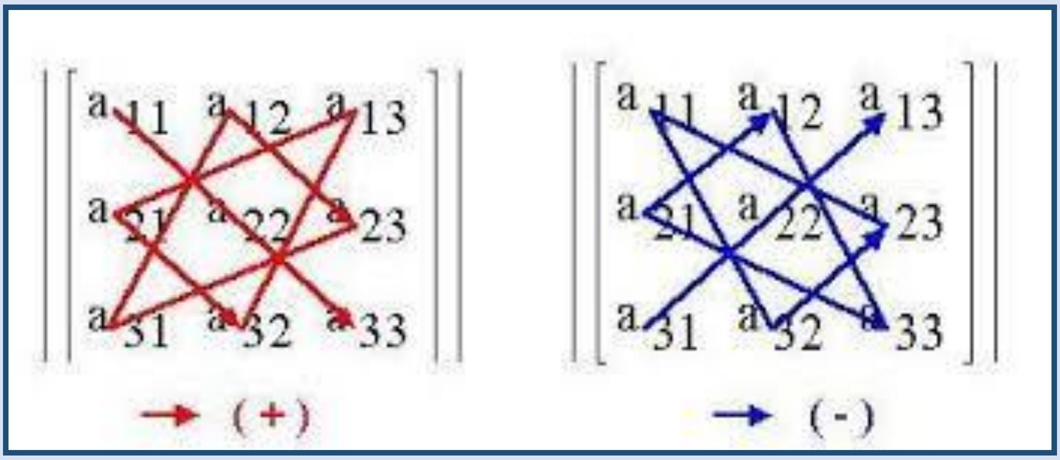
Міністерство освіти і науки України
Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка

Катерина ГЕСЕЛЕВА,
Уляна ГУДИМА

ВИЩА МАТЕМАТИКА: ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНИЙ ПОСІБНИК



ЕЛЕКТРОННЕ ВИДАННЯ

Кам’янець-Подільський
2023

УДК 512.64(075.8)
ББК 22.14я73
Г43

Рекомендувала вчена рада Кам’янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка (протокол № 6 від 25.05.2023 року)

РЕЦЕНЗЕНТИ:

Ірина СЕМЕНИШИНА, кандидат фізико-математичних наук, доцент, асистент кафедри математики, інформатики та академічного письма Закладу вищої освіти «Подільський державний університет»;
Тетяна ДУМАНСЬКА, кандидат педагогічних наук, старший викладач кафедри математики Кам’янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка;
Сергій КРІЛЬ, кандидат фізико-математичних наук, доцент.

Геселева Катерина, Гудима Уляна
Г43 Вища математика: лінійна алгебра: навчально-методичний посібник [Електронний ресурс]. Кам’янець-Подільський: Кам’янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2023. 47 с.

Електронна версія посібника доступна за покликаннями:
URL: http://elar.kpnu.edu.ua/xmlui/handle/123456789/7556

Метою навчально-методичного посібника є сформувати та удосконалити у здобувачів вищої освіти, що навчаються за спеціальністю 122 Комп’ютерні науки, практичні навички розв’язування задач лінійної алгебри.

УДК 512.64(075.8)
ББК 22.14я73

ЗМІСТ

ВСТУП

Навчально-методичний посібник відповідає програмі курсу «Вищої математики» для фізико-математичних факультетів спеціальності 122 Комп'ютерні науки закладів вищої освіти. Його мета – удосконалити навички розв'язування типових задач з розділу лінійної алгебри, познайомити читачів з деякими особливостями та винятками, які зустрічаються під час вивчення цього розділу.

Посібник складається з трьох тем: «Матриці та дії над ними», «Визначники», «Системи лінійних рівнянь». Кожна тема містить три блоки: питання для теоретичної підготовки, зразки розв'язування задач, завдання для самостійної роботи.

При написанні посібника враховано досвід авторів викладання курсу вищої математики на фізико-математичному та природничо-економічному факультетах Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка.

МАТРИЦІ ТА ДІЇ НАД НИМИ

І. Питання для теоретичної підготовки

1. Поняття матриці. Типи матриць.
2. Додавання матриць.
3. Множення матриці на число. Різниця двох матриць.
4. Узгоджені матриці. Добуток двох матриць та його властивості.

ІІ. Зразки розв'язування задач

1. Встановити відповідність:

1) прямокутна матриця розмірності 2×4
2) одинична матриця
3) верхня трикутна матиця
4) нуль-матриця
5) нижня трикутна матриця

а) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

б) $\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \varepsilon \\ \eta & \mu & \lambda & \varphi \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 6 & 0 \\ 5 & -2 & 7 \end{pmatrix}$;

г) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

д) $\begin{pmatrix} \pi & 3\pi \\ 0 & 2\pi \end{pmatrix}$.

Розв'язання.

Очевидно, що з вказаного переліку прямокутною буде матриця б), одинична – г); верхня трикутна матриця – д), нуль-матрия – а) та нижня трикутна – в).

2. Виконати дії над матрицями.

Дано:

$$A=\begin{pmatrix}-3 & 5 & 6\\ 0 & 7 & -1\\ 9 & 2 & 4\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}11 & -8 & 3\\ 5 & -3 & 15\\ 18 & 21 & -14\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -2 & 3\end{pmatrix}\quad D=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

Знайти:

2.1. $A+B$;

2.2. $5C+2D$;

2.3. $A-B$;

2.4. Записати до матриць A,C транспоновані матриці;

2.5. Які з матриць A,B,C,D є узгодженими?

2.6. AB^T;

2.7. $CD-DC$.

Розв'язання

2.1. Відомо, що матриці однакової розмірності додавати можна. За означенням, сумою матриць є матриця, елементи якої дорівнюють сумі відповідних елементів матриць, що додаються, тому:

$$A+B=\begin{pmatrix}-3 & 5 & 6\\ 0 & 7 & -1\\ 9 & 2 & 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}11 & -8 & 3\\ 5 & -3 & 15\\ 18 & 21 & -14\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-3+11 & 5+(-8) & 6+3\\ 0+5 & 7+(-3) & -1+15\\ 9+18 & 2+21 & 4+(-14)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8 & -3 & 9\\ 5 & 4 & 14\\ 27 & 23 & -10\end{pmatrix}.$$

2.2. Добутком матриці на число (скаляр) λ є матриця елементи якої мають вигляд (λa_{ij}), тому:

$$5C+2D=5\begin{pmatrix}1 & -1\\ -2 & 3\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\cdot 1 & 5\cdot(-1)\\ 5\cdot(-2) & 5\cdot 3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\cdot 0 & 2\cdot 1\\ 2\cdot 1 & 2\cdot 0\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}5 & -5\\ -10 & 15\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 2\\ 2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5+0 & -5+2\\ -10+2 & 15+0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & -3\\ -8 & 15\end{pmatrix}.$$

2.3. Щоб знайти різницю матриць, запишемо її так $A-B=A+(-1)\cdot B$, тому:

$$\begin{pmatrix}-3 & 5 & 6\\ 0 & 7 & -1\\ 9 & 2 & 4\end{pmatrix}+(-1)\begin{pmatrix}11 & -8 & 3\\ 5 & -3 & 15\\ 18 & 21 & -14\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-3 & 5 & 6\\ 0 & 7 & -1\\ 9 & 2 & 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}(-1)\cdot 11 & (-1)\cdot(-8) & (-1)\cdot 3\\ (-1)\cdot 5 & (-1)\cdot(-3) & (-1)\cdot 15\\ (-1)\cdot 18 & (-1)\cdot 21 & (-1)\cdot(-14)\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-3 & 5 & 6\\ 0 & 7 & -1\\ 9 & 2 & 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-11 & 8 & -3\\ -5 & 3 & -15\\ -18 & -21 & 14\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-3+(-11) & 5+8 & 6+(-3)\\ 0+(-5) & 7+3 & -1+(-15)\\ 9+(-18) & 2+(-21) & 4+14\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-14 & 13 & 3\\ -5 & 10 & -16\\ -9 & -19 & 18\end{pmatrix}.$$

Очевидно, що різниця матриць дорівнює різниці її елементів.

2.4. Транспонування матриці це дія над матрицею під час якої її стовпці та рядки міняються місцями. Тобто елементи стовпців матриці записуються як елементи рядків та навпаки. Використовується позначення A^T, B^T, C^T, D^T:

$$A^T=\begin{pmatrix}-3 & 0 & 9\\ 5 & 7 & 2\\ 6 & -1 & 4\end{pmatrix}\quad B^T=\begin{pmatrix}11 & 5 & 18\\ -8 & -3 & 21\\ 3 & 15 & -14\end{pmatrix}\quad C^T=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -1 & 3\end{pmatrix}\quad D^T=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}.$$

2.5. Матриці називаються узгодженими, якщо кількість стовпців першої матриці дорівнює кількості рядків другої матриці, тобто узгодженими будуть матриці A,B та C,D, а матриці A,C та B,D неузгоджені.

2.6. Дві матриці можна перемножити між собою тільки тоді, коли вони узгоджені. Оскільки матриці узгоджені, то за означенням добутком матриць є матриця елементи якої дорівнюють сумі добутків елементів i-того рядка на j-тий стовпець, тобто:

$$AB^T = \begin{pmatrix} -3 & 5 & 6 \\ 0 & 7 & -1 \\ 9 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 11 & 5 & 18 \\ -8 & -3 & 21 \\ 3 & 15 & -14 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -3\cdot 11 + 5\cdot(-8) + 6\cdot 3 & -3\cdot 5 + 5\cdot(-3) + 6\cdot 15 & -3\cdot 18 + 5\cdot 21 + 6\cdot(-14) \\ 0\cdot 11 + 7\cdot(-8) + (-1)\cdot 3 & 0\cdot 5 + 7\cdot(-3) + (-1)\cdot 15 & 0\cdot 18 + 7\cdot 21 + (-1)\cdot(-14) \\ 9\cdot 11 + 2\cdot(-8) + 4\cdot 3 & 9\cdot 5 + 2\cdot(-3) + 4\cdot 15 & 9\cdot 18 + 2\cdot 21 + 4\cdot(-14) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -33 - 40 + 18 & -15 - 15 + 90 & -54 + 105 - 84 \\ 0 - 56 - 3 & 0 - 21 - 15 & 0 + 147 + 14 \\ 99 - 16 + 12 & 45 - 6 + 60 & 162 + 42 - 56 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -55 & 60 & -33 \\ -59 & -36 & 161 \\ 95 & 99 & 148 \end{pmatrix}.$$

2.7. Щоб знайти $CD - DC$, потрібно пам’ятати, що операція множення матриць, взагалі кажучи, некомунікативна, тобто не завжди $CD \neq DC$, тому варто спочатку знайти добутки матриць CD, DC, а потім їх різницю.

$$CD = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 0 + (-1)\cdot 1 & 1\cdot 1 + (-1)\cdot 0 \\ -2\cdot 0 + 3\cdot 1 & -2\cdot 1 + 3\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix},$$

$$CD = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\cdot 1 + 1\cdot(-2) & 0\cdot(-1) + 1\cdot 3 \\ 1\cdot 1 + 0\cdot(-2) & 1\cdot(-1) + 0\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$CD - DC = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 - (-2) & 1 - 3 \\ 3 - 1 & -2 - (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

3. Обчислити добуток матриць $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 6 & 9 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Розв’язання

Матриці A і B узгоджені, оскільки кількість стовпців матриці A дорівнює кількості рядків матриці B і дорівнює 3, тому можна знайти їх добуток:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 6 & 9 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 7 + 4\cdot 6 + 3\cdot 2 & 1\cdot 8 + 4\cdot 9 + 3\cdot 1 \\ 2\cdot 7 + 0\cdot 6 + 5\cdot 2 & 2\cdot 8 + 0\cdot 9 + 5\cdot 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 7 + 24 + 6 & 8 + 36 + 3 \\ 14 + 0 + 10 & 16 + 0 + 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 37 & 47 \\ 24 & 21 \end{pmatrix}.$$

4. Обчислити NM, MN: $N=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 1\\ 1 & 3 & 1\end{pmatrix}, M=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1\\ -1 & 0 & 1\\ 5 & -1 & -3\end{pmatrix}.$

Розв'язання

Матриці N, M узгоджені, отже:

$$NM=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 1\\ 1 & 3 & 1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1\\ -1 & 0 & 1\\ 5 & -1 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2-2+5 & 1+0-1 & 1+2-3\\ -4-1+5 & 2+0-1 & 2+1-3\\ -2-3+5 & 1+0-1 & 1+3-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

$$MN=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1\\ -1 & 0 & 1\\ 5 & -1 & -3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 1\\ 1 & 3 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2+2+1 & -4+1+3 & -2+1+1\\ -1+0+1 & -2+0+3 & -1+0+1\\ 5-2-3 & 10-1-9 & 5-1-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

У результаті множення матриць NM і MN, отримали одиничну матрицю, а такі матриці називають оберненими.

Існує чимало спеціальних видів матриць. У багатьох розділах математики з'являються матриці певної структури, які мають деякі свої особливості. Розглянемо декілька їх видів:

Симетрична матриця

Симетрична матриця – матриця, у якої елементи симетричні відносно головної діагоналі (від верхнього лівого до нижнього правого кута) рівні, тобто $a_{ij}=a_{ji}$.

Наприклад, $R=\begin{pmatrix}\sin\pi & \sin\frac{\pi}{6} & \cos\frac{\pi}{6}\\ \cos\frac{\pi}{3} & \cos\pi & \sin\frac{\pi}{3}\\ \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{4} & tg\pi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0\end{pmatrix}.$

Ортогональна матриця

Ортогональна матриця – це невироджена матриця в якої рівні транспонована та обернена матриці.

5. Довести, що матриця $A=\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$ є ортогональною.

Розв'язання

Невироджена матриця A називається ортогональною, якщо $A^{-1}=A^T$. З означення випливає, що матриця A називається ортогональною, якщо $AA^T=A^TA=E$.

Знайдемо транспоновану матрицю до матриці A:

$$A^T=\begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}.$$

Знайдемо добуток AA^T:

$$AA^T=\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}\cos\alpha\cdot\cos\alpha+(-\sin\alpha)\cdot(-\sin\alpha) & \cos\alpha\cdot\sin\alpha+(-\sin\alpha)\cdot\cos\alpha \\ \sin\alpha\cdot\cos\alpha+\cos\alpha\cdot(-\sin\alpha) & \sin\alpha\cdot\sin\alpha+\cos\alpha\cdot\cos\alpha\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}\cos^2\alpha+\sin^2\alpha & 0 \\ 0 & \cos^2\alpha+\sin^2\alpha\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}=E.$$

Знайдемо добуток A^TA:

$$A^TA=\begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}\cos\alpha\cdot\cos\alpha+\sin\alpha\cdot\sin\alpha & \cos\alpha\cdot(-\sin\alpha)+\sin\alpha\cdot\cos\alpha \\ (-\sin\alpha)\cdot\cos\alpha+\cos\alpha\cdot\sin\alpha & (-\sin\alpha)\cdot(-\sin\alpha)+\cos\alpha\cdot\cos\alpha\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}\cos^2\alpha+\sin^2\alpha & 0 \\ 0 & \cos^2\alpha+\sin^2\alpha\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}=E.$$

Отже, $AA^T=A^TA=E$, тому $A^{-1}=A^T$, а, отже A є ортогональною.

Ідемпотентна матриця

Ідемпотентна матриця – це матриця квадрат якої дорівнює цій же матриці.

6. Довести, що матриця $A=\begin{pmatrix}2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3\end{pmatrix}$ є ідемпотентною.

Розв'язання

Матрицю A, що має властивість $A^2 = A\cdot A = A$ називають ідемпотентною матрицею.

Знайдемо A^2:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2\cdot 2+(-2)\cdot(-1)+(-4)\cdot 1 & 2\cdot(-2)+(-2)\cdot 3+(-4)\cdot(-2) & 2\cdot(-4)+(-2)\cdot 4+(-4)\cdot(-3) \\ (-1)\cdot 2+3\cdot(-1)+4\cdot 1 & (-1)\cdot(-2)+3\cdot 3+4\cdot(-2) & (-1)\cdot(-4)+3\cdot 4+4\cdot(-3) \\ 1\cdot 2+(-2)\cdot(-1)+(-3)\cdot 1 & 1\cdot(-2)+(-2)\cdot 3+(-3)\cdot(-2) & 1\cdot(-4)+(-2)\cdot 4+(-3)\cdot(-3) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} = A.$$

Отже, $A^2 = A$, тому матриця є ідемпотичною.

III. Завдання для самостійної роботи

1. Обчислити:

1.1. $-3A+2B,\ A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

1.2. $7A-B,\ A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 9 \\ 0 & -1 & 4 \\ 5 & -2 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 8 & 1 & -1 \\ 3 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$;

1.3. $AB,\ A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$;

1.4. $BA,\ A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 9 \\ 0 & -1 & 4 \\ 5 & -2 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 8 & 1 & -1 \\ 3 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$;

1.5. $AB, A=\begin{pmatrix} 8 & 5 & -4 \\ -5 & 6 & 9 \\ -3 & 7 & 4 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$;

1.6. $A^2, A=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$;

1.7. $2A-4B$, якщо $A=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 8 \\ 4 & -2 & 9 \\ 0 & 7 & 11 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & -7 & 8 \\ -3 & 6 & 10 \\ 12 & 7 & -6 \end{pmatrix}$;

1.8. $7A-3B$, якщо $A=\begin{pmatrix} -4 & 13 & 7 \\ 2 & -7 & 9 \\ 12 & 4 & -4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -4 & 16 & 11 \\ 2 & 14 & 20 \\ -8 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Знайти x_1 та x_2 з рівняння:

2.1. $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=5\begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix}+6\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -3 \\ -8 \end{pmatrix}$;

2.2. $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=(-2)\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}+4\begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix}-9\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

3. Обчислити добуток матриць:

3.1. $\begin{pmatrix} 2 & 9 \\ -4 & 11 \\ 8 & -6 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 1 & 5 & 8 & 13 \\ 3 & 2 & 0 & 10 \end{pmatrix}$;

3.2. $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 3 & -7 & 5 \\ 2 & 1 & 9 \\ 0 & 2 & 7 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 1 & 5 & 9 & 0 \\ -2 & 10 & 3 & 1 \\ 7 & 4 & -3 & 7 \end{pmatrix}$.

4. Знайти $A\times B$ та $B\times A$:

4.1. $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & -3 \end{pmatrix}$;

4.2. $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 0 & 9 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$.

5. Обчислити A^2-3B^TC, де A, B, C – задані матриці:

$A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & -1 \\ -2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 6 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

6. Обчислити:

6.1. $7A+2B-3C$, якщо $A=\begin{pmatrix} 3 & 7 & -3 \\ 2 & -2 & 0 \\ 4 & -5 & -2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 11 & 5 & -8 \\ 0 & 9 & -3 \\ -1 & -5 & -5 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

6.2. $\begin{pmatrix} 2 & -7 & 9 \\ 0 & 5 & 10 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 1 & 8 & -1 \\ 3 & -1 & 9 \\ 0 & 10 & 5 \end{pmatrix}$.

ВИЗНАЧНИКИ ТА ЇХ ВЛАСТИВОСТІ

I. Питання для теоретичної підготовки

1. Визначник. Властивості визначника.
2. Правила обчислення визначників другого та третього порядків.
3. Мінор, алгебраїчні доповнення. Розкладання визначника за будь-яким рядком (стовпцем). Обчислення визначників вищих порядків.
4. Обчислення визначника за допомогою елементарних перетворень.
5. Знаходження оберненої матриці за допомогою визначників.

II. Зразки розв'язування задач

1. Обчислити визначники матриць:

1.1. $A=(7)$;

1.2. $A=\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$;

1.3. $A=\begin{pmatrix} cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & cos\alpha \end{pmatrix}$;

1.4. $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$.

Розв'язання

1.1. Для матриці першого порядку значення визначника рівне значенню елемента цієї матриці: $|A|=|7|=7$.

1.2. Для матриці 2×2 значення визначника рівне різниці добутку елементів головної та побічної діагоналей:

$$|A|=\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=4\cdot 3-2\cdot(-2)=16.$$

1.3. $|A|=\begin{vmatrix} cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & cos\alpha \end{vmatrix}=cos\alpha\cdot cos\alpha-\sin\alpha\cdot(-\sin\alpha)=cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$.

1.4. *1 спосіб.* Скористаємося правилом трикутників:

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & 2 & 3\\ 1 & -2 & 4\end{vmatrix}=1\cdot2\cdot4+2\cdot(-2)\cdot(-1)+2\cdot3\cdot1-1\cdot2\cdot(-1)-2\cdot2\cdot4-3\cdot(-2)\cdot1=10.$$

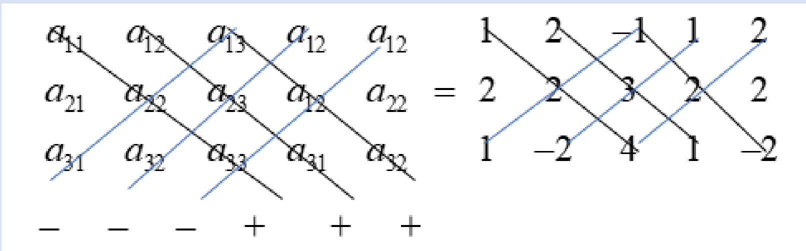
2 спосіб. Скористаємося зведенням до трикутного вигляду:

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & 2 & 3\\ 1 & -2 & 4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\text{від 2-го рядка віднімемо 1-ий рядок помножений на 2;}\\ \text{від 3-го рядка віднімемо 1-ий рядок}\end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & -2 & 5\\ 0 & -4 & 5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\text{до 3-го рядка додамо}\\ \text{2-ий рядок помножений на (-2)}\end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & -2 & 7\\ 0 & 0 & -5\end{vmatrix}=1\cdot(-2)\cdot(-5)=10.$$

3 спосіб. Скористаємося правилом діагоналей:



$$|A|=4\cdot2\cdot1+1\cdot3\cdot2+(-2)\cdot2\cdot(-1)-1\cdot2\cdot(-1)-(-2)\cdot3\cdot1-4\cdot2\cdot2=10.$$

2. Для матриці $A=\begin{pmatrix}-7 & 3 & 1\\ 2 & 1 & -1\\ 6 & 3 & 1\end{pmatrix}$ обчислити:

а) мінори елементів визначника матриці A;

б) алгебраїчні доповнення елементів визначника матриці A.

Розв'язання

а) Обчислимо мінори елементів визначника матриці A. Пригадаємо, що мінором M_{ij} елементу a_{ij} визначника n-го порядку називається визначник $(n-1)$-го порядку, одержаний з даного визначника шляхом викреслювання i-го рядка та j-го стовпця:

$$M_{11}=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 3 & 1\end{vmatrix}=4;\ M_{12}=\begin{vmatrix}2 & -1\\ 6 & 1\end{vmatrix}=8;\ M_{13}=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 6 & 3\end{vmatrix}=0;$$

$$M_{21}=\begin{vmatrix}3 & 1\\ 3 & 1\end{vmatrix}=0;\ M_{22}=\begin{vmatrix}-7 & 1\\ 6 & 1\end{vmatrix}=-13;\ M_{23}=\begin{vmatrix}-7 & 3\\ 6 & 3\end{vmatrix}=-39;$$

$$M_{31}=\begin{vmatrix}3 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-4;\ M_{32}=\begin{vmatrix}-7 & 1\\ 2 & -1\end{vmatrix}=5;\ M_{33}=\begin{vmatrix}-7 & 3\\ 2 & 1\end{vmatrix}=-13.$$

б) Обчислимо алгебраїчні доповнення. Оскільки алгебраїчне доповнення елементу a_{ij} обчислюється за формулою $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$, то скориставшись пунктом а) отримаємо:

Розв'язання

$$A_{11}=(-1)^{1+1}M_{11}=4;\ A_{12}=(-1)^{1+2}M_{12}=-8;\ A_{13}=(-1)^{1+3}M_{13}=0;$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}M_{21}=0;\ A_{22}=(-1)^{2+2}M_{22}=-13;\ A_{23}=(-1)^{2+3}M_{23}=39;$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}M_{31}=-4;\ A_{32}=(-1)^{3+2}M_{32}=-5;\ A_{33}=(-1)^{3+3}M_{33}=-13.$$

3. Обчислити визначник 4-го порядку $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 3 & 0\\ -2 & 3 & 1 & 0\\ 1 & 5 & 6 & -1\\ 3 & 0 & 6 & 4\end{pmatrix}$ матриці розклавши його за елементами:

а) першого рядка;

б) четвертого стовпця.

Розв'язання

а) Розкладемо визначник $\begin{vmatrix}2 & -1 & 3 & 0\\ -2 & 3 & 1 & 0\\ 1 & 5 & 6 & -1\\ 3 & 0 & 6 & 4\end{vmatrix}$ за елементами першого рядка:

$$|A|=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ -2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 6 & -1 \\ 3 & 0 & 6 & 4 \end{vmatrix}=2\cdot A_{11}+(-1)\cdot A_{12}+3\cdot A_{13}+0\cdot A_{14}=2\cdot A_{11}-A_{12}+3\cdot A_{13}.$$

Обчислимо алгебраїчні доповнення:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}M_{11}=\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 5 & 6 & -1 \\ 0 & 6 & 4 \end{vmatrix}=$$

$$=3\cdot6\cdot4+5\cdot6\cdot0+1\cdot(-1)\cdot0-0\cdot6\cdot0-5\cdot1\cdot4-3\cdot6\cdot(-1)=70;$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}M_{12}=-\begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 6 & -1 \\ 3 & 6 & 4 \end{vmatrix}=$$

$$=-((-2)\cdot6\cdot4+1\cdot6\cdot0+1\cdot(-1)\cdot3-3\cdot6\cdot0-1\cdot1\cdot4-(-2)\cdot6\cdot(-1))=67;$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}M_{13}=\begin{vmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 1 & 5 & -1 \\ 3 & 0 & 4 \end{vmatrix}=$$

$$=(-2)\cdot5\cdot4+1\cdot0\cdot0+3\cdot(-1)\cdot3-3\cdot5\cdot0-1\cdot3\cdot4-(-2)\cdot0\cdot(-1)=-61.$$

$$|A|=2\cdot A_{11}-A_{12}+3\cdot A_{13}=2\cdot70-67+3\cdot(-61)=-110.$$

б) Розкладемо визначник $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ -2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 6 & -1 \\ 3 & 0 & 6 & 4 \end{vmatrix}$ за елементами четвертого стовпця:

$$|A|=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ -2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 6 & -1 \\ 3 & 0 & 6 & 4 \end{vmatrix}=0\cdot A_{14}+0\cdot A_{24}+(-1)\cdot A_{34}+4\cdot A_{44}=-A_{34}+4\cdot A_{44}.$$

Обчислимо алгебраїчні доповнення:

$$A_{34}=(-1)^{3+4}M_{34}=-\begin{vmatrix}2&-1&3\\-2&3&1\\3&0&6\end{vmatrix}=$$

$$=-\big(2\cdot3\cdot6+(-2)\cdot0\cdot3+1\cdot(-1)\cdot3-3\cdot3\cdot3-(-2)\cdot(-1)\cdot6-0\cdot1\cdot2\big)=6;$$

$$A_{44}=(-1)^{4+4}M_{44}=\begin{vmatrix}2&-1&3\\-2&3&1\\1&5&6\end{vmatrix}=$$

$$=2\cdot3\cdot6+(-2)\cdot5\cdot3+1\cdot(-1)\cdot1-1\cdot3\cdot3-(-2)\cdot(-1)\cdot6-1\cdot5\cdot2=-26;$$

$$|A|=-A_{34}+4\cdot A_{44}=-6+4\cdot(-26)=-110.$$

4. Обчислити визначник: $\begin{vmatrix}3&2&0&1\\0&0&1&1\\1&4&2&-1\\-1&0&2&1\end{vmatrix}$.

Розв'язання

Оскільки другий рядок визначника містить два нулі, то розкладемо визначник за елементами другого рядка:

$$\begin{vmatrix}3&2&0&1\\0&0&1&1\\1&4&2&-1\\-1&0&2&1\end{vmatrix}=0\cdot A_{21}+0\cdot A_{22}+1\cdot A_{23}+1\cdot A_{24}=A_{23}+A_{24}.$$

Обчислимо алгебраїчні доповнення:

$$A_{23}=(-1)^{2+3}M_{23}=-\begin{vmatrix}3&2&1\\1&4&-1\\-1&0&1\end{vmatrix}.$$

Розкладемо визначник $\begin{vmatrix}3&2&1\\1&4&-1\\-1&0&1\end{vmatrix}$ за елементами третього рядка:

$$\begin{vmatrix}3&2&1\\1&4&-1\\-1&0&1\end{vmatrix}=(-1)\cdot A_{31}+0\cdot A_{32}+1\cdot A_{33}=-A_{31}+A_{33}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}2&1\\4&-1\end{vmatrix}+(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}3&2\\1&4\end{vmatrix}=$$

$$=-\big(2\cdot(-1)-4\cdot1\big)+\big(3\cdot4-2\cdot1\big)=16;$$

$$A_{23}=(-1)^{2+3}M_{23}=-16;$$

$$A_{24}=(-1)^{2+4}M_{24}=\begin{vmatrix}3&2&0\\1&4&2\\-1&0&2\end{vmatrix}.$$

Розкладемо визначник $\begin{vmatrix}3&2&0\\1&4&2\\-1&0&2\end{vmatrix}$ за елементами третього стовпця:

$$\begin{vmatrix}3&2&0\\1&4&2\\-1&0&2\end{vmatrix}=0\cdot A_{13}+2\cdot A_{23}+2\cdot A_{33}=2A_{23}+2A_{33}=(-1)^{2+3}\cdot 2\begin{vmatrix}3&2\\-1&0\end{vmatrix}+(-1)^{3+3}\cdot 2\begin{vmatrix}3&2\\1&4\end{vmatrix}=$$

$$=-2\cdot\left(3\cdot 0-2\cdot(-1)\right)+2\left(3\cdot 4-1\cdot 2\right)=16;$$

$$A_{24}=(-1)^{2+4}M_{24}=16.$$

$$\begin{vmatrix}3&2&0&1\\0&0&1&1\\1&4&2&-1\\-1&0&2&1\end{vmatrix}=A_{23}+A_{24}=-16+16=0.$$

5. Розв’язати рівняння: $\begin{vmatrix}x&1&3\\5&3&x\\1&4&3\end{vmatrix}=40.$

Розв’язання

Розкладемо визначник, що стоїть у лівій частині рівняння за елементами першого рядка:

$$\begin{vmatrix}x&1&3\\5&3&x\\1&4&3\end{vmatrix}=x\cdot A_{11}+1\cdot A_{12}+3A_{13}=(-1)^{1+1}x\cdot\begin{vmatrix}3&x\\4&3\end{vmatrix}+(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}5&x\\1&3\end{vmatrix}+(-1)^{1+3}3\cdot\begin{vmatrix}5&3\\1&4\end{vmatrix}=$$

$$=x\cdot(9-4x)-(15-x)+3(20-3)=9x-4x^2-15+x+51=-4x^2+10x+36.$$

Звідси одержимо:

$$-4x^2+10x+36=40;$$

$$-4x^2+10x-4=0;$$

$$2x^2-5x+2=0;$$

$$D=9,\ x_1=2,\ x_2=0{,}5.$$

Перевіримо одержані розв’язки:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}=2\cdot3\cdot3+5\cdot4\cdot3+1\cdot2\cdot1-1\cdot3\cdot3-5\cdot1\cdot3-4\cdot2\cdot2=40;$$

$$\begin{vmatrix} 0{,}5 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 0{,}5 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}=0{,}5\cdot3\cdot3+5\cdot4\cdot3+1\cdot0{,}5\cdot1-1\cdot3\cdot3-5\cdot1\cdot3-4\cdot0{,}5\cdot0{,}5=40.$$

6. Числа 204, 527 і 255 діляться на 17. Доведіть, що визначник $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 5 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 5 \end{vmatrix}$ також ділиться на 17.

Розв’язання

Помножимо перший стовпець на 100, другий на 10 і додамо до першого стовпця одержані стовпці:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 5 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 204 & 0 & 4 \\ 527 & 2 & 7 \\ 257 & 5 & 5 \end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} 12\cdot17 & 0 & 4 \\ 31\cdot17 & 2 & 7 \\ 15\cdot17 & 5 & 5 \end{vmatrix}=17\cdot\begin{vmatrix} 12 & 0 & 4 \\ 31 & 2 & 7 \\ 15 & 5 & 5 \end{vmatrix}.$$

Оскільки перший елементи першого стовпця діляться на 17, то визначник $\Delta=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 5 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix}$ ділиться на 17.

7. Обчислити визначник $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

Розв'язання

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \text{до елементів 2-го рядка додамо елемети 1-го рядка;} \\ \text{від елеметів 3-го рядка віднімемо елементи 1-го рядка, помножені на 2;} \\ \text{від елементів 4-го рядка віднімемо елементи 1-го рядка} \end{array} \right| =$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot A_{13} = (-1)^{1+3} M_{13} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \text{віднімемо від елементів 1-го рядка} \\ \text{елементи 2-го рядка помножені на 2} \end{array} \right| =$$

$$= \begin{vmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 3 \cdot A_{23} = 3 \cdot (-1)^{2+3} M_{23} = -3 \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3(3-0) = -9.$$

8. Обчислити визначник:

$$\Delta_{n+1} = \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ a_1 & \dots & a_1 & a_1 - b_1 & a_1 \\ a_2 & \dots & a_2 - b_2 & a_2 & a_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n - b_n & \dots & a_n & a_n & a_n \end{vmatrix} \left(a_k \neq 0, k = \overline{1,n} \right).$$

Розв'язання

Винесемо за знак визначника з другого рядка a_1, з третього рядка a_2,..., з $(n+1)$–го рядка a_n. Маємо:

$$\Delta_{n+1} = a_1 a_2 ... a_n \begin{vmatrix} 1 & ... & 1 & 1 & 1 \\ 1 & ... & 1 & 1-\frac{b_1}{a_1} & 1 \\ 1 & ... & 1-\frac{b_2}{a_2} & 1 & 1 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 1-\frac{b_n}{a_n} & ... & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

До кожного рядка, починаючи з другого, додамо перший рядок, помноженений на (-1).

Отримаємо:

$$\Delta_{n+1} = a_1 a_2 ... a_n \begin{vmatrix} 1 & ... & 1 & 1 & 1 \\ 0 & ... & 0 & -\frac{b_1}{a_1} & 0 \\ 0 & ... & -\frac{b_2}{a_2} & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ -\frac{b_n}{a_n} & ... & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= a_1 a_2 ... a_n (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \left(-\frac{b_1}{a_1}\right) \cdot \left(-\frac{b_2}{a_2}\right) ... \left(-\frac{b_n}{a_n}\right) = (-1)^n (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} b_1 b_2 ... b_n =$$

$$= (-1)^{\frac{2n+n^2+n}{2}} b_1 b_2 ... b_n = (-1)^{\frac{4n+n^2-n}{2}} b_1 b_2 ... b_n = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} b_1 b_2 ... b_n.$$

9. Використовуючи властивості визначників, обрахувати:

$$\begin{vmatrix} \sin^2\alpha & \cos^2\alpha & \cos 2\alpha \\ \sin^2\beta & \cos^2\beta & \cos 2\beta \\ \sin^2\gamma & \cos^2\gamma & \cos 2\gamma \end{vmatrix}.$$

Розв'язання

Від елементів другого стовпця віднімемо відповідні елементи першого стовпця:

$$\begin{vmatrix} \sin^2\alpha & \cos^2\alpha & \cos 2\alpha \\ \sin^2\beta & \cos^2\beta & \cos 2\beta \\ \sin^2\gamma & \cos^2\gamma & \cos 2\gamma \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin^2\alpha & \cos^2\alpha - \sin^2\alpha & \cos 2\alpha \\ \sin^2\beta & \cos^2\beta - \sin^2\beta & \cos 2\beta \\ \sin^2\gamma & \cos^2\gamma - \sin^2\gamma & \cos 2\gamma \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \sin^2\alpha & \cos 2\alpha & \cos 2\alpha \\ \sin^2\beta & \cos 2\beta & \cos 2\beta \\ \sin^2\gamma & \cos 2\gamma & \cos 2\gamma \end{vmatrix} = 0.$$

10. За допомогою елементарних перетворень знайти обернену матрицю:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання

Випишемо поруч з матрицею A одиничну матрицю третього порядку і здійснивши елементарні перетворення перетворимо матрицю A в одиничну:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left| \begin{array}{l} \text{до 2-го рядка додамо 1-ий помножений на } (-2); \\ \text{до 3-го рядка додамо 1-ий помножений на } (-1) \end{array} \right| \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left| \text{помножимо 2-ий на } \frac{1}{3} \right| \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left| \text{додамо до 1-го рядку 2-ий} \right| \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)\sim\left|\begin{array}{l} \text{додамо до 1-го рядку 3-ій помножений на } \left(-\frac{4}{3}\right); \\ \text{додамо до 2-го рядку 3-ій помножений на } \frac{2}{3} \end{array}\right|\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{4}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Матриця записана поруч з одиничною в останньому перетворенні і є оберненою матрицею:

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{5}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{4}{3} \\ -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Зробимо перевірку:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \frac{5}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{4}{3} \\ -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 1\cdot\frac{5}{3}+(-1)\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)+2\cdot(-1) & 1\cdot\frac{1}{3}+(-1)\cdot\frac{1}{3}+2\cdot 0 & 1\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)+(-1)\cdot\frac{2}{3}+2\cdot 1 \\ 2\cdot\frac{5}{3}+1\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)+2\cdot(-1) & 2\cdot\frac{1}{3}+1\cdot\frac{1}{3}+2\cdot 0 & 2\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)+1\cdot\frac{2}{3}+2\cdot 1 \\ 1\cdot\frac{5}{3}+(-1)\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)+3\cdot(-1) & 1\cdot\frac{1}{3}+(-1)\cdot\frac{1}{3}+3\cdot 0 & 1\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)+(-1)\cdot\frac{2}{3}+3\cdot 1 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=E\cdot$$

11. Знайти обернену матрицю A^{-1} до матриці A та перевірити умову $A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=E$:

$$A=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 3\\ 3 & 2 & 5\\ 2 & 5 & -4\end{pmatrix}.$$

Розв'язання

Знайдемо обернену матрицю за формулою:

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{vmatrix}A_{11} & A_{21} & A_{31}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{vmatrix}.$$

Обчислимо визначник матриці A:

$$|A|=\begin{vmatrix}-2 & 1 & 3\\ 3 & 2 & 5\\ 2 & 5 & -4\end{vmatrix}=$$

$$=(-2)\cdot 2\cdot(-4)+3\cdot 3\cdot 5+1\cdot 5\cdot 2-3\cdot 2\cdot 2-3\cdot 1\cdot(-4)-(-2)\cdot 5\cdot 5=121\neq 0.$$

Обчислимо алгебраїчні доповнення:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}M_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}2 & 5\\ 5 & -4\end{vmatrix}=-8-25=-33;$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}M_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}3 & 5\\ 2 & -4\end{vmatrix}=22;$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}M_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}3 & 2\\ 2 & 5\end{vmatrix}=11;$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}M_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}1 & 3\\ 5 & -4\end{vmatrix}=19;$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}M_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}-2 & 3\\ 2 & -4\end{vmatrix}=2;$$

$$A_{23}=(-1)^{2+3}M_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 2 & 5\end{vmatrix}=12;$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}M_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & 5\end{vmatrix}=-1;$$

$$A_{32}=(-1)^{3+2}M_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}-2 & 3\\ 3 & 5\end{vmatrix}=19;$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}M_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 3 & 2\end{vmatrix}=-7.$$

Знайдемо обернену матрицю:

$$A^{-1}=\frac{1}{121}\begin{pmatrix}-33 & 19 & -1\\ 22 & 2 & 19\\ 11 & 12 & -7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\dfrac{3}{11} & \dfrac{19}{121} & \dfrac{-1}{121}\\ \dfrac{2}{11} & \dfrac{2}{121} & \dfrac{19}{121}\\ \dfrac{1}{11} & \dfrac{12}{121} & \dfrac{-7}{121}\end{pmatrix}.$$

Перевіримо умову $A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=E$:

$$A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 3\\ 3 & 2 & 5\\ 2 & 5 & -4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-\dfrac{3}{11} & \dfrac{19}{121} & \dfrac{-1}{121}\\ \dfrac{2}{11} & \dfrac{2}{121} & \dfrac{19}{121}\\ \dfrac{1}{11} & \dfrac{12}{121} & \dfrac{-7}{121}\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-2\cdot\left(-\dfrac{3}{11}\right)+1\cdot\dfrac{2}{11}+3\cdot\dfrac{1}{11} & -2\cdot\dfrac{19}{121}+1\cdot\dfrac{2}{121}+3\cdot\dfrac{12}{121} & -2\cdot\left(\dfrac{-1}{121}\right)+1\cdot\dfrac{19}{121}+3\cdot\left(\dfrac{-7}{121}\right)\\ 3\cdot\left(-\dfrac{3}{11}\right)+2\cdot\dfrac{2}{11}+5\cdot\dfrac{1}{11} & 3\cdot\dfrac{19}{121}+2\cdot\dfrac{2}{121}+5\cdot\dfrac{12}{121} & 3\cdot\left(\dfrac{-1}{121}\right)+2\cdot\dfrac{19}{121}+5\cdot\left(\dfrac{-7}{121}\right)\\ 2\cdot\left(-\dfrac{3}{11}\right)+5\cdot\dfrac{2}{11}-4\cdot\dfrac{1}{11} & 2\cdot\dfrac{19}{121}+5\cdot\dfrac{2}{121}-4\cdot\dfrac{12}{121} & 2\cdot\left(\dfrac{-1}{121}\right)+5\cdot\dfrac{19}{121}-4\cdot\left(\dfrac{-7}{121}\right)\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=E.$$

$$A^{-1}\cdot A=\begin{pmatrix} -\frac{3}{11} & \frac{19}{121} & \frac{-1}{121} \\ \frac{2}{11} & \frac{2}{121} & \frac{19}{121} \\ \frac{1}{11} & \frac{12}{121} & \frac{-7}{121} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \\ 2 & 5 & -4 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} -\frac{3}{11}\cdot(-2)+\frac{19}{121}\cdot 3-\frac{1}{121}\cdot 2 & -\frac{3}{11}\cdot 1+\frac{19}{121}\cdot 2-\frac{1}{121}\cdot 5 & -\frac{3}{11}\cdot 3+\frac{19}{121}\cdot 5-\frac{1}{121}\cdot(-4) \\ \frac{2}{11}\cdot(-2)+\frac{2}{121}\cdot 3+\frac{19}{121}\cdot 2 & \frac{2}{11}\cdot 1+\frac{2}{121}\cdot 2+\frac{19}{121}\cdot 5 & \frac{2}{11}\cdot 3+\frac{2}{121}\cdot 5+\frac{19}{121}\cdot(-4) \\ \frac{1}{11}\cdot(-2)+\frac{12}{121}\cdot 3-\frac{7}{121}\cdot 2 & \frac{1}{11}\cdot 1+\frac{12}{121}\cdot 2-\frac{7}{121}\cdot 5 & \frac{1}{11}\cdot 3+\frac{12}{121}\cdot 5-\frac{7}{121}\cdot(-4) \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=E\,.$$

Отже умова $A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=E$ виконується.

III. Завдання для самостійної роботи

1. Обчислити визначник матриці A:

1.1. $A=(9)$;

1.2. $A=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}$;

1.3. $A=\begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$;

1.4. $A=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2}cos\alpha \\ cos\alpha & 1 \end{pmatrix}$;

1.5. $A=\begin{pmatrix} 2ab-b^2 & 1 \\ a^2 & 1 \end{pmatrix}$;

1.6. $A=\begin{pmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{pmatrix}$;

1.7. $A=\begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 4 & -2 & 5 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$;

1.8. $A=\begin{pmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & 1 \\ \sin\beta & \cos\beta & 1 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 1 \end{pmatrix}$.

2. Розв'язати рівняння:

2.1. $\begin{vmatrix} x & x+1 \\ -4 & x+1 \end{vmatrix}=0$;

2.2. $\begin{vmatrix} \cos 8x & -\sin 8x \\ \sin 8x & \cos 5x \end{vmatrix}=0$;

2.3. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & x+6 \\ x+8 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & -x \end{vmatrix}=40$.

3. Для матриці $A=\begin{pmatrix} 6 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 7 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ обчислити:

а) мінори елементів визначника матриці A;

б) алгебраїчні доповнення елементів визначника матриці A.

4. Обчислити визначник розклавши його за елементами:

а) другого стовпця $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & -5 & 4 \\ -1 & -2 & 3 & -2 \end{vmatrix}$;

б) третього рядка $\begin{vmatrix} 7 & 2 & 1 & 1 \\ 6 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 5 \end{vmatrix}$.

5. Довести, що визначник $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}$ ділиться на $x-y$, $y-z$, $z-x$.

6. Знайти значення λ, при якому визначник матриці рівний нулеві:

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 3 & 2-\lambda & -1 \\ 3 & -2 & 1-\lambda \end{pmatrix}.$$

7. Обчислити визначник матриці шляхом зведення його до трикутного вигляду:

7.1. $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$;

7.2. $\begin{vmatrix} x & a & a & \dots & a \\ a & x & a & \dots & a \\ a & a & x & \dots & a \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a & a & a & \dots & x \end{vmatrix}$.

8. Використовуючи означення визначника, обчислити:

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 7 & 3 & 2 & -5 \end{vmatrix}.$$

9. Користуючись властивостями визначників, обчислити:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \end{vmatrix}.$$

10. Знайти обернену матрицю A^{-1} до матриці A двома способами та перевірити умову $A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=E$:

$$A=\begin{pmatrix} 6 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ. МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

I. Питання для теоретичної підготовки

1. Ранг матриці.
2. Теорема Кронекера-Капеллі.
3. Метод Крамера розв'язування системи n рівнянь з n невідомими.
4. Матричний спосіб розв'язування системи лінійних рівнянь.
5. Метод Гауса (метод виключення змінних) розв'язування системи лінійних рівнянь.

II. Зразки розв'язування задач

1. Обчислити ранг матриці методом окантування мінорів:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання

Знайдемо мінор першого порядку відмінний від нуля: $M_1 = |a_{11}| = 2 \neq 0$. Розглянемо мінори другого порядку, що містять M_1:

$$M_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -4 + 4 = 0;$$

$$M_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -2 + 2 = 0;$$

$$M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 10 - 12 = -2 \neq 0.$$

Розглянемо мінори третього порядку, що містять M_{23}:

$$M_{31}=\begin{vmatrix}2 & -1 & 3\\ 4 & -2 & 5\\ 2 & -1 & 1\end{vmatrix}=2\cdot(-2)\cdot 1+4\cdot(-1)\cdot 3+2\cdot(-1)\cdot 5-$$

$$-2\cdot(-2)\cdot 3-2\cdot(-1)\cdot 5-1\cdot 4\cdot(-1)=0;$$

$$M_{32}=\begin{vmatrix}2 & 3 & -2\\ 4 & 5 & 1\\ 2 & 1 & 8\end{vmatrix}=2\cdot 5\cdot 8+4\cdot(-2)\cdot 1+3\cdot 1\cdot 2-2\cdot 5\cdot(-2)-4\cdot 3\cdot 8-1\cdot 1\cdot 2=0;$$

$$M_{33}=\begin{vmatrix}2 & 3 & 4\\ 4 & 5 & 7\\ 2 & 1 & 2\end{vmatrix}=2\cdot 5\cdot 2+4\cdot 4\cdot 1+3\cdot 7\cdot 2-2\cdot 5\cdot 4-4\cdot 3\cdot 2-1\cdot 7\cdot 2=0.$$

Оскільки всі мінори третього порядку, що містять M_{23}, виявилися рівними нулю, то ранг матриці A дорівнює 2: $r(A)=2$.

2. Обчислити ранг матриці $A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & -1 & -2 & 0\\ 2 & 2 & 6 & 0 & -4\\ 4 & 3 & 11 & 1 & -7\end{pmatrix}$ за допомогою елементарних перетворень матриці.

Розв'язування

За допомогою елементарних перетворень приведемо матрицю до трикутного вигляду:

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & -1 & -2 & 0\\ 2 & 2 & 6 & 0 & -4\\ 4 & 3 & 11 & 1 & -7\end{pmatrix}\sim\left|\begin{matrix}\text{поміняємо 1-ий}\\ \text{та 2-ий стопці}\end{matrix}\right|\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1 & -1 & -1 & -2 & 0\\ 2 & 2 & 6 & 0 & -4\\ 3 & 4 & 11 & 1 & -7\end{pmatrix}\sim\left|\begin{matrix}\text{помножимо 1-ий рядок на (-2)}\\ \text{та додамо до 2-ого;}\\ \text{помножимо 1-ий рядок на (-3)}\\ \text{та додамо до 3-ого;}\end{matrix}\right|\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1 & -1 & -1 & -2 & 0\\ 0 & 4 & 8 & 4 & -4\\ 0 & 7 & 14 & 7 & -7\end{pmatrix}\sim\left|\begin{matrix}\text{поділимо 2-ий рядок на 4;}\\ \text{поділимо 3-ій рядок на 7}\end{matrix}\right|\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1 & -1 & -1 & -2 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 2 & 1 & -1\end{pmatrix}\sim\left|\begin{array}{l}\text{помножимо 2-ий рядок на } (-1)\\ \text{та додамо до 3-ого}\end{array}\right|\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1 & -1 & -1 & -2 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Кількість ненульових рядків в останній матриці і буде рангом матриці, тобто $r(A)=2$.

3. Дослідити систему лінійних рівнянь на сумісність:

$$\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3=4;\\ 2x_1-x_2-x_3=3;\\ 3x_1+x_2+2x_3=5.\end{cases}$$

Розв’язання

Запишемо розширену матрицю заданої системи і за допомогою елементарних перетворень зведемо її до трикутного вигляду:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & -1 & -1 & 3\\ 3 & 1 & 2 & 5\end{array}\right)\sim\left|\begin{array}{l}\text{помножимо 1-ий рядок на } (-2)\\ \text{додамо до 2-ого;}\\ \text{помножимо 1-ий рядок на } (-3)\\ \text{додамо до 3-ого;}\end{array}\right|\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 3 & 4\\ 0 & -5 & -7 & -5\\ 0 & -5 & -7 & -7\end{array}\right)\sim\left|\begin{array}{l}\text{від 2-ого рядка}\\ \text{віднімемо 3-ій}\end{array}\right|\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 3 & 4\\ 0 & -5 & -7 & -5\\ 0 & 0 & 0 & 2\end{array}\right).$$

Оскільки ранг основної матриці дорівнює 2, а розширеної 3, то система лінійних рівнянь несумісна.

4. Дослідити систему лінійних рівнянь на сумісність та визначеність:

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=6;\\ 2x_1-x_2+x_3=3;\\ x_1-x_2+2x_3=5;\\ 3x_1-6x_2+5x_3=6.\end{cases}$$

Розв'язання

Випишімо розширену матрицю заданої системи і за допомогою елементарних перетворень зведемо її до трикутного вигляду:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 5 \\ 3 & -6 & 5 & 6 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ 1\text{-ий рядок}\times(-2)+2\text{-ий рядок} \\ 1\text{-ий рядок-}3\text{-ий рядок} \\ 1\text{-ий рядок}\times(-3)+4\text{-ий рядок} \end{array}\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -3 & -1 & -9 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -9 & 2 & -12 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ 2\text{-ий рядок}\times 2+3\text{-ий рядок}\times 3 \\ 2\text{-ий рядок}\times(-3)+4\text{-ий рядок} \end{array}\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -3 & -1 & -9 \\ 0 & 0 & -5 & -15 \\ 0 & 0 & 5 & 15 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ \\ 3\text{-ий рядок+}4\text{-ий рядок} \end{array}\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -3 & -1 & -9 \\ 0 & 0 & -5 & -15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Ранг основної матриці $r(A)=3$ дорівнює рангу розширеної $r(\overline{A})=3$, то система лінійних рівнянь сумісна. Крім того система є визначеною, оскільки цей ранг дорівнює кількості невідомих $n=3$.

5. Розв'язати систему рівнянь методом Крамера: $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 2; \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 1; \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 2. \end{cases}$

Розв'язування

Знайдемо визначник матриці

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix};$$

$$\Delta=|A|=\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}=3\cdot 1\cdot 2+1\cdot(-1)\cdot 1+(-1)\cdot(-2)\cdot 2-$$

$$-2\cdot 1\cdot 1-1\cdot(-1)\cdot 2-(-1)\cdot(-2)\cdot 3=3\neq 0.$$

Отже, система лінійних рівнянь сумісна та визначена.

Обрахуємо визначники Δ_1, Δ_2, Δ_3 матриць, які отримуємо з матриці A шляхом заміни 1-го, 2-го та 3-го стовпця відповідно на стовпець вільних членів:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2\cdot 1\cdot 2 + (-1)\cdot 1\cdot 1 + (-1)\cdot(-2)\cdot 2 -$$

$$-2\cdot 1\cdot 2 - (-2)\cdot(-1)\cdot 2 - 1\cdot(-1)\cdot 2 = 3;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 3\cdot 1\cdot 2 + 2\cdot 1\cdot 1 + 2\cdot(-2)\cdot 2 -$$

$$-2\cdot 1\cdot 1 - 2\cdot 1\cdot 2 - (-2)\cdot 2\cdot 3 = 6;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 3\cdot 1\cdot 2 + (-1)\cdot 1\cdot 2 + (-1)\cdot 1\cdot 2 -$$

$$-2\cdot 1\cdot 2 - 1\cdot(-1)\cdot 3 - 1\cdot(-1)\cdot 2 = 3.$$

Згідно з правилом Крамера: $x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta}$, $x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta}$, $x_3 = \dfrac{\Delta_3}{\Delta}$.

Отже $x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = \dfrac{3}{3} = 1$, $x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = \dfrac{6}{3} = 2$, $x_3 = \dfrac{\Delta_3}{\Delta} = \dfrac{3}{3} = 1$.

6. Розв’язати систему рівнянь матричним способом:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 4; \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = 0; \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 5. \end{cases}$$

Розв’язання

Знайдемо визначник матриці

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix};$$

$$|A|=\begin{vmatrix}1&-1&2\\-1&1&2\\1&-2&2\end{vmatrix}=1\cdot1\cdot2+(-1)\cdot(-2)\cdot2+(-1)\cdot2\cdot1-$$

$$-1\cdot1\cdot2-1\cdot(-2)\cdot2-(-1)\cdot(-1)\cdot2=4\neq0.$$

Отже, система лінійних рівнянь сумісна і визначена.

Запишемо систему рівнянь у матричній формі

$$A\cdot X=B:\begin{pmatrix}1&-1&2\\-1&1&2\\1&-2&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\0\\5\end{pmatrix}.$$

Пригадаємо, що $A^{-1}\cdot A\cdot X=A^{-1}\cdot B\Rightarrow X=A^{-1}\cdot B$.

Знайдемо матрицю обернену до матриці A. Для цього обрахуємо алгебраїчні доповнення:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}M_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1&2\\-2&2\end{vmatrix}=6;$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}M_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}-1&2\\1&2\end{vmatrix}=4;$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}M_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}-1&1\\1&-2\end{vmatrix}=1;$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}M_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}-1&2\\-2&2\end{vmatrix}=-2;$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}M_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1&2\\1&2\end{vmatrix}=0;$$

$$A_{23}=(-1)^{2+3}M_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1&-1\\1&-2\end{vmatrix}=1;$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}M_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}-1&2\\1&2\end{vmatrix}=-4;$$

$$A_{32}=(-1)^{3+2}M_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1&2\\-1&2\end{vmatrix}=-4;$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}M_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{vmatrix}=0.$$

Знайдемо обернену матрицю:

$$A^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}6 & -2 & -4\\ 4 & 0 & -4\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -1\\ 1 & 0 & -1\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0\end{pmatrix}.$$

Тоді

$$X=A^{-1}\cdot B=\begin{pmatrix}\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -1\\ 1 & 0 & -1\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}4\\ 0\\ 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\cdot 4+\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot 0+(-1)\cdot 5\\ 1\cdot 4+0\cdot 0+(-1)\cdot 5\\ \frac{1}{4}\cdot 4+\frac{1}{4}\cdot 0+0\cdot 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 1\end{pmatrix}.$$

Отже, $X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 1\end{pmatrix}$. Звідси $x_1=1$, $x_2=-1$, $x_3=1$.

7. Розв'язати систему рівнянь методом Гаусса:

7.1. $\begin{cases}x_1+2x_2+5x_3=-9,\\ x_1-x_2+3x_3=2,\\ 3x_1-6x_2-x_3=25.\end{cases}$

7.2. $\begin{cases}x_1-5x_2-8x_3+x_4=3,\\ 3x_1+x_2-3x_3-5x_4=1,\\ x_1 \qquad -7x_3+2x_4=-5,\\ 11x_2+20x_3-9x_4=2.\end{cases}$

Розв'язання

Метод Гаусса полягає в послідовному виключенні невідомих елементів шляхом еквівалентних перетворень розширеної матриці системи рівнянь та зведення її до ступінчатого вигляду або одиничної матриці.

7.1. Запишемо розширену матрицю системи та перетворимо її:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 5 & -9\\ 1 & -1 & 3 & 2\\ 3 & -6 & -1 & 25\end{array}\right)\begin{matrix}1p(-1)+2p\\ 1p(-3)+3p\end{matrix}\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 5 & -9\\ 0 & -3 & -2 & 11\\ 0 & -12 & -16 & 52\end{array}\right)2p(-4)+3p\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 5 & -9\\ 0 & -3 & -2 & 11\\ 0 & 0 & -8 & 8\end{array}\right).$$

Таким чином, прийшли до такої системи рівнянь

$$\begin{cases} x_1+2x_2+5x_3=-9, \\ \quad -3x_2-2x_3=11, \\ \qquad -8x_3=8, \end{cases}$$

з останнього рівняння системи $-8x_3=8$ можна легко знайти $x_3=-1$. Знайдене невідоме підставити у друге рівняння системи $-3x_2-2x_3=11$ так отримаємо $x_2=-3$. Далі x_2, x_3 підставити у перше рівняння системи та обчислити $x_1=2$.

Отже система має єдиний розв'язок, який має вигляд (2;–3;–1).

7.2. Перетворимо розширену матрицю системи рівнянь:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -5 & -8 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -3 & -5 & 1 \\ 1 & 0 & -7 & 2 & -5 \\ 0 & 11 & 20 & -9 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ 1p(-3)+2p \\ 1p(-1)+3p \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -5 & -8 & 1 & 3 \\ 0 & 16 & 21 & -8 & -8 \\ 0 & 5 & 1 & 1 & -8 \\ 0 & 11 & 20 & -9 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ 3p(-21)+2p \\ 3p(-20)+4p \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -5 & -8 & 1 & 3 \\ 0 & -89 & 0 & -29 & 160 \\ 0 & 5 & 1 & 1 & -8 \\ 0 & -89 & 0 & -29 & 162 \end{array}\right) 2p(-1)+4p \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -5 & -8 & 1 & 3 \\ 0 & -89 & 0 & -29 & 160 \\ 0 & 5 & 1 & 1 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right).$$

Отримали систему у якій 0 = 2. Отже вихідна система несумісна, тобто розв'язків немає.

III. Завдання для самостійної роботи

1. Обчислити ранг матриці:

1.1. $A=\begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 6 & -2 & -4 \\ -12 & 4 & 8 \end{pmatrix}$;

1.2. $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 6 & -1 & -10 \end{pmatrix}$;

1.3. $A=\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 8 & -3 & 1 \\ 2 & 0 & 6 \end{pmatrix}$;

1.4. $A=\begin{pmatrix} 4 & 7 & 2 \\ -1 & 0 & 6 \\ 8 & 14 & 4 \end{pmatrix}$;

1.5. $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -2 & 3\\ 3 & -1 & 2 & 1\\ 7 & 0 & 2 & 5\end{pmatrix}$;

1.6. $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 3\\ 6 & -2 & 0\\ 3 & 0 & 1\end{pmatrix}$;

1.7. $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -5 & 3\\ 2 & 5 & -6 & -1\\ 5 & 12 & -17 & 1\end{pmatrix}$;

1.8. $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -2 & 3\\ 3 & -1 & 2 & 1\\ 7 & 0 & 2 & 5\end{pmatrix}$.

2. Транспонувати матрицю та знайти ранг A та A^{T}:

2.1. $A=\begin{pmatrix}6 & 8 & 9 & 4\\ -1 & -2 & 7 & 0\end{pmatrix}$;

2.2. $A=\begin{pmatrix}7 & 5 & -2 & 4\\ 2 & 8 & 0 & 10\\ 3 & -1 & 8 & 11\\ 4 & -3 & 7 & 12\end{pmatrix}$.

3. За допомогою теореми Крокенекера-Капеллі дослідити систему на сумісність, несумісність. Якщо система сумісна дослідити її на визначеність та невизначеність.

3.1. $\begin{cases}2x_1-x_2+3x_3+2x_4=2,\\ 3x_1-4x_2+x_3-3x_4=1,\\ 5x_1-6x_2+2x_3-x_4=0,\\ 6x_1-2x_2-x_3+3x_4=2;\end{cases}$

3.2. $\begin{cases}x_1-x_2+0\cdot x_3=10,\\ 2x_1+x_2-x_3=6,\\ x_1+2x_2+3x_3=7;\end{cases}$

3.3. $\begin{cases}-4x_1+2x_2-2x_3+4x_4=-2,\\ 2x_1-x_2+x_3-2x_4=1,\\ 4x_1-2x_2+2x_3+3x_4=3;\end{cases}$

3.4. $\begin{cases}x+y+z=2,\\ 2x-3y-z=5,\\ x+y-z=7.\end{cases}$

4. Розв’язати систему рівнянь за формулами Крамера

4.1. $\begin{cases}4x_1-3x_2-x_3=5,\\ -2x_1+4x_2+x_3=-3,\\ 3x_1-7x_2-3x_3=6;\end{cases}$

4.2. $\begin{cases}x_1+2x_2-x_3=0,\\ 4x_1-x_2+2x_3=12,\\ -2x_1-4x_2+x_3=-2;\end{cases}$

5. Розв’язати систему рівнянь матричним методом

5.1. $\begin{cases}x_1+2x_2+5x_3=-9,\\ x_1-x_2+3x_3=2,\\ 3x_1-6x_2-x_3=25.\end{cases}$

5.2. $\begin{cases}2x_1-3x_2+x_3=-6;\\ 3x_1+4x_2-2x_3=20;\\ 5x_1-6x_2+4x_3=-12.\end{cases}$

6. Розв’язати систему рівнянь методом Гаусса:

6.1. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 5, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 3, \\ 5x_1 + 2x_2 - 6x_3 = 3; \end{cases}$

6.2. $\begin{cases} -2x_1 + 4x_2 - x_3 = 1, \\ 5x_1 - 0 \bullet x_2 + 2x_3 = 8, \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -3; \end{cases}$

6.3. $\begin{cases} x_1 + 5x_2 - 3x_3 = -12, \\ -2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 6, \\ 7x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0; \end{cases}$

6.4. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = -13, \\ -x_1 + 5x_2 - 7x_3 = -27. \end{cases}$

7. Дослідити систему лінійних рівнянь на сумісність та визначеність. Якщо система сумісна то знайти її розв’язок.

5.1. $\begin{cases} 4x_1 - x_2 - x_3 = 2, \\ 3x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 4, \\ -2x_1 - x_2 - x_3 = -4, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 2; \end{cases}$

5.2. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ -4x_1 + x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 + 7x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 0; \end{cases}$

5.3. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 4; \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = 0; \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 5. \end{cases}$

ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ

Завдання 1. Обчислити $A^2 - 2B^T \cdot C$, де A, B, C – задані матриці.

Варіанти

1. $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 2 & 5 & -1 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 6 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$;

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 4 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$;

3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$;

4. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;

5. $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -2 \\ 5 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;

6. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$;

7. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 6 & 2 & 1 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$;

8. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$;

9. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$;

10. $A=\begin{pmatrix}5 & 1 & -2\\ 2 & 0 & -1\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 2 & 3\\ 1 & 4 & 0\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}3 & 0 & 1\\ 2 & 1 & -2\end{pmatrix}$;

11. $A=\begin{pmatrix}2 & 2 & -1\\ 2 & 4 & -1\\ -3 & 2 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 3\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}-2 & 3 & -1\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}$;

12. $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 2 & 3 & 1\\ 2 & 4 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 3 & 1 & -1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}3 & 2 & -1\\ 0 & 5 & -2\end{pmatrix}$;

13. $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & -2\\ 2 & 6 & -1\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\ 0 & 4 & 2\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}3 & 3 & -1\\ -4 & 2 & 0\end{pmatrix}$;

14. $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ 0 & -1 & -1\\ -2 & 3 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 0\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}5 & 2 & -1\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}$;

15. $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & -2\\ 2 & 0 & -1\\ 1 & 2 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 6 & -1\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}5 & 0 & -1\\ 2 & -2 & 2\end{pmatrix}$;

16. $A=\begin{pmatrix}5 & 1 & -2\\ 2 & -1 & 0\\ 0 & 4 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 1 & 0\\ -1 & 1 & -2\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}2 & -4 & -1\\ 0 & 5 & 5\end{pmatrix}$;

17. $A=0\begin{pmatrix}2 & -1 & 5\\ 2 & 0 & -1\\ -2 & 1 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 7 & 1 & 2\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}-1 & 0 & -1\\ 0 & 2 & 2\end{pmatrix}$;

18. $A=\begin{pmatrix}5 & 1 & -2\\ -1 & 0 & -1\\ 2 & 3 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 3 & 0\\ 4 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}-4 & 5 & -1\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}$;

19. $A=\begin{pmatrix}6 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 2\\ -2 & 0 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & -2 & 0\\ 3 & 5 & 2\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}0 & 3 & -1\\ 1 & 3 & 1\end{pmatrix}$;

20. $A=\begin{pmatrix}2 & 2 & -1\\ 0 & 3 & -1\\ -2 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 4 & 1 & -2\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}0 & 2 & 1\\ 5 & 3 & -2\end{pmatrix}$;

21. $A=\begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$;

22. $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 0 & -3 & 5 \end{pmatrix}$;

23. $A=\begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$;

24. $A=\begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$;

25. $A=\begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Завдання 2. Обчислити детермінант четвертого порядку.

Варіанти

1. $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 3 & 2 \\ 5 & 2 & -3 & -2 \end{vmatrix}$;

2. $\begin{vmatrix} 2 & 5 & 5 & -1 \\ 3 & 2 & 3 & -2 \\ 1 & 3 & -2 & 0 \\ -2 & 5 & 0 & 3 \end{vmatrix}$;

3. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 & 3 \\ 4 & 0 & 4 & 1 \\ 3 & -3 & 4 & -2 \\ 2 & 6 & 0 & 3 \end{vmatrix}$;

4. $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 & -3 \\ 1 & 3 & 4 & 0 \\ 1 & 5 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & 5 & -4 \end{vmatrix}$;

5. $\begin{vmatrix} 5 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & -3 & -2 & 3 \end{vmatrix}$;

6. $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 03 & -2 & 1 \\ 5 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 7 & 1 \end{vmatrix}$;

7. $\begin{vmatrix} 5 & 6 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 & 5 \\ -2 & 2 & 0 & -3 \\ 4 & -3 & -3 & 0 \end{vmatrix}$;

8. $\begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 6 \\ 0 & 2 & 3 & 3 \end{vmatrix}$;

9. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 3 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 1 & 3 \end{vmatrix}$;

10. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 & 2 \\ 5 & 5 & 4 & 3 \\ -2 & 8 & 6 & 1 \\ 3 & -2 & 0 & 3 \end{vmatrix}$;

11. $\begin{vmatrix} 4 & -2 & -3 & 1 \\ 3 & 4 & 4 & -2 \\ 5 & 0 & 2 & 2 \\ 6 & -4 & 2 & 0 \end{vmatrix}$;

12. $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 & -2 \\ 4 & 5 & -2 & -1 \\ -1 & -3 & 6 & 1 \\ 5 & 0 & 4 & 2 \end{vmatrix}$;

13. $\begin{vmatrix} 5 & 1 & 3 & 4 \\ -3 & -2 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & -3 \end{vmatrix}$;

14. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ -2 & 3 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & -3 & 0 \end{vmatrix}$;

15. $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 & 1 \\ 5 & -2 & 1 & -3 \\ 2 & 3 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$;

16. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & -1 \\ 4 & -2 & 0 & -3 \end{vmatrix}$;

17. $\begin{vmatrix} 4 & -1 & -3 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & -2 \\ 3 & 5 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & -3 & 4 \end{vmatrix}$;

18. $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 4 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$;

19. $\begin{vmatrix} 4 & 3 & -2 & 1 \\ 4 & -2 & 5 & 0 \\ 2 & 6 & 3 & -2 \\ 2 & -3 & 1 & 3 \end{vmatrix}$;

20. $\begin{vmatrix} 4 & 6 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \\ 4 & 5 & 1 & 3 \\ 6 & 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}$;

21. $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 & -2 \\ -2 & 4 & 3 & -1 \\ 3 & 6 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 3 & 1 \end{vmatrix}$;

22. $\begin{vmatrix} 1 & 5 & -6 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 2 \\ -2 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 3 & 0 \end{vmatrix}$;

23. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 2 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \\ -1 & 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}$;

24. $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 6 & -7 & -2 \\ 3 & 4 & 5 & 3 \\ -1 & 4 & 2 & 0 \end{vmatrix}$;

25. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & -2 \\ 4 & 3 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 0 & 6 \end{vmatrix}$.

Завдання 3. Розв'язати систему рівнянь трьома методами:

1) матричним методом;

2) за формулами Крамера;

3) методом Гаусса.

Варіанти

1. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0; \\ 4x_1 - x_2 + 2x_3 = 12; \\ -2x_1 - 4x_2 + x_3 = -2. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0; \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 6; \\ 7x_1 - x_2 - x_3 = 4. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 7; \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 5; \\ 7x_1 - 4x_2 - x_3 = 10. \end{cases}$

4. $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 - x_3 = 5; \\ -2x_1 + 4x_2 + x_3 = -3; \\ 3x_1 - 7x_2 - 3x_3 = 6. \end{cases}$

5. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 8; \\ -2x_1 - x_2 + x_3 = -2; \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 10. \end{cases}$

6. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = 10; \\ -2x_1 + 4x_2 - x_3 = -5; \\ 3x_1 - 7x_2 + x_3 = 6. \end{cases}$

7. $\begin{cases} 4x_1 + x_2 - 5x_3 = 7; \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 7; \\ 8x_1 - x_2 - 4x_3 = 20. \end{cases}$

8. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -4; \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 = 3; \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = -6. \end{cases}$

9. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -1; \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 7; \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = 4. \end{cases}$

10. $\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = 5; \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 = -7; \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 = -5. \end{cases}$

11. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2; \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 = 1; \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 = -1. \end{cases}$

12. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1; \\ x_1 - 5x_2 + 3x_3 = -1; \\ -x_1 + x_2 - 3x_3 = -3. \end{cases}$

13. $\begin{cases} -2x_1 + x_2 - x_3 = -3; \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 4; \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

14. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 6x_3 = 8; \\ x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 0; \\ -x_1 + 7x_2 - 3x_3 = 3. \end{cases}$

15. $\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 6x_3 = 7; \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 = 2; \\ x_1 + 7x_2 - 3x_3 = -2. \end{cases}$

16. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0; \\ -4x_1 + x_2 + 3x_3 = 0; \\ x_1 + 7x_2 - x_3 = 7. \end{cases}$

17. $\begin{cases} -4x_1 + x_2 - x_3 = 0; \\ x_1 - 3x_2 - x_3 = -4; \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 1. \end{cases}$

18. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 4; \\ -3x_1 - 7x_2 - 2x_3 = -1; \\ x_1 - x_2 - 3x_3 = 4. \end{cases}$

19. $\begin{cases} -5x_1 + 7x_2 + x_3 = 3; \\ x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 1; \\ 2x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 3. \end{cases}$

20. $\begin{cases} 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 2; \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 = 2; \\ -x_1 + x_2 - x_3 = -1. \end{cases}$

21. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 5x_3 = -4; \\ -3x_1 + x_2 + x_3 = -6; \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 = 6. \end{cases}$

22. $\begin{cases} 4x_1 - x_2 + 3x_3 = 1; \\ -2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -4; \\ x_1 - 6x_2 - 3x_3 = 4. \end{cases}$

23. $\begin{cases} x_1 - 12x_2 + 4x_3 = 6; \\ -3x_1 - x_2 + 5x_3 = -1; \\ x_1 - x_2 - x_3 = 1. \end{cases}$

24. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 = -2; \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = -1; \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 6. \end{cases}$

25. $\begin{cases} 4x_1 - x_2 - x_3 = 2; \\ 3x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 4; \\ -2x_1 - x_2 - x_3 = -4. \end{cases}$

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Вища математика / за ред. В. П. Дубовика, І. І. Юрика. Київ: А.С.К., 2001. 480 с.
2. Тевяшев А. Д., Литвин О. Г., Кривошеєва Г. М. Вища математика у прикладах і задачах: навч. посіб. Ч. 2. Інтегральне числення функції однієї змінної. Диференціальне та інтегральне числення функцій багатьох змінних. 2-е вид., доп. і доопр. Київ: Кондор, 2005. 460 с.
3. Тевяшев А. Д., Литвин О. Г., Кривошеєва Г. М. Вища математика у прикладах і задачах: навч. посіб. Ч.4. Аудиторні контрольні роботи. Індивідуальні завдання. Київ: Кондор, 2006. 556 с.
4. Валєєв К. Г. Вища математика: навч.-метод. посібник для самост. вивч. дисц. Київ: КНЕУ, 2002. 606 с.
5. Валєєв К. Г., Джалладова І. А., Лютий О. І. Вища математика: навч.-метод. посібник для самост. вивч. дисц. 2-е вид., перероб. і доп. Київ: КНЕУ, 2002. 606 с.
6. Бубняк Т. І. Вища математика : навч. посіб. Львів: Новий світ – 2000, 2004. 434 с.
7. Васильченко І. П. Вища математика : навчальний підручник. Київ: Знання, 2007. 454 с.
8. Дубовик В. П., Юрик В. П. Вища математика: навч. посіб. Київ: А. С. К., 2009. 647 .
9. Дубовик В. П., Юрик І. І. , Вовкодав І. П. Клименко Р. К. та ін. Вища математика: зб. задач: навч. посібник. Київ: А.С.К., 2005. 480 с.
10. Коваленко І. П. Вища математика: навч. посіб. Київ: Вища школа, 2006. 343 с.
11. Копитко Б. І., Мильо О. Я., Цаповська Ж. Я. Вища математика. Елементи лінійної алгебри і аналітичної геометрії. Львів: ЛНУ ім. І. Франка, 2011. 280 с.
12. Клепко В. Ю., Голець В. Л. Вища математика в прикладах і задачах: навчальний посібник. 2-е видання. Київ: Центр учбової літератури, 2009. 594 с.

Міністерство освіти і науки України
Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка

НАВЧАЛЬНЕ ЕЛЕКТРОННЕ ВИДАННЯ

ГЕСЕЛЕВА Катерина Григорівна,
кандидат фізико-математичних наук, старший викладач кафедри математики Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка
ГУДИМА Уляна Василівна,
кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри математики Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка

ВИЩА МАТЕМАТИКА: ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНИЙ ПОСІБНИК

ЕЛЕКТРОННЕ ВИДАННЯ

Підписано 21.09.2023. Формат 60x84/16. Гарнітура «Cambria».
Об'єм даних 1,27 Мб. Обл.-вид. арк. 2,2. Зам. № 1059.

Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка,
вул. Огієнка, 61, м. Кам'янець-Подільський, 32300.
Свідоцтво серії ДК № 3382 від 05.02.2009 р.

Виготовлено в Кам'янець-Подільському національному
університеті імені Івана Огієнка,
вул. Огієнка, 61, м. Кам'янець-Подільський, 32300.