*ISSN 2312 9557. Вісник Дніпропетровського університету. Серія: Математика. 2016, вип.* **21**

УДК 512.552

**О.В.Зеленський*, В.М.Дармосюк****

* Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка,
Кам'янець-Подільський, 32300. *E-mail: zelik82@mail.ru*
** Миколаївський національний університет імені В. О. Сухомлинського,
Миколаїв, 54030. *E-mail: darmosiuk@gmail.com*

# Допустимий сагайдак, одержуваний із $m$ попарно нееквівалентних матриць показників

**Знайдено сагайдаки, одержувані із скінченної кількості матриць показників. Доведено, що для довільного натурального $m$ існує сагайдак, одержуваний із $m$ попарно нееквівалентних матриць показників.**

*Ключові слова: матриця показників, допустимий сагайдак матриці показників, жорсткий сагайдак.*

**Найдены колчаны, получаемые из конечного множества матриц показателей. Доказано, что для любого натурального $m$ существует колчан, получаемый из $m$ попарно неэквивалентных матриц показателей.**

*Ключевые слова: матрица показателей, допустимый колчан матрицы показателей, жесткий колчан.*

**This paper investigates the quivers derived from an finite number of exponent matrices.The authors have proved that that for any natural m, there is a quiver which is derived from m matrix of pairwise not equivalent exponent matrices.**

*Key words: exponent matrix, admissible quiver, rigid quiver.*

## 1. Вступ

Один із аспектів теорії кілець — вивчення їх властивостей за допомогою теорії графів. Кожен черепичний порядок повністю визначається своєю матрицею показників і дискретно нормованим кільцем [1]. Багато властивостей таких кілець повністю визначаються їх матрицями показників [2, 3], зокрема, сагайдаки цих кілець [1]. Порівняно недавно матриці показників стали окремим об'єктом вивчення. Нежорсткість допустимого сагайдака, який має хоча б одну петлю, доведено в [4]. Із відкриттям вагових функцій з'явилося більше можливостей для дослідження допустимих сагайдаків [5]. Опис деяких класів жорстких сагайдаків започатковано в [7]. У [6] установлено властивості одиничних циклів та одиничних сагайдаків, зокрема знайдено обмеження для елементів матриці показників одиничного сагайдака. У статті продовжено дослідження матриць показників та їх сагайдаків, зокрема жорстких і майже жорстких сагайдаків матриць показників. Раніше були відомі тільки жорсткі сагайдаки (одержувані із точністю до еквівалентних з однієї матриці показників) і сагайдаки, одержувані з нескінченної кількості матриць показників. Ми розглянемо сагайдак, одержуваний із $m$ попарно нееквівалентних матриць показників.

## 2. Попередні відомості

Розглянемо матрицю $\mathcal{E}{=}(\alpha_{ij}) \in M_n(\mathcal{Z})(M_n(\mathcal{Z})$ — кільце матриць розмірності $n$ із цілими елементами).

**Означення 1.** [1] Матрицю $\mathcal{E}{=}(\alpha_{ij})$, для якої виконуються такі умови: $\alpha_{ij} + \alpha_{jk} \geq \alpha_{ik}$ для всіх $i,\ j,\ k = 1,\ldots,n$, $\alpha_{ii} = 0$ для всіх $i = 1,\ldots,n$, називають *матрицею показників.*

Матрицю показників, для якої виконується умова $\alpha_{ij} + \alpha_{ji} \geq 1$ для всіх $i, j \in \{1,\ldots,n\}$ $(i \neq j)$, називають *зведеною матрицею показників.*

Нехай $\mathcal{E} = (\alpha_{ij})$ — зведена матриця показників. Уведемо матриці $\mathcal{E}^{(1)} = (\beta_{ij}) = \mathcal{E} + E_n \quad \in M_n(\mathbb{Z})$, де $E_n$ — одинична матриця, та $\mathcal{E}^{(2)} = (\gamma_{ij}) \in M_n(\mathbb{Z})$: $\gamma_{ij} = \min\limits_{k}\{\beta_{ik} + \beta_{kj}\}$.

**Означення 2.** Сагайдаком зведеної матриці показників $Q = Q(\mathcal{E})$ називають сагайдак, матрицю суміжності якого задають формулою $[Q] = \mathcal{E}^{(2)} - \mathcal{E}^{(1)}$.

**Означення 3.** Зведені матриці показників $E_1$ і $E_2$ називають еквівалентними, якщо одну можна одержати з іншої за допомогою елементарних перетворень двох типів:

1. Відняти ціле число $t$ від елементів $i$-го рядка і додати його до елементів $i$-го стовпця.
2. Поміняти місцями два рядки і два стовпці з такими ж номерами.

*Зауваження* 1. Оскільки елементарні перетворення не змінюють суму елементів матриці показників, то матриці показників із різними сумами нееквівалентні.

**Означення 4.** Сагайдак $Q$ називають *допустимим*, якщо існує зведена матриця показників $\mathcal{E}$, така, що $Q(\mathcal{E}) = Q$.

**Означення 5.** [5] Сагайдак $Q = (VQ, AQ)$ називають зваженим, якщо визначена функція $\omega$: $AQ \to R$ . Функцію $\omega$ називають ваговою, а її значення на стрілці – вагою стрілки.

Сума ваг усіх стрілок шляху називають вагою шляху.

**Теорема 1.** *[5] Сильно зв'язний сагайдак $Q = (VQ, AQ)$ допустимий тоді й тільки тоді, коли існує вагова функція $\omega : AQ \to N \cup \emptyset$ , яка задовольняє такі умови:*

*1. Вага стрілки з точки $i$ у точку $j$ менша за вагу шляху з точки $i$ у точку $j$ довжини $l \geq 2$.*

*2. Вага петлі в точці $i$ менша за вагу будь-якого циклу, що проходить через точку $i$, довжиною $l \geq 2$.*

*3. Вага будь-якого циклу більша або дорівнює 1.*

*4. Вага петлі дорівнює 1.*

*5. Через кожну точку без петлі проходить цикл довжиною $l \geq 2$, вага якого дорівнює 1.*

*Зауваження* 2. Згідно з умовами (4) та (5) через кожну точку допустимого сагайдака проходить цикл ваги 1.

**Означення 6.** [5] Вагову функцію, яка задовольняє всі умови теореми 1, називатимемо допустимою ваговою функцією.

За сагайдаком $Q$ і допустимою ваговою функцією $\omega$ можна побудувати матрицю показників $\mathcal{E} = (\alpha_{ij}) \in M_n(Z)$ таким чином: якщо сагайдак $Q$ містить стрілку $\sigma_{ij}$, то $\alpha_{ij} = \omega(\sigma_{ij})$ у протилежному випадку $\alpha_{ij}$ дорівнює вазі найлегшого шляху із вершини $v_i$ у вершину $v_j$.

**Означення 7.** [7] Допустимий сагайдак $Q$ називають жорстким, якщо існує з точністю до еквівалентності єдина зведена матриця показників $\mathcal{E}$ така, що $Q(\mathcal{E}) = Q$.

**Означення 8.** Нежорсткий допустимий сагайдак $Q$, який одержують зі скінченної кількості (із точністю до еквівалентності) матриць показників, називають майже жорстким.

## 3. Основні результати

Доведемо існування майже жорстких сагайдаків.

**Теорема 2.** *Для довільного натурального $m > 1$ існує допустимий сагайдак $Q_m$, для якого існує рівно $m$ попарно нееквівалентних матриць показників, сагайдак яких збігається із сагайдаком $Q_m$.*

**Доведення.** Розглянемо сагайдак $Q_m$, який має $2(m+1)+1$ вершину та $3m+1$ стрілку, а саме $VQ = \{1, \dots, 2m+3\}$, $AQ_m = \{\sigma_{2k-1,2k}, \sigma_{2k,2k+1}, \sigma_{2k+1,2k-1}\}$ для всіх $k = 1, \dots, m+1, \sigma_{1,2m+1}$, де $\sigma_{ij}$ — стрілка з вершини $i$ у вершину $j$. Для сагайдака $Q_m$ побудуємо $m$ зведених попарно нееквівалентних між собою матриць показників. Відомо, що зведену матрицю показників однозначно задають ваговою функцією $\varphi(\sigma_{ij}) \in N \cup \{0\}$, $\sigma_{ij} \in AQ$, яка задовольняє умови теореми 1. Побудуємо $m$ вагових функцій $\varphi_1, \dots, \varphi_m$:

$$\varphi_p(\sigma_{ij}) = \begin{cases} 1, & i = 2k-1,\ j = 2k; \\ 0, & i = 2k,\ j = 2k+1; \\ 0, & i = 2k+1,\ j = 2k-1; \\ p, & i = 1,\ j = 2(m+1)+1. \end{cases}$$

Функції $\varphi_p$ задовольняють усі умови теореми:

1) $\varphi_p(\sigma_{2k-1,2k}) + \varphi_p(\sigma_{2k,2k+1}) + \varphi_p(\sigma_{2k+1,2k-1}) = 1$, тому вершини $2k-1$, $2k$, $2k+1$ не мають петель.

2) $\varphi_p(\sigma_{12}) + \varphi_p(\sigma_{23}) + \varphi_p(\sigma_{34}) + \varphi_p(\sigma_{45}) + \ldots + \varphi_p(\sigma_{2m-1,2m}) + \varphi_p(\sigma_{2m,2m+1}) = m+1 > \varphi_p(\sigma_{1,2m+1})$ (вага шляху більша, ніж вага стрілки).

3) $\varphi_p(\sigma_{2k-1,2k}) + \varphi_p(\sigma_{2k,2k+1}) + \varphi_p(\sigma_{2k+1,2k-1}) \geq 1$, $\varphi_p(\sigma_{1,2m+1}) + \varphi_p(\sigma_{2m+1,2m-1}) + \varphi_p(\sigma_{2m-1,2m-3}) + \cdots + \varphi_p(\sigma_{31}) = \varphi_p(\sigma_{1,2m+1}) \geq 1$ (вага кожного циклу не менша за 1).

Побудуємо зведені матриці показників $\mathcal{E}_p = (\alpha_{ij}^p) \in M_n(Z)$. Покладемо в разі $i \neq j$

$$(\alpha_{ij}^p) = \begin{cases} \varphi_p(\sigma_{ij}), & g_{ij} = 1; \\ \min\limits_{i=i_0,i_1,\ldots,i_k=j-\text{ усі можливі шляхи із i в j}} \{\varphi_p(\sigma_{ii_1}) + \ldots + \varphi_p(\sigma_{i_{k-1}i_j})\}, & g_{ij} = 0. \end{cases}$$

Тоді за теоремою $Q(\mathcal{E}_1) = Q(\mathcal{E}_2) = \cdots = Q(\mathcal{E}_m) = Q_m$. Сума всіх елементів матриці $\mathcal{E}_k$ менша, ніж сума всіх елементів матриці $\mathcal{E}_{k+1}$. Тому $m$ зведених матриць показників $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \ldots, \mathcal{E}_m$ попарно нееквівалентні між собою.

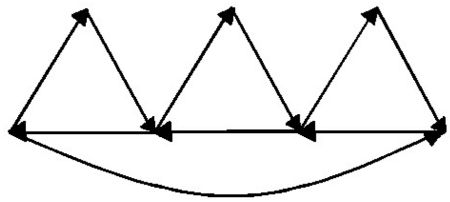
Покажемо тепер, що інших нееквівалентних матриць показників із сагайдаком $Q_m$ не існує. Нехай $Q_m = Q(\mathcal{E})$ для деякої зведеної матриці показників, $[Qm] = (q_{ij})$. Доведемо, що $E$ еквівалентна до однієї з матриць $\mathcal{E}_1, ..., \mathcal{E}_m$. Застосувавши елементарне перетворення першого типу, перейдемо від матриці $\mathcal{E}$ до еквівалентної $\mathcal{E}^*$ з першим нульовим стовпцем. У сагайдаку $Q_m$ із третьої вершини можна потрапити в першу тільки через стрілку $\sigma_{31}$. Тому $\varphi^*(\sigma_{31}) = 0$. Аналогічно із вершини 2 до вершини 1 існує єдиний шлях через $\sigma_{23}$, $\sigma_{31}$.

Тому $\varphi^*(\sigma_{23}) + \varphi^*(\sigma_{31}) = 0$ і тоді $\varphi^*(\sigma_{23}) = 0$. Оскільки вершина 2 не має петлі, то $\varphi^*(\sigma_{12}) + \varphi^*(\sigma_{23}) + \varphi^*(\sigma_{31}) = 1$. Тому $\varphi^*(\sigma_{12}) = 1$.

Аналогічно одержують $\varphi^*(\sigma_{2k-1,2k}) = 1, \varphi^*(\sigma 2k, 2k+1) = \varphi^*(\sigma_{2k+1,2k-1}) = 0$, для $k = 2, \ldots, m+1$. $\varphi^*(\sigma_{12}) + \varphi^*(\sigma_{23}) + \varphi^*(\sigma_{34}) + \varphi^*(\sigma_{45}) + \cdots + \varphi^*(\sigma_{2m-1,2m}) + \varphi^*(\varphi_{2m,2m+1}) = m+1 > \varphi^*(\sigma_{1,2m+1})$.

$\varphi^*(\sigma_{1,2m+1}) + \varphi^*(\sigma_{2m+1,2m-1}) + \varphi^*(\sigma_{2m-1,2m-3}) + \ldots + \varphi^*(\sigma_{31}) = \varphi^*(\sigma_{1,2m+1}) \geq 1$. Таким чином, $1 \leq \varphi^*(\sigma_{1,2m+1}) \leq m$. Нехай $t = \varphi^*(\sigma_{1,2m+1})$, тоді $\mathcal{E} \approx \mathcal{E}^* = \mathcal{E}_t$. Отже, зведених попарно нееквівалентних між собою матриць показників із сагайдаком $Q_m$ рівно $m$. Теорему доведено.

*Приклад* 1. Нехай $m = 2$, тоді для допустимого сагайдака $Q_2$ існує рівно 2 попарно нееквівалентні матриці показників, сагайдак яких збігається із сагайдаком $Q_2$. Сагайдак $Q_2$ складається з 7 вершин (рисунок).



**Сагайдак** $Q_2$

$$[Q] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Існують дві зведені матриці показників, для яких $Q_2 = Q(\mathcal{E}_1) = Q(\mathcal{E}_2)$:

$$\mathcal{E}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \mathcal{E}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

.

Сума всіх елементів матриць $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$ дорівнює 31 і 36 відповідно. Тому матриці нееквівалентні.

## 4. Висновки

У статті знайдено майже жорсткі сагайдаки. Доведено, що для довільного натурального $m$ існує сагайдак, одержуваний із $m$ попарно нееквівалентних матриць показників.

### Бібліографічні посилання


1. *Hazewinkel, M.* Algebras Rings and Modules [Text]: vol. 1 /M. Hazewinkel, N. Gubareni, V.V. Kirichenko// Kluwer Academic Publisheers, 2004.–380 p.
2. *Hazewinkel, M.* Algebras Rings and Modules [Text]: vol 2. /M. Hazewinkel, N. Gubareni, V.V. Kirichenko // Kluwer Academic Publisheers, 2007.–400 p.

3. *Kirichenko, V. V.* Exponent Matrices and Tiled Order over Discrete Valuation Rings [Text]/ V. V. Kirichenko , O. V. Zelenskiy, V. N. Zhuravlev// International J. of Algebra and Computation. – 2005. – Vol. 15, № 5– 6. – P. 1–16.
4. *Зеленський, О. В.* Жорсткі сагайдаки зведених матриць показників [Текст]/ О.В. Зеленський// Вісн. Київ. ун-ту. Сер: Фiз.-мат. науки. – 2007.– №3. – С. 27-31.
5. *Журавлев, В. Н.* Допустимые колчаны [Текст]/ В. Н. Журавлев// Фундамент. и прикл. математика.–2008. — Т. 14, вып.7.– С. 121–128.
6. *Журавльов, В. М.* Одиничні сагайдаки матриці показників [Текст]/ В.М. Журавльов, О.В. Зеленський, В.М. Дармосюк// Вісн. Київ. ун-ту. Сер.: Фiз.-мат. науки. — 2012. – №4. – С. 27–31.
7. *Кириченко, В.В.* О жестких колчанах [Текст]/В.В Кириченко, В.Н. Журавлёв, И.Н. Цыгановская// Фундамент. и прикл. математика. – 2006. – Т. 12, вып. 8.– С. 105 – 120.

*Надійшла до редколегії 29.02.2016*