що містить вісь Oz матиме вигляд: див. рис. 28.

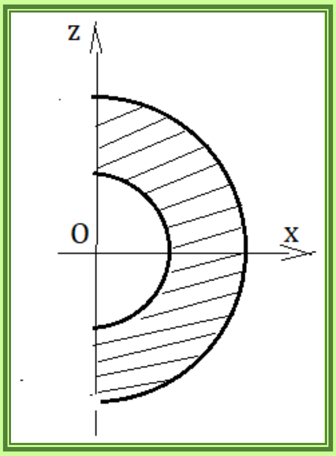


Рис. 28.

Тому кут θ (кут між додатним напрямом осі Oz та радіус-векторами точок кільця) набуватиме значень від 0 до π. В сферичних координатах рівняння $x^2+y^2+z^2=a^2$ та $x^2+y^2+z^2=4a^2$ набудуть вигляду $\rho=a$ та $\rho=2a$. Отже,

$$Q:\ \begin{array}{c} 0\le\varphi\le 2\pi \\ 0\le\theta\le\pi \\ a\le\rho\le 2a \end{array}.$$

Тому шукана маса буде рівна наступному повторному інтегралу

$$m=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}d\theta\int_a^{2a}\rho\sin\theta d\rho=\int_0^{2\pi}d\varphi\cdot\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta\left.\frac{\rho^2}{2}\right|_a^{2a}=2\pi\cdot\frac{3a^2}{2}\left.\left(-\cos\theta\right)\right|_0^{\pi}=6\pi a^2.$$

Відповідь. $6\pi a^2$.

3. Обчислення статичних моментів відносно координатних площин та обчислення координат центра ваги матеріального неоднорідного тіла.

Якщо в точці з координатами $(x; y; z)$ розташоване точкове тіло масою m, то добутки xm, ym, zm є статичними моментами цього тіла відносно координатних площин відповідно yOz, xOz та xOy. Якщо в точках $\left(x_i; y_i; z_i\right), i=\overline{1;n}$, розташовані тіла масами m_i, то маємо дискретно розташовану систему мас. Для неї статичні моменти відносно координатних площин обчислюють за формулами

$$M_{xOy}=\sum_{i=1}^{n}z_i m_i;\ M_{yOz}=\sum_{i=1}^{n}x_i m_i;\ M_{xOz}=\sum_{i=1}^{n}y_i m_i. \qquad (4)$$

Нехай маємо матеріальне неоднорідне тіло із п. 2, тобто область P розташована в декартовій системі координат $Oxyz$ та відома функція її щільності $\rho=\rho\left(x; y; z\right)$, яка неперервна на P. Потрібно обчислити статичні моменти відносно координатних площин даного просторового тіла.

Візьмемо довільний τ-поділ області $P: P=\bigcup_{i=1}^{n}P_i$, в кожній множині P_i довільним чином виберемо точку $T_i\left(x_i; y_i; z_i\right)\in P_i$ і будемо вважати, що густина на всій P_i стала і дорівнює густині в точці T_i. Ми фактично замінюємо кожну неоднорідну частину P_i на конгруентну по формі, але однорідну. Така заміна не приводить до великої помилки, оскільки функція $\rho\left(x; y; z\right)$ неперервна, а діаметр τ-поділу області можемо вибрати достатньо малим. Масу кожної заміненої області зосередимо в точці T_i. В результаті дістанемо дискретний розподіл мас: тіла масою $m_i=\rho\left(T_i\right)\Delta P_i$ розташовані в точках $T_i\left(x_i; y_i; z_i\right)$, $i=\overline{1;n}$. Для цієї системи згідно (4)

$$M_{xOy}(\tau;T_i)=\sum_{i=1}^{n} z_i\rho(x_i;y_i;z_i)\Delta P_i\,;\ \ M_{yOz}(\tau;T_i)=\sum_{i=1}^{n} x_i\rho(x_i;y_i;z_i)\Delta P_i\,;$$

$$M_{xOz}(\tau;T_i)=\sum_{i=1}^{n} y_i\rho(x_i;y_i;z_i)\Delta P_i\,.$$

2⁰. *Статичними моментами* відносно координатних площин матеріального неоднорідного тіла із функцією густини $\rho(x;y;z)$ назвемо відповідні границі

$$M_{xOy}=\lim_{\lambda(\tau)\to 0} M_{xOy}(\tau;T_i);\ M_{yOz}=\lim_{\lambda(\tau)\to 0} M_{yOz}(\tau;T_i);$$

$$M_{xOz}=\lim_{\lambda(\tau)\to 0} M_{xOz}(\tau;T_i). \qquad (5)$$

Неважко помітити, що суми $M_{xOy}(\tau;T_i)$; $M_{yOz}(\tau;T_i)$ та $M_{xOz}(\tau;T_i)$ є інтегральними сумами для відповідно функцій $z\rho(x;y;z)$, $x\rho(x;y;z)$ та $y\rho(x;y;z)$, що відповідають τ-поділу області P та вибору точок T_i. Дані функції є неперервними на P, тому інтегровними, і, отже, границі (5) існують і не залежать ні від вибору τ-поділу, ні способу вибору точок T_i. Отже, статичні моменти тіла обчислюють за формулами

$$M_{xOy}=\iiint\limits_P z\rho(x;y;z)dxdydz\,;\ M_{yOz}=\iiint\limits_P x\rho(x;y;z)dxdydz\,;$$

$$M_{xOz}=\iiint\limits_P y\rho(x;y;z)dxdydz\,. \qquad (6)$$

3⁰. За *центр ваги* матеріального тіла приймемо таку точку $(x_c;y_c;z_c)$, що якби в ній була зосереджена маса всього тіла, то статичні моменти відносно координатних площин цієї точкової маси співпадали б із відповідними статичними моментами тіла.

Виходячи із цього означення, справедливими будуть рівності

$$M_{xOy}=m\cdot z_c\,;\,M_{yOz}=m\cdot x_c\,;\,M_{xOz}=m\cdot y_c.$$

Із них та співвідношень (3) та (6) отримаємо такі формули для обчислення координат центра ваги тіла:

$$x_c = \frac{M_{yOz}}{m} = \frac{\iiint\limits_P x\rho(x;y;z)dxdydz}{\iiint\limits_P \rho(x;y;z)dxdydz}; \quad y_c = \frac{M_{xOz}}{m} = \frac{\iiint\limits_P y\rho(x;y;z)dxdydz}{\iiint\limits_P \rho(x;y;z)dxdydz};$$

$$z_c = \frac{M_{xOy}}{m} = \frac{\iiint\limits_P z\rho(x;y;z)dxdydz}{\iiint\limits_P \rho(x;y;z)dxdydz}. \tag{7}$$

Зауваження 1. Якщо в умові задачі відсутня будь-яка інформація про щільність фігури, то зазвичай вважають, що функція $\rho(x;y;z) \equiv 1$. Тоді формули по обчисленню статичних моментів та координат центра ваги набувають наступного вигляду

$$M_{xOy} = \iiint\limits_P zdxdydz; \quad M_{yOz} = \iiint\limits_P xdxdydz; \quad M_{yOz} = \iiint\limits_P xdxdydz; \tag{8}$$

$$x_c = \frac{1}{V(P)}\iiint\limits_P xdxdydz; \quad y_c = \frac{1}{V(P)}\iiint\limits_P ydxdydz; \quad z_c = \frac{1}{V(P)}\iiint\limits_P zdxdydz. \tag{9}$$

Зауваження 2. Якщо однорідна фігура має площину чи вісь симетрії, то її центр ваги лежить на цій площині чи осі.

Приклад 3. Знайти координати центра ваги однорідного тіла, яке обмежене поверхнями $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$, $z = c$ ($c > 0$).

Розв'язання. Тіло однорідне, обмежене частиною конічної поверхні $z = c\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}$, частиною площини $z = c$ і симетричне відносно осі Oz. Отже, його центр ваги $(x_c; y_c; z_c)$ лежить на цій осі і $x_c = 0$, $y_c = 0$. За формулами (9) маємо: $z_c = \frac{1}{V(P)}\iiint\limits_P zdxdydz$. В інтегралі $V(P) = \iiint\limits_P dxdydz$ перейдемо до узагальнених циліндричних координат згідно формул рекомендації 2 із § 3, одержимо: $V(P) = \iiint\limits_Q ab\rho d\varphi d\rho dz$.

Проекцією області Q на площину xOy буде фігура, що обмежена еліпсом, рівняння якого в узагальнених циліндричних координатах має вигляд $\dfrac{a^2\rho^2\cos^2\varphi}{a^2}+\dfrac{b^2\rho^2\sin^2\varphi}{b^2}=1 \Rightarrow \rho=1$.

«Знизу» область Q обмежена конічною поверхнею, рівняння якої в узагальнених циліндричних координатах наступне: $\rho^2=\dfrac{z^2}{c^2} \Rightarrow z=c\rho$, а «зверху» – площиною $z = c$. Отже, як орієнтована вздовж осі Oz область Q задовольняє таким обмеженням:

$$\begin{aligned} &0\le\varphi\le 2\pi;\\ Q:\ &0\le\rho\le 1;\\ &c\rho\le z\le c. \end{aligned}$$

Тому

$$V(P)=ab\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1\rho d\rho\int_{c\rho}^{c}dz=2\pi ab\int_0^1\rho(c-c\rho)d\rho\ =2\pi abc\int_0^1(\rho-\rho^2)d\rho=\frac{\pi}{3}abc.$$

Аналогічно вчинимо і при обчисленні іншого потрійного інтеграла.

$$\iiint_P zdxdydz=ab\iiint_Q z\rho d\varphi d\rho dz=ab\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1\rho d\rho\int_{c\rho}^{c}zdz=2\pi ab\int_0^1\rho\left.\frac{z^2}{2}\right|_{z=z\rho}^{z=c}d\rho=$$

$$=\pi abc^2\int_0^1\rho(1-\rho^2)d\rho=\frac{1}{4}\pi abc^2.$$

Таким чином, маємо: $z_c=\dfrac{3}{\pi abc}\cdot\dfrac{1}{4}\pi abc^2=\dfrac{3}{4}c$.

Відповідь. $\left(0;0;\dfrac{3}{4}c\right)$.

4. Обчислення моментів інерції відносно координатних площин матеріального неоднорідного тіла.

Момент інерції матеріальної точки відносно деякої площини (прямої, точки) дорівнює добутку маси точки на квадрат відстані від точки до цієї площини (прямої, точки), а момент інерції системи матеріальних точок відносно даної площини (прямої, точки) дорівнює сумі моментів інерції всіх точок системи.

Нехай маємо матеріальне неоднорідне тіло із п. 2, тобто область $P \subset R^3$ матеріальна і відома функція її щільності $\rho = \rho(x;y;z)$, яка неперервна на *P*. Потрібно обчислити моменти інерції відносно координатних площин даної фігури.

Якщо поступити із областю *P* так, як у п. 2, то одержимо дискретно розташовану систему мас, для якої моменти інерції відносно площин *xOy*, *xOz* та *yOz* будуть наступними

$$I_{xOy}(\tau,T_i) = \sum_{i=1}^{n} z_i^{\,2} \rho(x_i;y_i;z_i)\Delta P_i\,; \quad I_{xOz}(\tau,T_i) = \sum_{i=1}^{n} y_i^{\,2} \rho(x_i;y_i;z_i)\Delta P_i\,;$$

$$I_{yOz}(\tau,T_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2} \rho(x_i;y_i;z_i)\Delta P_i\,.$$

4^0. *Моментами інерції* відносно координатних площино *xOy*, *xOz* та *yOz* матеріальної неоднорідної фігури із функцією щільності $\rho(x;y;z)$ назвемо відповідні границі

$$I_{xOy} = \lim_{\lambda(\tau)\to 0} I_{xOy}(\tau,T_i);\; I_{xOz} = \lim_{\lambda(\tau)\to 0} I_{xOz}(\tau,T_i);\; I_{yOz} = \lim_{\lambda(\tau)\to 0} I_{yOz}(\tau,T_i). \quad (10)$$

Оскільки

$$I_{xOy}(\tau,T_i) = \sigma_{z^2\rho(x;y;z)}(\tau;T_i); \quad I_{xOz}(\tau,T_i) = \sigma_{y^2\rho(x;y;z)}(\tau;T_i);$$

$$I_{yOz}(\tau,T_i) = \sigma_{x^2\rho(x;y;z)}(\tau;T_i),$$

то з урахуванням (10) при умові неперервності функції щільності одержимо наступні формули для обчислення моментів інерції відносно координатних площин

$$I_{xOy} = \iiint_P z^2 \rho(x;y;z)dxdydz\,;\; I_{xOz} = \iiint_P y^2 \rho(x;y;z)dxdydz\,;$$

$$I_{yOz} = \iiint_P x^2 \rho(x;y;z)dxdydz\,. \quad (11)$$

Оскільки квадрат відстані від точки до осі *Ox* дорівнює сумі квадратів відстаней від точки до координатних площин *xOy* та *xOz*, момент інерції матеріальної точки відносно осі *Ox* рівний сумі моментів інерції даної точки відносно координатних площин *xOy* та *xOz*. Тому момент інерції неоднорідного тіла, яке розглядають в даному пункті, відносно осі *Ox* згідно співвідношень (11) буде рівний наступному інтегралу

$$I_x = \iiint_P (y^2 + z^2)\rho(x;y;z)dxdydz. \tag{12}$$

А моменти інерції відносно осей *Oy* та *Oz* обчислюють аналогічно:

$$I_y = \iiint_P (x^2 + z^2)\rho(x;y;z)dxdydz; \; I_z = \iiint_P (x^2 + y^2)\rho(x;y;z)dxdydz. \tag{12′}$$

А статичний момент неоднорідного тіла відносно початку координат буде рівний сумі моментів інерції цього тіла відносно всіх координатних площин:

$$I_O = I_{xOy} + I_{yOz} + I_{xOz} = \iiint_P (x^2 + y^2 + z^2)\rho(x;y;z)dxdydz. \tag{13}$$

Зауваження 3. Якщо в умові задачі на обчислення моментів інерції відсутня інформація про щільність, то зазвичай вважають, що $\rho(x;y;z) \equiv 1$.

Зауваження 4. Якщо потрібно обчислити статичні моменти а чи моменти інерції відносно площини α, яка не є координатною, відносно прямої a, яка не є координатною віссю, відносно точки *K*, що не співпадає з початком координат, то рекомендовано зробити такий рух (паралельне перенесення + поворот), щоб площина α зайняла положення якоїсь координатної площини, пряма a зайняла положення якоїсь координатної осі, точка *K* співпала із початком координат, при цьому слід пам'ятати, що рівняння границі області *P* та функція щільності в новій системі координат будуть, взагалі кажучи, іншими.

Приклад 4. Знайти момент інерції кулі радіуса *R* відносно площини, дотичної до кулі.

Розв'язання. Розташуємо кулю радіуса *R* так, щоб вона дотикалась до площини *xOy*, а центром кулі була точка (0; 0; *R*). Тоді шуканий момент інерції є моментом інерції відносно площини *xOy*. Оскільки відсутня інформація про щільність кулі, то виберемо $\rho(x;y;z) \equiv 1$, тому згідно формул (11) потрібно обчислити наступний інтеграл $I_{xOy} = \iiint\limits_P z^2 dxdydz$. Куля обмежена сферою $x^2 + y^2 + (z - R)^2 = R^2$, або $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rz$. Згідно рекомендації 3 із §3 при обчисленні даного інтеграла виконаємо перехід до сферичних координат і одержимо, що

$$I_{xOy} = \iiint\limits_Q \rho^2 \cos^2\theta \cdot \rho^2 \sin\theta d\varphi d\theta d\rho.$$

Ортогональною проекцією кулі на площину xOy є круг з центром в початку координат, тому $0 \le \varphi \le 2\pi$. Півплощина із віссю Oz як межею перетинає кулю по півкругу (див., напр., приклад 3, § 3), звідки $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$; а промінь, що виходить з початку координат перетинає межу кулі по сфері, рівняння якої в сферичних координатах має вигляд: $\rho = 2R\cos\theta$. Тому

область Q задовольняє наступні обмеження: $Q: \begin{array}{l} 0 \le \varphi \le 2\pi; \\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}; \\ 0 \le \rho \le 2R\cos\theta. \end{array}$

Отже, матимемо такий повторний інтеграл

$$I_{xOy} = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int\limits_0^{2R\cos\theta} \rho^4 \cos^2\theta \cdot \sin\theta d\rho = 2\pi \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta \sin\theta \left.\frac{\rho^5}{5}\right|_{\rho=0}^{\rho=2R\cos\theta} d\theta =$$

$$= \frac{64R^5}{5} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^7\theta \sin\theta d\theta = -\frac{64R^5}{5} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^7\theta d(\cos\theta) = -\frac{64R^5}{5} \cdot \left.\frac{\cos^8\theta}{8}\right|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{8R^5}{5}.$$

Відповідь. $\frac{8R^5}{5}$.

ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ
ТА ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ

1. Що називається потрійним інтегралом від функції $f(x;y;z)$ по області *P*?
2. Перерахувати властивості потрійного інтеграла.
3. Дати означення орієнтованої вздовж осі *Ox*, *Oy*, *Oz* просторової області.
4. Що називається повторним інтегралом по паралелепіпеду? по криволінійній просторовій області?
5. Сформулювати теорему про заміну змінних в потрійному інтегралі.
6. Як обчислюється потрійний інтеграл у циліндричних, узагальнених циліндричних, сферичних, узагальнених сферичних координатах за допомогою повторного?
7. Обчислити потрійний інтеграл:

   а) $\iiint\limits_P \frac{dxdydz}{(x+y+z+1)^3}$, де область Р обмежена площинами

   $$z=0,\, y=0,\, z=0,\, x+y+z=1;$$

   б) $\iiint\limits_P zdxdydz$, якщо область Р обмежена поверхнями:

   $$z=x^2+y^2,\, x+y=1,\, x=0,\, y=0,\, z=0.$$

8. Обчислити потрійні інтеграли, перейшовши до циліндричних або сферичних координат:

   а) $\iiint\limits_P \frac{zdxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, де $P: x^2+y^2+z^2 \le R^2,\, z \ge \sqrt{x^2+y^2}$;

   б) $\iiint\limits_P \sqrt{x^2+z^2}dxdydz$, якщо область *P* обмежена поверхнями

   $$y=x^2+z^2,\, y=1.$$

9. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями

   а) $z=2x^2+y^2+1,\, x+y=1,\, x\ge 0,\, y\ge 0,\, z\ge 0$;

   б) $z=\sqrt{64-x^2-y^2},\, z=2$;

   в) $x^2+y^2+z^2=2az,\, x^2+y^2\le z^2$.

10. Знайти масу тіла, обмеженого еліпсоїдом $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, з густиною $\rho(x;y;z)=2\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)$.

11. Знайти координати центра ваги тіла $x^2+y^2\le z\le h$ з густиною $\rho(x;y;z)=z^2$

12. Обчислити момент інерції щодо осі Oz однорідного тіла:

$$x^2+y^2\le R^2,\ 0\le z\le H.$$

Розділ III

КРИВОЛІНІЙНІ ІНТЕГРАЛИ

§ 1. ОЗНАЧЕННЯ ТА ОБЧИСЛЕННЯ КРИВОЛІНІЙНИХ ІНТЕГРАЛІВ ПЕРШОГО РОДУ

Для того, щоб природнім чином означити поняття криволінійного інтеграла першого роду, спочатку розглянемо фізичну задачу.

Нехай на координатній площині хОу дано спрямлювану дугу AB (тобто таку, що має довжину), причому ця дуга є матеріальною, і відома функція її лінійної щільності $\rho = \rho(x; y)$. Потрібно обчислити масу цієї дуги.

Якби дуга була однорідною, тобто лінійна щільність у всіх точках дуги однакова, то маса дуги була б рівна добутку щільності ρ на довжину дуги AB. У випадку неоднорідності дуги поступимо так: між точками A та B кривої вмістимо точки $A = A_0$, A_1, …, A_n = B. І назвемо це τ-поділом дуги AB. Через Δl_k позначимо довжину дуги $A_k A_{k+1}$. Візьмемо на дузі $A_k A_{k+1}$ довільну точку M_k і обчислимо лінійну густину $\rho(M_k)$.

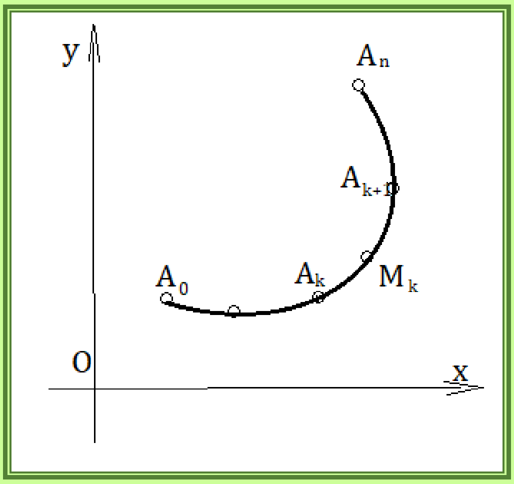


Рис. 29.

Будемо вважати, що густина у всіх точках дуги $A_k A_{k+1}$ така ж, як і в точці M_k. Тоді маса заміненої однорідної дуги буде рівна $m_k = \rho(M_k)\Delta l_k$, а для всієї шуканої маси справедлива наближена рівність $m \approx \sum_{k=0}^{n-1} \rho\left(M_k\right) \Delta l_k$.

Причому похибка цієї наближеної рівності буде прямувати до нуля, якщо прямуватимуть до нуля довжини всіх дуг $A_k A_{k+1}$.

Нехай $\lambda = \lambda\left(\tau\right) = \max\limits_{0 \le k \le n-1} \Delta l_k$, назвемо цю величину діаметром τ-поділу, а для маси дуги AB одержимо рівність

$$m = \lim_{\lambda(\tau) \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} \rho\left(M_k\right) \Delta l_k .$$

Будемо досліджувати границі такого вигляду, абстрагуючись від фізичного змісту функцій двох змінних $f\left(x;y\right)$, які означені на спрямлюваній дузі AB.

1°. Якщо τ – довільний поділ дуги AB, точки $M_k \in A_k A_{k+1}$ $\left(k = \overline{0;n-1}\right)$, то суму вигляду $\sigma_f(\tau, M_k) = \sum_{k=0}^{n-1} f(M_k) \Delta l_k$ назвемо інтегральною для функції $f(x;y)$, яка відповідає τ поділу та вибору точок M_k.

2°. Кажуть, що $I = \lim\limits_{\lambda(\tau) \to 0} \sigma_f(\tau, M_k)$, якщо справедливе висловлення

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall \tau : \lambda(\tau) < \delta; \forall M_k \in A_k A_{k+1}, k = \overline{0;n-1}) \Rightarrow \left|\sigma_f(\tau; M_k) - I\right| < \varepsilon .$$

Число I називають криволінійним інтегралом першого роду від функції $f(x;y)$ вздовж дуги AB і будемо позначати таким символом $\int\limits_{AB} f(x;y)dl.$

Зауважимо, що при умові існування границі інтегральних сум границя не залежить від способу розбиття дуги та способу вибору точок M_k. Якщо існує криволінійний інтеграл, то кажуть, що ця функція інтегровна вздовж дуги AB.

Крім того, інтегральні суми по дузі AB при тому самому τ-поділі та виборі точок M_k співпадають із інтегральними сумами поділу дуги BA, тому маємо

Наслідок 1. Якщо функція $f(x;y)$ інтегровна вздовж дуги AB, то вона буде інтегровною вздовж дуги BA, причому $\int\limits_{AB} f(x;y)dl = \int\limits_{BA} f(x;y)dl.$

Розглянемо функцію $f(x;y) \equiv 1$, тоді для довільної спрямлюваної дуги AB при довільному τ-поділі та довільному виборі точок M_k всі інтегральні суми будуть рівні $\sum\limits_{k=0}^{n-1} \Delta l_k = l_{AB}$. Отже, справедливий наступний

Наслідок 2. $\int\limits_{AB} dl = l_{AB}$.

Наслідок 3. Якщо функція лінійної щільності $\rho(x;y)$ матеріальної дуги AB інтегровна вздовж цієї дуги, то маса даної дуги рівна такому інтегралу

$$m = \int\limits_{AB} \rho(x;y)dl.$$

Аналогічно можемо розглянути криволінійний інтеграл першого роду від функції трьох змінних $f(x;y;z)$ вздовж просторової дуги.

Аналогічно до доведення властивостей подвійних інтегралів можемо переконатися у справедливості наступних властивостей криволінійних інтегралів першого роду.

Теорема 1 (необхідна умова інтегровності). Якщо функція $f(x;y)$ інтегровна вздовж спрямлюваної дуги AB, то $f(x;y)$ обмежена на цій дузі.

Теорема 2 (лінійність). Якщо функції $f(x;y)$ та $g(x;y)$ інтегровні вздовж спрямлюваної дуги AB, то при довільних сталих α та β функція $\alpha f(x;y) + \beta g(x;y)$ буде інтегровною вздовж AB, причому

$$\int\limits_{AB} (\alpha f(x;y) + \beta g(x;y))dl = \alpha \int\limits_{AB} f(x;y)dl + \beta \int\limits_{AB} g(x;y)dl.$$

Теорема 3 (адитивність). Якщо функція $f(x;y)$ інтегровна вздовж спрямлюваної дуги AB, то для будь-якої точки $C \in AB$ справедлива рівність

$$\int\limits_{AB} f(x;y)dl = \int\limits_{AC} f(x;y)dl + \int\limits_{CB} f(x;y)dl.$$

Теорема 4 (монотонність). Якщо функції $f(x;y)$ та $g(x;y)$ інтегровні вздовж спрямлюваної дуги AB, причому в кожній точці дуги $f(x;y) \le g(x;y)$, то $\int\limits_{AB} f(x;y)dl \le \int\limits_{AB} g(x;y)dl$.

Теорема 5 (про середнє у криволінійному інтегралі першого роду). Якщо функція $f(x;y)$ інтегровна вздовж спрямлюваної дуги AB, то існує число $\mu \in [m;M]$ таке, що $\int\limits_{AB} f(x;y)dl = \mu \cdot l_{AB}$, де $m = \inf\limits_{(x;y)\in AB} f(x;y)$, а $M = \sup\limits_{(x;y)\in AB} f(x;y)$.

Розглянемо способи обчислення криволінійних інтегралів першого роду. Тільки спочатку нагадаємо, яку криву називають гладкою, і як обчислюють довжину гладкої лінії. Якщо дуга AB задана параметрично співвідношеннями

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}, \alpha \le t \le \beta, \tag{1}$$

не має точок самоперетину, функції $\varphi(t)$ та $\psi(t)$ мають на проміжку $[\alpha;\beta]$ неперервні похідні, що одночасно не перетворюються в 0, то її називають гладкою, при цьому гладка дуга є спрямлюваною і обчислюють довжину AB за допомогою наступного інтеграла

$$l_{AB} = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}\, dt. \tag{2}$$

Теорема 6. Якщо гладка дуга AB задана співвідношеннями (1), функція $f(x;y)$ неперервна вздовж AB, то $f(x;y)$ інтегровна вздовж цієї дуги, причому

$$\int\limits_{AB} f(x;y)dl = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t);\psi(t)) \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}\, dt. \tag{3}$$

Доведення. Розглянемо довільний τ-поділ відрізка $[\alpha;\beta]$: $\alpha = t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_n = \beta$, позначимо $A_k(x_k; y_k)$, де $x_k = \varphi(t_k), y_k = \psi(t_k)$.

Одержали τ' – поділ дуги AB, при цьому

$$\lambda(\tau) = \max_{0 \le k \le n-1} \Delta t_k, \; \lambda(\tau') = \max_{0 \le k \le n-1} \Delta l_k .$$

В силу (2) $\Delta l_k = \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt$. Оскільки підінтегральна функція неперервна як результат операцій над неперервними функціями, тому вона є обмеженою. Завдяки цьому факту легко переконатися (зробіть це самостійно), що $\lambda(\tau) \to 0 \Leftrightarrow \lambda(\tau') \to 0$. Виберемо $\forall M_k \in A_k A_{k+1}$, тоді існує $c_k \in [t_k; t_{k+1}]$ таке, що $M_k(\varphi(c_k); \psi(c_k))$. Застосуємо теорему про середнє у визначеному інтегралі від неперервної функції до Δl_k: $\Delta l_k = \sqrt{(\varphi'(p_k))^2 + (\psi'(p_k))^2} \Delta t_k$, де $p_k \in [t_k; t_{k+1}]$. Тоді інтегральну суму для τ'-поділу та вибору точок M_k можемо подати в такому вигляді $\sigma_f(\tau'; M_k) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} f(M_k)\Delta l_k = \sum\limits_{k=0}^{n-1} f(\varphi(c_k); \psi(c_k)) \sqrt{(\varphi'(p_k))^2 + (\psi'(p_k))^2} \Delta t_k$.

Або можемо записати ще і так:

$$\sigma_f(\tau'; M_k) = \sum_{k=0}^{n-1} f(\varphi(p_k); \psi(p_k)) \sqrt{(\varphi'(p_k))^2 + (\psi'(p_k))^2} \Delta t_k +$$

$$+ \sum_{k=0}^{n-1} \left(f(\varphi(c_k); \psi(c_k)) - f(\varphi(p_k); \psi(p_k)) \right) \sqrt{(\varphi'(p_k))^2 + (\psi'(p_k))^2} \Delta t_k =$$

$$= \sigma_{f(\varphi;\psi)\sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2}}(\tau; p_k) + D. \qquad (4)$$

Функція $f(\varphi(t); \psi(t)) \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}$ неперервна на проміжку $[\alpha;\beta]$ як результат операцій над неперервними функціями, тому інтегровна (тобто існує визначений інтеграл від неї на $[\alpha;\beta]$), звідки

$$\lim_{\lambda(\tau) \to 0} \sigma_{f(\varphi;\psi)\sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2}}(\tau; p_k) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t); \psi(t)) \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt. \qquad (5)$$

Покажемо, що

$$\lim_{\lambda(\tau)\to 0} D = 0. \qquad (6)$$

Функція $\sqrt{\left(\varphi'(t)\right)^2+\left(\psi'(t)\right)^2}$ неперервна на сегменті $[\alpha;\beta]$, тому обмежена на ньому: $\exists K>0: \sqrt{\left(\varphi'(p_k)\right)^2+\left(\psi'(p_k)\right)^2}\le K$; $k=\overline{0;n-1}$. Оскільки $c_k, p_k \in [t_k;t_{k+1}]$, то $\left| f\left(\varphi(p_k);\psi(p_k)\right)-f\left(\varphi(c_k);\psi(c_k)\right)\right| \le \omega_k\left(f(\varphi;\psi)\right)$ (символом $\omega_k\left(f(\varphi;\psi)\right)$ позначено коливання функції $f\left(\varphi(t);\psi(t)\right)$ на к-тому сегменті τ-поділу). Тому справедлива наступна оцінка

$$|D| \le \sum_{k=0}^{n-1}\left| f\left(\varphi(p_k);\psi(p_k)\right)-f\left(\varphi(c_k);\psi(c_k)\right)\right|\sqrt{\left(\varphi'(p_k)\right)^2+\left(\psi'(p_k)\right)^2}\,\Delta t_k \le$$

$$\le \sum_{k=0}^{n-1} K\omega_k\left(f(\varphi;\psi)\right)\Delta t_k.$$

Неперервна на сегменті $[\alpha;\beta]$ функція $f\left(\varphi(t);\psi(t)\right)$ є інтегровною на ньому, тому за критерієм інтегровності через коливання матимемо, що $\lim\limits_{\lambda(\tau)\to 0}\sum\limits_{k=0}^{n-1}\omega_k\left(f(\varphi;\psi)\right)\Delta t_k=0$, звідки випливатиме справедливість (6). Залишилось в рівності (4) перейти до границі при умові $\lambda(\tau')\to 0$ та врахувати (5) та (6). **Теорема доведена.**

Як часткові випадки задання дуги інтегрування із теореми 6 одержимо наступні наслідки.

Наслідок 1. Якщо дуга AB є графіком функції $y=\varphi(x)$, яка на сегменті $[a;b]$ має неперервну похідну, а функція $f(x;y)$ неперервна вздовж цієї дуги, то $\int\limits_{AB} f(x;y)dl=\int\limits_a^b f\left(x;\varphi(x)\right)\sqrt{1+\left(\varphi'(x)\right)^2}dx$.

Наслідок 2. Якщо дуга AB є графіком функції $x=\varphi(y)$, яка на сегменті $[a;b]$ має неперервну похідну, а функція $f(x;y)$ неперервна вздовж цієї дуги, то $\int\limits_{AB} f(x;y)dl=\int\limits_a^b f\left(\varphi(y);y\right)\sqrt{1+\left(\varphi'(y)\right)^2}dy$.

Наслідок 3. Якщо дуга AB в полярній системі координат задана рівністю $\rho=\rho(\varphi)$, $\varphi\in[\alpha;\beta]$, причому $\rho(\varphi)$ має неперервну похідну, а функція $f(x;y)$ неперервна вздовж цієї дуги, то

$$\int\limits_{AB} f(x;y)dl=\int\limits_{\alpha}^{\beta} f\left(\rho(\varphi)cos\varphi;\rho(\varphi)\sin\varphi\right)\sqrt{\rho^2(\varphi)+\left(\rho'(\varphi)\right)^2}d\varphi.$$

Приклад 1. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_{AB}\frac{x}{y}dl$, якщо AB - дуга параболи $y^2=2x$, що лежить між точками $\left(1;\sqrt{2}\right)$ і $(2;2)$.

Розв'язання. Дуга AB задана рівністю $y=\sqrt{2x}$, $1\le x\le 2$, (корінь беремо зі знаком плюс тому, що всі точки дуги мають додатні ординати) знайдемо диференціал дуги: $y'=\frac{1}{\sqrt{2x}}$, $dl=\sqrt{1+y'^2}dx=\sqrt{1+\frac{1}{2x}}dx=\frac{\sqrt{1+2x}}{\sqrt{2x}}dx$. Згідно наслідку 1 маємо:

$$\int\limits_{AB}\frac{x}{y}dl=\int\limits_1^2\frac{x}{\sqrt{2x}}\cdot\frac{\sqrt{1+2x}}{\sqrt{2x}}dx=\frac{1}{4}\int\limits_1^2(1+2x)^{\frac{1}{2}}d(1+2x)=\frac{1}{6}(1+2x)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_1^2=\frac{1}{6}(5\sqrt{5}-3\sqrt{3}).$$

Відповідь. $\frac{1}{6}(5\sqrt{5}-3\sqrt{3})$.

Приклад 2. Обчислити криволінійний інтеграл першого роду $\int\limits_L\sqrt{x^2+y^2}dl$, де L – коло $x^2+y^2=ax$ $(a>0)$.

Розв'язання. Коло L розташоване в правій півплощині, дотикається осі Oy в початку координат, тому не може бути графіком лише однієї функції ні від змінної x, ні від змінної y. Тому задамо його рівністю в полярних координатах: $\rho=a\cos\varphi, -\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$. Застосуємо при обчисленні криволінійного інтеграла наслідок 3, знайдемо диференціал дуги $dl=\sqrt{\rho^2(\varphi)+\left(\rho'(\varphi)\right)^2}d\varphi=\sqrt{a^2\cos^2\varphi+a^2\sin^2\varphi}d\varphi=ad\varphi$. Згідно наслідку 3 маємо:

$$\int\limits_L \sqrt{x^2+y^2}\,dl = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\left(a\cos^2\varphi\right)^2+\left(a\cos\varphi\sin\varphi\right)^2}\,a\,d\varphi = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a^2\cos\varphi\,d\varphi = 2a^2$$

Відповідь. $2a^2$.

Якщо гладка дуга AB є просторовою і задається параметрично співвідношеннями вигляду $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t),\ \alpha \le t \le \beta; \\ z = z(t) \end{cases}$ функція $f(x;y;z)$ неперервна вздовж цієї дуги, то аналогічно до теореми 6 можемо довести, що функція $f(x;y;z)$ інтегровна вздовж дуги, причому

$$\int\limits_{AB} f(x;y;z)\,dl = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f\left(x(t);y(t);z(t)\right)\sqrt{\left(x'(t)\right)^2+\left(y'(t)\right)^2+\left(z'(t)\right)^2}\,dt. \qquad (7)$$

Приклад 3. Обчислити криволінійний інтеграл першого роду по просторовій лінії: $\int\limits_{AB}\left(x^2+y^2+z^2\right)dl$, де AB – частина гвинтової лінії $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t,\ 0 \le t \le 2\pi. \\ z = bt \end{cases}$

Розв'язання. На кривій AB підінтегральна функція набуває значень, що залежать від параметра t, і рівна виразу $x^2+y^2+z^2 = a^2+b^2t^2$. Знайдемо похідні функцій x, y, z і одержимо такий диференціал довжини дуги

$$\int\limits_{AB}\left(x^2+y^2+z^2\right)dl = \sqrt{a^2+b^2}\int\limits_0^{2\pi}\left(a^2+b^2t^2\right)dt = \sqrt{a^2+b^2}\left(a^2t+\frac{b^2t^3}{3}\right)\Bigg|_0^{2\pi} =$$

$$= 2\pi\sqrt{a^2+b^2}\left(a^2+\frac{4}{3}\pi^2b^2\right).$$

Відповідь. $2\pi\sqrt{a^2+b^2}\left(a^2+\frac{4}{3}\pi^2b^2\right)$.

§ 2. ЗАСТОСУВАННЯ КРИВОЛІНІЙНИХ ІНТЕГРАЛІВ ПЕРШОГО РОДУ

1. Обчислення маси матеріальної неоднорідної лінії.

Нехай на координатній площині xOy дано спрямлювану дугу AB, причому ця дуга є матеріальною, і відома функція її лінійної щільності $\rho = \rho(x; y)$.

Як випливає із наслідку 3 §1, якщо функція лінійної щільності $\rho(x; y)$ матеріальної дуги AB інтегровна вздовж цієї дуги, то маса даної дуги рівна такому інтегралу $m = \int\limits_{AB} \rho(x; y)dl$. Якщо ж дуга просторова, то $m = \int\limits_{AB} \rho(x; y; z)dl$.

Приклад 1. Обчислити масу дуги параболи $y^2 = 2px \left(0 \le x \le \dfrac{p}{2}\right)$, якщо лінійна щільність параболи в точці (x; y) дорівнює $|y|$.

Розв'язання. Згідно п.1 шукана маса рівна такому інтегралу $m = \int\limits_{AB} |y| dl$. Зобразимо дугу AB: (рис.30)

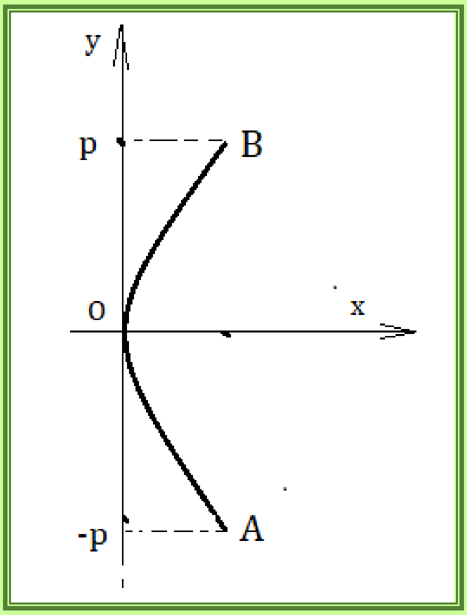


Рис. 30.

Розглянемо її як графік функції $x = \dfrac{y^2}{2p}, -p \le y \le p$.

Застосуємо наслідок 2 до обчислення *m*. Одержимо диференціал дуги у вигляді $dl=\sqrt{1+x'^2}dy=\sqrt{1+\frac{y^2}{p^2}}dy=\frac{\sqrt{p^2+y^2}}{p}dy$. Тоді згідно наслідку 2 будемо мати:

$$m=\int\limits_{AB}|y|dl=\frac{1}{p}\int\limits_{-p}^{p}|y|\sqrt{y^2+p^2}dy=\frac{2}{p}\int\limits_{0}^{p}y\sqrt{y^2+p^2}dy=$$

$$=\frac{1}{p}\int\limits_{0}^{p}\left(y^2+p^2\right)^{\frac{1}{2}}d\left(y^2+p^2\right)=\frac{2}{3p}\left(y^2+p^2\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^p=\frac{2p^2}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right).$$

Відповідь. $\frac{2p^2}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right)$.

2. Обчислення статичних моментів відносно координатних осей матеріальної дуги із п) 1.

Нехай маємо матеріальну дугу із п) 1, потрібно обчислти статичні моменти уієї дуги відносно координатних осей.

Якщо із матеріальною дугою виконати всі ті дії, що і при обчислення її маси при розв'язанні задачі по обчисленню маси, а також масу заміненої однорідної дуги зосередити в точці $T_k\in A_kA_{k+1}$, то одержимо дискретно розташовану систему мас, для якої $M_x(\tau;T_k)=\sum\limits_{k=0}^{n-1}m_k y_k$, $M_y(\tau;T_k)=\sum\limits_{k=0}^{n-1}m_k x_k$, де x_k, y_k – координати точки T_k.

Приймемо за статичні моменти відносно координатних осей матеріальної неоднорідної дуги AB наступні границі

$$M_x=\lim_{\lambda(\tau)\to 0}M_x(\tau;T_k);\ M_y=\lim_{\lambda(\tau)\to 0}M_y(\tau;T_k).$$

Оскільки

$$M_x(\tau;T_k)=\sum_{k=0}^{n-1}\rho(x_k;y_k)y_k\Delta l_k=\sigma_{y\rho(x;y)}(\tau,T_k),$$

$$M_y(\tau;T_k)=\sum_{k=0}^{n-1}\rho(x_k;y_k)x_k\Delta l_k=\sigma_{x\rho(x;y)}(\tau,T_k),$$

то перейшовши до границь при $\lambda(\tau)\to 0$ одержимо:

$$M_x=\int\limits_{AB} y\rho(x;y)dl;\quad M_y=\int\limits_{AB} x\rho(x;y)dl. \qquad (1)$$

3 . Обчислення координат центра ваги матеріальної дуги із п) 1.

Нехай маємо матеріальну криву із п. 1. Потрібно знайти координати її центра ваги. За центр ваги приймемо точку $(x_c;y_c)$ таку, що якби в ній була зосереджена точка масою рівною масі всієї кривої, то статичні моменти відносно координатних осей цього точкового тіла співпадали б з відповідними статичними моментами кривої. Згідно цього $M_x=m\cdot y_c$; $M_y=m\cdot x_c$.

Тоді із п. 1 та п. 2 для обчислення координат центра ваги одержимо наступні співвідношення

$$x_c=\frac{\int\limits_{AB} x\rho(x;y)dl}{\int\limits_{AB}\rho(x;y)dl};\ y_c=\frac{\int\limits_{AB} y\rho(x;y)dl}{\int\limits_{AB}\rho(x;y)dl}. \qquad (2)$$

Слід звернути увагу на той випадок, коли лінійна щільність кривої по всій дузі однакова, тобто дуга є однорідною. Тоді формули для обчислення координат центра ваги будуть наступними

$$x_c=\frac{1}{l_{AB}}\int\limits_{AB} xdl;\quad y_c=\frac{1}{l_{AB}}\int\limits_{AB} ydl. \qquad (3)$$

Приклад 2. Знайти центр ваги частини однорідної циклоїди

$$x=a(t-\sin t);\, y=a(1-\cos t)\ (0\le t\le\pi).$$

Розв'язання. Спочатку знайдемо диференціал дуги:

$$dl=\sqrt{x'^2+y'^2}dt=\sqrt{a^2(1-\cos t)^2+a^2\sin^2 t}dt=a\sqrt{2(1-\cos t)}dt=2a\sin\frac{t}{2}dt.$$

Тоді згідно наслідку 2 $l_{AB}=\int\limits_{AB} dl=\int\limits_0^{\pi}2a\sin\frac{t}{2}dt=-4a\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{\pi}=4a.$

Тому зважаючи на однорідність дуги із (3) будемо мати

$$x_c=\frac{1}{4a}\int_0^{\pi} a(t-\sin t)2a\sin\frac{t}{2}dt=\frac{a}{2}\int_0^{\pi}(t-\sin t)\sin\frac{t}{2}dt=\frac{a}{2}\int_0^{\pi}(t\sin\frac{t}{2}-2\sin^2\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2})dt=$$

$$=\frac{a}{2}\left(-2t\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{\pi}+\int_0^{\pi}2cos\frac{t}{2}dt-4\int_0^{\pi}\sin^2\frac{t}{2}d\left(\sin\frac{t}{2}\right)\right)=$$

$$=\frac{a}{2}\left(4\sin\frac{t}{2}\Big|_0^{\pi}-\frac{4}{3}\sin^3\frac{t}{2}\Big|_0^{\pi}\right)=\frac{4a}{3}.$$

$$y_c=\frac{1}{4a}\int_0^{\pi} a(1-\cos t)2a\sin\frac{t}{2}dt=\frac{a}{2}\int_0^{\pi}2\sin^3\frac{t}{2}dt=-2a\int_0^{\pi}\left(1-\cos^2\frac{t}{2}\right)d\left(\cos\frac{t}{2}\right)=$$

$$=-2a\left(\cos\frac{t}{2}-\frac{1}{3}\cos^3\frac{t}{2}\right)\Big|_0^{\pi}=-2a\left(0-1+\frac{1}{3}\right)=\frac{4a}{3}.$$

Відповідь. $x_c=y_c=\dfrac{4a}{3}.$

3 . Обчислення моментів інерції відносно координатних осей матеріальної дуги із п) 1.

Обчислення моментів інерції кривої із п. 1 відносно координатних осей аналогічно до вирішення цих проблем у випадку плоскої матеріальної фігури чи просторового неоднорідного тіла можна звести до обчислення наступних криволінійних інтегралів першого роду

$$I_x=\int_{AB} y^2\rho(x;y)dl\ ;\ I_y=\int_{AB} x^2\rho(x;y)dl.$$

Якщо в задачі щодо обчислення статичних моментів та моментів інерції відсутня інформація про лінійну щільність, то будемо вважати її рівною одиниці. Якщо ж потрібно обчислити ці фізичні характеристики відносно прямих, які відмінні від координатних осей, то слід зробити таке переміщення кривої та прямої, щоб пряма зайняла положення однієї з координатних осей (при цьому, звичайно, зміниться аналітичне задання кривої).

Рекомендація. Якщо однорідна лінія має центр (вісь, площину) симетрії, то центр ваги лінії лежить в цій точці (на цій осі, площині).

4. Обчислення площ циліндричних поверхонь.

Нехай σ – циліндрична поверхня із твірними паралельними осі Oz, напрямною – кривою AB, що лежить в площині xOy; «знизу» обмежена координатною площиною xOy, а «зверху» – поверхнею, що є графіком функції $z = f(x;y)$, причому $f(x;y) \geq 0$, $\forall(x;y) \in AB$. Потрібно обчислити площу циліндричної поверхні σ .

Якби поверхня σ зверху була обмежена площиною $z = h$, яка є паралельною до площини xOy, то площа σ була б рівна добутку h на довжину кривої AB. Для розв'язання нашої задачі виконаємо τ-поділ дуги AB: $A = A_0$, A_1, …, $A_n = B$, через ці точки проведемо прямі паралельні осі Oz. В результаті такої операції поверхня σ буде розбита на n менших циліндричних поверхонь. Виберемо точки $M_k \in A_k A_{k+1}$, побудуємо площину $z = f(M_k)$. Замінимо k-ту циліндричну поверхню на циліндричну поверхню із напрямною $A_k A_{k+1}$, твірними паралельними осі аплікат, зверху обмежену площиною $z = f(M_k)$, її площа рівна $\Delta S_k = f(M_k)\Delta l_k$, $k = \overline{0;n-1}$. (Нагадаємо, що $\Delta l_k = l_{A_k A_{k+1}}$). За площу поверхні σ приймемо наступну границю: $S(\sigma) = \lim\limits_{\lambda(\tau)\to 0} \sum\limits_{k=0}^{n-1} f(M_k)\Delta l_k$.

Остання сума є інтегральною для функції $f(x;y)$, тому у випадку спрямлюваності дуги AB та неперервності функції $f(x;y)$ одержимо, що

$$S(\sigma) = \int\limits_{AB} f(x;y)dl.$$

Приклад 3. Знайти площу частини поверхні циліндра $x^2 + y^2 = Rx$, що знаходиться всередині сфери $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

Розв'язання. Обидві поверхні симетричні відносно координатних площин xOy та xOz, тому розглянемо тільки ту частину циліндра, що знаходиться в першому октанті ($x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$). Це буде четверта частина циліндричної поверхні, площу якої потрібно обчислити (див. рис. 31). Напрямною для даної циліндричної поверхні є півколо $\left(x - \frac{R}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{R^2}{4}$, $y \geq 0$.

Зверху циліндрична поверхня обмежена верхньою півсферою, що є графіком функції

$$z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}.$$

Отже, $S(\sigma)=4S_1$, де $S_1=\int\limits_{OR}\sqrt{R^2-x^2-y^2}dl$.

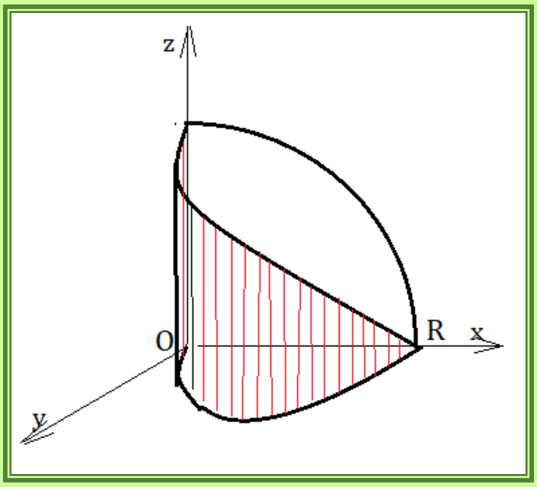


Рис. 31.

Якщо дугу OR задати явно рівнянням в декартових координатах при обчисленні даного криволінійного інтеграла першого роду, то ми одержимо невласний інтеграл другого роду, відшукання якого потягне за собою більшу кількість операцій, аніж у випадку задання дуги рівнянням в полярних координатах. Застосуємо наслідок 3 із §1. Маємо:

$$OR:\rho=R\cos\varphi, 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2},\ z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}=\sqrt{R^2-Rx}=$$

$$=\sqrt{R^2-R^2\cos^2\varphi}=R\sin\varphi.$$

Знайдемо диференціал дуги

$$dl=\sqrt{\rho^2+\rho'^2}d\varphi=\sqrt{R^2\cos^2\varphi+R^2\sin^2\varphi}d\varphi=Rd\varphi.$$

Отже, остаточно отримаємо: $S_1=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}R\sin\varphi\cdot Rd\varphi=R^2$.

Відповідь. $S(\sigma)=4R^2$.

§ 3. КРИВОЛІНІЙНІ ІНТЕГРАЛИ ДРУГОГО РОДУ: ОЗНАЧЕННЯ, ВЛАСТИВОСТІ, ОБЧИСЛЕННЯ

Переходячи до поняття криволінійного інтеграла другого типу, розглянемо деяку механічну задачу. Нехай в кожній точці M площини xOy на тіло одиничної маси діє певна сила $\vec{F}$, величина і напрям якої залежать від точки M. І нехай це тіло під дією сили $\vec{F}$ рухається вздовж дуги AB, потрібно обчислити роботу $\boldsymbol{A}$, яка при цьому виконується.

Якби діюча на тіло сила $\vec{F}$ була сталою по напряму і величині, а переміщення $\overrightarrow{AB}$ відбувалося по відрізку, то, як відомо з курсу фізики, виконана робота була б рівною величині $A=\left|\vec{F}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\cos\varphi=\left(\vec{F},\overrightarrow{AB}\right)$, де φ – кут між векторами сили та переміщення (круглі дужки – знак скалярного добутку).

У випадку непрямолінійного руху і несталої сили наближено значення виконаної роботи будемо обчислювати наступним чином. В криву, що є траєкторією руху тіла, вписуємо ламану із вершинами в точках $A_k, k=\overline{0,n}$, $A_0=A, A_n=B$, і обчислюємо роботу силового поля при русі по цій ламаній.

Крім того, будемо вважати, що при русі по вектору $\overrightarrow{A_kA_{k+1}}$ сила $\vec{F}$ зберігає сталу величину і напрям, а саме такі, які будуть в деякій довільній точці дуги $M_k\in A_kA_{k+1}$. Нехай $A_k(x_k;y_k)$, тоді $\overrightarrow{A_kA_{k+1}}=(\Delta x_k;\Delta y_k)$, $\Delta x_k=x_{k+1}-x_k;\Delta y_k=y_{k+1}-y_k$; нехай $\vec{F}(x;y)=P(x;y)\vec{i}+Q(x;y)\vec{j}=$ $=(P(x;y);Q(x;y)), M_k(\xi_k;\eta_k)$, тоді робота по переміщенню по к-тій ланці ламаної буде рівна скалярному добутку векторів $\overrightarrow{A_kA_{k+1}}$ та $\vec{F}(\xi_k;\eta_k)$, а для всієї роботи матимемо таку наближену рівність

$$\boldsymbol{A}\approx\sum_{k=0}^{n-1}P(\xi_k;\eta_k)\Delta x_k+Q(\xi_k;\eta_k)\Delta y_k .$$

Сукупність точок $A_k(x_k;y_k)$ як і в § 1 назвемо τ-поділом дуги AB, діаметр цього поділу задамо так: $\lambda(\tau)=\max\limits_{0\le k\le n-1}\left\{\left|\Delta x_k\right|;\left|\Delta y_k\right|\right\}$.

Перейшовши в одержаній наближеній рівності до границі при умові прямування до нуля діаметра поділу, одержимо точне значення виконаної роботи.

А тепер будемо вивчати аналогічні границі, абстрагуючись від фізичного змісту функцій двох змінних $P(x;y)$ та $Q(x;y)$.

1^0. Якщо τ – довільний поділ дуги AB, точки $M_k \in A_k A_{k+1}$ $(k=\overline{0;n-1})$, то сума вигляду $\sigma_{fdx}(\tau, M_k)=\sum_{k=0}^{n-1} f(M_k)\Delta x_k$ називається інтегральною сумою за змінною x для функції $f(x;y)$, яка відповідає τ поділу та вибору точок M_k.

2^0. Кажуть, що $I=\lim_{\lambda(\tau)\to 0}\sigma_{fdx}(\tau, M_k)$, якщо справедливе висловлення

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)(\forall\tau:\lambda(\tau)<\delta;\forall M_k\in A_k A_{k+1}, k=\overline{0;n-1})\Rightarrow\left|\sigma_{fdx}(\tau;M_k)-I\right|<\varepsilon.$$

Число I називають криволінійним інтегралом другого роду від функції $f(x;y)$ за змінною x вздовж дуги AB і будемо позначати таким символом $\int\limits_{AB} f(x;y)dx$.

Аналогічно щодо змінної y.

3^0. Якщо τ – довільний поділ дуги AB, точки $M_k \in A_k A_{k+1}$ $(k=\overline{0;n-1})$, то сума вигляду $\sigma_{fdy}(\tau, M_k)=\sum_{k=0}^{n-1} f(M_k)\Delta y_k$ називається інтегральною за змінною у для функції $f(x;y)$, яка відповідає τ поділу та вибору точок M_k.

4^0. Кажуть, що $I=\lim_{\lambda(\tau)\to 0}\sigma_{fdy}(\tau, M_k)$, якщо справедливе висловлення

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)(\forall\tau:\lambda(\tau)<\delta;\forall M_k\in A_k A_{k+1}, k=\overline{0;n-1})\Rightarrow\left|\sigma_{fdy}(\tau;M_k)-I\right|<\varepsilon.$$

А позначення криволінійного інтеграла другого роду за змінною у наступне:

$$\int\limits_{AB} f(x;y)dy.$$

Зауважимо, що при умові існування границь інтегральних сум ці границі не залежать від способу розбиття дуги та способу вибору точок M_k. Якщо існує криволінійний інтеграл в (2) ((4)), то кажуть, що ця функція інтегровна вздовж дуги AB за змінною x (y).

На відміну від криволінійного інтеграла першого роду для криволінійних інтегралів другого роду важливим є вибір на дузі AB початкової та кінцевої точок при тому самому τ-поділі та виборі точок M_k. Для дуги A_kA_{k+1} $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k; \Delta y_k = y_{k+1} - y_k$, а для дуги $A_{k+1}A_k$: $\Delta' x_k = x_k - x_{k+1} = -\Delta x_k; \Delta' y_k = y_k - y_{k+1} = -\Delta y_k$. Тому інтегральні суми при зміні місцями початкової та кінцевої точок змінюють своє значення на протилежне число, отже, маємо

Наслідок 1. Якщо функція $f(x;y)$ інтегровна вздовж дуги AB за змінною x (y), то вона буде інтегровною вздовж дуги BA за змінною x (y), причому $\int\limits_{AB} f(x;y)dx = -\int\limits_{BA} f(x;y)dx$ $\left(\int\limits_{AB} f(x;y)dy = -\int\limits_{BA} f(x;y)dy\right)$.

Для криволінійних інтегралів другого роду залишаються справедливими всі ті властивості, в яких для диференціалу не була важливою невід'ємність, а саме: лінійність та адитивність.

Властивість 1. Якщо функції $f(x;y)$ та $g(x;y)$ інтегровні за змінною x (y) вздовж дуги AB, то при будь-яких дійсних α, β функція $\alpha f(x;y) + \beta g(x;y)$ також буде інтегровною за змінною x (y) вздовж цієї дуги, причому

$$\int\limits_{AB} \left(\alpha f(x;y) + \beta g(x;y)\right)dx = \alpha \int\limits_{AB} f(x;y)dx + \beta \int\limits_{AB} g(x;y)dx.$$

$$\left(\int\limits_{AB} \left(\alpha f(x;y) + \beta g(x;y)\right)dy = \alpha \int\limits_{AB} f(x;y)dy + \beta \int\limits_{AB} g(x;y)dy\right).$$

Властивість 2. Якщо функція $f(x;y)$ інтегровна за змінною x (y) вздовж дуги AB, то для будь-якої точки $C \in AB$ справедлива рівність

$$\int_{AB} f(x;y)dx = \int_{AC} f(x;y)dx + \int_{CB} f(x;y)dx.$$

$$\left(\int_{AB} f(x;y)dy = \int_{AC} f(x;y)dy + \int_{CB} f(x;y)dy \right).$$

Якщо дуга AB така, точки A та B співпадають, то будемо називати її контуром і позначати однією літерою L або γ, а для інтеграла по контуру використовувати наступні позначення $\oint_L f(x;y)dx$; $\oint_L f(x;y)dy$.

При цьому вважається, що рух по контуру відбувається в такому напрямі, що обмежена частина площини, яка охоплена цим контуром, залишається по ліву сторону, цей напрям, крім того, називають напрямом проти годинникової стрілки та додатним.

Властивість 3. Криволінійний інтеграл по контуру не залежить від вибору початкової точки.

Доведення. Нехай A та B – довільні точки контура L. Виберемо додатний напрямок обходу (див. рис. 32).

Якщо точка A є початковою, то контур L можемо подати об'єднанням дуг AmB та BnA.

Нехай функція $f(x;y)$ інтегровна, наприклад, за змінною x вздовж L, тоді згідно властивості 2 $\int_L f(x;y)dx = \int_{AmB} f(x;y)dx + \int_{BnA} f(x;y)dx$.

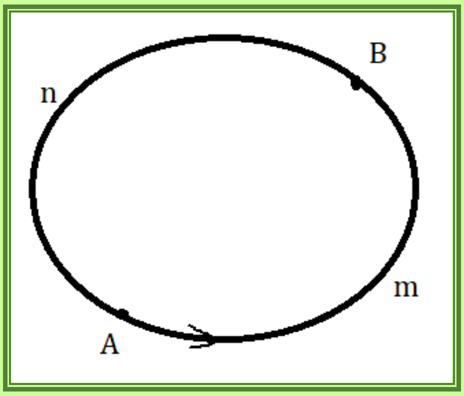


Рис. 32.

Якщо ж на контурі початковою точкою вибрати точку B, то $L = BnA \cup AmB$ і в цьому випадку

$$\int_L f(x;y)dx = \int_{BnA} f(x;y)dx + \int_{AmB} f(x;y)dx .$$

Оскільки від переставляння доданків сума не змінюється, то **властивість доведено.**

Розглянемо способи обчислення криволінійних інтегралів другого роду.

Теорема 1. Якщо гладка дуга AB задана співвідношеннями

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}, \alpha \le t \le \beta , \qquad (1)$$

функція $f(x;y)$ неперервна вздовж AB, то $f(x;y)$ інтегровна вздовж цієї дуги за змінною x (y), причому

$$\int_{AB} f(x;y)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t);\psi(t))\varphi'(t)dt; \qquad (2)$$

$$\int_{AB} f(x;y)dy = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t);\psi(t))\psi'(t)dt. \qquad (3)$$

Доведення. Доведемо першу рівність із даної теореми, оскільки доведення справедливості другої аналогічне. Розглянемо довільний τ-поділ відрізка $[\alpha;\beta]$: $\alpha = t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_n = \beta$, позначимо $A_k(x_k;y_k)$, де $x_k = \varphi(t_k), y_k = \psi(t_k)$. Одержали τ'-поділ дуги AB, при цьому $\lambda(\tau) = \max\limits_{0\le k\le n-1} \Delta t_k$, $\lambda(\tau') = \max\limits_{0\le k\le n-1} \{|\Delta x_k|;|\Delta y_k|\}$. Як і в теоремі 6 § 2 можемо довести, що $\lambda(\tau) \to 0 \Leftrightarrow \lambda(\tau') \to 0$. Виберемо $\forall M_k \in A_k A_{k+1}$, тоді існує $c_k \in [t_k;t_{k+1}]$ таке, що $M_k(\varphi(c_k);\psi(c_k))$. Застосуємо теорему Лагранжа до різниць (самостійно переконайтеся, що функція $\varphi(t)$, $t \in [t_k;t_{k+1}]$,задовольняє цю теорему)

$$\Delta x_k = x_{k+1} - x_k = \varphi(t_{k+1}) - \varphi(t_k) = \varphi'(p_k)\Delta t_k , \ p_k \in [t_k;t_{k+1}], k = \overline{0;n-1}.$$

Тоді інтегральні суми $\sigma_{fdx}(\tau',M_k)$ для τ'-поділу та вибору точок M_k можемо подати в такому вигляді

$$\sigma_{fdx}(\tau',M_k)=\sum_{k=0}^{n-1} f(M_k)\Delta x_k=\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\varphi(c_k);\psi(c_k)\right)\varphi'(p_k)\Delta t_k\,.$$

Або можемо записати ще і так:

$$\sigma_{fdx}(\tau',M_k)=\sum_{k=0}^{n-1} f(\varphi(c_k);\psi(c_k))\varphi'(c_k)\Delta x_k+$$

$$+\sum_{k=0}^{n-1} f(\varphi(c_k);\psi(c_k))\left(\varphi'(p_k)-\varphi'(c_k)\right)\Delta t_k=$$

$$=\sigma_{f(\varphi;\psi)\varphi'}(\tau;c_k)+D. \tag{4}$$

Знайдемо границю при умові $\lambda(\tau')\to 0$ кожного доданку в (4). Щодо першого доданку: оскільки функція $f\left(\varphi(t);\psi(t)\right)\varphi'(t)$ неперервна на сегменті $[\alpha;\beta]$ як результат операцій із неперервними функціями, то границя рівна інтегралу Рімана від цієї функції, тобто

$$\lim_{\lambda(\tau')\to 0}\sigma_{f(\varphi;\psi)\varphi'}(\tau;c_k)=\lim_{\lambda(\tau)\to 0}\sigma_{f(\varphi;\psi)\varphi'}(\tau;c_k)=\int_\alpha^\beta f\left(\varphi(t);\psi(t)\right)\varphi'(t)dt\,.$$

А для доданку D справедлива оцінка $0\le|D|\le\sum_{k=0}^{n-1} M\omega_k(\varphi')\Delta t_k$, де $M=\max_{\alpha\le t\le\beta}\left|f(\varphi(t);\psi(t))\right|$, $\omega_k(\varphi')$ – коливання функції $\varphi'(t)$ на сегменті $[t_k;t_{k+1}]$. Функція $\varphi'(t)$ за умовою теореми неперервна, тому інтегровна на проміжку $[\alpha;\beta]$. За критерієм інтегровності $\lim\limits_{\lambda(\tau)\to 0}\sum_{k=0}^{n-1}\omega_k(\varphi')\Delta t_k=0$, тому для проміжної величини D буде виконуватися рівність $\lim\limits_{\lambda(\tau)\to 0} D=0$. Отже, якщо в (4) перейдемо до границі при умові $\lambda(\tau')\to 0$, то одержимо рівність (2). Як було зауважено на початку доведення цієї теореми, рівність (3) доводиться аналогічно. **Теорема доведена.**

Якщо вздовж дуги AB задані дві функції двох змінних $P(x;\,y)$ та $Q(x;y)$ і існують інтеграли $\int\limits_{AB} P(x;y)dx$, $\int\limits_{AB} Q(x;y)dy$, то їх суму називають криволінійним інтегралом «загального вигляду» і записують

$\int\limits_{AB} P(x;y)dx + Q(x;y)dy = \int\limits_{AB} P(x;y)dx + \int\limits_{AB} Q(x;y)dy$ (відсутність дужок у лівому підінтегральному виразі даної рівності не є помилкою, таким є загальноприйнятий правопис криволінійних інтегралів другого роду).

Із теореми 1 випливає ряд тверджень.

Наслідок 1. Якщо гладка дуга AB задана співвідношеннями (1), функції $P(x;y)$ та $Q(x;y)$ неперервні вздовж AB, то справедлива рівність

$$\int\limits_{AB} P(x;y)dx + Q(x;y)dy = \int\limits_{\alpha}^{\beta}\Big(P\big(\varphi(t);\psi(t)\big)\varphi'(t) + Q\big(\varphi(t);\psi(t)\big)\psi'(t)\Big)dt.$$

Наслідок 2. Якщо дуга AB є графіком функції $y=\psi(x)$, $x\in[a;b]$, яка має неперервну похідну, функції $P(x;y)$ та $Q(x;y)$ неперервні вздовж AB, то справедлива рівність

$$\int\limits_{AB} P(x;y)dx + Q(x;y)dy = \int\limits_{a}^{b}\Big(P\big(x;\psi(x)\big) + Q\big(x;\psi(x)\big)\psi'(x)\Big)dx.$$

Наслідок 3. Якщо дуга AB є графіком функції $x=\varphi(y)$, $y\in[a;b]$, яка має неперервну похідну, функції $P(x;y)$ та $Q(x;y)$ неперервні вздовж AB, то справедлива рівність

$$\int\limits_{AB} P(x;y)dx + Q(x;y)dy = \int\limits_{a}^{b}\Big(P\big(\varphi(y);y\big)\varphi'(y) + Q\big(\varphi(y);y\big)\Big)dy.$$

Наслідок 4. Якщо AB – це відрізок, паралельний осі Ox, то для будь-якої неперервної вздовж AB функції $f(x;y)$ $\int\limits_{AB} f(x;y)dy = 0$.

Якщо AB – це відрізок, паралельний осі Oy, то для будь-якої неперервної вздовж AB функції $f(x;y)$ $\int\limits_{AB} f(x;y)dx = 0$.

Приклад 1. Обчислити криволінійний інтеграл 2-го роду $I = \int\limits_{AB}\left(x^2 - 2xy\right)dx + \left(y^2 - 2xy\right)dy$, де AB – парабола $y = x^2$ $(-1 \le x \le 1)$.

Розв'язання. Даний криволінійний інтеграл зводиться до визначеного інтеграла згідно наслідку 2. Підставимо в підінтегральний вираз $y = x^2$, $dy = 2xdx$, одержимо:

$$I = \int_{-1}^{1} \left(x^2 - 2x^3 + (x^4 - 2x^3)2x \right) dx = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} - \frac{4x^5}{5} \right) \Bigg|_{-1}^{1} = \frac{2}{3} - \frac{8}{5} = -\frac{14}{15}.$$

Відповідь. $-\frac{14}{15}$.

Приклад 2. Обчислити криволінійний інтеграл 2-го роду $I = \int_L \left(x^2 - 2xy \right) dx + \left(y^2 - 2xy \right) dy$, де L – еліпс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, рух по якому здійснюється проти годинникової стрілки.

Розв'язання. Оскільки весь еліпс не є графіком однієї функції $y = \psi(x)$, $x \in [a;b]$, як і не є графіком однієї функції $x = \varphi(y)$, $y \in [a;b]$, то задля оптимізації процесу обчислень задамо параметрично еліпс: $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}, 0 \le t \le 2\pi$, і застосуємо наслідок 1. Перетворимо підінтегральний вираз:

$$(x + y)dx + (x - y)dy = (acost + b\sin t)d(a\cos t) + (a\cos t - b\sin t)d(b\sin t) =$$

$$= (-a^2 \sin t \cos t - ab\sin^2 t + ab\cos^2 t - b^2 \sin t \cos t)dt =$$

$$= \left(ab\cos 2t - \frac{a^2 + b^2}{2} \sin 2t \right) dt.$$

Отримаємо:

$$I = \int_0^{2\pi} \left(ab\cos 2t - \frac{a^2 + b^2}{2} \sin 2t \right) dt = \left(\frac{1}{2} ab\sin 2t + \frac{a^2 + b^2}{4} \cos 2t \right) \Bigg|_0^{2\pi} = 0.$$

Відповідь. 0.

Якщо гладка дуга AB є просторовою і задається параметрично співвідношеннями вигляду $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), \alpha \le t \le \beta; \\ z = z(t) \end{cases}$ функція $f(x;y;z)$ неперервна вздовж цієї дуги, то аналогічно до означень 1-4 можемо ввести поняття криволінійного інтеграла другого роду вздовж дуги AB від функції $f(x;y;z)$ і довести справедливість рівностей

$$\int\limits_{AB} f(x;y;z)dx = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x(t);y(t);z(t))x'(t)dt;$$

$$\int\limits_{AB} f(x;y;z)dy = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x(t);y(t);z(t))y'(t)dt;$$

$$\int\limits_{AB} f(x;y;z)dz = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x(t);y(t);z(t))z'(t)dt\ .$$

Приклад 3. Обчислити криволінійний інтеграл $I = \int\limits_{AB} \left(y^2 - z^2\right)dx + 2yzdy - x^2dz$ вздовж просторової кривої $AB: x = t, y = t^2, z = t^3 \left(0 \le t \le 1\right)$, якщо параметр змінюється в напрямі зростання.

Розв'язання. Зведемо підінтегральний вираз до диференціала від змінної t

$$\left(y^2 - z^2\right)dx + 2yzdy - x^2dz = \left(t^4 - t^6\right)dt + 2t^5 \cdot 2tdt - t^4 \cdot 3t^2dt = \left(3t^6 - 2t^4\right)dt.$$

Таким чином, одержимо

$$I = \int\limits_0^1 \left(3t^6 - 2t^4\right)dt = \left(\frac{3}{7}t^7 - \frac{2}{5}t^5\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{35}.$$

Відповідь. $\frac{1}{35}$.

§ 4. ЗВ'ЯЗОК МІЖ ПОДВІЙНИМИ ІНТЕГРАЛАМИ ТА КРИВОЛІНІЙНИМИ ІНТЕГРАЛАМИ ДРУГОГО РОДУ

Назвемо фігуру D на координатній площині простою областю, якщо вона є одночасно криволінійною областю першого та другого типів. Просту область можемо зобразити так:

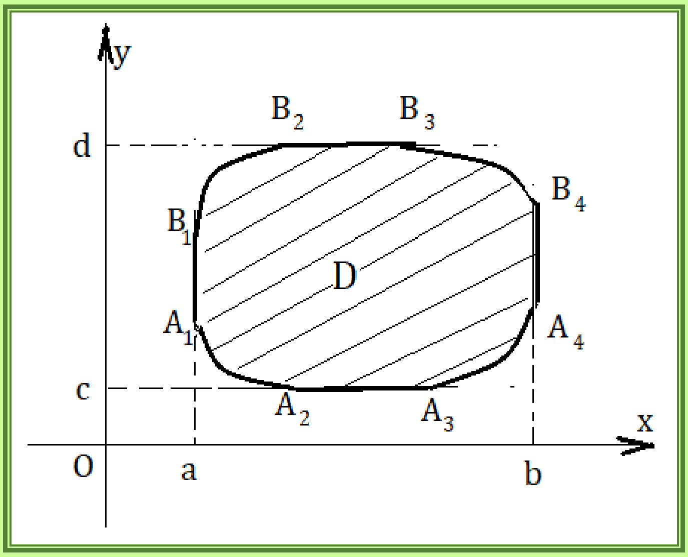


Рис. 33.

1) як криволінійна область першого типу D задовольняє обмеженням $a \le x \le b; \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)$, де дуга $A_1A_2A_3A_4$ є графіком функції $y = \varphi_1(x)$, а дуга $B_1B_2B_3B_4$ – графік функції $y = \varphi_2(x)$, $x \in [a;b]$;
2) як криволінійна область другого типу D задовольняє обмеженням $c \le y \le d; \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y)$, де дуга $A_2A_1B_1B_2$ є графіком функції $x = \psi_1(y)$, а дуга $A_3A_4B_4B_3$ – графік функції $x = \psi_2(y)$, $y \in [c;d]$.

Тоді бачимо, що межею області D є контур L, який можемо подати двома способами у вигляді об'єднання таких дуг:

$$L = A_1A_2A_3A_4 \cup A_4B_4 \cup B_4B_3B_2B_1 \cup B_1A_1$$

або

$$L = A_2A_1B_1B_2 \cup B_2B_2 \cup B_3B_4A_4A_3 \cup A_3A_2,$$

причому дуги A_2A_3 та B_3B_2 це відрізки, що паралельні осі *Ox*, а дуги B_1A_1 та A_4B_4 – паралельні до осі *Oy* відрізки.

Справедливе таке твердження.

Теорема 1. Нехай L – межа простої області D, в якій функції $P(x;y), Q(x;y), P'_y(x;y), Q'_x(x;y)$ неперервні, тоді

$$\oint_L P(x;y)dx + Q(x;y)dy = \iint_D \left(Q'_x(x;y) - P'_y(x;y)\right)dxdy. \qquad (1)$$

Доведення. Нехай проста область D розглядається як криволінійна область першого типу, тоді згідно правил обчислення подвійних інтегралів через повторні будемо мати, що

$$\iint_D P'_y(x;y)dxdy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} P'_y(x;y)dy = \int_a^b \left(P(x;y)\Big|_{y=\varphi_1(x)}^{y=\varphi_2(x)}\right)dx =$$

$$= \int_a^b P(x;\varphi_2(x))dx - \int_a^b P(x;\varphi_1(x))dx. \qquad (2)$$

За правилом обчислення криволінійних інтегралів через інтеграли Рімана (див. наслідок 2 із § 3)

$$\int_a^b P(x;\varphi_2(x))dx = \int_{B_1B_2B_3B_4} P(x;y)dx = -\int_{B_4B_3B_2B_1} P(x;y)dx, \qquad (3)$$

$$\int_a^b P(x;\varphi_1(x))dx = \int_{A_1A_2A_3A_4} P(x;y)dx. \qquad (4)$$

Оскільки відрізки $[B_1A_1]$ та $[A_4B_4]$ паралельні до осі Oy, то згідно з наслідком 4 із § 3

$$\int_{B_1A_1} P(x;y)dx = 0, \quad \int_{A_4B_4} P(x;y)dx = 0. \qquad (5)$$

Застосуємо властивість адитивності до криволінійного інтеграла від функції $P(x;y)$ за змінною х по контуру L і одержимо наступну рівність

$$\oint_L P(x;y)dx = \int_{A_1A_2A_3A_4} P(x;y)dx + \int_{A_4B_4} P(x;y)dx + \int_{B_4B_3B_2B_1} P(x;y)dx + \int_{B_1A_1} P(x;y)dx.$$

Враховуючи співвідношення (3)-(5), рівність (2) можемо записати в такому вигляді

$$\oint_L P(x;y)dx = \int_a^b P(x;\varphi_1(x))dx - \int_a^b P(x;\varphi_2(x))dx = -\iint_D P'_y(x;y)dxdy. \qquad (6)$$

Якщо розглядати область D як криволінійну другого типу, то подвійний інтеграл по ній рівний наступному повторному

$$\iint_D Q'_x(x;y)dxdy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} Q'_x(x;y)dx = \int_c^d \left(Q(x;y)\Big|_{x=\psi_1(y)}^{x=\psi_2(y)} \right) dy =$$

$$= \int_c^d Q(\psi_2(y);y)dy - \int_c^d Q(\psi_1(y);y)dy. \qquad (7)$$

Аналогами рівностей (3)-(5) для криволінійних інтегралів від функції $Q(x;y)$ за змінною у згідно наслідків 2 та 4 із § 3 будуть такі співвідношення:

$$\int_c^d Q(\psi_2(y);y)dy = \int_{A_3A_4B_4B_3} Q(x;y)dy\,,$$

$$-\int_c^d Q(\psi_1(y);y)dy = -\int_{A_2A_1B_1B_2} Q(x;y)dy = \int_{B_2B_1A_1A_2} Q(x;y)dy\,,$$

$$\int_{A_2A_3} Q(x;y)dy = 0\,, \quad \int_{B_3B_2} Q(x;y)dy = 0.$$

Далі застосуємо властивість адитивності до криволінійного інтеграла від функції $Q(x;y)$ за змінною у по контуру L і одержимо наступну рівність

$$\oint_L Q(x;y)dy = \int_{A_3A_4B_4B_3} Q(x;y)dy + \int_{B_3B_2} Q(x;y)dy + \int_{B_2B_1A_1A_2} Q(x;y)dy + \int_{A_2A_3} P(x;y)dy.$$

Тому рівність (7) можемо подати в такому вигляді

$$\oint_L Q(x;y)dy = \int_c^d Q(\psi_2(y);y)dy - \int_c^d Q(\psi_1(y);y)dy = \iint_D Q'_x(x;y)dxdy. \qquad (8)$$

Якщо рівності (6) та (8) додати, то одержимо (1). **Теорему доведено.**

Рівність (1) називають **формулою Гріна**.

Зауваження. Формула Гріна справедлива і для довільних областей, які можемо подати у вигляді скінченного об’єднання простих областей.

Приклад 1. Застосувавши формулу Гріна, обчислити $I=\oint\limits_C xy^2dy-x^2ydx$, де C – коло $x^2+y^2=a^2$.

Розв’язання. Позначимо через D замкнену множину $x^2+y^2\le a^2$.

Оскільки $P(x;y)=-x^2y$ та $Q(x;y)=xy^2$, то

$$Q'_x(x;y)-P'_y(x;y)=y^2-(-x^2)=x^2+y^2.$$

Тому за формулою Гріна $I=\iint\limits_D\left(x^2+y^2\right)dxdy$. При обчисленні даного подвійного інтеграла перейдемо від декартових до полярних координат (див. главу I, § 4, співвідношення (6)):

$$I=\iint\limits_F\left(\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi\right)\rho d\varphi d\rho=\iint\limits_F\rho^3d\varphi d\rho,$$

де F як криволінійний сектор задовольняє обмеженням: $0\le\varphi\le2\pi, 0\le\rho\le a$. Згідно зауваження 3 із § 4 глави I матимемо:

$$I=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^a\rho^3d\rho=2\pi\cdot\frac{a^4}{4}=\frac{\pi a^4}{2}.$$

Відповідь. $\frac{\pi a^4}{2}$.

Приклад 2. Нехай L – межа області D. Довести, що

$$S(D)=\oint\limits_L xdy=-\oint\limits_L ydx=\frac{1}{2}\oint\limits_L xdy-ydx. \qquad (9)$$

Розв’язання. Нехай $Q(x;y)=x, P(x;y)=0$, тоді $Q'_x(x;y)-P'_y(x;y)=1$.

Далі застосуємо формулу Гріна і одержимо: $\oint\limits_L xdy=\iint\limits_D dxdy=S(D)$.

Якщо ж вибрати $Q(x;y)=0, P(x;y)=-y$, то знову $Q'_x(x;y)-P'_y(x;y)=1$, тому $-\oint\limits_L ydx=\iint\limits_D dxdy=S(D)$.

Якщо додамо дві доведені рівності, то з результату випливатиме, що остання формула в (9) також вірна.

§ 5. УМОВИ НЕЗАЛЕЖНОСТІ КРИВОЛІНІЙНОГО ІНТЕГРАЛА ДРУГОГО РОДУ ВІД ШЛЯХУ ІНТЕГРУВАННЯ

Розпочнемо даний параграф із такого завдання:

Приклад 1. Обчислити інтеграл $I=\int\limits_{AB} x^2ydx+\frac{x^3}{3}dy$ по дузі AB, якщо: 1) AB це відрізок прямої $y=x, 0\le x\le 1$; 2) AB – дуга параболи $y=x^2, 0\le x\le 1$.

Розв'язання. В обох випадках точки А та В мають однакові координати: $A(0;0)$, $B(1;1)$.

Якщо AB – відрізок прямої, то згідно наслідку 2 § 3

$$I=\int\limits_0^1 x^2xdx+\frac{x^3}{3}dx=\int\limits_0^1\frac{4}{3}x^3dx=\frac{4}{3}\cdot\frac{x^4}{4}\Big|_0^1=\frac{1}{3}.$$

Якщо ж AB – дуга параболи $y=x^2$, то за тим же наслідком 2 § 3 будемо мати $I=\int\limits_0^1 x^2x^2dx+\frac{x^3}{3}2xdx=\int\limits_0^1\frac{5}{3}x^4dx=\frac{5}{3}\cdot\frac{x^5}{5}\Big|_0^1=\frac{1}{3}.$

При обчисленні даного інтеграла по різних дугах, що з'єднують ті самі точки, одержали однакові відповіді. Чи випадково це? Виявляється, що ні: для певного виду виразів $P(x;y)dx+Q(x;y)dy$ значення інтегралу від них залежить лише від початкової та кінцевої точок дуги інтегрування.

Нехай *D* – область у площині *xOy*, $P(x;y)$, $Q(x;y)$ – неперервні функції в *D*. Якщо AB – спрямлювана крива, яка цілком лежить у *D*, то криволінійний інтеграл

$$\int\limits_{AB} P(x;y)+Q(x;y)dy \qquad (1)$$

по такій кривій існує.

1^0. Кажуть, що інтеграл (1) не залежить від шляху інтегрування в області *D*, якщо значення цього інтеграла залежить від положення точок *A* та *B*, але не залежить від форми дуги $AB\subset D$, при цьому для такого інтеграла використовують наступне позначення

$$\int\limits_{A(x_1;y_1)}^{B(x_2;y_2)} P(x;y)dx + Q(x;y)dy = \int\limits_{(x_1;y_1)}^{(x_2;y_2)} P(x;y)dx + Q(x;y)dy.$$

Основне питання, що цікавитиме нас тут, полягає в тому, щоб з'ясувати умови, які слід накласти на функції $P(x;y)$ *і* $Q(x;y)$, при яких криволінійний інтеграл вигляду (1) не буде залежати від шляху інтегрування в області D.

Для отримання конструктивних умов розглянемо кілька проміжних тверджень.

Теорема 1 (перший критерій незалежності криволінійного інтеграла від шляху інтегрування). Для того, щоб криволінійний інтеграл (1) не залежав в області D від шляху інтегрування, необхідно та досить, щоб для будь-якої замкненої кривої γ, що цілком лежить в області D, виконувалась рівність

$$\int\limits_{\gamma} P(x;y) + Q(x;y)dy = 0. \qquad (2)$$

Доведення. Якщо довільні точки A та B області D з'єднати дугами AmB та AnB, що цілком належать D, то отримаємо замкнену криву $AmB \cup BnA = \gamma$.

І навпаки, кожен контур γ можемо подати таким об'єднанням (див. рис. 32).

Якщо інтеграл (1) не залежить від шляху інтегрування, то для будь-якої замкненої кривої γ, що цілком лежить в області D, і $\forall A, B \in \gamma$, в силу адитивності та наслідку 1 § 3, будемо мати:

$$\int\limits_{\gamma} P(x;y) + Q(x;y)dy = \int\limits_{AmB} P(x;y)dx + Q(x;y)dy + \int\limits_{BnA} P(x;y)dx + Q(x;y)dy =$$

$$= \int\limits_{AmB} P(x;y)dx + Q(x;y)dy - \int\limits_{AnB} P(x;y)dx + Q(x;y)dy = 0.$$

Якщо ж має місце рівність (2), то з приведених раніше співвідношень слідуватиме, що інтеграли по дугах AmB та AnB рівні, тобто інтеграл (1) в області не залежить від шляху інтегрування. **Теорему доведено.**

Теорема 2 (другий критерій). Нехай функції $P(x;y), Q(x;y)$, $P'_y(x;y)$, $Q'_x(x;y)$ неперервні в області *D*. Для того, щоб криволінійний інтеграл (1) не залежав в області *D* від шляху інтегрування, необхідно та досить, щоб підінтегральний вираз $P(x;y)dx+Q(x;y)dy$ був повним диференціалом деякої функції $u(x;y)$, визначеної в області *D*, тобто

$$du(x;y)=P(x;y)dx+Q(x;y)dy. \qquad (3)$$

Доведення. *Необхідність*. Нехай інтеграл (1) в області *D* не залежить від шляху інтегрування. Розглянемо функцію $u(x;y)$, що задана в цій області наступним співвідношенням:

$$u(x_0;y_0)=\int_{(a;b)}^{(x_0;y_0)} P(x;y)dx+Q(x;y)dy, \qquad (4)$$

де точка $A(a;b)$ – деяка фіксована, а $B(x_0;y_0)$ – біжуча точка області.

Покажемо, що дана функція є шуканою, тобто

$$u'_x(x_0;y_0)=P(x_0;y_0);\ u'_y(x_0;y_0)=Q(x_0;y_0). \qquad (5)$$

Позначимо через *C* точку з координатами $(x_0+\Delta x;y_0)$ і знайдемо частинний приріст за змінною *x* функції $u(x;y)$ в точці *B* (див. рис. 34)

Маємо:

$$\Delta u(x_0;y_0)=u(x_0+\Delta x;y_0)-u(x_0;y_0)=\int_{AC} P(x;y)dx+Q(x;y)dy=$$

$$=\int_{AB} Pdx+Qdy+\int_{[BC]} Pdx+Qdy-\int_{AB} Pdx+Qdy=\int_{[BC]} Pdx+Qdy.$$

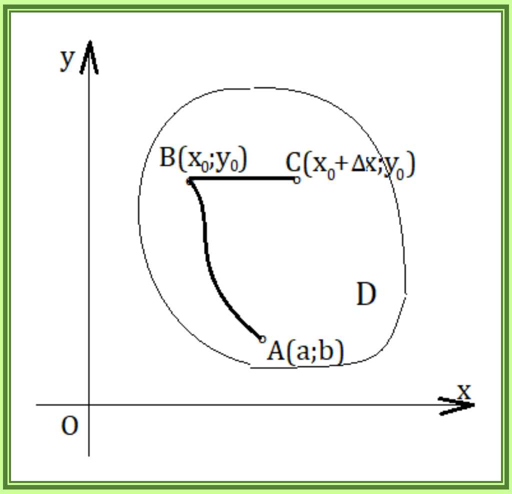


Рис. 34.

Оскільки відрізок $[BC]$ лежить на прямій, паралельній осі Ox, то $\int\limits_{[BC]} Qdy = 0$ і, таким чином, $\Delta u(x_0; y_0) = \int\limits_{[BC]} Pdx = \int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} P(x; y_0)dx$.

За теоремою про середнє для визначеного інтеграла від неперервної функції будемо мати:

$$\int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} P(x; y_0)dx = P(c; y_0)\Delta x, \quad x_0 \le c \le x_0 + \Delta x.$$

Тому $\dfrac{\Delta u(x_0; y_0)}{\Delta x} = P(c; y_0)$. Якщо $\Delta x \to 0$, то $c \to x_0$. Внаслідок неперервності функції $P(x; y)$ в області D права частина останньої рівності при $\Delta x \to 0$ прямує до $P(x_0; y_0)$, отже, і ліва частина цієї рівності при $\Delta x \to 0$ має границю, що дорівнює $P(x_0; y_0)$, тобто існує частинна похідна $u'_x(x_0; y_0)$ і правильна рівність $u'_x(x_0; y_0) = P(x_0; y_0)$. Друга з рівностей (5) доводиться аналогічно.

Достатність. Нехай підінтегральний вираз в (1) є повним диференціалом деякої функції двох змінних $u(x; y)$, тобто виконуються рівності (5) в кожній точці області D. Тоді $P'_y(x; y) = \left(u'_x(x; y)\right)'_y = u''_{xy}(x; y)$, а $Q'_x(x; y) = \left(u'_y(x; y)\right)'_x = u''_{yx}(x; y)$, причому обидві мішані похідні за умовою теореми є неперервними функціями. Отже, в кожній точці області D ці мішані похідні між собою рівні, звідки $P'_y(x; y) = Q'_x(x; y)$, $\forall(x; y) \in D$.

Нехай γ – довільний контур, що цілком лежить в області D і є межею області D_1, тоді за формулою Гріна (див. теорему 1 із § 4)

$$\oint\limits_{\gamma} P(x; y)dx + Q(x; y)dy = \iint\limits_{D_1} \left(Q'_x(x; y) - P'_y(x; y)\right)dxdy = \iint\limits_{D_1} 0dxdy = 0. \qquad (6)$$

В такому випадку згідно теореми 1 в області криволінійний інтеграл не залежить від шляху інтегрування. **Теорему доведено.**

Теорема 3 (третій критерій). Нехай функції $P(x; y), Q(x; y), P'_y(x; y)$, $Q'_x(x; y)$ неперервні в області D. Для того, щоб криволінійний інтеграл (1) не залежав в області D від шляху інтегрування, необхідно та досить, щоб в кожній точці області D виконувалась рівність

$$P'_y(x;y) = Q'_x(x;y). \qquad (7)$$

Доведення. *Необхідність*. Якщо інтеграл (1) не залежить від шляху інтегрування в області D, то як випливає із доведення достатності теореми 2 рівність (7) має місце в кожній точці цієї області.

Достатність. Нехай для $\forall(x;y)\in D$ рівність (7) виконується. Тоді справедливими будуть співвідношення (6), звідки слідуватиме незалежність інтеграла (1) від шляху інтегрування. **Теорема доведена.**

Рівність (7) і є тими конструктивними умовами незалежності криволінійного інтеграла від шляху інтегрування, які достатньо просто перевіряються.

Рекомендація 1. Якщо криволінійний інтеграл (1) не залежить від шляху інтегрування, то при обчисленні такого інтеграла лінію, що з'єднує точки A та B, доцільно обирати як ламану із двох відрізків, паралельних координатним осям.

Рекомендація 2. При виборі дуги, що з'єднує початкову та кінцеву точки, слід бути уважним, щоб забезпечувати неперервність підінтегральних функцій вздовж дуги.

Приклад 2. Обчислити $I = \int\limits_{(-2;-1)}^{(3;0)} (x^4 + 4xy^3)dx + (6x^2y^2 - 5y^4)dy$.

Розв'язання. Маємо $P(x;y) = x^4 + 4xy^3$; $Q(x;y) = 6x^2y^2 - 5y^4$, тоді $P'_y = 12xy^2$; $Q'_x = 12xy^2$. Оскільки $P'_y = Q'_x$, то шлях інтегрування може бути довільним. Виберемо ламану ACB, де $A(-2;-1), C(-2;0), B(3;0)$. (див. рис. 35).

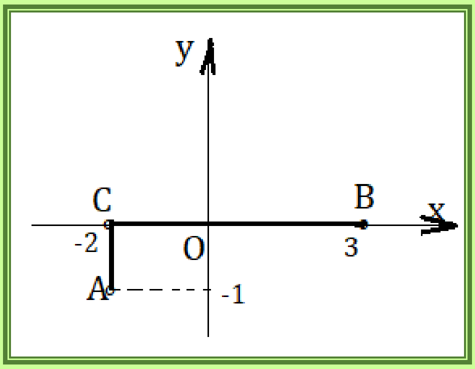


Рис. 35.

Маємо: $I = \int\limits_{(-2;-1)}^{(3;0)} Pdx + Qdy = \int\limits_{[AC]} Pdx + Qdy + \int\limits_{[CB]} Pdx + Qdy.$

Оскільки $[AC] \parallel Oy$, а $[CB] \parallel Ox$, то згідно наслідку 4 із § 3 $\int\limits_{[AC]} Pdx = 0$; $\int\limits_{[CB]} Qdy = 0$.

Тому остаточно одержимо, що $I = \int\limits_{[AC]} Qdy + \int\limits_{[CB]} Pdx$.

Відрізок $[AC]$ задається умовами: $x = -2, -1 \le y \le 0$, тому згідно наслідку 3 із § 3

$$\int\limits_{[AC]} Qdy = \int\limits_{-1}^{0} Q(-2;y)dy = \int\limits_{-1}^{0} (24y^2 - 5y^4)dy = \left(8y^3 - y^5\right)\Big|_{-1}^{0} = 8 - 1 = 7.$$

А відрізок $[CB]$ задається умовами: $y = 0, -2 \le x \le 3$, тому згідно наслідку 2 із § 3

$$\int\limits_{[CB]} Pdx = \int\limits_{-2}^{3} P(x;0)dx = \int\limits_{-2}^{3} x^4 dx = \frac{x^5}{5}\Big|_{-2}^{3} = 55.$$ Отже, $I = 7 + 55 = 62$.

Відповідь. 62

§ 6. ЗАСТОСУВАННЯ КРИВОЛІНІЙНИХ ІНТЕГРАЛІВ ДРУГОГО РОДУ

1. Обчислення роботи при переміщенні тіла одиничною масою під дією змінного силового поля вздовж дуги.

Нехай в кожній точці деякої області в площині xOy на тіло одиничної маси діє змінна сила $\vec{F}(x;y) = P(x;y)\vec{i} + Q(x;y)\vec{j} = (P(x;y);Q(x;y))$, під дією якої відбувається переміщення вздовж кривої AB. Якщо функції $P(x;y), Q(x;y)$ неперервні вздовж дуги AB, а сама дуга є гладкою, то виконувана при цьому робота як границя відповідних інтегральних сум буде дорівнювати наступному криволінійному інтегралу

$$\text{A} = \int\limits_{AB} P(x;y)dx + Q(x;y)dy.$$

Приклад 1. Знайти роботу сили $\vec{F} = y\vec{i} - x\vec{j}$ вздовж верхньої половини еліпса $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ $(y \ge 0)$ від точки $M(a;0)$ до точки $N(-a;0)$.

Розв'язання. Траєкторія руху має такий вигляд (див. рис. 36):

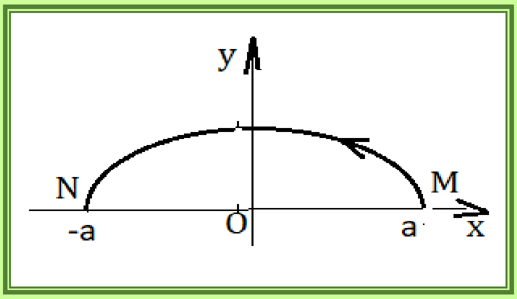


Рис. 36.

Роботу силового поля вздовж дуги знаходимо за формулою (1):

$$\mathrm{A} = \int\limits_{MN} ydx - xdy .$$

Для обчислення даного інтеграла задамо дугу MN параметрично: $\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t, \end{cases}$ $0 \le t \le \pi$.

Тоді згідно теореми 1 § 3

$$A = \int\limits_0^\pi (b\sin t \cdot (-a\sin t) - a\cos t \cdot b\cos t)dt = -ab\int\limits_0^\pi (\sin^2 t + \cos^2 t)dt = -\pi ab.$$

Відповідь. $-\pi ab$.

2. Обчислення площі плоскої фігури.

Якщо область D обмежена контуром *L*, то площу даної області можемо знайти за допомогою одного із криволінійних інтегралів (див. приклад 2 в § 4)

$$S(D) = \oint\limits_L xdy = -\oint\limits_L ydx = \frac{1}{2}\oint\limits_L xdy - ydx ,$$

де обхід контура обирається проти годинникової стрілки.

Приклад 2. Знайти площу фігури, що обмежена астроїдою $\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t, \end{cases}$ $0 \le t \le 2\pi$.

Розв'язання. Площу фігури, що обмежена замкненим контуром L, обчислимо за формулою $S(D)=\frac{1}{2}\oint\limits_{L} xdy-ydx$. Підставляючи значення параметра t рівним 0; $\frac{\pi}{2}$; π; $\frac{3\pi}{2}$ переконуємося, що при зміні параметра від 0 до 2π обхід по контуру відбувається проти годинникової стрілки, тому

$$S(D)=\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{2\pi}(acos^3t(a\sin^3t)'-a\sin^3t(a\cos^3t)')dt=$$

$$=\frac{1}{2}a^2\int\limits_{0}^{2\pi}(\cos^3t\cdot 3\sin^2t\cos t+\sin^3t\cdot 3\cos^2t\sin t)dt=$$

$$=\frac{3}{2}a^2\int\limits_{0}^{2\pi}(\cos^4t\cdot\sin^2t+\cos^2t\cdot\sin^4t)dt=\frac{3}{2}a^2\int\limits_{0}^{2\pi}\sin^2t\cos^2tdt=$$

$$=\frac{3}{8}a^2\int\limits_{0}^{2\pi}\sin^2 2tdt=\frac{3}{8}a^2\int\limits_{0}^{2\pi}\frac{1-\cos 4t}{2}dt=\frac{3}{8}a^2\left(t-\frac{1}{4}\sin 4t\right)\Bigg|_{0}^{2\pi}=\frac{3\pi a^2}{8}.$$

Відповідь. $\frac{3\pi a^2}{8}$.

3. Відновлення функції за її повним диференціалом.

Якщо вираз $P(x;y)dx+Q(x;y)dy$ є повним диференціалом деякої функції (первісної) $u(x;y)$, тобто $du(x;y)=P(x;y)dx+Q(x;y)dy$, то криволінійний інтеграл $\int\limits_{AB}P(x;y)dx+Q(x;y)dy$ не залежить від шляху інтегрування AB і справедлива рівність (див. доведення теореми 2 § 5)

$$\int\limits_{AB}P(x;y)dx+Q(x;y)dy=\int\limits_{(x_1;y_1)}^{(x_2;y_2)}P(x;y)dx+Q(x;y)dy=u(x_2;y_2)-u(x_1;y_1),$$

де $A(x_1;y_1)$ – початкова, а $B(x_2;y_2)$ – кінцева точка шляху інтегрування.

Якщо крива інтегрування AB цілком лежить в деякій однозв'язній області D, функції P,Q,P'_y,Q'_x неперервні в цій області, то необхідною та достатньою умовою існування первісної $u(x;y)$ є тотожне виконання в цій області рівності $P'_y(x;y)=Q'_x(x;y)$. При цьому функцію $u(x;y)$ можна знайти за формулою

$$u(x;y)=\int_{x_0}^{x} P(t;y_0)dt+\int_{y_0}^{y} Q(x;t)dt\,, \tag{8}$$

або

$$u(x;y)=\int_{y_0}^{y} Q(x_0;t)dt+\int_{x_0}^{x} P(t;y)dt\,. \tag{8'}$$

Зауваження. Точку $(x_0;y_0)$ можна вибирати довільно, але так, щоб функції $P(x;y)$, $Q(x;y)$ були в ній та на шляху інтегрування неперервними. Запис $P(t;y_0)$ означає, що у функцію підставляють t замість x і y_0 замість y. Запис $Q(x;t)$ означає, що у функцію $Q(x;y)$ підставляють t замість y, а змінну x залишають без змін і під час інтегрування вважають сталою.

Приклад 3. Перевірити, чи є вираз $\left(3x^2y+\dfrac{1}{y}\right)dx+\left(x^3-\dfrac{x}{y^2}\right)dy$ повним диференціалом функції $u(x;y)$ і якщо це так, то знайти цю функцію.

Розв'язання. Переконаємося в тому, що вираз $\left(3x^2y+\dfrac{1}{y}\right)dx+\left(x^3-\dfrac{x}{y^2}\right)dy$ є повним диференціалом деякої функції двох змінних:

$$P(x;y)=3x^2y+\frac{1}{y}\,;\,Q(x;y)=x^3-\frac{x}{y^2}.$$

Маємо: $P'_y=3x^2-\dfrac{1}{y^2}$; $Q'_x=3x^2-\dfrac{1}{y^2}$. Отже, $P'_y(x;y)=Q'_x(x;y)$.

Тому за формулою (8) функцію $u(x;y)$ відновимо, вибравши за початкову точку (0; 1):

$$u(x;y)=\int_0^x P(t;1)dt+\int_1^y Q(x;t)dt+C=\int_0^x (3t^2+1)dt+\int_1^y\left(x^3-\frac{x}{t^2}\right)dt=$$

$$=\left(t^3+t\right)\Big|_0^x+\left(x^3t+\frac{x}{t}\right)\Big|_1^y=x^3+x+x^3y+\frac{x}{y}-x^3-x+C=x^3y+\frac{x}{y}+C\,.$$

Відповідь. $x^3y+\dfrac{x}{y}+C$.

ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ
ТА ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ

1. Які однакові властивості мають криволінійні інтеграли першого та другого роду?
2. Які властивості криволінійних інтегралів першого роду не притаманні криволінійним інтегралам другого роду?
3. Чи завжди робота по переміщенню вздовж контура під дією змінної сили рівна нулю ?
4. Якщо матеріальна однорідна лінія є графіком парної функції, то що можна сказати про розташування центра ваги цієї лінії?
5. Лінія задана параметрично. Як за допомогою визначеного інтеграла обчислити криволінійний інтеграл першого (другого) роду вздовж цієї лінії?
6. Зв'язок між якими математичними об'єктами відображає формула Гріна?
7. Чи можемо за допомогою криволінійних інтегралів обчислювати площі циліндричних поверхонь? Яких саме криволінійних інтегралів?
8. Яке твердження виконується для криволінійних інтегралів першого роду, але протилежне йому справедливе для криволінійних інтегралів другого роду?
9. Обчислити $\int\limits_L \sqrt{2y}dl$, якщо L – перша арка циклоїди $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t). \end{cases}$
10. Обчислити площу циліндричної поверхні $x^2 + y^2 = R^2$, що лежить між площиною xOy та поверхнею $z = \dfrac{xy}{2R}$.
11. Знайти масу кривої $\begin{cases} x = \ln(1 + t^2), \\ y = 2arctgt - t, \end{cases}$ на ділянці $0 \le t \le 1$, якщо її лінійна густина $\rho(x; y) = \dfrac{y}{e^x}$.
12. За допомогою формули Гріна перетворити інтеграл

$$\oint\limits_L \sqrt{x^2 + y^2}dx + y\left(xy + \ln\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)\right).$$

13. Обчислити площу фігури, яка обмежена замкненою лінією $\begin{cases} x = 2a\cos t - a\cos 2t, \\ y = 2a\sin t - a\sin 2t. \end{cases}$

14. Обчислити інтеграли:

а) $\int\limits_{(1;\pi)}^{(2;\pi)} \left(1 - \frac{y^2}{x^2}\cos\frac{y}{x}\right)dx + \left(\sin\frac{y}{x} + \frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}\right)dy$;

б) $\int\limits_{(-2;-1)}^{(3;0)} (x^4 + 4xy^3)dx + (6x^2y^2 - 5y^4)dy$.

15. Відновити функцію двох змінних за її повним диференціалом:

а) $(x^2 + 2xy - y^2)dx + (x^2 - 2xy - y^2)dy$;

б) $\frac{(3y - x)dx + (y - 3x)dy}{(x + y)^3}$.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Давидов М. О. Курс математичного аналізу: підручник: у 3-х частинах. Частина 1. Функції однієї змінної. 2-е вид., перероб. і допов. Київ: Вища школа, 1990. 366 с.
2. Давидов М. О. Курс математичного аналізу: підручник: у 3-х частинах. Частина 2. Функції багатьох змінних і диференціальні рівняння. 2-е вид., перероб. і допов. Київ: Вища школа, 1991. 383 с.
3. Дубовик В. П., Юрик І. І. Вища математика: навч. посібн. Київ: А.С.К., 2006. 648 с.
4. Шкіль М. І. Математичний аналіз: підручник у 2-х ч. Ч. 2. Київ, 2005. 510 с.
5. Дюженкова Л. І., Колесник Т. В., Лещенко М. Я. та ін. Математичний аналіз в прикладах і задачах: у 2-х ч. Київ: Вища школа, 2002. Ч. 2. 470 с.
6. Сорич Н. М., Сорич В. А. Практикум з математичного аналізу: навчальний посібник. Кам'янець-Подільський: Кам'янець–Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2018. 67 с.
7. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3 томах. Т. 2. Видавництво Лань. 2009. 800 с.
8. Гнатюк Ю. В., Сорич В. А., Сорич Н. М. Подвійний інтеграл та його застосування: метод. рекомендації для самостійної роботи студ. фіз.-мат. фак-ту. Індивідуальні завдання. Кам'янець–Подільський: ПП «Медобори», 2011. 40 с.
9. Сорич Н. М., Сорич В. А. Математичний аналіз. Плани практичних занять. Кам'янець-Подільський: ПП «Медобори-2006», 2018. 52 с.
10. Ляшко И. И., Боярчук А. К., Гай Я. Г., Головач Г. П. Математический анализ в примерах и задачах. Ч. 2 Ряды, функции нескольких переменных, кратные и криволинейные интегралы. Киев: Вища школа, 1977. 672 с.
11. Вища математика. Елементи теорії поля і теорія рядів. Розрахункова робота [Електронний ресурс]: навч. посіб. для студ. спеціальності 186 "Видавництво та поліграфія"/ уклад.: О. І. Кушлак-Дивульська, Н. В. Поліщук. Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2018. 110 с.

ЗМІСТ

Міністерство освіти і науки України
Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

СОРИЧ Ніна Миколаївна,
кандидат фізико-математичних наук, доцент

СОРИЧ Віктор Андрійович,
кандидат фізико-математичних наук, доцент,
доцент кафедри математики Кам'янець-Подільського
національного університет імені Івана Огієнка

ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ КІЛЬКОХ ЗМІННИХ

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

ЕЛЕКТРОННЕ ВИДАННЯ

Підписано 06.04.2023. Формат 60x84/16. Гарнітура «Cambria».
Об'єм даних 5,9 Мб. Обл.-вид. арк. 5,6. Зам. № 1030.

Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка,
вул. Огієнка, 61, м. Кам'янець-Подільський, 32300.
Свідоцтво серії ДК № 3382 від 05.02.2009 р.

Виготовлено в Кам'янець-Подільському національному
університеті імені Івана Огієнка,
вул. Огієнка, 61, м. Кам'янець-Подільський, 32300.