УДК 512.552

В. В. Кириченко, О. В. Зеленський

# УНІКАЛЬНІ САГАЙДАКИ

V. V. Kirichenko, A. V. Zelensky. *Unique quivers*, Mat. Stud. **40** (2013), 3–10.

We consider unique admissible quivers, i. e. quivers of Gorenstein exponent matrices. It is proved that admissible quiver with a loop at each vertex is unique if and only if it is a simple cycle, and that there are different from the simple cycles unique quivers with any number of vertices.

В. В. Кириченко, А. В. Зеленский. *Уникальные колчаны* // Мат. Студії. – 2013. – Т.40, №1. – С.3–10.

Рассматриваются уникальные допустимые колчаны, т. е. колчаны горенштейновых матриц показателей. Доказывается, что допутимый колчан с петлей в каждой вершине является уникальным тогда и только тогда, когда он является простым циклом, и что существуют отличные от простых циклов уникальные колчаны с произвольным количеством вершин.

**1. Вступ.** У статті [1] охарактеризовано сагайдаки матриць показників як підклас простих сильно зв'язних сагайдаків з ваговою функцією, визначеною на стрілках сагайдака. Такі сагайдаки називаються допустимими.

Мета цієї статті — дослідити допустимі сагайдаки, які є сагайдаками тільки горенштейнових матриць показників.

Поняття черепичного порядку ввів І. Капланський. Кожний черепичний порядок повністю визначається своєю матрицею показників і дискретно нормованим кільцем. Багато властивостей таких кілець повністю визначаються їх матрицями показників, зокрема, сагайдаки таких кілець.

Термін "сагайдак", введений П. Габріелем в 1972 р. у зв'язку з вивченням зображень скінченновимірних алгебр. Це, в точності, скінченний орієнтований граф, можливо з кратними стрілками і кратними петлями. Петля — це стрілка, початок і кінець якої збігаються.

Відзначимо, що в нашій термінології "черепичний порядок", — це нетерове з двох сторін первинне напівдосконале та напівдистрибутивне кільце з ненульовим радикалом Джекобсона.

У даній статті ми розглядаємо сагайдаки, які виникають у теорії черепичних порядків. Ці сагайдаки визначаються матрицями показників і відіграють важливу роль при дослідженні властивостей черепичних порядків. Так, наприклад, якщо сагайдак черепичного порядку має петлю хоча б у одній вершині, то такий порядок має нескінченну глобальну розмірність.

2010 *Mathematics Subject Classification:* 05C22, 16H10.
*Keywords:* exponent matrix; admissible quiver; Gorenstein's matrix.

Порівняно недавно матриці показників стали окремим об'єктом вивчення. Робота присвячена дослідженню сагайдаків горенштейнових матриць показників.

**2. Попередні відомості.**

**Означення 1.** Матриця $\mathcal{E} = (\alpha_{ij}) \in M_n(\mathbb{Z})$ ($M_n(\mathbb{Z})$ — кільце матриць розмірності $n$ з цілими елементами), для якої виконуються такі умови:

1) $\alpha_{ij} + \alpha_{jk} \geqslant \alpha_i$ для всіх $i$, $j$, $k \in \{1, \ldots, n\}$;
2) $\alpha_{ii} = 0$ для всіх $i \in \{1, \ldots, n\}$;
називається *матрицею показників.*

Матриця показників, для якої виконується умова

3) $\alpha_{ij} + \alpha_{ji} \geqslant 1$ для всіх $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ $(i \neq j)$ називається *зведеною матрицею показників.*

Нехай $\mathcal{E} = (\alpha_{ij})$ — зведена матриця показників. Введемо матрицю $\mathcal{E}^{(1)} = (\beta_{ij}) = \mathcal{E} + E_n \in M_n(\mathbb{Z})$, де $E_n$ — одинична матриця, та матрицю $\mathcal{E}^{(2)} = (\gamma_{ij}) \in M_n(\mathbb{Z})$: $\gamma_{ij} = \min_k\{\beta_{ik} + \beta_{kj}\}$.

**Означення 2.** *Сагайдаком зведеної матриці показників* $Q = Q(\mathcal{E})$ називається сагайдак, матриця суміжності якого задається формулою $[Q] = \mathcal{E}^{(2)} - \mathcal{E}^{(1)}$.

Для елементів матриці суміжності сагайдака $Q$ маємо такі формули

$$q_{ij} = \gamma_{ij} - \beta_{ij} = \min_k\Big(\beta_{ik} + \beta_{kj}\Big) - \beta_{ij} = \min\Big(1, \min_{k\neq i,j}(\alpha_{ik} + \alpha_{kj} - \beta_{ij})\Big) = $$
$$= \min\Big(1, \min_{k\neq i,j}(\alpha_{ik} + \alpha_{kj} - \alpha_{ij})\Big).$$
$$q_{ii} = \min_k\Big(\beta_{ik} + \beta_{ki}\Big) - \beta_{ii} = \min\Big(2, \min_{k\neq i}\Big(\alpha_{ik} + \alpha_{ki}\Big)\Big) - 1 = \min\Big(1, \min_{k\neq i}\Big(\alpha_{ik} + \alpha_{ki} - 1\Big)\Big).$$

Звідси отримуємо, що $q_{ij} = 1$ при $i \neq j$ тоді і тільки тоді, коли $\alpha_{ik} + \alpha_{kj} > \alpha_{ij}$ для всіх $k \neq i, j$; $q_{ii} = 1$ тоді і тільки тоді, коли $\alpha_{ik} + \alpha_{ki} > 1$ для всіх $k \neq i$.

**Означення 3.** Зведені матриці показників $\mathcal{E}_1$ і $\mathcal{E}_2$ називаються *еквівалентними*, якщо одну можна отримати з іншої за допомогою елементарних перетворень двох типів:

1. відняти ціле число $t$ від елементів $i$−го рядка та додати це число до елементів $i$−го стовпчика,
2. поміняти місцями два рядки і поміняти місцями два стовпчика з такими ж номерами.

**Означення 4.** Сагайдак $Q$ називається *допустимим*, якщо існує зведена матриця показників $\mathcal{E}$ така, що $Q(\mathcal{E}) = Q$.

**Означення 5.** Зведена матриця показників називається *горенштейновою*, якщо існує підстановка $\sigma$ для множини $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ така, що $\alpha_{ik} + \alpha_{k\sigma(i)} = \alpha_{i\sigma(i)}$ для $i, k \in \{1, \ldots, n\}$.

**Означення 6.** Підстановка $\sigma$ горенштейнової матриці називається *підстановкою Кириченка.*

**Зауваження 1.** Підстановка Кириченка не містить нерухомих елементів.

Якщо припустити, що $\sigma(i) = i$, то з означення горенштейнової матриці отримуємо $\alpha_{ij} + \alpha_{ji} = \alpha_{i\sigma(i)} = 0$, що суперечить зведеності матриці Г.

**Означення 7.** Нехай $\sigma$ — підстановка множини $\{1, 2, \ldots, n\}$. Тоді $P_\sigma = \sum_{i=1}^{n} e_{i\sigma(i)}$ називається *матрицею підстановки.*

**Означення 8.** Сагайдак $Q = (VQ, AQ)$ називається *зваженим*, якщо визначена функція $\omega\colon AQ \to \mathbb{R}$. Функція $\omega$ називається ваговою, а її значення на стрілці називається *вагою стрілки.* Сума ваг всіх стрілок шляху називається *вагою шляху.*

**Теорема 1** ([1])**.** Сильно зв'язний сагайдак $Q = (VQ, AQ)$ є допустимим тоді і тільки тоді, коли існує вагова функція $\omega\colon AQ \to \mathbb{N} \cup \{\varnothing\}$, яка задовольняє наступні умови:

1. вага стрілки з точки $i$ у точку $j$ менша за вагу шляху довжини $l \geqslant 2$ з точки $i$ у точку $j$;
2. вага петлі в точці $i$ менше за вагу будь-якого циклу довжини $l \geqslant 2$, що проходить через точку $i$;
3. вага будь-якого циклу не менша за 1;
4. вага петлі дорівнює 1;
5. через кожну точку без петлі проходить цикл довжини $l \geqslant 2$, вага якого дорівнює 1.

**Зауваження 2.** За умовами 4 та 5, через кожну точку допустимого сагайдака проходить цикл ваги 1.

**Означення 9.** Простий цикл в сагайдака $Q = (VQ, AQ)$, вага якого дорівнює 1, називатимемо *одиничним.*

**Твердження 1** ([2])**.** *В допустимого сагайдака $Q = (VQ, AQ)$, між вершинами одиничного циклу не існує інших стрілок, крім стрілок цього циклу.*

**Твердження 2** ([2])**.** *Допустимий сагайдак $Q$ не може містити двох стрілок $(v_i,\ v_a)$ та $(v_j,\ v_a)$ та не може містити стрілки $(v_a,\ v_i)$, $(v_a,\ v_j)$, де вершини $v_i,\ v_j$ належать до одного одиничного циклу.*

## 3. Унікальні сагайдаки.

**Означення 10.** Допустимий сагайдак, який одержується тільки з Горенштейнових матриць, називається *унікальним.*

З теореми 3.1 ([3]) отримуємо таке твердження.

**Твердження 3.** *Сагайдак, який є одиничним циклом або простим циклом з петлею в кожній вершині, є унікальним.*

**Твердження 4.** *Якщо в допустимого сагайдака з кожної вершини виходить тільки одна стрілка, то він простий цикл.*

*Доведення.* З першої вершини виходить тільки одна стрілка. Нехай ця стрілка закінчується у другій вершині. З другої вершини виходить тільки одна стрілка. Якщо ця стрілка закінчується в першій вершині, то ми отримали суперечність, бо з другої вершини не можна потрапити у інші і тому сагайдак не сильнозв'язний.

Нехай стрілка, яка виходить з другої вершини, закінчується у третій. Тоді стрілка, яка починається в третій вершині, не може закінчуватись в першій або другій, бо сагайдак сильнозв'язний. І так далі, продовжимо міркування, поки шлях не замкнеться. Тобто стрілка, яка починається в останній вершині, закінчуватися може тільки в першій. □

**Наслідок 1.** *Якщо допустимий сагайдак не є простим циклом, то в нього існує вершина, з якої виходить не менше двох стрілок.*

*Доведення.* Припустимо протилежне, що не існує такої вершини. Оскільки сагайдак сильнозв'язний, то з кожної вершини виходить точно одна стрілка. За твердженням 4 сагайдак є простим циклом. Отримали суперечність. □

**Теорема 2.** *Допустимий сагайдак з петлею в кожній вершині унікальний тоді і тільки тоді, коли він простим циклом.*

*Доведення.* Те, що простий цикл з петлею в кожній вершині є унікальним, доведено в [3]. Доведемо, що якщо допустимий сагайдак з петлею в кожній вершині не є простим циклом, то він не є унікальним.

Припустимо протилежне, що $Q = Q(\mathcal{E})$ — унікальний сагайдак з петлею в кожній вершині, який не є простим циклом, де $\mathcal{E} = (\alpha_{ij})$ — горенштейнова матриця. Визначимо вагову функцію сагайдака $Q$ так: $\omega(\sigma_{ij}) = \alpha_{ij}$. За ваговою функцією $\omega$ означимо вагову функцію $\omega_1$

$$\omega_1(\sigma_{ij}) = 10\,\omega(\sigma_{ij}).$$

Вагова функція $\omega$ задовольняє умови теореми 1: вага довільного циклу не менша від двійки та вага шляху більша, ніж вага стрілки. Очевидно, що в сагайдака $Q$ з ваговою функцією $\omega_1$ вага циклу також більша від одиниці. Отже, $\omega_1$ задовольняє умови теореми 1, тобто $\omega_1$ — допустима вагова функція сагайдака $Q$. Побудуємо за функцією $\omega_1$ сагайдака $Q$ зведену матрицю показників $\mathcal{E}_1 = (\phi_{ij})$. Оскільки $\omega_1$ — допустима вагова функція сагайдака $Q$, то $Q = Q(\mathcal{E}_1) = Q(\mathcal{E})$. Сагайдак $Q$ — унікальний, тому $\mathcal{E}_1$ — горенштейнова. Нехай $\sigma$ — підстановка Кириченка для матриці $\mathcal{E}_1$. За наслідком з твердження 4 в сагайдака $Q$ існує вершина, з якої виходить не менше двох стрілок. Нехай це вершина з номером “$i$”, $\sigma_{ij}$, $\sigma_{ip} \in AQ$. Оскільки $\mathcal{E}_1$ — горенштейнова матриця, то виконується рівність

$$\phi_{ij} + \phi_{j\sigma(i)} = \phi_{i\sigma(i)} \quad \text{для } k \in \{1, \ldots, n\}. \tag{1}$$

Це означає, що всі вершини сагайдака розташовані на одному з найлегших шляхів, що йдуть з $i$ в $\sigma(i)$.

Побудуємо вагову функцію $\omega_2$ так: вагова функція $\omega_2$ дорівнює ваговій функції $\omega_1$, $\omega_2\left(\sigma_{xy}\right) = \omega_1\left(\sigma_{xy}\right)$ для всіх стрілок, крім стрілки $\sigma_{ij}$, $\omega_2\left(\sigma_{ij}\right) = \omega_1\left(\sigma_{ij}\right) - 1$. Оскільки для вагової функції $\omega$ вага довільного циклу не менша за 2, то для $\omega_1$ вага циклу не менша за 20, а для $\omega_2$ вага циклу не менша від 19. Умову 1 теореми 1 для вагової функції $\omega$ можна записати у вигляді

$$\omega\left(\sigma_{i_1 i_2}\right) + \omega\left(\sigma_{i_2 i_3}\right) + \ldots + \omega\left(\sigma_{i_{t-1} i_t}\right) \geqslant \omega\left(\sigma_{i_1 i_t}\right) + 1.$$

Для вагової функції $\omega_1$ ця умова набуває вигляду

$$10\omega\left(\sigma_{i_1i_2}\right)+10\omega\left(\sigma_{i_2i_3}\right)+...+10\omega\left(\sigma_{i_{t-1}i_t}\right)>10\omega\left(\sigma_{i_1i_t}\right)+10. \tag{2}$$

Для вагової функції $\omega_2$ умова (2) може набути вигляду

$$10\omega\left(\sigma_{i_1i_2}\right)+10\omega\left(\sigma_{i_2i_3}\right)+...+10\omega\left(\sigma_{i_{t-1}i_t}\right)\geqslant 10\omega\left(\sigma_{i_1i_t}\right)+9.$$

Отже, умова 1 теореми 1) для функції $\omega_2$ виконується, $\omega_2$ — допустима вагова функція. За ваговою функцією $\omega_2$ та сагайдаком $Q$ побудуємо матрицю $\mathcal{E}_2=(\gamma_{ij})$.

З рівності (1) випливає, що

$$\phi_{ij}+\phi_{j\sigma(i)}=\phi_{ip}+\phi_{p\sigma(i)}=\phi_{i\sigma(i)}. \tag{3}$$

Рівність (3) переходить в рівність $\gamma_{ij}+\gamma_{j\sigma(i)}+1=\gamma_{ip}+\gamma_{p\sigma(i)}=\gamma_{i\sigma(i)}$. Отже, $\mathcal{E}_2$ — не горенштейнова матриця. Отримали суперечність. □

**Теорема 3.** *Для довільного складеного $n \geqslant 4$ існують унікальні сагайдаки з $n$ вершинами, які відрізняються від простого циклу.*

*Доведення.* Розглянемо сагайдак $Q_4$ з матрицею суміжності $[Q_4]=\begin{pmatrix}0&1&1&0\\0&0&1&1\\1&0&0&1\\1&1&0&0\end{pmatrix}$.

Нехай $Q_4=(\mathcal{E})$. Доведемо, що $\mathcal{E}$ — горенштейновой матриця. Для цього розглянемо для сагайдака $Q_4$ допустимі вагові функції.

Вершина 1 не має петлі, тому вона належить до одиничного циклу. Оскільки одиничний цикл не має інших стрілок, крім стрілок самого циклу, то цикли (1234), (123), (134) не одиничні. Тоді одиничним є цикл (13). З подібних міркувань випливає, що через вершину 2 проходить одиничний цикл (24).

Не зменшуючи загальності, можна вважати, що $\omega(\sigma_{13})=0,\ \omega(\sigma_{31})=1$.

(Якщо навпаки $\omega(\sigma_{13})=1,\ \omega(\sigma_{31})=0$, то виконаємо елементарне перетворення першого типу: від першого рядка матриці $\mathcal{E}$ віднімемо одиницю та до першого стовпця матриці $\mathcal{E}$ додамо одиницю. Після виконання перетворення одержимо $\omega(\sigma_{13})=0$, $\omega(\sigma_{31})=1$).

Аналогічно, не зменшуючи загальності, можна вважати, що $\omega(\sigma_{24})=0,\ \omega(\sigma_{42})=1$.

Оскільки вага стрілки менша, ніж вага шляху, то одержуємо такі нерівності

$$\begin{cases}\omega(\sigma_{13})+\omega(\sigma_{34})+\omega(\sigma_{42})>\omega(\sigma_{12}),\\ \omega(\sigma_{31})+\omega(\sigma_{12})+\omega(\sigma_{24})>\omega(\sigma_{34}),\\ \omega(\sigma_{24})+\omega(\sigma_{41})+\omega(\sigma_{13})>\omega(\sigma_{23}),\\ \omega(\sigma_{42})+\omega(\sigma_{23})+\omega(\sigma_{31})>\omega(\sigma_{41}).\end{cases}$$

Якщо підставити $\omega(\sigma_{13})=0,\ \omega(\sigma_{31})=1,\ \omega(\sigma_{24})=0,\ \omega(\sigma_{42})=1$, то одержимо наступну систему нерівностей

$$\begin{cases}\omega(\sigma_{34})+1>\omega(\sigma_{12}),\\ \omega(\sigma_{12})+1>\omega(\sigma_{34}),\\ \omega(\sigma_{41})>\omega(\sigma_{23}),\\ \omega(\sigma_{23})+2>\omega(\sigma_{41}).\end{cases}$$

З першої та другої нерівності випливає $\omega(\sigma_{34}) = \omega(\sigma_{12})$. З третьої та четвертої нерівності випливає, що $\omega(\sigma_{41}t) = \omega(\sigma_{23}) + 1$. Позначимо $x = \omega(\sigma_{12})$, $y = \omega(\sigma_{23})$. Тоді $\omega(\sigma_{34}) = x$, $\omega(\sigma_{41}) = y + 1$.

Оскільки $\omega(\sigma_{12}) + \omega(\sigma_{23}) > \omega(\sigma_{13})$, то $x + y > 0$, тобто $x + y \geqslant 1$.

Елемент $\alpha_{ij}$ матриці показників $\mathcal{E}$ дорівнює вазі шляху мінімальної ваги з $i$ в $j$. Тому матриця показників має вигляд $\mathcal{E} = \begin{pmatrix} 0 & x & 0 & x \\ y+1 & 0 & y & 0 \\ 1 & x+1 & 0 & x \\ y+1 & 1 & y+1 & 0 \end{pmatrix}$. Очевидно, що $\mathcal{E}$ — горенштейнова матриця з підстановкою Кириченка $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Отже, сагайдак $Q_4$ — унікальний.

Нехай сагайдак $Q_{2m}$ заданий матрицею суміжності

$$[Q_{2m}] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

або $[Q_{2m}] = P_\sigma + P_{\sigma^2}$, де $\sigma = (1, 2, \ldots 2m)$ — підстановка Кириченка, а $P_\sigma$ — матриця підстановки. Подібно, як і у попередньому випадку доводиться, що сагайдак $Q_{2m}$ з точністю до ізоморфізму одержується з горенштейновой матриці

$$\mathcal{E}_{2m} = \begin{pmatrix} B & A & A & \ldots & A & A \\ C & B & A & \ldots & A & A \\ C & C & B & \ldots & A & A \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ C & C & C & \ldots & B & A \\ C & C & C & \ldots & C & B \end{pmatrix}, \text{ де } A = \begin{pmatrix} 0 & x \\ y & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & x \\ y+1 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & x+1 \\ y+1 & 1 \end{pmatrix},$$

$x+y \geqslant 1$. Легко побачити, що $\mathcal{E}_{2m}$ — горенштейнова матриця з підстановкою Кириченка $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & 2m \\ 2m & 1 & 2 & \ldots & 2m-1 \end{pmatrix}$.

Отже, для довільного парного $n$ існує унікальний сагайдак з $n$ вершинами, який не є простим циклом. Зауважимо, що для непарного складеного $n$ також існують унікальні сагайдаки, які не є простими циклами.

Нехай $Q_9$ — сагайдак, заданий матрицею суміжності

$$[Q_9] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Побудуємо за сагайдаком матрицю показників, з якої він одержується. Міркуємо повністю аналогічно до міркувань з попереднього випадку. Вершина 1 не має петлі, тому вона належить до до одиничного циклу. Оскільки одиничний цикл не має інших стрілок, крім стрілок самого циклу, то вершина 1 належить до одиничного циклу (147). Не зменшуючи загальності можна вважати, що $\omega(\sigma_{14}) = 0,\ \omega(\sigma_{47}) = 0,\ \omega(\sigma_{71}) = 1$. Подібно одержуємо, що

$$\omega(\sigma_{25}) = 0,\ \omega(\sigma_{58}) = 0,\ \omega(\sigma_{82}) = 1,\ \omega(\sigma_{36}) = 0,\ \omega(\sigma_{69}) = 0,\ \omega(\sigma_{93}) = 1.$$

Використовуючи пункт 1 теореми 1, одержуємо систему нерівностей

$$\begin{cases} \omega(\sigma_{14}) + \omega(\sigma_{45}) + \omega(\sigma_{58}) + \omega(\sigma_{82}) > \omega(\sigma_{12}), \\ \omega(\sigma_{14}) + \omega(\sigma_{47}) + \omega(\sigma_{78}) + \omega(\sigma_{82}) > \omega(\sigma_{12}), \\ \omega(\sigma_{47}) + \omega(\sigma_{78}) + \omega(\sigma_{82}) + \omega(\sigma_{25}) > \omega(\sigma_{45}), \\ \omega(\sigma_{47}) + \omega(\sigma_{71}) + \omega(\sigma_{12}) + \omega(\sigma_{25}) > \omega(\sigma_{45}), \\ \omega(\sigma_{71}) + \omega(\sigma_{12}) + \omega(\sigma_{25}) + \omega(\sigma_{58}) > \omega(\sigma_{78}), \\ \omega(\sigma_{71}) + \omega(\sigma_{12}) + \omega(\sigma_{25}) + \omega(\sigma_{58}) > \omega(\sigma_{78}). \end{cases}$$

Підставивши попередні значення вагових функцій, одержимо

$$\begin{cases} \omega(\sigma_{45}) + 1 > \omega(\sigma_{12}), \\ \omega(\sigma_{78}) + 1 > \omega(\sigma_{12}), \\ \omega(\sigma_{78}) + 1 > \omega(\sigma_{45}), \\ \omega(\sigma_{12}) + 1 > \omega(\sigma_{45}), \\ \omega(\sigma_{12}) + 1 > \omega(\sigma_{78}), \\ \omega(\sigma_{12}) + 1 > \omega(\sigma_{78}). \end{cases}$$

Оскільки вагова функція набуває цілих значень, то $\omega(\sigma_{12}) = \omega(\sigma_{45}) = \omega(\sigma_{78})$.

Аналогічно отримуємо, що $\omega(\sigma_{23}) = \omega(\sigma_{56}) = \omega(\sigma_{89})$ і $\omega(\sigma_{34}) = \omega(\sigma_{67}) = \omega(\sigma_{91}) - 1$. Позначимо $x = \omega(\sigma_{12}), \quad y = \omega(\sigma_{23}),\ z = \omega(\sigma_{34})$.

За ваговою функцією $\omega$ побудуємо зведену матрицю показників $\mathcal{E}_9$

$$\begin{pmatrix} 0 & x & x+y & 0 & x & x+y & 0 & x & x+y \\ y+z+1 & 0 & y & y+z & 0 & y & y+z & 0 & y \\ z+1 & x+z+1 & 0 & z & x+z & 0 & z & x+z & 0 \\ 1 & x+1 & x+y+1 & 0 & x & x+y & 0 & x & x+y \\ y+z+1 & 1 & y+1 & y+z+1 & 0 & y & y+z & 0 & y \\ z+1 & x+z+1 & 1 & z+1 & x+z+1 & 0 & z & x+z & 0 \\ 1 & x+1 & x+y+1 & 1 & x+1 & x+y+1 & 0 & x & x+y \\ y+z+1 & 1 & y+1 & y+z+1 & 1 & y+1 & y+z+1 & 0 & y \\ z+1 & x+z+1 & 1 & z+1 & x+z+1 & 1 & z+1 & x+z+1 & 0 \end{pmatrix}$$

або $\mathcal{E}_9 = \begin{pmatrix} B & A & A \\ C & B & A \\ C & C & B \end{pmatrix}$, де $A = \begin{pmatrix} 0 & x & x+y \\ y+z & 0 & y \\ z & x+z & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & x & x+y \\ y+z+1 & 0 & y \\ z+1 & x+z+1 & 0 \end{pmatrix}$,

$C = \begin{pmatrix} 1 & x+1 & x+y+1 \\ y+z+1 & 1 & y+1 \\ z+1 & x+z+1 & 1 \end{pmatrix}$. Очевидно, що $\mathcal{E}_9$ — горенштейнова матриця з підстановкою Кириченка $\sigma = \begin{pmatrix} 1 \ 2 \ 3 \ ... \ 9 \\ 9 \ 1 \ 2 \ ... \ 8 \end{pmatrix}$.

Подібно будується унікальний сагайдак для довільного складеного $n$ (для $n = pk$ будується сагайдак $Q_n = \{VQ, AQ\}$ з множиною вершин $VQ = \{1, 2, \dots, n\}$ і множиною стрілок $\{\sigma_{1\,2},\ \sigma_{2\,3},\ \dots,\ \sigma_{n\,1},\quad \sigma_{1\,p+1},\ \sigma_{2\,p+2},\ \dots,\ \sigma_{n\,p}\}$ і як у попередніх випадках доводиться, що $Q_n$ — унікальний). □

**4. Висновок.** Допустимий сагайдак унікальний, якщо він одержується тільки з горенштейнових матриць. Простий цикл без петель та простий цикл з петлею в кожній вершині — унікальні сагайдаки. Існують інші унікальні сагайдаки з $n$ вершинами, де $n$ — складене число, які відрізняються від простого циклу. Не існує інших унікальних сагайдаків з петлею в кожній вершині, крім простого циклу. Залишається *відкритим питання* існування унікальних сагайдаків, які відрізняються від простого циклу, у випадку, коли $n$ — просте число.

## ЛІТЕРАТУРА


1. Zhuravlev V.N. *Acceptable quivers*// Fundamental and Applied Mathematics. – 2008. – V.14, №7. – P. 121–128. (in Russian)
2. Zhuravlev V.N., Zelensky A.V., Darmosiuk V.M. *Unit quivers of exponent matrices*// Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv Series: Physics & Mathematics. – 2012. – V.4. – P. 27–31. (in Ukrainian)
3. Roggenkamp K.W., Kirichenko V.V., Khibina M.A., Zhuravlev V.N. *Gorenstein tiled orders*// Communication in Algebra. – 2001. – V.29, №9. – P. 4231–4247.
4. Hazewinkel M., Gubareni N., Kirichenko V.V. Algebras Rings and Modules. – Kluwer Academic Publishers, Dortrecht-Boston-London, 2004. – 380p.
5. Hazewinkel M., Gubareni N., Kirichenko V.V. Algebras Rings and Modules. – Mathematical and Its Applications, Springer, 2007, V.2, 400 p.
6. Kirichenko V.V., Zelenskiy O.V., Zhuravlev V.N. *Exponent matrices and tiled order over discrete valuation rings*// International Journal of Algebra and Computation. – 2005. – V.15, №5,6. – P. 1–16.



Механіко-математичний факультет
Київський національний університет ім. Т. Шевченка
vkir@univ.kiev.ua

Фізико-математичний факультет
Кам'янець-Подільський національний університет ім. І. Огієнка
zelik82@mail.ru


*Надійшло 27.06.2013*