Міністерство освіти і науки України
Кам’янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка
Фізико-математичний факультет
Кафедра математики

Дипломна робота
магістра

з теми: “ЗАСТОСУВАННЯ ОРІЄНТОВАНИХ ГРАФІВ
В СУЧАСНІЙ АЛГЕБРІ”

Виконав: студент 2 курсу ступеня вищої освіти магістр, групи М1-М22 спеціальності 014 Середня освіта (Математика)
Бернацький Олександр

Керівник: **Зеленський О. В.,**
кандидат фізико-математичних наук, доцент

Рецензент: **Кріль С. О.,** кандидат фізико-математичних наук, доцент

Кам’янець-Подільський – 2023

ЗМІСТ

ВСТУП

Дипломна робота присвячена застосуванню теорії графів в теорії кілець. Теорія кілець – один з розділів сучасної алгебри. Черепичний порядок– це дискретно нормовано кільце з складними властивостями, які можна досліджувати використовуючи орієнтовані графи. Матриці показників – це квадратна матриця з цілими елементами – є більш простим об'єктом для вивчення, проте її орієнтований граф співпадає з орієнтованим графом черепичного порядку. Горенштейнова матриця – це підвид матриць показників, які містять підстановку Кириченка.

В дипломній роботі досліджуються характеристики горенштейнових матриць. Зокрема в роботі доведено, що для довільного натурального числа, що не перевищує n, існує квадратна горенштейнова матриця порядку n з даним індексом. При доведенні використовуються комбінаторні та геометричні методи доведення, а також методи теорії графів.

РОЗДІЛ I.

МАТРИЦІ ПОКАЗНИКІВ ТА БІНАРНІ ВІДНОШЕННЯ

Означення 1.1. Нехай A і B – дві множини. Розглянемо множину $C = \{(a,b) \mid a\in A, b\in B\}$. Ця множина називається **декартовим (прямим) добутком множин** A і B і позначається $A\times B$. Якщо множини A і B скінченні і складаються відповідно із m і n елементів, то очевидно, що C складається із mn елементів.

Нехай $A = \{1,2\}$ і $B = \{2,3,4\}$. Тоді $A\times B = \{(1,2), (1,3), (1,4), (2,2), (2,3), (2,4)\}$.

Елементами декартового добутку є **упорядковані пари**, де перший елемент пари належить першій множині, а другий – другій. Порядок входження пар може бути будь-яким, але розташування елементів у кожній парі визначається порядком множин, що перемножуються. Тому $A\times B\neq B\times A$, тобто декартовий добуток властивості комутативності не має.

Самостійний інтерес викликає випадок, коли множини A і B рівні між собою. Тоді елементами упорядкованої пари множини $A\times B$ будуть об'єкти, які складаються із двох не обов'язково різних елементів множини A. Також важливим залишається порядок елементів у парі. Для наведеної вище множини A, упорядковані пари (1,2) та (2,1) слід вважати різними.

Означення 1.2. Множина $C = \{(a_1,a_2) \mid a_1,a_2\in A\}$ всіх впорядкованих пар елементів із множини A називається **декартовим квадратом множини A** і позначається A^2.

Поняття упорядкованої пари можна розширити на упорядковані трійки елементів (a_1,a_2,a_3), упорядковані четвірки (a_1,a_2,a_3,a_4) і т.д. Взагалі, упорядкована n-ка елементів із множини A – це n не обов'язково різних між собою елементів із A, заданих в певній послідовності.

Наведене вище означення декартового добутку двох множин і декартового квадрату множини можна звичайним способом узагальнити і на випадок довільної скінченої сукупності множин.

Декартовим добутком $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ множин A_1, $A_2,\ldots,A_n$ називається сукупність послідовностей (тобто сукупність упорядкованих n-ок елементів) виду $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$, де $a_i \in A_i$, $i=1,..,n$.

Елементи декартового добутку називають іще **кортежами** або **вектором** довжиною n.

Якщо $A_1=A_2=\ldots=A_n=A$, то декартовий добуток $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ називається **декартовим добутком n-ї степені множини A (A^n)**.

Властивості асоціативності для декартового добутку не виконуються, але виконується властивість дистрибутивності відносно об'єднання, перерізу і відносного доповнення (різниці).

$$(A_1 \cup A_2) \times B = (A_1 \times B) \cup (A_2 \times B)$$

$$(A_1 \cap A_2) \times B = (A_1 \times B) \cap (A_2 \times B)$$

$$(A_1 \setminus A_2) \times B = (A_1 \times B) \setminus (A_2 \times B)$$

Операція декартового добутку відрізняється від операції, введених раніше, тим, що елементи добутку множин суттєво відрізняються від елементів співмножників і є об'єктами іншої природи. Наприклад, якщо R – множина дійсних чисел, то декартовий добуток $R \times R$ – множина всіх точок площини.

Означення 1.3. Довільна підмножина множини $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ називається **відношенням**, заданим або визначеним на множинах A_1, $A_2,\ldots,A_n$. Якщо $A_1=A_2=\ldots=A_n=A$, тобто річ йде про декартовий добуток n-ої степені множини A, то відношення R, яке задано на множинах $A_1=A_2=\ldots=A_n$, називається **n-арним відношенням на множині A**.

Коли $(a_1,a_2,\ldots,a_n) \in R$, то говорять, що елементи a_i $(i=1,..,n)$ знаходяться між собою у відношенні R або відношення R істинне для $a_1,a_2,\ldots,a_n$. Якщо $(a_1,a_2,\ldots,a_n) \notin R$, то вважають, що R хибне для $a_1,a_2,\ldots,a_n$. При n=1 відношення називається **унарним**, при n=2 – **бінарним**, при n=3 – **тернарним**.

Загалом відношення означає який-небудь зв'язок між предметами або поняттями. Приклади бінарних відношень: відношення належності, включення множин, рівності дійсних чисел, нерівності, бути братом, ділитися на яке-небудь натуральне число, входити до складу якого-небудь колективу.

Частіше за все бінарні відношення записуються у вигляді співвідношень aRb, де R – відношення, яке встановлює зв'язок між елементами $a\in A$ та $b\in B$.

Наведемо ще декілька прикладів бінарних відношень.

1. Якщо A – множина дійсних чисел, то $\{(x,y) \mid x\in A,\ y\in A,\ x^2+y^2=4\}$ є бінарне відношення на A.
2. Нехай A – множина товарів в магазині, а B – множина дійсних чисел. Тоді $\{(x,y) \mid x\in A, y\in B$, y – ціна x$\}$ – відношення множин A та B.
3. Якщо A – множина людей, то $\{(x,y) \mid x\in A, y\in A$, y є рідним x$\}$ є бінарне відношення на A.

Означення 1.4. Область визначення відношення R на A та B є множина всіх $a\in A$ таких, що для деяких $b\in B$ маємо $(a,b)\in R$. Іншими словами, область визначення R є множина всіх перших координат впорядкованих пар із R. **Множина значень** відношення R на A та B є множина всіх $b\in B$ таких, що $(a,b)\in R$ для деяких $a\in A$. Іншими словами, множина значень R є множина всіх других координат впорядкованих пар із R.

В наведених прикладах вище, у (1) область визначення і множина значень співпадають із множиною $\{t: t\in[-2;2]\}$. В (2) область визначення є множина A, а множина значень є множина всіх дійсних чисел, кожне з яких співпадає із ціною деякого товару в магазині. В (3) область визначення і множина є множиною всіх людей, які мають рідних.

Цікавими є такі окремі випадки відношень на A.

1. **Повне (універсальне)** відношення $U=A\times A$, яке справджується для будь-якої пари (a_1,a_2) елементів з A. Наприклад, U – відношення

"вчитися в одній групі" у множині A, де A – множина студентів групи IC-61.

2. **Тотожне (діагональне)** відношення I, що виконується тільки між елементом і ним самим. Наприклад, рівність на множині дійсних чисел.
3. **Порожнє** відношення, яке не задовольняє жодна пара елементів з A. Наприклад, R – відношення "бути братом" у множині A, де A – множина жінок.

Оскільки відношення, задані на A та B – підмножини $A \times B$, то для них визначені операції об'єднання, перерізу, різниці і доповнення (наступне справедливо для загального випадку відношення):

- $(a,b) \in R_1 \cup R_2 \Leftrightarrow (a,b) \in R_1$ або $(a,b) \in R_2$
- $(a,b) \in R_1 \cap R_2 \Leftrightarrow (a,b) \in R_1$ і $(a,b) \in R_2$
- $(a,b) \in R_1 \backslash R_2 \Leftrightarrow (a,b) \in R_1$ або $(a,b) \notin R_2$
- $(a,b) \in R' \Leftrightarrow (a,b) \notin R$ (заперечення)

Крім того, виділяються специфічні для відношень операції: обернення (симетризація) і композиція.

Означення 1.5. Нехай $R \subseteq A \times B$ є відношення на $A \times B$. Тоді відношення R^{-1} на $B \times A$ визначається наступним чином

$$R^{-1} = \{(b,a) \mid (a,b) \in R\}.$$

Іншими словами, $(b,a) \in R^{-1}$ тоді і тільки тоді, коли $(a,b) \in R$, або, що рівнозначно, $bR^{-1}a$ тоді і тільки тоді, коли aRb. Відношення R^{-1} називається **оберненим (симетричним) відношенням** до даного відношення R.

Перехід від R до R^{-1} здійснюється взаємною перестановкою координат кожної впорядкованої пари. Наприклад, відношення R - "x дільник y", має обернене до нього R^{-1} – "x кратне y". А відношення $R = \{(1,2), (3,4), (5,6)\}$ буде мати обернене відношення $R^{-1}=\{(2,1), (4,3), (6,5)\}$. При переході від R до R^{-1} область визначення стає областю значення і навпаки.

Означення 1.6. Нехай $R \subseteq A \times B$ – відношення на $A \times B$, а $S \subseteq B \times C$ – відношення на $B \times C$. **Композицією** відношень R та S є відношення $T \subseteq A \times C$, визначене наступним чином:

$$T = \{(a,c) \mid a \in A,\ c \in C \text{ та } \exists b \in B,\ (a,b) \in R \text{ та } (b,c) \in S\}.$$

Це відношення позначається $T = R^\circ S$.

Наприклад, нехай $R = \{(1,2), (3,4), (5,6)\}$ та $S=\{(2,3),(2,7),(4,1),(6,9)\}$, тоді $T_1 = R^\circ S = \{(1,3), (1,7), (3,1), (5,9)\}$ та $T_2 = S^\circ R = \{(2,4),(4,2)\}$. Інший приклад: $R = \{(x,x^2) \mid x \in N\}$ та $S = \{(x,x+2) \mid x \in N\}$, тоді $T_1 = R^\circ S = \{(x,x^2+2) \mid x \in N\}$ та $T_2 = S^\circ R = \{(x,(x+2)^2) \mid x \in N\}$.

Слід зазначити, що операція композиції відношень може бути і невизначеною, якщо в множині B для заданих елементів a із A та c із C не існує відповідного елемента b. Але якщо A=B=C, то ця операція завжди визначена.

Означення 1.6. Нехай R – відношення на множині A. Ступенем відношення R на множині A є його композиція із самим собою. Позначається:

$$R^n = R^\circ\ldots(n \text{ разів})\ldots{}^\circ R.$$

Відповідно, $R^0 = I$, $R^1 = R$, $R^2 = R^\circ R$ і взагалі $R^n = R^{n-1\circ}R$.

Теорема 1.7. Якщо R, R_1, R_2 – бінарні відношення, задані на множині A, то:

а) $(R_1 \cup R_2)^\circ R = R_1{}^\circ R \cup R_2{}^\circ R$; $R_1 \subseteq R_2 \Rightarrow R_1{}^\circ R \subseteq R_2{}^\circ R$.

б) $(R^{-1})^{-1} = R$; $R \subseteq R_1 \Rightarrow R^{-1} \subseteq R_1^{-1}$.

в) $(R_1{}^\circ R_2)^{-1} = (R_2^{-1})^\circ\ (R_1^{-1})$.

г) $(R_1 \cap R_2)^{-1} = (R_1^{-1}) \cap (R_2^{-1})$.

д) $(R^\circ R_1)^\circ R_2 = R^\circ(R_1{}^\circ R_2)$.

Доведення. а) Якщо $(a,b) \in (R_1 \cup R_2)^\circ R$, то існує елемент $c \in A$ такий, що $(a,c) \in R_1 \cup R_2$ і $(c,b) \in R$. Значить, $(a,c) \in R_1$ або $(a,c) \in R_2$ і $(c,b) \in R$. Звідси маємо, що $(a,b)\in R_1 \circ R$ або $(a,b)\in R_2 \circ R$, тобто $(a,b)\in R_1 \circ R \cup R_2 \circ R$. Обернене включення доводиться аналогічно.

Друга частина твердження випливає з того, що коли $R_1 \subseteq R_2$, то $R_1 \cup R_2 = R_2$, звідки маємо (в силу вище доведеного), що $(R_1 \cup R_2)\circ R = R_1 \circ R \cup R_2 \circ R = R_2 \circ R$, тобто $R_1 \circ R \subseteq R_2 \circ R$.

б) $(a,b)\in R^{-1} \Leftrightarrow (b,a)\in (R^{-1})^{-1} \Leftrightarrow (b,a)\in R$. Звідки випливає, що $(R^{-1})^{-1} = R$.

Для доведення другої частини зауважимо, що $(a,b)\in R \Leftrightarrow (b,a)\in R^{-1}$, $(a,b)\in R \Rightarrow (a,b)\in R_1 \Rightarrow (b,a)\in R^{-1} \Rightarrow (b,a)\in R_1^{-1}$, тобто $R^{-1}\subseteq R_1^{-1}$.

в) $(a,b)\in (R_1 \circ R_2)^{-1} \Leftrightarrow (b,a)\in (R_1 \circ R_2) \Rightarrow (\exists c\in A \mid (b,c)\in R_1$ і $(c,a)\in R_2)$. Але тоді $(c,b)\in R_1^{-1}$ і $(a,c)\in R_2^{-1} \Rightarrow (a,b)\in (R_2^{-1}\circ R_1^{-1})$, тобто $(R_1 \circ R_2)^{-1} \subseteq (R_2^{-1})\circ (R_1^{-1})$. Обернене включення доводиться аналогічно.

г) $(a,b)\in (R_1 \cap R_2)^{-1} \Leftrightarrow (b,a)\in R_1 \cap R_2 \Leftrightarrow (b,a)\in R_1$ і $(b,a)\in R_2 \Leftrightarrow (a,b)\in R_1^{-1}$ і $(a,b)\in R_2^{-1}$, тобто $(R_1 \cap R_2)^{-1} = (R_1^{-1})\cap (R_2^{-1})$.

д) Нехай $(a,d)\in (R\circ R_1)\circ R_2$, тоді існує $c\in A$ такий, що $(a,c)\in R\circ R_1$ і $(c,d)\in R_2$. Отже існує такий b, що $(a,b)\in R$, $(b,c)\in R_1$ і $(c,d)\in R_2$, а це означає, що $(b,d)\in R_1 \circ R_2$ і $(a,d)\in R\circ (R_1 \circ R_2)$, тобто $(R\circ R_1)\circ R_2 \subseteq R\circ (R_1 \circ R_2)$. Обернене включення доводиться аналогічно. ►

Означення 1.8. Розглянемо відношення $R\subseteq A\times B$. Нехай елемент $a_i\in A$. **Перерізом відношення А за елементом a_i** називається множина елементів b з B, для яких пара $(a_i,b)\in R$:

$$R(a_i) = \{b\in B \mid (a_i,b)\in R\}.$$

Множину всіх перерізів відношення R називають **фактором-множиною** множини B за відношенням R і позначають B/R. Вона повністю визначає відношення R.

Наприклад, нехай A={1,2,3}, B={2,3,4,5,6}. Відношення R = {(1,2), (1,4), (2,3), (3,3), (3,6)}. Очевидно, R(1) = {2,4}, R(2) = {3}, R(3) = {3,6}. Множина {R(1), R(2), R(3)} є фактор-множиною B/R.

Об’єднання перерізів за елементами деякої підмножини $C \subseteq A$ є перерізом R(C) відношення R за підмножиною C, тобто

$$R(C) = \bigcup_{a \in C} R(c) .$$

Так для C={1,2}, маємо R(C) = {2,3,4} = $R(1) \cup R(2)$.

З попереднього зрозуміло, що відношення може бути подане за допомогою фактор-множини. Розглянемо ще два способи подання скінченого бінарного відношення: за допомогою матриці та графа.

Матричний спосіб ґрунтується на поданні відношення $R \subseteq A \times B$ відповідною йому прямокутною таблицею (матрицею), що складається з нулів та одиниць, де рядки – перші координати, а стовпці – другі, причому на перетині i-го рядка і j-го стовпця буде 1, якщо виконується співвідношення $a_i R b_j$, або 0 – якщо воно не виконується.

Для наведеного вище відношення матриця буде мати такий вигляд:

	2	3	4	5	6
1	1	0	1	0	0
2	0	1	0	0	0
3	0	1	0	0	1

Матриця повного (універсального) відношення – це квадратна матриця, що складається лише з одиниць. Матриця тотожного (діагонального) відношення – це квадратна матриця, яка складається з нулів та одиниць по головній діагоналі. Матриця порожнього відношення – це квадратна матриця, що складається лише з нулів.

Відношення $R \subseteq A \times B$ можна також зображати за допомогою **орієнтованого графа**. Елементи множин A та B зображаються точками на площині (вершини), а впорядковані пари – лінією зі стрілкою (дуги), яка направлена від a до b, якщо aRb.

Для наведеного вище відношення граф буде мати наступний вигляд:

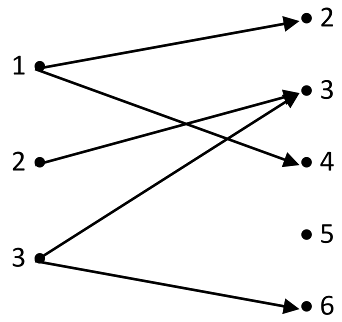
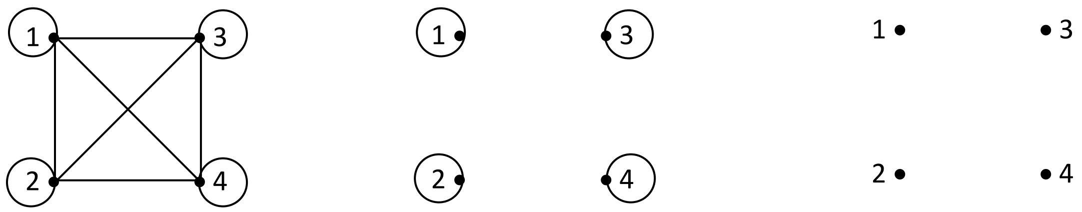


Рис 1.1. Приклад представлення відношення за допомогою графа.

Граф бінарного відношення – це дводольний граф. Відношення в A зображується графом із вершинами, що відповідають елементам цієї множини. Якщо $a_i R a_j$ і $a_j R a_i$, то вершини зв’язуються двома протилежно спрямованими дугами, які умовно можна замінювати однією не спрямованою дугою (ребром). Співвідношенню $a_i A a_i$ відповідає петля.



а б в

Рис 1.2. Графи універсального (а), тотожного (б) та порожнього (в) відношень.

Нехай A={1,2,3,4}. Тоді граф універсального відношення на А зображено на рис. 2.2,а, граф тотожного відношення на А – на рис. 2.2,б, а граф порожнього відношення на А – на рис 2.2,в.

Матриця оберненого відношення R^{-1} для відношення R – це транспонована матриця відношення R. Граф оберненого відношення R^{-1} утворюється із графа відношення R заміною всіх дуг на протилежні.

Матриця композиції відношень T = R°S утворюється як добуток матриць відношень R та S з подальшою заміною відмінних від нуля елементів одиницями.

Справді, елемент t_{ik} матриці композиції знайдемо як суму добутків відповідних елементів матриць R та S (відповідно до правила множення матриць):

$$t_{ik} = r_{i1}s_{1k} + r_{i2}s_{2k} + \ldots + r_{in}s_{nk} = \sum_{j=1}^{n} r_{ij}s_{jk}\,.$$

Очевидно, така сума відмінна від нуля тоді й тільки тоді, коли хоча б один доданок відмінний від нуля, тобто дорівнює одиниці:

$$r_{ij}s_{jk} = 1 \Leftrightarrow r_{ij} = 1 \text{ та } s_{jk} = 1 \Leftrightarrow a_i R b_j \text{ та } b_j S c_k \Leftrightarrow a_i R°S c_k.$$

Якщо у виразі t_{ik} не один, а кілька одиничних доданків, то кожен з них відповідає одному й тому самому співвідношенню $a_i R°S c_k$, через що їх сума має бути замінена одиницею.

Для композиції відношень R = {(1,2), (2,1), (2,2), (3,3), (3,4)} та S={(1,1), (1,2), (2,3), (2,5), (3,2), (3,4), (4,2) (4,3)} матриця утворюється так:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Нехай $R \subseteq A \times B$ та $S \subseteq B \times C$. Щоб побудувати граф T = R°S, потрібно до графа відношення R добудувати граф відношення S. Граф композиції відношень дістанемо, якщо вилучимо вершини, які відповідають елементам множини B.

При вилученні вершини b_j кожний шлях, що проходить через неї від вершин множини А до вершин множини С, замінюється однією дугою з тим самим напрямком.

Для останнього прикладу маємо наступний граф:

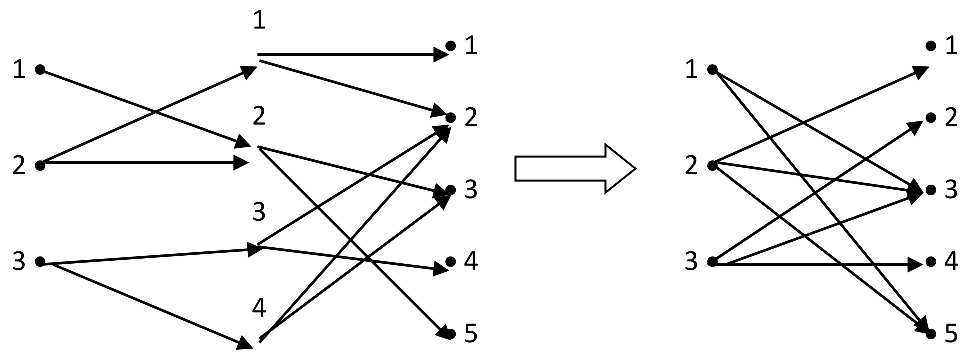


Рис 1.3. Граф композиції відношень.

Означення 1.9. Нехай R – бінарне відношення у множині A ($R \subseteq A \times A$). Тоді відношення R є:

- **рефлексивним**, якщо $I \subseteq R$, тобто, іншими словами, воно завжди виконується між елементом і ним самим ($\forall a \in A$, aRa). Як приклад такого відношення можна навести відношення нестрогої нерівності на множині натуральних або дійсних чисел.

Матриця рефлексивного відношення характеризується тим, що всі елементи її головної діагоналі – одиниці. Граф рефлексивного відношення – тим, що петлі є у всіх вершинах.

- **антирефлексивним (іррефлексивним)**, якщо $R \cap I = \varnothing$, тобто якщо співвідношення $a_i R a_j$ виконується, то $a_i \neq a_j$. Це, наприклад, відношення строгої нерівності на множинах натуральних або дійсних чисел, відношення "бути старшим" у множині людей.

Матриця антирефлексивного відношення характеризується тим, що всі елементи її головної діагоналі – нулі. Граф антирефлексивного відношення не має жодної петлі.

- **симетричним**, якщо $R = R^{-1}$, тобто при виконанні співвідношення a_iRa_j виконується співвідношення a_jRa_i. Як приклад такого відношення можна навести відстань між двома точками на площині, відношення "бути братом" на множині людей.

Симетричність відношення спричиняє також симетричність матриці. Також для такого відношення вершини графа можуть бути пов'язані тільки парами протилежно спрямованих дуг (тобто ребрами).

- **асиметричним**, якщо $R \cap R^{-1} = \varnothing$, тобто із двох співвідношень a_iRa_j та a_jRa_i щонайменше одне не виконується. Як приклад такого відношення можна навести відношення "бути батьком" у множині людей, відношення строго включення в множині всіх підмножин деякого універсуму. Очевидно, якщо відношення асиметричне, то воно й антирефлексивне.

Матриця асиметричного відношення характеризується тим, що всі елементи її головної діагоналі – нулі й немає жодної пари одиниць на місцях, симетричних відносно головної діагоналі. У графа такого відношення петлі відсутні, а вершини можуть бути пов'язані тільки однією спрямованою дугою.

- **антисиметричним**, якщо $R \cap R^{-1} \subseteq I$, тобто обидва співвідношення a_iRa_j та a_jRa_i одночасно виконуються тоді й тільки тоді, коли $a_j = a_i$. Як приклад можна навести нестрогу нерівність.

Матриця антисиметричного відношення має ті самі властивості, що й асиметричного, за винятком вимоги рівності нулю елементів головної діагоналі. У графі такого відношення можуть бути петлі, але зв'язок між вершинами, якщо він є, також відбувається тільки однією спрямованою дугою.

- **транзитивним**, якщо $R \circ R \subseteq R$, тобто з виконання співвідношень a_iRa_j та a_jRa_k випливає виконання співвідношення a_iRa_k. Як приклад можна навести відношення “бути дільником” на множині цілих чисел, “бути старшим” на множині людей.

Матриця транзитивного відношення характеризується тим, що коли r_{ij}=1 й r_{jk}=1, то r_{ik}=1, причому наявність одиничних елементів на головній діагоналі не порушує транзитивність матриці. Граф транзитивного відношення характеризується тим, що коли через деяку сукупність вершин графа проходить шлях, то існують дуги, які з’єднують будь-яку пару вершин з цією сукупністю в напрямку шляху. Як правило, на графі транзитивного відношення зображують тільки цей шлях, а зумовлені транзитивністю дуги опускають. Такий граф називають **графом редукції** (або **кістяковим графом**).

Означення 2.10. Нехай R – бінарне відношення на множині A. **Рефлексивним замкненням** R є найменше рефлексивне відношення на A, що містить R як підмножину. **Симетричне замкнення** R є найменше симетричне відношення на A, що містить R як підмножину. **Транзитивне замкнення** R є найменше транзитивне відношення на A, яке містить R як підмножину.

Теорема 2.2. Нехай R – бінарне відношення на множині A і I – тотожне відношення на A. Тоді:

а) $R \cup I$ є рефлексивним замкненням R.

б) $R \cup R^{-1}$ є симетричним замкненням R.

в) якщо A – кінцева множина, що містить n елементів, то відношення $R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots \cup R^n$ є транзитивним замкненням R.

Доведення. Доведення тверджень (а) та (б) залишаємо на самостійну роботу. Позначимо транзитивне замкнення R через R^T. Для доведення твердження (в) спочатку покажемо, що $R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots \cup R^n \subseteq R^T$. Проведемо індукцію по n. Для n=1 маємо $R \subseteq R^T$, що безумовно істинно. Нехай $R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots \cup R^k \subseteq R^T$. Необхідно показати, що $R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots \cup R^k \cup R^{k+1} \subseteq R^T$ або, що теж саме, R^{k+1}

$\subseteq R^T$. Нехай $(a,c)\in R^{k+1}$. Тоді існує b таке, що $(a,b)\in R^k$ і $(b,c)\in R$. Але, згідно індуктивному припущенню, (a,b) і $(b,c)\in R^T$. Оскільки R^T транзитивне, $(a,c)\in R^T$. Тому $R\cup R^2\cup R^3\cup\ldots\cup R^{k+1} \subseteq R^T$. Для того, щоб показати, що $R^T\subseteq R\cup R^2\cup R^3\cup\ldots\cup R^n$, просто покажемо, що $R\cup R^2\cup R^3\cup\ldots\cup R^n$ транзитивне. Нехай $(a,b)\in R^j$ і $(b,c)\in R^k$. Тоді $(a,c)\in R^{j+k}$. Якщо a=c, твердження доведено. Інакше існують $b_2, b_3, b_4,\ldots,b_{j+k-1}\in A$ такі, що (a,b_2), (b_2,b_3), $(b_3,b_4),\ldots,(b_{j+k-2},b_{j+k-1})$, $(b_{j+k-1},c)\in R$. Позначимо a через b_1, а c через b_{j+k}. Якщо деякі із b_i рівні, наприклад, $b_p=b_q$, із вказаної вище послідовності впорядкованих пар, які знаходяться у відношення R, можна видалити (b_p,b_{p+1}), $(b_{p+1}, b_{p+2}),\ldots,(b_{q-1},b_q)$ і після цього отримати послідовність $a, b_2, b_3,\ldots,b_{p-1},b_q,\ldots,b_{j+k-1},c$, в якій кожний попередній елемент знаходиться у R-відношенні до наступного. Так можна продовжувати до тих пір, поки всі елементи не стануть відмінними, але при цьому кожний з них буде знаходитись у R-відношенні до наступного. Оскільки у множині A існує тільки n різних елементів, отримаємо, що $(a,c)\in R^n$ і $R\cup R^2\cup R^3\cup\ldots\cup R^n$ транзитивне. ►

Нехай $M_n(Z)$ – це кільце матриць розмірності n з цілими елементами.

Означення 1.10. [1]. Матриця $E=(\alpha_{ij})\in M_n(Z)$, для якої виконуються наступні умови:

1) $\alpha_{ij} + \alpha_{jk} \geq \alpha_{ik}$ для всіх $i, j, k =1, \ldots , n$,

2) $\alpha_{ii} = 0$ для всіх $i=1, \ldots , n$,називається *матрицею показників*.

Матриця показників, для якої виконується умова

3) $\alpha_{ij} + \alpha_{ji} \geq 1$ для всіх $i, j \in\{1,\ldots , n\}$ $(i\neq j)$ називається *зведеною матрицею показників*.

Нехай $E=(\alpha_{ij})$ – зведена матриця показників. Введемо матрицю $E^{(1)}=(\beta_{ij})=E+E_n \in M_n(Z)$, де E_n – одинична матриця. Введемо матрицю $E^{(2)}=(\gamma_{ij})\in M_n(Z)$: $\gamma_{ij}= \min\limits_k\{\beta_{ik}+\beta_{kj}\}$.

Означення 1.11. [1, с.357]. Сагайдаком зведеної матриці показників Q=Q(Е) називається сагайдак, матриця суміжності якого задається формулою [Q]= $E^{(2)}$-$E^{(1)}$.

Означення 1.12. Зведені матриці показників E_1 і E_2 називається еквівалентними, якщо одну можна отримати з іншої за допомогою елементарних перетворень двох типів:

1) Відняти ціле число t від елементів $i^{го}$ рядка та добавити це число до елементів $i^{го}$ стовпчика,
2) Поміняти місцями два рядки і поміняти місцями два стовпчика з такими ж номерами.

Означення 1.14. [1]. Сагайдак Q називається *допустимим*, якщо існує зведена матриця показників E, така що Q(Е) =Q.

Означення 1.13. Зведена матриця показників називається *горенштейновою*, якщо існує підстановка σ для множини {1, 2, 3, …, n} така, що $\alpha_{ik}+\alpha_{k\sigma(i)}=\alpha_{i\sigma(i)}$ для i, k=1, …, n.

Означення 1.14. Підстановка σ горенштейнової матриці називається *підстановкою Кириченка.*

Зауваження 1.15. Підстановка Кириченка не містить нерухомих елементів.

Якщо припустити, що $\sigma(i)=i$, то з означення горенштейнової матриці отримуємо $\alpha_{ij}+\alpha_{ji}=\alpha_{i\sigma(i)}=0$, що суперечить зведеності матриці Γ.

Означення 1.16. Нехай σ – підстановка множини {1, 2, ..., n}. Тоді $P_\sigma=\sum_{i=1}^{n} e_{i\sigma(i)}$ називається *матрицею підстановки.*

Приклад горенштейнової матриці:

$$H_n=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Це горенштейнова матриця з підстановкою Кириченка

$$\sigma=\sigma(H_n)=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 \\ n & 1 & \dots & n \end{pmatrix}.$$

Лема 1.17. Нехай $\Gamma=(\alpha_{ij})\in M_n(Z)$ – горенштейнова матриця з підстановкою Кириченка σ. Тоді для всіх $i, j=1, \dots, n$ виконується наступна рівність: $\alpha_{ij}+\alpha_{ji}=\alpha_{\sigma(i)\sigma(j)}+\alpha_{\sigma(j)\sigma(i)}$.

Доведення. Це слідує з наступних рівностей:

$$\alpha_{ij}+\alpha_{j\sigma(i)}=\alpha_{i\sigma(j)}+\alpha_{\sigma(j)\sigma(i)}=\alpha_{i\sigma(i)} \tag{1.1}$$

$$\alpha_{ji}+\alpha_{i\sigma(j)}=\alpha_{j\sigma(i)}+\alpha_{\sigma(i)\sigma(j)}=\alpha_{j\sigma(j)} \tag{1.2}$$

та (3.1)+(3.2): $\alpha_{ij}+\alpha_{ji}+\alpha_{j\sigma(i)}+\alpha_{i\sigma(j)}=\alpha_{i\sigma(j)}+\alpha_{j\sigma(i)}+\alpha_{\sigma(j)\sigma(i)}+\alpha_{\sigma(i)\sigma(j)}$. Лема доведена.

Наслідок 1.18. Якщо $\alpha_{ij}+\alpha_{jk}=\alpha_{ik}$ для деяких $i, j, k,$ то $\alpha_{\sigma^m(i)\sigma^m(j)}+\alpha_{\sigma^m(j)\sigma^m(k)}=\alpha_{\sigma^m(i)\sigma^m(k)}$ для довільного цілого m. Для всіх $i, j=1, \dots, n$ рівність $\alpha_{ij}+\alpha_{ji}=\alpha_{\sigma^m(i)\sigma^m(j)}+\alpha_{\sigma^m(i)\sigma^m(j)}$ справедлива для довільного цілого m.

Наслідок 1.19. Якщо для деяких i, j, k $\alpha_{ij}+\alpha_{jk}>\alpha_{ik},$ то $\alpha_{\sigma^m(i)\sigma^m(j)}+\alpha_{\sigma^m(j)\sigma^m(k)}>\alpha_{\sigma^m(i)\sigma^m(k)}$ для довільного цілого m.

Доведення. Припустимо, що $\alpha_{\sigma^m(i)\sigma^m(j)}+\alpha_{\sigma^m(j)\sigma^m(k)}=\alpha_{\sigma^m(i)\sigma^m(k)}$. Нехай σ^n – тотожна підстановка. За наслідком 1.20. ми одержуємо

$$\alpha_{\sigma^{(n-m)}(\sigma^m(i))\sigma^{(n-m)}(\sigma^m(j))}+\alpha_{\sigma^{(n-m)}(\sigma^m(j))\sigma^{(n-m)}(\sigma^m(k))}=\alpha_{\sigma^{(n-m)}(\sigma^m(j))\sigma^{(n-m)}(\sigma^m(k))}.$$

Отже, $\alpha_{\sigma^m(i)\sigma^m(j)}+\alpha_{\sigma^m(j)\sigma^m(k)}=\alpha_{\sigma^m(i)\sigma^m(k)}$, тобто $\alpha_{ij}+\alpha_{jk}=\alpha_{ik}$. Наслідок доведений.

Теорема 1.20. Нехай $[Q]=(q_{ij})$ – матриця суміжності сагайдака горенштей-нової матриці Γ з підстановкою Кириченка σ. Тоді $q_{\sigma^m(i)\sigma^m(j)}=q_{ij}$ для всіх i, j та довільного цілого m.

Доведення. Нехай $q_{ij}=0$ для $i\neq j$. Тоді $\gamma_{ij}=\min\limits_k\{\beta_{ik}+\beta_{kj}\}=\beta_{ij}$. Якщо $k=i$ або $k=j$, то $\beta_{ik}+\beta_{kj}>\beta_{ij}$ ($\beta_{ii}=1$ для $i=1, \dots, n$). Тому існує $k\neq i, j$ таке, що $\beta_{ik}+\beta_{kj}=\beta_{ij}$ або $\alpha_{ik}+\alpha_{kj}=\alpha_{ij}$. . За наслідком 3.1.7 ми одержуємо

$$\beta_{\sigma^m(i)\sigma^m(k)}+\beta_{\sigma^m(k)\sigma^m(j)}=\beta_{\sigma^m(i)\sigma^m(j)}.$$

Тоді $\gamma_{\sigma^m(i)\sigma^m(j)}=\beta_{\sigma^m(i)\sigma^m(j)}$ та $q_{\sigma^m(i)\sigma^m(j)}=0$.

Якщо $q_{ij}=1$ для $i\neq j$, то $\beta_{ik}+\beta_{kj}>\beta_{ij}$ для всіх k. Нам треба довести, що $\beta_{\sigma^m(i)\sigma^m(k)}+\beta_{\sigma^m(k)\sigma^m(j)}>\beta_{\sigma^m(i)\sigma^m(j)}$ для всіх k. Це очевидно, якщо $i=k$, або $j=k$. Тому можна вважати, що i, j, k різні. Тоді нерівність $\beta_{ik}+\beta_{kj}>\beta_{ij}$ трансформується в нерівність $\alpha_{ik}+\alpha_{kj}>\alpha_{ij}$.

За наслідком 1.21. ми одержуємо $\alpha_{\sigma^m(i)\sigma^m(k)}+\alpha_{\sigma^m(k)\sigma^m(j)}>\alpha_{\sigma^m(i)\sigma^m(j)}$ і тоді $\gamma_{\sigma^m(i)\sigma^m(i)}>\beta_{\sigma^m(i)\sigma^m(j)}$. Тому $q_{\sigma^m(i)\sigma^m(j)}=1=q_{ij}$. Отже, $q_{\sigma^m(i)\sigma^m(j)}=q_{ij}$ для $i\neq j$.

Нехай $q_{ii}=0$. Тоді існує k таке, що $\beta_{ik}+\beta_{kj}=\beta_{ii}=1$. Очевидно $k\neq i$. За наслідком 1.21. $\beta_{\sigma^m(i)\sigma^m(k)}+\beta_{\sigma^m(k)\sigma^m(i)}=\beta_{ik}+\beta_{ik}=1$. Тому $\gamma_{\sigma^m(i)\sigma^m(i)}=1=\beta_{\sigma^m(i)\sigma^m(i)}$ і $q_{\sigma^m(i)\sigma^m(j)}=0$.

Якщо $q_{ii}=1$, то $\gamma_{ii}=2$. Оскільки $\beta_{ii}+\beta_{ii}=1+1=2$ для $i=1, \dots, n,$ то $\beta_{ij}+\beta_{ji}\geq 2$ для $i\neq j$. Але $\beta_{ij}=\alpha_{ij}$ для $i\neq j$ та за наслідком 1.20. виконується нерівність $\beta_{\sigma^m(i)\sigma^m(j)}$ + $\beta_{\sigma^m(j)\sigma^m(i)}$ = $\beta_{ij}+\beta_{ji}\geq 2$. Отже, $\gamma_{\sigma^m(i)\sigma^m(i)}\geq 2$ та $q_{\sigma^m(i)\sigma^m(i)}=1$. Теорема доведена.

Теорема 1.21. Нехай $\Gamma=(\alpha_{ij}) \in M_n(\mathrm{Z})$ – горенштейнова матриця з циклічною підстановкою Кириченка σ. Тоді $[Q(\Gamma)]=\lambda P$, де λ –натуральне число, а матриця P – двічі стохастична.

Доведення. Оскільки σ – циклічна підстановка, то елементи

$$q_{ik},\ q_{\sigma(i)\sigma(k)},\ \ldots,\ q_{\sigma^{s-1}(i)\sigma^{s-1}(k)}$$

знаходяться в різних рядках і стовпчиках. Нехай $F_i=\sum_{j=1}^{n} q_{ij}$ та $D_j=\sum_{i=1}^{n} q_{ij}$. Тоді

$$F_i=\sum_{j=1}^{n} q_{ij}=\sum_{j=1}^{n} q_{\sigma^m(i)\sigma^m(j)}=F_{\sigma^m(i)} \text{ та } D_j=\sum_{i=1}^{n} q_{ij}=\sum_{i=1}^{n} q_{\sigma^m(i)\sigma^m(j)}=D_{\sigma^m(j)}$$

для довільного m, тобто $F_i=F$ та $D_i=D$ для $i, j=1, \ldots, n$. Очевидно, що $\sum_{i=1}^{n} F_i=\sum_{i,\,j=1}^{n} q_{ij}=\sum_{j=1}^{n} D_j$. Тоді $nF=nD$, тобто $C=D=\lambda$ та $[Q(\Gamma)]=\lambda\left(\frac{1}{\lambda}\left[Q(\lambda)\right]\right)=\lambda P$, де $P=\frac{1}{\lambda}\left[Q(\lambda)\right]$ – двічі стохастична матриця. Теорема доведена.

Означення 1.22. Матриця $A=(\alpha_{ij})$ – називається (0, 1, 2) - матрицею, якщо $\alpha_{ij}\in\{0, 1, 2\}$.

Теорема 1.23. Для довільної підстановки σ без фіксованих елементів існує горенштейнова (0, 1, 2) – матриця Γ з підстановкою $\sigma(\Gamma)=\sigma$.

Доведення. Задамо елементи α_{ij} матриці $\Gamma=\Gamma_\sigma$ наступним чином:

- $\alpha_{ii}=0$ та $\alpha_{i\sigma(i)}=2$ для $i=1, \ldots, n$;
- $\alpha_{ij}=1$ для $i\neq j$ та $j\neq\sigma(i)$ $(i, j=1,\ldots, n)$.

Покажемо, що $\mathrm{E}=(\alpha_{ij})$ – горенштейнова матриця.

Оскільки $\alpha_{ij}\geq 1$ для $i\neq j$, то $\alpha_{ij}+\alpha_{ji}>0$ для $i\neq j$.

Нерівність $\alpha_{ij} + \alpha_{jk} \geq \alpha_{ik}$ виконується, якщо два індекси співпадають. Якщо всі три індекси різні, то нерівність виконується, бо $\alpha_{ij}, \alpha_{jk}, \alpha_{ik} \in \{1, 2\}$.

Покажемо, що $\alpha_{ik} + \alpha_{k\sigma(i)} = \alpha_{i\sigma(i)}$ для $i, k=1, \ldots, n$. Якщо $k=i$ або $k=\sigma(i)$, то рівність очевидна. Якщо $k \neq i$ та $k \neq \sigma(i)$, то $\alpha_{ik}=1$, $\alpha_{k\sigma(i)}=1$, $\alpha_{i\sigma(i)}=2$ і рівність виконується.

Отже, $\Gamma_\sigma = (\alpha_{ij})$ – горенштейнова зведена матриця показників з підстановкою σ. Теорема доведена.

Зауваження 1.24. Легко бачити, що $[Q(\Gamma_\sigma)] = U_n - P_\sigma$.

РОЗДІЛ ІІ. ХАРАКТЕРИСТИКИ ГОРЕНШТЕЙНОВИХ МАТРИЦЬ.

2.1. Основна теорема.

Означення 2.1.1 *Індексом* горенштенової матриці Γ називають максимальне власне число матриці суміжності $[Q(\Gamma)]=(q_{ij})$ її сагайдака $Q(\Gamma)$ і позначають $in x\Gamma$.

У зв'язку із цим виникає питання про те, які цілі значення можуть приймати індекси горенштейнових матриць.

Нехай λ – максимальне власне число переставно незвідної невід'ємної матриці $A=(\alpha_{ij})$. Позначимо $s_i=\sum_{k=1}^{n}\alpha_{ik}$ $(i=1, 2, \ldots, n)$, $s=\min\limits_{1\le i\le n} s_i$, $S=\max\limits_{1\le i\le n} s_i$.

Твердження 2.1.2 [2]. Нехай A – переставно незвідна невід'ємна матриця. Тоді $s\le\lambda\le S$ і якщо досягається рівність зліва або справа, то має місце загальна рівність: $s=\lambda=S$ і всі "рядки- суми" $s_1, s_2, \ldots, s_n$ рівні між собою.

Для горенштейнових матриці показників $q_{i\sigma(i)}=0$, тому $s_i\le n-1$ і $\lambda=inx\Gamma\le n-1$.

Теорема 2.1.3. Для будь-якого цілого $1\le\lambda\le n$ існує зведена матриця показників $E_\lambda\in M_n(\mathbf{Z})$ така, що $inx E_\lambda=\lambda$.

Доведення. Побудуємо матрицю $E=(\alpha_{ij})\in M_n(')$, для якої $inx(E)=1$.

Покладемо $\alpha_{ij}=\begin{cases}0, & \text{якщо} \quad i\le j;\\ 1, & \text{якщо} \quad i>j.\end{cases}$ Тоді індекс цієї матриці показників дорівнює 1.

Для $\lambda>1$ побудуємо матрицю E_λ. Для цього задамо сагайдак Q матрицею суміжності: $[Q]=E+P_\sigma+\ldots+P_{\sigma^{\lambda-1}}$, де $\sigma=(1\ 2\ \ldots\ n)$. Оскільки сагайдак Q сильно зв’язний з петлею в кожній вершині, то він допустимий. Тому існує зведена матриця показників E_λ, для якої $Q=Q(E_\lambda)$ та $inx\, E_\lambda=\lambda$. Теорема доведена.

Лема 2.1.4. Нехай E_n – зведена матриця показників і $Q(E_n)$ – сагайдак без петель. Тоді $[Q(\alpha\, \varepsilon_n)]=E_n+[Q(\varepsilon_n)]$ для довільного $\alpha \in N$, $\alpha \geq 2$.

Доведення. Нехай $E_n = (a_{ij})$. Тоді $\alpha E_n=(\alpha\, a_{ij})=(b_{ij})$.

Для елементів матриці суміжності $[Q(E_n)]$ справедливі рівності

$$q_{ij} = \min\left(1, \min_{k=i,j}\left(a_{ik}+a_{kj}-a_{ij}\right)\right) \text{ для } i\neq j,$$

$$q_{ii} = \min\left(1, \min_{k=i}\left(a_{ik}+a_{ki}-1\right)\right).$$

Нехай (q_{ij}) – матриця суміжності сагайдака $Q(\alpha E_n)$. Тоді при $i\neq j$ маємо

$$q_{ij} = \min(1, \min_{k\neq i,j}\left(b_{ik}+b_{kj}-b_{ij}\right))= \min(1, \min_{k\neq i,j}\left(\alpha a_{ik}+\alpha a_{kj}-\alpha a_{ij}\right))=$$

$$=\min(1, \alpha \min_{k\neq i,j}\left(a_{ik}+a_{kj}-a_{ij}\right))=q_{ij}.$$

Оскільки E_n – зведена матриця показників, то $a_{ik}+a_{ki}\geq 1$ для всіх $k\neq i$. Тому $b_{ik}+b_{ki}=\alpha(a_{ik}+a_{ki})\geq 2$ для всіх $k\neq i$ і $q_{ii} = \min(1, \min_{k\neq i}\left(b_{ik}+b_{ki}-1\right))=1$.

Лема доведена.

Основна теорема 2.1.5. Для кожного $\lambda \in N$ і $\lambda \leq n$-1 існує горенштейнова матриця $\Gamma_n^{[\lambda]} \in M_n(\mathbf{Z})$ така, що $inx\,\Gamma_n^{[\lambda]} = \lambda$.

Оскільки вигляд горенштейнової матриці $\Gamma_n^{[\lambda]}$ залежить від λ і від n, то для доведення теореми потрібно розглянути ряд випадків.

2.2. Випадки λ=1, 2, 3, *n*-1.

Побудуємо матрицю $\Gamma_n^{[1]}=(\alpha_{ij}) \in M_n(')$, для якої $inx(\Gamma_n^{[1]})=1$.

Покладемо $\alpha_{ij}=\begin{cases}0, & \text{якщо} \quad i \le j;\\ 1, & \text{якщо} \quad i > j.\end{cases}$

$$\Gamma_n^{[1]} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Тоді $\Gamma_n^{[1]}$ – горенштейнова матриця з підстановкою Кириченка

$$\sigma=\sigma(\Gamma_n^{[1]}) =(\, n\ n\text{-}1\ n\text{-}2 \dots\ 2\ 1).$$

Матриця суміжності сагайдака $Q(\Gamma_n^{[1]})$ має вигляд

$$[Q(\Gamma_n^{[1]})]= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = P_{\sigma^{-1}} = P_{\sigma^{n-1}}$$

Розглянемо випадок $\lambda=2$.

Побудуємо матрицю $\Gamma_n^{[2]} =(\alpha_{ij}) \in M_n(\mathbf{Z})$, для якої $inx(\Gamma_n^{[2]})=2$.

Покладемо $\alpha_{ij}=\begin{cases}0, & \text{якщо} \quad i \le j;\\ 2, & \text{якщо} \quad i > j.\end{cases}$

Тоді $\Gamma_n^{[2]}$ – горенштейнова матриця з підстановкою Кириченка

$$\sigma=\sigma(\Gamma_n^{[2]}) =(n\ n\text{-}1\ n\text{-}2 \dots\ 2\ 1).$$

$$\Gamma_n^{[2]} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Матриця суміжності сагайдака $Q(\Gamma_n^{[2]})$ має вигляд

$$\left[Q\left(\Gamma_n^{[2]}\right)\right] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = P_{\sigma^{n-1}} + E_n.$$

Розглянемо випадок $\lambda=n$-1.

Нехай σ – така підстановка, що $\sigma(i) \neq i$, для всіх i.

Покладемо

$$\alpha_{ij} = \begin{cases} 0, \text{ якщо } j = i; \\ 2, \text{ якщо } j = \sigma(i); \\ 1, \text{ в інших випадках.} \end{cases}$$

Тоді $\Gamma_n^{[n-1]} = (\alpha_{ij})$ є горенштейнова матриця з підстановкою $\sigma(\Gamma_n^{[n-1]}) = \sigma$.

Обчислимо матрицю суміжності сагайдака $Q(\Gamma_n^{[n-1]})$.

$$\Gamma_n^{[n-1](1)} = (\beta_{ij}), \text{ де } \beta_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ якщо } j \neq \sigma(i), \\ 2, \text{ якщо } j = \sigma(i); \end{cases}$$

$$\Gamma_n^{[n-1](2)} = (\gamma_{ij}),\ \gamma_{ij} = 2 \text{ для всіх } i, j.$$

Тоді

$$[Q(\Gamma_n^{[n-1]})] = \Gamma_n^{[n-1](2)} - \Gamma_n^{[n-1](1)} = U_n - P_\sigma = \sum_{k=1}^{n} P_{\sigma^k}.$$

За твердженям 2.1.2. $inx\, \Gamma_n^{[n-1]} = n$-1.

Розглянемо випадок $\lambda=3$.

Побудуємо матрицю $\Gamma_n^{[3]}$, для якої $Inx(\Gamma_n^{[3]})=3$. Зафіксуємо підстановку σ,

$\sigma = (1\ 2\ \dots\ n)$. Нехай $\Gamma_n^{[3]} = (b_{ij}) \in M_n(\mathbf{Z})$.

Спочатку побудуємо горенштейнову матрицю $\Gamma_n^{[2]} = (\alpha_{ij}) \in M_n(\mathbf{Z})$.

$\alpha_{i1}=0$, $\alpha_{ii}=0$ для $i=1,...,n$;

$\alpha_{12}=2$ і $\alpha_{1n}=2$;

$\alpha_{1j}=1$ для $j=3, ..., n-1$.

Відомо, що інші елементи матриці $\Gamma_n^{[2]}$ можна знайти наступним чином:

$$\alpha_{km}=\sum_{j=2}^{m}\alpha_{1j}-\sum_{j=0}^{m-2}\alpha_{1k-j} \text{ для } k\geq m\geq 2; \tag{2.1}$$

$$\alpha_{km}=\sum_{j=0}^{k-1}\alpha_{1m-j}-\sum_{j=2}^{k}\alpha_{1j} \text{ для } m>k-1. \tag{2.2}$$

Тоді $\left[Q\left(\Gamma_n^{[2]}\right)\right]= P_\sigma^2+P_\sigma^3$. Покладемо $\Gamma^{[3]}=2\Gamma^{[2]}$. За лемою 2.1.4

$$\left[Q\left(\Gamma_n^{[3]}\right)\right]=E+ P_\sigma^2+P_\sigma^3.$$

Наприклад, $\Gamma_7^{[2]}\in M_7(\mathbf{Z})=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

$$Q(\Gamma_7^{[2]})=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Застосувавши для $\Gamma_7^{[2]}$ лему 2.1.4, одержимо

$$[Q(2\Gamma_2)]=E+[Q(\Gamma_2)] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.3. Горенштейнові матриці, які є лінійною комбінацією степенів переставної матриці.

Зафіксуємо підстановку σ=(1 2 … n).

Розглянемо матриці спеціального вигляду

$$\Gamma=(\alpha_{ij})=\sum_{0}^{n-1} t(i)\mathrm{P}_{\sigma^{i}}=\begin{pmatrix} t(0) & t(1) & t(2) & \dots & t(n-1) \\ t(n-1) & t(0) & t(1) & \dots & t(n-2) \\ t(n-2) & t(n-1) & t(0) & \dots & t(n-3) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ t(1) & t(2) & t(3) & \dots & t(0) \end{pmatrix},$$

де P_σ – матриця підстановки σ, $t(i)$ – дискретна функція, $t(i)\in\mathrm{N}\cup\{0\}$. Очевидно, що матриця Γ однозначно задається дискретною функцією $t(i)$.

Оскільки $\sigma(i)\equiv i+1$ ($mod\ n$) та $\sigma^k(i)\equiv i+k$ ($mod\ n$) при $0\le k\le n$-1, то

$$\sigma^k(i)=\begin{cases} i+k, & \text{якщо} \quad i+k\le n; \\ i+k-n, & \text{якщо} \quad i+k>n. \end{cases}$$

Враховуючи, що $P_{\sigma^i}=\sum_{k=1}^{n} e_{k\sigma^i(k)}$, маємо $\Gamma=\sum_{i=0}^{n-1} t(i)\sum_{k=1}^{n} e_{k\sigma^i(k)}$. Звідси $\alpha_{k\sigma^i(k)}=t(i)$ для всіх k. Тобто

$$t(i)=\alpha_{1\sigma^i(1)}=\alpha_{2\sigma^i(2)}=\ldots=\alpha_{n\sigma^i(n)}$$

або

$$t(i)=\alpha_{1\ i+1}=\alpha_{2\ i+2}=\ldots=\alpha_{n-i\ n}=\alpha_{n-i+1\ 1}=\ldots=\alpha_{ni}.$$

Позаяк $t(i)=\alpha_{1i+1}$, $i=0, \ldots, n-1$, то такі матриці однозначно задаються своїм першим рядком. Надалі для матриць такого вигляду будемо використовувати позначення

$$\Gamma=(t(0), t(1), \ldots, t(n-1)).$$

Наприклад, A=(0 4 3 2 1) означає $A=\begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

У цьому прикладі $t(1)=4$, $t(2)=3$, $t(3)=2$, $t(5)=1$.

Далі будемо вважати, що $t(0)=0$.

Лема 2.3.1. Якщо для дискретної функції $t(i)$, $i\in\{0, 1, 2, ..., n\text{-}1\}$ виконуються наступні умови:

1) $t(0)=0$;
2) $t(i)>0$ для $i=1,..., n\text{-}1$;
3) $t(i)+t(j)\geq t(k)$, де $k\equiv i+j \ (\mathit{mod}\ n)$;
4) $t(1)=t(i)+ t(n+1\text{-}i)$ для $i=2,\ldots, n\text{-}1$,

то $\Gamma=\sum\limits_{i=0}^{n-1} t(i)P_{\sigma^i}$ – горенштейнова матриця показників з підстановкою Кириченка $\sigma=(1\ 2\ \ldots\ n\ )$.

Доведення. Виразимо спочатку елементи матриці Γ через $t(i)$.

$$\Gamma=\sum_{i=1}^{n} t(i)P_{\sigma^i} = \sum_{i=1}^{n} t(i)\sum_{k=1}^{n} e_{k\sigma^i(k)} = \sum_{k,\,j=1}^{n}\alpha_{ik}e_{kj}\ .$$

Звідси $\alpha_{k\sigma^i(k)}=t(i)$. З рівностей $\alpha_{k\sigma^i(k)}=t(i)$ та $\sigma^k(i)=\begin{cases} i+k, & \text{якщо} \quad i+k\leq n; \\ i+k-n, & \text{якщо} \quad i+k>n, \end{cases}$

отримуємо

$$\alpha_{kj}=\begin{cases} t(j-k), & \text{якщо} \quad j\geq k; \\ t(j-k+n), & \text{якщо} \quad j<k, \end{cases}$$

або $\alpha_{kj}=t(l)$, де $l\equiv j\text{-}k\ (\mathit{mod}\ n)$, $0\leq l\leq n\text{-}1$.

Покажемо, що матриця (α_{ij}) є зведеною матрицею показників. Нехай $\alpha_{ik}=t(m)$, $\alpha_{kj}=t(s)$, $\alpha_{ij}=t(v)$. Тоді з

$$m \equiv k\text{-}i \ (mod\ n),\ \ s \equiv j\text{-}k \ \ (mod\ n),\ \ v \equiv j\text{-}i\ (\ mod\ n),$$

маємо $v \equiv m+s\ (mod\ n)$.

За умовою 3) $t(m)+\ t(s) \geq t(v)$, тому $\alpha_{ik}+\alpha_{kj} \geq \alpha_{ij}$ для всіх $i,\ k,\ j$.

За умовою 1) маємо $\alpha_{ii} = t(i\text{-}i) = t(0) = 0$.

З умови 2) випливає, що $\alpha_{kj}>0$ при $j \neq k$. Тому $\alpha_{kj}+\alpha_{jk} \geq 2$ для всіх $j \neq k$.

Отже, матриця (α_{ij}) є зведеною матрицею показників.

Покажемо тепер, що (α_{ij}) є горенштейновою матрицею з підстановкою Кириченка $\sigma=(1\ 2\ \ldots\ n\text{-}1\ n)$.

Нехай $\alpha_{ik}=t(m)$, $\alpha_{k\sigma(i)}=t(s)$, $\alpha_{k\sigma(k)}=t(l)$, де

$$m \equiv k\text{-}i\ (mod\ n),\ s \equiv \sigma(i)\text{-}k\ (mod\ n),\ l \equiv \sigma(k)\text{-}k \equiv 1\ (mod\ n).$$

Оскільки $\sigma(i) \equiv i+1\ (mod\ n)$ і $\alpha_{k\sigma(k)}=t(1)$, то $m+s \equiv 1\ (mod\ n)$. Звідси при $m \geq 2$ $m+s= n+1$. Тоді за умовою *4)* $t(s)=t(1)\text{-}t(m)$ і

$$\alpha_{ik}+\alpha_{k\ \sigma(i)}=t(m)+(t(1)\text{-}t(m))=t(1)=\ \alpha_{i\sigma(i)}.$$

При $m=0$ та $m=1$, що відповідає $k=i$ та $k=\sigma(i)$, рівність $\alpha_{ik}+\alpha_{k\ \sigma(i)}=\ \alpha_{i\sigma(i)}$ є очевидною.

Таким чином, Γ – горенштейнова матриця з підстановкою Кириченка $\sigma=(1\ 2\ \ldots\ n\text{-}1\ n)$. Лема доведена.

Зазначимо, що, оскільки матриця Γ при фіксованій підстановці σ повністю визначається функцією $t(i)$, то сагайдак $Q(\Gamma)$ також повністю визначається функцією $t(i)$. Більше того, матриця суміжності сагайдака довільної циклічної горенштейнової матриці має вигляд $[Q]= \sum_{i=0}^{n-1} f(i)P_{\sigma^i}$, де $f(i) \in \{0,\ 1\}$. Тобто $[Q(\Gamma)]$ має такий вигляд, як і Γ, і таку матрицю ми теж будемо задавати лише першим рядком.

Для матриці суміжності сагайдака $Q(\Gamma)$ маємо при $j\neq 0$

$$q_{1,j+1} = \min\left(1, \quad \min_{k\neq 1,\ j+1}\left(\alpha_{1k} + \alpha_{k\,j+1} - \alpha_{1\,j+1}\right)\right) = \min\left(1, \quad \min_{k\neq 1,\ j+1}\left(t(k-1) + t(l) - t(j)\right)\right),$$

де $l\equiv j+1-k\ (mod\ n)$. Звідси $q_{1j+1}=0$ тоді і тільки тоді, коли існує $k\neq 1,\ j+1$ таке, що

$$t(k\text{-}1)+t(l)=t(j), \quad l\equiv j+1\text{-}k\ (mod\ n).$$

Замінюючи тут k-1 на m, маємо $q_{1j+1}=0$ тоді і тільки тоді, коли існує $m\neq 0, j$: $t(m)+t(l)=t(j)$, де $l\equiv j\text{-}m\ (mod\ n)$ або $l+m\equiv j\ (mod\ n)$. Крім того, оскільки $t(i)\geq 1$ для всіх $i>0$, то

$$q_{ii}=q_{11} = \min\left(1, \quad \min_{k\neq 1}\left(\alpha_{1k} + \alpha_{k1} - 1\right)\right) =$$

$$= \min\left(1, \quad \min_{k\neq 1}\left(t(k-1) + t(n-(k-1)) - 1\right)\right) = 1.$$

Отже, сагайдак $Q(\Gamma)$ має петлю в кожній вершині.

2.4. Випадок $\lambda=n$-2.

Розглянемо три випадки.

а) $n=3k+2$.

Для кожного k матриці будуємо наступним чином. Покладемо

$$t(i)= \begin{cases} 6, & \text{якщо} \quad \text{i=1;} \\ 2, & \text{якщо} \quad 2\leq i\leq k+1; \\ 3, & \text{якщо} \quad k+2\leq i\leq 2k+1; \\ 4, & \text{якщо} \quad 2k+2\leq i\leq 3k+1. \end{cases}$$

Нагадаємо, що $t(0)=0$.

Покажемо, що функція $t(i)$ задовольняє умови 1) – 4) леми 2.14 і тому визначає горенштейнову матрицю показників.

1) Очевидно, умова $t(0)=0$ виконується.

2) Умова $t(i)>0$ для всіх $i>0$ також, очевидно, виконується.

3) Припустимо, що умова 3) $t(i)+ t(j)\geq t(m)$, де $m\equiv i+j \ (mod\ n)$ не виконується.

Це можливо лише при $m=1$ у випадках

а) $t(i)=2$, $t(j)=2$;

б) $t(i)=2$, $t(j)=3$;

в) $t(i)=3$, $t(j)=2$.

Оскільки $m=1$, то $i+j=n+1=3k+3$.

У випадку а) $i+j\leq(k+1)+(k+1)=2k+2<3k+3$.

У випадку б) $i+j\leq(k+1)+(2k+1)=3k+2<3k+3$.

Випадок в) аналогічний випадку б).

Отримали протиріччя. Отже, умова 3) виконується.

4) Якщо $i\in[2, k+1]$, то $n+1-i\in[2k+2, 3k+1]$,

якщо $i\in[k+2, 2k+1]$, то $n+1-i\in[k+2, 2k+1]$,

якщо $i\in[2k+2, 3k+1]$, то $n+1-i\in[2, k+1]$.

Тому $t(i)+t(n+1-i)=6=t(1)$.

Отже, умова 4) виконується, матриця $B_{3k+2}=\sum_{i=0}^{n-1} t(i)P_{\sigma^i}$ є горенштейнова.

Обчислимо індекс матриці B_{3k+2}. Для цього знайдемо всі j такі, що $q_{1j+1}=0$. Ця рівність рівносильна умові, що існує $v\neq 0, j$ таке, що $t(v)+t(l)=t(j)$, де $v+l\equiv j \ (mod\ n)$. З $v\neq 0, j$ випливає, що $l\neq 0, j$. Тому $t(v)>0$, $t(l)>0$ і $t(j)>0$.

Оскільки $t(i)\in\{0, 2, 3, 4, 6\}$, то рівності можливі у випадках:

(a) $t(v)=t(l)=3$, $t(j)=6$;

(b) $t(v)=2$, $t(l)=4$, $t(j)=6$;

(c) $t(v)=4$, $t(l)=2$, $t(j)=6$;

(d) $t(v)=2$, $t(l)=2$, $t(j)=4$.

Перші 3 випадки об'єднуються в один, бо $6=t(1)=\alpha_{i\sigma(i)}$ для всіх i. Тому $j=1$ і рівності у випадках (a)-(c) мають вигляд $\alpha_{1v+1}+\alpha_{v+1\sigma(1)}=\alpha_{1\sigma(1)}$, тобто $\alpha_{1v+1}+\alpha_{v+1,2}=\alpha_{12}$. Отже, $q_{12}=0$.

У випадку (d) $v\in[2, k+1]$, $l\in[2, k+1]$ і $j\in[2k+2, 3k+1]$.

Враховуючи, що $v+l\in[4, 2k+2]$ і $v+l\equiv j$ (mod n), отримуємо: $v=k+1$, $l=k+1$, $j=2k+2$. Отже, $q_{1,2k+3}=0$.

Таким чином, $q_{1j}=0$ лише при $j=2$ і при $j=2k+3$. Тому $inx\ B_{3k+2}=n$-2. (Оскільки $\sum_{j=1}^{n} q_{ij}=\sum_{i=1}^{n} q_{ij}$, то за твердженням 2.4.1 $inx\ B_{3k+2}=\sum_{i=1}^{n} q_{1i}$.)

b) $n=3k+1$.

Для кожного k матриці будуємо наступним чином. Покладемо

$$t(i)=\begin{cases} 6, \text{ якщо } i=1, \\ 4, \text{ якщо } i=k+1, \\ 2, \text{ якщо } i=2k+1, \\ 3, \text{ в інших випадках.} \end{cases}$$

Покажемо, що функція $t(i)$ задовольняє умови 1) – 4) леми 2.3.1 і тому визначає горенштейнову матрицю показників.

1) Очевидно умова $t(0)=0$ виконується.

2) Умова $t(i)>0$ для всіх $i\neq 0$ також, очевидно, виконується.

3) Припустимо, що умова 3) $t(i)+ t(j)\geq t(m)$, де $m \equiv i+j \pmod n$ не виконується.

Це можливо лише при $m=1$ у випадках

а) $t(i)=2$, $t(j)=2$;

б) $t(i)=2$, $t(j)=3$;

в) $t(i)=3$, $t(j)=2$.

Оскільки $m=1$, то $i+j=n+1=3k+2$.

Якщо $t(i)=2$, то $i=2k+1$, $j=(3k+2)-2k+1=k+1$, $t(j)=t(k+1)=4$. Тому випадки а) та б) неможливі.

Якщо $t(j)=2$, то $j=2k+1$, $i=k+1$, $t(i)=4$. Тому випадок в) теж неможливий.

Отримали протиріччя. Отже, умова 3) виконується.

4) Якщо $i= k+1$, то $n+1-i=2k+1$,

якщо $i=2k+1$, то $n+1-i=k+1$,

якщо $i\notin\{k+1, 2k+1\}$, то $n+1-i\notin\{k+1, 2k+1\}$.

Тому $t(i)+t(n+1-i)=6=t(1)$. Отже, умова 4) виконується. Матриця $L_{3k+1}=\sum_{i=0}^{n-1} t(i)P_{\sigma^i}$ є горенштейнова.

Обчислимо індекс матриці L_{3k+1}. Для цього знайдемо всі j такі, що $q_{1j+1}=0$. Ця рівність рівносильна умові, що існує $v\neq 0, j$ таке, що $t(v)+t(l)=t(j)$, де $v+l\equiv j \pmod n$. З $v\neq 0, j$ випливає, що $l \neq 0, j$. Тому $t(v)>0$, $t(l)>0$ і $t(j)>0$.Оскільки $t(i)\in\{0, 2, 3, 4, 6\}$, то рівності можливі у випадках:

(a) $t(v)=t(l)=3$, $t(j)=6$;

(b) $t(v)=2$, $t(l)=4$, $t(j)=6$;

(c) $t(v)=4$, $t(l)=2$, $t(j)=6$;

(d) $t(v)=2$, $t(l)=2$, $t(j)=4$.

Перші 3 випадки об’єднуються в один, бо $6=t(1)=\alpha_{i\sigma(i)}$ для всіх i. Тому $j=1$ і рівності у випадках (a)-(c) мають вигляд $\alpha_{1v+1}+\alpha_{v+1\sigma(1)}=\alpha_{1\sigma(1)}$, тобто $\alpha_{1v+1}+\alpha_{v+1,2}=\alpha_{12}$. Отже, $q_{12}=0$. У випадку (d) v, $l=2k+1$ і $j=k+1$. Отже, $q_{1,k+2}=0$.

Таким чином, $q_{1j}=0$ лише при $j=2$ і при $j=k+2$. Тому $inx\ L_{3k+1}=n-2$. (Оскільки $\sum_{j=1}^{n} q_{ij}=\sum_{i=1}^{n} q_{ij}$, то за твердженням 2.4.1 $inx\ L_{3k+1}=\sum_{i=1}^{n} q_{1i}$).

c) $n=3k$.

Якщо $n=6$, то

$$\Gamma_6^{[4]}=\begin{pmatrix} 0 & 6 & 4 & 3 & 3 & 2 \\ 6 & 0 & 3 & 4 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 0 & 6 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 6 & 0 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 3 & 2 & 0 & 6 \\ 3 & 4 & 2 & 3 & 6 & 0 \end{pmatrix};\ [Q(\Gamma_6^{[4]})]=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix};\ inx\,\Gamma_6^{[4]}=4.$$

Легко перевірити, що $\Gamma_6^{[4]}$– горенштейнова матриця показників.

Якщо $n\geq 9$, то $A_n=\begin{pmatrix} L_4 & 3U_{4\times(n-4)} \\ 3U_{(n-4)\times 4} & B_{n-4} \end{pmatrix}$, де U – матриця, всі елементи якої дорівнюють 1. Матриця B_k побудована в випадку a), L_4 побудована в випадку b) цього параграфу.

Доведемо, що $A_n=(\alpha_{ij})$ – горенштейнова матриця.

1) Оскільки L_4 та B_{n-4} — матриці показників, то $\alpha_{ii}=0$.

2) Доведемо, що $\alpha_{ij}+\alpha_{ji}>1$ для $i\neq j$. Розглянемо декілька випадків.

Якщо $1\leq i, j\leq 4$, то $\alpha_{ij}\geq 2$ для $i\neq j$. Тому $\alpha_{ij}+\alpha_{ji}>1$ для $i\neq j$.

Якщо $5\leq i, j\leq n$, то $\alpha_{ij}\geq 2$ для $i\neq j$. Тому $\alpha_{ij}+\alpha_{ji}>1$ для $i\neq j$.

Якщо $1\le i\le 4$, $5\le j\le n$ або $1\le j\le 4$, $4\le j\le n$, то $\alpha_{ij}=\alpha_{ji}=3$. Тому $\alpha_{ij}+\alpha_{ji}>1$.

Отже, $\alpha_{ij}+\alpha_{ji}>1$ для $i\ne j$.

3) Доведемо, що $\alpha_{ij}+\alpha_{jk}\ge\alpha_{ik}$ для всіх i, j, k. Припустимо, що умова не виконується. Тобто існують i, j, k для яких $\alpha_{ij}+\alpha_{jk}<\alpha_{ik}$. Тоді, очевидно, $i\ne j$, $j\ne k$, $i\ne k$ і $\alpha_{ij}+\alpha_{jk}\ge 2+2=4$, $\alpha_{ik}>4$. Тому $\alpha_{ik}=6$.

Оскільки $\alpha_{ik}=6$, то неможливі випадки $1\le i\le 4$, $5\le k\le n$ та $1\le k\le 4$, $5\le i\le n$.

Розглянемо можливі випадки.

1) $1\le i, k, j\le 4$. Оскільки L_4 – матриця показників, то $\alpha_{ij}+\alpha_{jk}\ge\alpha_{ik}$.

2) $1\le i, k\le 4$ та $5\le j\le n$. В цьому випадку $\alpha_{ij}=\alpha_{jk}=3$, $\alpha_{ij}+\alpha_{jk}=6\ge\alpha_{ik}$.

3) $4\le i, k, j\le n$. Оскільки B_{n-4} – матриця показників, то $\alpha_{ij}+\alpha_{jk}\ge\alpha_{ik}$.

4) $1\le j\le 4$ та $5\le i, k\le n$. В цьому випадку $\alpha_{ij}=\alpha_{jk}=3$, $\alpha_{ij}+\alpha_{jk}=6\ge\alpha_{ik}$.

Отримали протиріччя. Отже, нерівність $\alpha_{ij}+\alpha_{jk}\ge\alpha_{ik}$ виконується для всіх i, j, k.

4) Доведемо, що $\alpha_{ij}+\alpha_{j\sigma(i)}=\alpha_{i\sigma(i)}$ для всіх i, j.

Оскільки L_4 та B_{n-4} – горенштейнові матриці, то для $1\le i, j\le 4$ та $5\le i, j\le n$ рівність $\alpha_{ij}+\alpha_{j\sigma(i)}=\alpha_{i\sigma(i)}$ виконується.

Якщо $1\le i\le 4$, $5\le j\le n$ або $1\le j\le 4$, $5\le i\le n$, то $\alpha_{ij}=\alpha_{j\sigma(i)}=3$, $\alpha_{i\sigma(i)}=6$. Тому рівність $\alpha_{ij}+\alpha_{j\sigma(i)}=\alpha_{i\sigma(i)}$ виконується.

Отже, рівність $\alpha_{ij}+\alpha_{j\sigma(i)}=\alpha_{i\sigma(i)}$ виконується для всіх i, j. Тому A_n – горенштейнова матриця.

Обчислимо індекс матриці L_{3k+1}.

Якщо $1 \le i \le 4$ та $5 \le j \le n$ або $1 \le j \le 4$ та $5 \le i \le n$, то $\alpha_{ij}=3$ і не існує $k \ne i, j$, для якого $\alpha_{ik}+\alpha_{kj}=\alpha_{ij}$. Тому $q_{ij}=1$.

$$\sum_{j=1}^{n} q_{ij} = \sum_{j=1}^{4} q_{ij} + \sum_{j=5}^{n} q_{ij} = 2+(n-4)=n-2 \text{ для } i \in \{1, \ldots, 4\}.$$

Аналогічно одержуємо, що

$$\sum_{j=1}^{n} q_{ij} = \sum_{j=1}^{4} q_{ij} + \sum_{j=5}^{n} q_{ij} = 4+(n-6) = n-2 \text{ для } i \in \{5, \ldots, n\}.$$

Отже, $\sum_{j=1}^{n} q_{ij} = n-2$ для $i \in \{1, \ldots, n\}$. Тому за твердженням 2.1.2

$$inx\, A_n = \sum_{i=1}^{n} q_{1i} = n-2.$$

Приклад для $n=9$:

$$\varGamma_9^{[7]} = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 4 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 6 & 4 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 2 & 0 & 6 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 6 & 4 & 2 & 0 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 0 & 6 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 4 & 0 & 6 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 4 & 0 & 6 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 2 & 3 & 4 & 0 & 6 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 6 & 2 & 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \left[Q\left(\varGamma_9^{[7]}\right) \right] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\sigma=(1\ 2\ 3\ 4)(5\ 6\ 7\ 8\ 9)$. *Inx* $\varGamma_9^{[7]}=7$.

Отже, для випадку $inx\varGamma=n-2$ матриця $\varGamma$ побудована.

2.5. Випадки $n=2k$, $\lambda = inx\varGamma=2p+1$ та $n=2k+1$, $\lambda = inx\varGamma=2p$

У цьому підрозділі розглядаються горенштейнові матриці з індексом, що належить відрізку [4 ... n-3].

Зафіксуємо підстановку σ=(1 2 … n), t(0)=0.

Елементи матриці Γ визначаються рівністю

$$t(i)=\begin{cases} 2\left(n+2-\lambda-i\right), & \text{якщо} \quad 1\le i\le (n+1-\lambda)/2, \\ n+1-\lambda, & \text{якщо} \quad (n+1-\lambda)/2< i\le (n+\lambda-1)/2, \\ 2\left(n-i\right), & \text{якщо} \quad (n+\lambda-1)/2< i\le n-1. \end{cases}$$

Покажемо, що функція $t(i)$ задовольняє умови 1) – 4) леми 2.3.1 і тому визначає горенштейнову матрицю показників.

1) Очевидно умова $t(0)=0$ виконується.

2) а) Якщо $1\le i\le \frac{n+1-\lambda}{2}$, то $2(n+2-\lambda-i)\ge 2(n+2-\lambda-\frac{n+1-\lambda}{2})=n-\lambda+3\ge 2$.

б) Якщо $\frac{n+1-\lambda}{2}<i\le\frac{n+\lambda-1}{2}$, то $n+1-\lambda\ge 2$;

в) Якщо $\frac{n+\lambda-1}{2}<i\le n-1$, то $2(n-i)\ge 2(n-(n-1))=2\ge 2$.

Отже, умова $t(i)>0$ для всіх $i>0$ виконується.

3) Доведемо, що $t(i)+t(j)\ge t(m)$, де $m\equiv i+j \ (mod\ n)$. Розглянемо випадки:

а) $1\le i, j\le \frac{n+1-\lambda}{2}$;

б) $\frac{n+1-\lambda}{2}<i, j\le\frac{n+\lambda-1}{2}$;

в) $\frac{n+\lambda-1}{2}<i, j\le n-1$;

г) $1\le i\le\frac{n+1-\lambda}{2}<j\le\frac{n+\lambda-1}{2}$;

д) $1\le i\le\frac{n+1-\lambda}{2}$, $\frac{n+1-\lambda}{2}<j\le n-1$;

е) $\frac{n+\lambda-1}{2}<i\leq n-1,\ \ \frac{n+1-\lambda}{2}<j\leq\frac{n+\lambda-1}{2}$.

Є ще три аналогічних випадки.

При $m=0$ нерівність, очевидно, виконується.

У випадку а) $2\leq i+j\leq n+1-\lambda,\ m=i+j$ і

$$t(i)+t(j)=2(n+2-\lambda-i)+2(n+2-\lambda-j)=2(2n+4-2\lambda-(i+j))=2(2n+4-2\lambda-m).$$

Якщо $1\leq m\leq\frac{n+1-\lambda}{2}$, то

$$t(i)+t(j)=2((n+2-\lambda-m)+(n+2-\lambda))\geq 2(n+2-\lambda-m)=t(k).$$

Якщо $\frac{n+1-\lambda}{2}<m\leq\frac{n+\lambda-1}{2}$, то

$$t(i)+t(j)=2(2n+4-2\lambda-(i+j))\geq 2(2n+4-2\lambda-(n+1-\lambda))=2(n+3-\lambda)>n+1-\lambda.$$

Якщо $\frac{n+\lambda-1}{2}<m\leq n-1$, то

$$t(m)=2(n-m)<2\left(n-\frac{n+\lambda-1}{2}\right)=n-\lambda+1.$$

Тоді $t(i)+t(j)>n-\lambda+1>t(m)$.

У випадку б) $t(i)+t(j)=2n+2-2\lambda$.

Якщо $1\leq m\leq\frac{n+1-\lambda}{2}$, то $t(m)=2(n+2-\lambda-m)\leq 2(n+2-\lambda-1)=2n+2-2\lambda$.

Якщо $\frac{n+1-\lambda}{2}<m\leq\frac{n+\lambda-1}{2}$, то $t(m)=n+1-\lambda<2n+2-2\lambda$.

Якщо $\frac{n+\lambda-1}{2}<m\leq n-1$, то $t(m)=2(n-m)<2\left(n-\frac{n+\lambda-1}{2}\right)=n+1-\lambda<2n+2-2\lambda$.

Отже, $t(i)+t(j)\geq t(m)$.

У випадку в) $n<n+\lambda-1<i+j\le 2n-2$. Тому $m=i+j-n$ і

$$t(i)+t(j)=2(n-i)+2(n-j)=2(n-(-n+(i+j))=2(n-m).$$

Якщо $1\le m\le\frac{n+1-\lambda}{2}$, то $t(m)=2(n+2-\lambda-m)=2(n-m)+2(2-\lambda)>2(n-m)$.

Якщо $\frac{n+1-\lambda}{2}<m\le\frac{n+\lambda-1}{2}$, то $2(n-m)\ge 2\left(n-\frac{n+\lambda-1}{2}\right)=n-\lambda+1=t(m)$.

Якщо $\frac{n+\lambda-1}{2}<m\le n-1$, то $t(m)=2(n-m)$.

Отже, $t(i)+t(j)\ge t(m)$.

У випадку г) $\frac{n+3-\lambda}{2}<i+j\le n$. Тому $m=i+j$ (випадок $m=0$ тривіальний).

$$t(i)+t(j)=2(n+2-\lambda-i)+(n+1-\lambda).$$

Якщо $1\le m\le\frac{n+1-\lambda}{2}$, то

$$t(m)=2(n+2-\lambda-m)\le 2(n+2-\lambda-1)=2(n+1-\lambda)<2(n+1-\lambda)+(n-\lambda+3-2i)=t(i)+t(j).$$

$$\left(\text{оскільки}\quad 1\le i\le\frac{n+1\text{-}\lambda}{2},\quad\text{то}\quad n-\lambda+1-2i\ge 0\right).$$

Якщо $\frac{n+1-\lambda}{2}<m\le\frac{n+\lambda-1}{2}$, то $t(m)=t(j)$ і $t(i)>0$. Тому $t(i)+t(j)\ge t(m)$.

Якщо $\frac{n+\lambda-1}{2}<m\le n-1$, то $t(m)=2(n-m)<2\left(n-\frac{n+\lambda-1}{2}\right)=n-\lambda+1=t(j)$.

Тому $t(i)+t(j)>t(m)$.

У випадку д) $\frac{n+\lambda+1}{2}<i+j\le\frac{3n-1-\lambda}{2}$,

$$t(i)+t(j)=2(n+2-\lambda-i)+2(n-j)=2(2n+2-\lambda-(i+j)).$$

Нехай $i+j<n$. Тоді $m=i+j$.

Якщо $1\le m\le \frac{n+1-\lambda}{2}$, то $t(i)+t(j)= 2(n+2-\lambda-m)+ 2n>2(n+2-\lambda-m)=t(m)$.

Якщо $\frac{n+1-\lambda}{2}<m\le \frac{n+\lambda-1}{2}$, то $t(i)+ t(j)=(n+1-\lambda)+(3n+3- \lambda-m)> n+1-\lambda=t(m)$.

Якщо $\frac{n+\lambda-1}{2}<m\le n-1$, то $t(m)=2(n-m)< 2(n-m)+2(n+2-\lambda)=t(i)+t(j)$.

Нехай $i+j>n$ (при $i+j=n$, $m=0$). Тоді $m=i+j-n$ та

$$t(i)+ t(j)=2(n+2-\lambda-(i+j-n))=2(n+2-\lambda-m).$$

Оскільки $\frac{n+\lambda+1}{2}<i+j\le \frac{3n-1-\lambda}{2}$, то

$$m=i+j-n\le \frac{3n-1-\lambda}{2} -n= \frac{n-\lambda-1}{2}<\frac{n-\lambda+1}{2}.$$

Тому $t(m)= 2(n+2-\lambda-m)= t(i)+ t(j)$.

У випадку е) $n<i+j\le \frac{3n+\lambda-3}{2}$. Тому $m=i+j-n$ і $0<m\le \frac{n+\lambda-3}{2}<\frac{n+\lambda-1}{2}$.

Тоді $t(i)+ t(j)=2(n-i)+(n+1-\lambda)$.

Якщо $\frac{n+\lambda}{2}<m\le \frac{n+\lambda-1}{2}$, то $t(i)+t(j)>t(m)=t(j)$.

Якщо ж $1\le m\le \frac{n+1-\lambda}{2}$, то нерівність $t(i)+t(j)\ge t(m)$ перетворюється у нерівність $2(n-i)+(n+1-\lambda)\ge 2(n+2-\lambda-m)$. Оскільки $m=i+j-n$, то $n-i=j-m$. Маємо $2(j-m)+n+1-\lambda\ge 2(n+2-\lambda-m)$ або $2j+\lambda-3\ge n$.

Ця нерівність виконується, бо $j>\frac{n+1-\lambda}{2}$.

4) Покажемо, що $t(1)=t(i)+t(n+1-i)$ для всіх $i=2, \ldots, n-1$.

$t(1)=2(n+2-\lambda-1)= 2(n+1-\lambda)$.

Якщо $2\le i\le \frac{n+1-\lambda}{2}$, то

$$n+1-\frac{n+1-\lambda}{2}\le n+1-i\le n+1-2.$$

Звідси $\frac{n+\lambda-1}{2}<n+1-i\le n-1$. Тому

$$t(i)+ t(n+1-i)=2(n+2-\lambda-i)+2(n-(n+1-i))=2(n+2-\lambda-i)+2(i-1)=2(n+1-\lambda)=t(1).$$

Якщо $\frac{n+1-\lambda}{2}<i\le\frac{n+\lambda-1}{2}$, то $n+1-\frac{n+\lambda-1}{2}\le n+1-i<n+1-\frac{n+1-\lambda}{2}$ або $\frac{n+1-\lambda}{2}< n+1-i\le\frac{n+\lambda-1}{2}$.

Тому

$$t(i)+ t(n+1-i)=(n+1-\lambda)+ (n+1-\lambda)=2(n+1-\lambda)=t(1).$$

Якщо $\frac{n+\lambda-1}{2}<i\le n-1$, то $n+1-(n-1)\le n+1-i<n+1-\frac{n+\lambda-1}{2}$.

Звідси $2\le n+1-i\le\frac{n-\lambda+1}{2}$. Тому

$$t(i)+ t(n+1-i)=2(n-i)+ 2(n+2-\lambda-(n+1-i))=2(n-i)+2(n+2-\lambda-(n+1-i))=$$

$$= 2(n-i)+2(i+1-\lambda)=2(n+1-\lambda)=t(i).$$

Отже, $t(i)+ t(n+1-i)=t(1)$ для всіх $i=2, \ldots, n-1$.

Умова 4) леми 2.4.1 виконується і за цією лемою матриця $\mathit{\Gamma} =\sum_{0}^{n-1} t(i)\mathrm{P}_{\sigma^{i}}$ є горенштейновою.

Обчислимо індекс матриці Γ. Для цього знайдемо всі j такі, що $q_{1j+1}=0$. Ця рівність рівносильна умові, що існує $v\neq 0, j$ таке, що $t(v)+t(l)=t(j)$, де $v+l\equiv j \pmod n$. З $v\neq 0, j$ випливає, що $l\neq 0, j$. Тому $t(v)>0$, $t(l)>0$ і $t(j)>0$.

Якщо $1\leq i\leq \frac{n-\lambda+1}{2}$, то $t(i)=2(n+2-\lambda-i)$. Тоді

$$2\left(n+2-\lambda-\frac{n-\lambda+1}{2}\right)\leq t(i)\leq 2(n+2-\lambda-1);$$

$$n-\lambda+3\leq t(i)\leq 2(n+1-\lambda).$$

Якщо $\frac{n-\lambda+1}{2}<\frac{n-\lambda+3}{2}\leq i\leq \frac{n+\lambda-1}{2}$, то $t(i)=n+1-\lambda$.

Якщо $\frac{n+\lambda-1}{2}<\frac{n+\lambda+1}{2}\leq i\leq n-1$, то $t(i)=2(n-i)$. Тоді

$$2(n-(n-1))\leq t(i)\leq 2\left(n-\frac{n+\lambda+1}{2}\right) \text{ або } 2\leq t(i)\leq n-\lambda-1.$$

Розглянемо випадки:

а) $1\leq j\leq \frac{n-\lambda+1}{2}$;

б) $\frac{n-\lambda+1}{2}<j\leq \frac{n+\lambda-1}{2}$;

в) $\frac{n+\lambda-1}{2}<j\leq n-1$.

а) $1\leq j\leq \frac{n-\lambda+1}{2}$;

1) Нехай $1\leq v, l\leq \frac{n-\lambda+1}{2}$. Тоді $v+l<n$, $j=v+l$ і рівність $t(v)+t(l)=t(j)$ набуває вигляду $2(n+2-\lambda-v)+2(n+2-\lambda-l)=2(n+2-\lambda-j)$. Звідси $v+l=n+2-\lambda+j$ або $\lambda=n+2$. Отримали протиріччя, бо $\lambda<n$.

2) Нехай $1 \le v \le \frac{n-\lambda+1}{2} < l \le \frac{n+\lambda-1}{2}$. Тоді $v+l \le n$, $j=v+l$ і рівність

$t(v)+t(l)=t(j)$ набуває вигляду $2(n+2-\lambda-v)+(n+1-\lambda)=2(n+2-\lambda-j)$.

Звідси $n+1-\lambda+2j=2v$ або $n+1-\lambda+2(v+l)=2v$, $2l=\lambda-n-1$. Отримали протиріччя, бо $\lambda<n$.

3) Нехай $1 \le v \le \frac{n-\lambda+1}{2}$, $\frac{n+\lambda-1}{2}+1 \le l \le n-1$. Тоді рівність $t(v)+t(l)=t(j)$ набуває вигляду $(t(j)>t(v) \Rightarrow t(j)=2(n+2-\lambda-j))$

$$2(n+2-\lambda-v)+2(n-l)=2(n+2-\lambda-j).$$

Звідси $v+l=j+n$.

Оскільки $\frac{n+\lambda-1}{2}+2 \le v+l \le \frac{n-\lambda+1}{2}+(n-1)$, $n+1 \le j+n \le \frac{n-\lambda+1}{2}+n$ і $\frac{n+\lambda+3}{2}<n+1$, то $n+1 \le j+n \le \frac{n-\lambda+1}{2}+n$ або $1 \le j \le \frac{n-\lambda+1}{2}$.

Отже, для кожного $j=1, \dots, \frac{n-\lambda+1}{2}$ існує $v \ne 0$, l таке, що $t(v)+t(l)=t(j)$ та $v+l \equiv j$ $(mod\ n)$. Тому $q_{1j+1}=0$ при $1 \le j \le \frac{n-\lambda+1}{2}$.

4) Нехай $\frac{n-\lambda+1}{2}+1 \le v$, $l \le \frac{n+\lambda-1}{2}$.

Тоді рівність $t(v)+t(l)=t(j)$ набуває вигляду

$$(n+1-\lambda)+(n+1-\lambda)=2(n+2-\lambda-j).$$

Звідси $j=1$. Отже, $q_{12}=0$.

5) Нехай $\frac{n-\lambda+1}{2}+1 \le v \le \frac{n+\lambda-1}{2} < l \le n-1$. Тоді $v+l>n$ і $j=v+l-n$.

Рівність $t(v)+t(l)=t(j)$ набуває вигляду

$$(n+1-\lambda)+2(n-l)=2(n+2-\lambda-j).$$

Звідси одержуємо

$$n+1-\lambda-2l=4-2\lambda-2j,$$

$$n+\lambda-3-2l=-2(v+l-n),$$

$$2v=n-\lambda+3,$$

$$v=\frac{n-\lambda+3}{2}.$$

Маємо $l=j+n-v=j+n-\frac{n-\lambda+3}{2}=j+\frac{n+\lambda-3}{2}$.

Оскільки $1\leq j\leq\frac{n-\lambda+1}{2}$, то $1+\frac{n+\lambda-3}{2}\leq l\leq\frac{n-\lambda+1}{2}+\frac{n+\lambda-3}{2}$ або $\frac{n+\lambda-1}{2}\leq l\leq n-1$. З $l>\frac{n+\lambda-1}{2}$ випливає, що $j\neq 1$.

Отже, $q_{1j}=0$ при $j=2, \ldots, \frac{n-\lambda-1}{2}$.

б) $\frac{n+\lambda-1}{2}\leq v,\ l\leq n-1$. Тоді $v+l>n,\ \ j=v+l-n$ і рівність $t(v)+t(l)=t(j)$ набуває вигляду $2(n-v)+2(n-l)=2(n+2-\lambda-j)$. Звідси $v+l=n-2+\lambda+j$ або $\lambda=2$. Отримали протиріччя, бо $\lambda>3$.

Таким чином, якщо $1\leq j\leq\frac{n-\lambda+1}{2}$, то $q_{1j+1}=0$ (досить було б розглянути лише 3)).

б) $\frac{n-\lambda+1}{2}<\frac{n-\lambda+3}{2}\leq j\leq\frac{n+\lambda-1}{2}$.

Тоді $t(j)=n+1-\lambda$. Оскільки $t(i)>n+1-\lambda$ при $1\le i\le\frac{n-\lambda+1}{2}$ та $t(j)=t(v)+t(l)$, то $v,\ l>\frac{n-\lambda+1}{2}$.

Якщо $t(v)$ (відповідно $t(l)$) дорівнює $n+1-\lambda$, то $t(v)$ (відповідно $t(l)$) дорівнює 0, що неможливо. Тому $v,\ l>\frac{n+\lambda-1}{2}$.

Тоді $v+l>n$ і $v+l=j+n$. Рівність $t(v)+t(l)=t(j)$ набуває вигляду

$$2(n-v) + 2(n-l) = n+1-\lambda.$$

Звідси $2(v+l)=3n+\lambda-1$

$$2(j+n)= 3n+\lambda-1,$$

$$2j= n+\lambda-1,$$

$$j=\frac{n+\lambda-1}{2}.$$

Отже, якщо $\frac{n-\lambda+1}{2}<j\le\frac{n+\lambda-1}{2}$, то $q_{1j+1}=0$ лише при $j=\frac{n+\lambda-1}{2}$.

в) $\frac{n+\lambda-1}{2}<j\le n-1$. Тоді $t(j)=2(n-j)< n+1-\lambda$.

Враховуючи, що $t(i)\ge n+1-\lambda$ при $i\le\frac{n+\lambda-1}{2}$, маємо

$$\frac{n+\lambda-1}{2}<v,\ l\le n-1.$$

Тому рівність $t(v)+t(l)=t(j)$ набуває вигляду

$$2(n-v)+2(n-l) =2(n-j).$$

Звідси $v+l=j+n$.

З обмежень $\frac{n+\lambda+1}{2} \le v,\ l,\ j \le n-1$ отримуємо

$$n+\lambda+1 \le v+l \le 2n-2,\ \ n+\frac{n+\lambda+1}{2} \le j+n \le 2n-1.$$

Оскільки $\lambda+1 \le \frac{n+\lambda+1}{2}$, то $n+\frac{n+\lambda+1}{2} \le j+n \le 2n-2$ або $\frac{n+\lambda-1}{2} < j \le n-2$.

Отже, якщо $\frac{n+\lambda-1}{2} < j \le n-2$, то $q_{1j+1}=0$.

Таким чином, $q_{1j+1}=0$ лише у випадках:

- $1 \le j \le \frac{n-\lambda+1}{2}$;
- $j=\frac{n+\lambda-1}{2}$;
- $\frac{n+\lambda-1}{2} < j \le n-2$.

Звідси отримуємо, що $q_{1j+1}=1$ лише якщо $\frac{n-\lambda+1}{2} < j < \frac{n+\lambda-1}{2}$ або $j=n-1$.

Нагадаємо, що $q_{11}=1$. Тому $inx\,\Gamma=1+1+\left(\frac{n+\lambda-1}{2}-1-\frac{n-\lambda+1}{2}\right)=\lambda$.

2.6. Випадок $n=2k$ і $\lambda = inx\Gamma=2p$.

Покладемо

$$t(i)=\begin{cases} 2(n+1-\lambda-i), & \text{якщо} \quad 1\le i\le \frac{n-\lambda}{2}, \\ n-\lambda, & \text{якщо} \quad \frac{n-\lambda}{2}<i<\frac{n}{2}, \\ n-\lambda+1, & \text{якщо} \quad i=\frac{n}{2}, \\ n-\lambda-1, & \text{якщо} \quad i=\frac{n}{2}+1, \\ n-\lambda, & \text{якщо} \quad \frac{n}{2}+1<i\le \frac{n+\lambda}{2}, \\ 2(n-i), & \text{якщо} \quad \frac{n+\lambda}{2}<i\le n-1. \end{cases}.$$

Знайдемо множину значень функції $t(i)$ на проміжках $\left[1, \quad \frac{n-\lambda}{2}\right]$ та $\left(\frac{n+\lambda}{2} \quad n-1\right]$.

При $1\le i\le \frac{n-\lambda}{2}$ маємо

$$n-\lambda+2=2\left(n+1-\lambda-\frac{n-\lambda}{2}\right)\le t(i)\le 2(n+1-\lambda-1)=2(n-\lambda).$$

При $\frac{n+\lambda}{2}<i\le n-1$ маємо

$$2=2(n-(n-1))\le t(i)<2\left(n-\frac{n+\lambda}{2}\right)=n-\lambda$$

або $2\le t(i)\le n-\lambda-2$.

Звідси для $l\in\left[1, \quad \frac{n-\lambda}{2}\right]$, $m\in\left(\frac{n-\lambda}{2}, \quad \frac{n+\lambda}{2}\right]$, $t\in\left(\frac{n+\lambda}{2}, \quad n-1\right]$ маємо

$$2(n-\lambda)\ge f(l)\ge n-\lambda+2>f(m)>n-\lambda-2\ge f(t)\ge 2.$$

Покажемо, що функція $t(i)$ задовольняє умови леми 2.2.1 і тому визначає горенштейнову матрицю показників. Умови 1) та 2) леми, очевидно, виконуються. Перевіримо виконання нерівності $t(i)+t(j)\geq t(k)$, де $k\equiv i+j \ (mod\ n)$. При $\kappa=0$ $t(k)=0$ і нерівність, очевидно, виконується. Якщо $i=0$, то $j=k$, і, навпаки, якщо $j=0$, то $i=k$, і нерівність також виконується.

Тому вважатимемо, що $i, j, k>0$ та $i\leq j$.

Розглянемо випадки:

(a) $1\leq i, j\leq \frac{n+\lambda}{2}$;

(b) $1\leq i\leq \frac{n+\lambda}{2} < j\leq n-1$;

(c) $\frac{n+\lambda}{2} < i, j\leq n-1$.

(a) Якщо $i\neq \frac{n}{2}+1$ та $j\neq \frac{n}{2}+1$, то $t(i)\geq n-\lambda$, $t(j)\geq n-\lambda$. Тоді

$$t(i)+ t(j)\geq 2(n-\lambda)= \max_{1\leq l\leq n-1} t(l) \geq t(k)$$

для довільного k.

Ця нерівність може порушуватися лише у випадках:

(1) $t(i)=t(j)=n-\lambda-1$,

(2) $t(i)= n-\lambda-1$, $t(j)= n-\lambda$,

(3) $t(i)= n-\lambda$, $t(j)=n-\lambda-1$.

У випадку (1) $i=j=\frac{n}{2}+1$. Тоді $i+j=n+2$ і $k=i+j-n=2$.

$$t(i)+t(j)= 2(n-\lambda-1)=t(k).$$

У випадку (2) $i=\frac{n}{2}+1$, $\frac{n}{2}+1<j\leq \frac{n+\lambda}{2}$. Тоді $i+j>n+2$ і $k=i+j-n$.

$$2<k\le\frac{\lambda}{2}+1<\frac{n-2}{2}+1=\frac{n}{2}.$$

Звідси

$$t(i)+t(j)=(n-\lambda-1)+(n-\lambda)=2(n-\lambda)-1>2(n-\lambda-2)=$$

$$=\max(2(n+\underline{1}-\lambda-3),\ n-\lambda)=\max(t(3),\ n-\lambda)\ge t(k).$$

У випадку (3) $\frac{n-\lambda}{2}<i<\frac{n}{2}$, $j=\frac{n}{2}+1$. Тоді $n-\frac{\lambda}{2}<i+j<n+1$ і $k=i+j>\frac{n-\lambda}{2}$.

$$t(i)+t(j)=(n-\lambda)+(n-\lambda-1)\ge(n-\lambda)+1\ge t(k)$$

(тут враховано, що $\lambda<n-2$, тобто $n-\lambda-1>1$).

(в) $1\le i\le\frac{n+\lambda}{2}<j\le n-1$.

Припустимо, що $t(i)+t(j)<t(k)$, де $k\equiv i+j\ (mod\ n)$. Тоді

$$t(k)>t(i)+t(j)\ge\min_{1\le l\le\frac{n+\lambda}{2}}t(l)+\min_{\frac{n+\lambda}{2}<x\le n-1}t(x)=(n-\lambda-1)+2=n-\lambda+1.$$

Звідси $k\in\left[1,\quad\frac{n-\lambda}{2}\right]$.

Нерівність $t(i)+t(j)<t(k)$ набуває вигляду $t(i)+2(n-j)<2(n+1-\lambda-k)$ або

$$t(i)<2(j+1-\lambda-k).$$

Якщо $k=i+j$, то $t(i)<2(j+1-\lambda-k)=2(1-i-\lambda)<0$. Тому $k=i+j-n$ і маємо $t(i)<2(n+1-\lambda-i)$. Звідси $i\notin\left[1,\quad\frac{n-\lambda}{2}\right]$, $\frac{n-\lambda}{2}<i\le\frac{n+\lambda}{2}$.

Якщо $t(i) \geq n-\lambda$, то $n-\lambda \leq t(i) < 2(n+1-\lambda-i)$. Тоді $i < \frac{n-\lambda}{2}+1$ і разом з $\frac{n-\lambda}{2} < i \leq \frac{n+\lambda}{2}$ маємо $i \in \varnothing$. Залишилось розглянути випадок $t(i)=n-\lambda-1$, $i=\frac{n}{2}+1$. В цьому випадку

$$n-\lambda-1=t(i)<2(n+1-\lambda-i)=2\left(n+1-\lambda-\left(\frac{n}{2}+1\right)\right).$$

Маємо $n-\lambda-1<n-2\lambda$ або $\lambda<1$. Ми розглядаємо $\lambda>3$.

(c) $\frac{n+\lambda}{2} < i, j \leq n-1$. Тоді $2n-2 \geq i+j > n+\lambda$, $k=i+j-n$. Тому $\lambda<k\leq n-2$.

Припустимо, що $t(i)+t(j)<t(k)$, тобто

$$2(n-i)+2(n-j)<t(k).$$

Запишемо це у вигляді $2(n-(i+j-n))<t(k)$ або $2(n-k)<t(k)$. Звідси отримуємо, що $k \notin \left[\frac{n+\lambda}{2}, \quad n-1\right]$. При $k < \frac{n+\lambda}{2}$ $t(k) \geq n-\lambda-1$.

Якщо $t(k) \leq n-\lambda$, то маємо $2(n-k)<t(k)\leq n-\lambda$. Звідси $k>\frac{n+\lambda}{2}$, що неможливо.

Якщо ж $t(k)=n-\lambda+1$, $k=\frac{n}{2}$, то нерівність $2(n-k)< t(k)$ набуває вигляду

$$2\left(n-\frac{n}{2}\right)<n-\lambda+1 \text{ або } \lambda<1.$$

Ми розглядаємо випадок, коли $\lambda>3$.

Отже, $t(k)\geq n-\lambda+2$. Тоді $k \in \left[1, \quad \frac{n-\lambda}{2}\right]$. Маємо нерівність

$$2(n-k)<2(n+1-\lambda-k) \text{ або } \lambda<1.$$

Таким чином, нерівність $t(i)+t(j)\geq t(k)$, де $k\equiv i+j \pmod n$ завжди виконується.

Перевіримо тепер виконання рівності $t(i)+t(n+1-i)=t(1)$ для всіх $i=2, \dots ,$ $n-1$.

Якщо $2\le i\le \frac{n-\lambda}{2}$, то $\frac{n+\lambda}{2}<n+1-\frac{n-\lambda}{2}\le n+1-i\le n+1-2=n-1$.

Якщо $\frac{n+\lambda}{2}<i\le n-1$, то $2=n+1-(n-1)\le n+1-i<n+1-\frac{n+\lambda}{2}=\frac{n-\lambda}{2}+1$. Тоді $t(i)+t(n+1-i)=2(n-i)+2(n+1-\lambda-(n+1-i))=2(n-\lambda)=t(1)$.

Якщо $\frac{n-\lambda}{2}<i<\frac{n}{2}$, то

$$\frac{n}{2}+1=n+1-\frac{n}{2}<n+1-i<n+1-\frac{n-\lambda}{2}=\frac{n+\lambda}{2}+1$$

або

$$\frac{n}{2}+1<n+1-i\le\frac{n+\lambda}{2}.$$

Тому $t(i)+t(n+1-i)=(n-\lambda)+(n-\lambda)=2(n-\lambda)=t(1)$.

Аналогічно, якщо $\frac{n}{2}+1<i\le\frac{n+\lambda}{2}$, то

$$\frac{n-\lambda}{2}<\frac{n-\lambda}{2}+1=n+1-\frac{n+\lambda}{2}\le n+1-\mathrm{i}<n+1-\left(\frac{n}{2}+1\right)=\frac{n}{2}.$$

Тоді $t(i)+t(n+1-i)=2(n-\lambda)=t(1)$.

Якщо $i=\frac{n}{2}$, то $n+1-i=\frac{n}{2}+1$. І навпаки, якщо $i=\frac{n}{2}+1$, то $n+1-i=\frac{n}{2}$.

Тому $t(i)+t(n+1-i)=t\left(\frac{n}{2}\right)+t\left(\frac{n}{2}+1\right)=2\left(n-\lambda\right)=t(1)$.

Отже, рівність $t(i)+t(n+1-i)=t(1)$ виконується для всіх $i=2, \dots, n-1$ і функція $t(i)$ визначає горенштейнову матрицю Γ.

Обчислимо індекс матриці Γ. Для цього знайдемо всі j такі, що $q_{1j+1}=0$. Ця рівність рівносильна умові, що існує $v\neq 0, j$ таке, що $t(v)+t(l)=t(j)$, де $v+l\equiv j$ (mod n). З $v\neq 0, j$ випливає, що $l\neq 0, j$. Тому $t(v)>0$, $t(l)>0$ і $t(j)>0$. Можна вважати, що $v\leq l$.

Розглянемо випадки

(a) $1\leq j\leq \frac{n-\lambda}{2}$,

(b) $\frac{n-\lambda}{2}<j<\frac{n}{2}$ або $\frac{n}{2}+1<j<\frac{n+\lambda}{2}$,

(c) $j=\frac{n}{2}$,

(d) $j=\frac{n}{2}+1$,

(e) $\frac{n+\lambda}{2}<j\leq n-1$.

(a) $1\leq j\leq \frac{n-\lambda}{2}$, $t(j)=2(n+1-\lambda-j)$.

1) Нехай $1\leq v, l\leq \frac{n-\lambda}{2}$. Тоді $v+l<n$, $j=v+l$ і рівність $t(v)+t(l)=t(j)$ набуває вигляду

$$2(n+1-\lambda-v)+2(n+1-\lambda-l)=2(n+1-\lambda-j).$$

Звідси $2(n+1-\lambda-v-l)=2(-j)$ або $\lambda=n+1$, що неможливо, бо $3<\lambda<n-2$.

2) Нехай $1\leq v\leq \frac{n-\lambda}{2}$, $\frac{n-\lambda}{2}<l\leq \frac{n+\lambda}{2}$.

Тоді $v+l\leq n$, $j=v+l$ ($j\neq 0$). Рівність $t(v)+t(l)=t(j)$ набуває вигляду

$$2(n+1-\lambda-v)+t(l)=2(n+1-\lambda-j) \text{ або } t(l)=2(v-j)=-2l<0.$$

Отримали протиріччя.

3) Нехай $1 \le v \le \frac{n-\lambda}{2}$, $\frac{n+\lambda}{2} < l \le n-1$.

Тоді

$$t(j)=t(v)+t(l)=2(n+1-\lambda-v)+2(n-l)=2(n+1-\lambda-(v+l-n)).$$

Оскільки $t(j)>t(v)=2(n+1-\lambda-v)\ge n-\lambda+2$, то $j \in \left[1, \ \frac{n-\lambda}{2}\right]$. З $v+l>\frac{n+\lambda}{2}+1$ отримуємо $j=v+l-n$. Маємо

$$t(j)=2(n+1-\lambda-(v+l-n))=2(n+1-\lambda-j).$$

Ця рівність справедлива для всіх $j \in \left[1, \ \frac{n-\lambda}{2}\right]$.

Отже, $q_{1j+1}=0$, для всіх $j=1, \ldots, \frac{n-\lambda}{2}$.

(b) $\frac{n-\lambda}{2}<j<\frac{n}{2}$ або $\frac{n}{2}+1<j\le\frac{n+\lambda}{2}$, $t(j)=n-\lambda$.

З рівності $t(j)=t(v)+t(l)$ маємо $t(j)>t(v)$, $t(j)>t(l)$. Тому $2\le t(v)<n-\lambda$, $2\le t(l)<n-\lambda$.

Якщо $t(v)=n-\lambda-1$, то $t(l)\ge 2$ і рівність $t(j)=t(v)+t(l)$ неможлива.

Отже, $t(v)<n-\lambda-1$, $t(l)<n-\lambda-1$. Тоді $\frac{n+\lambda}{2}<v, l\le n-1$.

Оскільки $v+l>n$, то $j=v+l-n$. Рівність набуває вигляду

$$2(n-v)+2(n-l)=n-\lambda.$$

$$2(n-(v+l-n))=n-\lambda \text{ або } 2(n-j)=n-\lambda.$$

Звідси $j=\frac{n+\lambda}{2}$.

Таким чином, *у* випадку (*b*) q_{1j+1}=0 тільки при $j=\frac{n+\lambda}{2}$.

(*c*) $j=\frac{n}{2}$, $t(j)=n-\lambda+1$.

Маємо рівність $t(j)=n-\lambda+1=(n-\lambda-1)+2=t(v)+t(l)$, де $v=\frac{n}{2}+1$, $l=n-1$, причому $v+l=n+\frac{n}{2}\equiv i \pmod n$. Тому $q_{1j+1}=0$ при $j=\frac{n}{2}$.

(*d*) $j=\frac{n}{2}+1$, $t(j)=n-\lambda-1$.

З нерівності $t(v)<t(j)$ і $t(l)<t(j)$ маємо $\frac{n+\lambda}{2}<v$, $l\leq n-1$.

Оскільки $v+l>n$, то $j=v+l-n$. Маємо рівність

$$2(n-v)=2(n-l)=t(j)=n-\lambda-1.$$

Враховуючи, що $j=v+l-n$, маємо

$$2(n-(v+l-n))=n-\lambda-1 \text{ або}$$

$$2(n-j)=n-\lambda-1.$$

Звідси $j=\frac{n+\lambda+1}{2}$ – не ціле число і $j\neq\frac{n}{2}+1$. Отже, у випадку (*d*) $q_{1j+1}=1$.

(*e*) $\frac{n+\lambda}{2}<j\leq n-1$, $2\leq t(j)=2(n-j)\leq n-\lambda-2$.

З $t(v)<t(j)$, $t(l)<t(j)$ маємо $\frac{n+\lambda}{2}<v$, $l\leq n-1$. Тоді $v+l>n$, $j=v+l-n$.

Маємо рівність

$$2(n-v)+2(n-l)=2(n-j)\geq 2, \text{ де } 2(n-v),\ 2(n-l)\geq 2.$$

Звідси

$$2(n\text{-}(v+l\text{-}n))=2(n\text{-}j),\ \text{ де } j<n\text{-}1.$$

Ця рівність справедлива для всіх $j\in\left(\frac{n+\lambda}{2},\quad n-2\right]$. Тому для всіх j з цього проміжка $q_{1j+1}=0$.

Таким чином, в кожному з розглядуваних випадків $q_{1j+1}=0$ для наступних значень j:

(a) $j=1,\ \ldots,\ \frac{n-\lambda}{2}$,

(b) $j=\frac{n+\lambda}{2}$,

(c) $j=\frac{n}{2}$,

(d) $\varnothing$

(e) $j=\frac{n+\lambda}{2},\ \ldots,\ n\text{-}2$.

Всього матриця $[Q(\Gamma)]$ в першому рядку має

$$\frac{n-\lambda}{2}+1+1+\left(n-2-\frac{n+\lambda}{2}\right)=n\text{-}\lambda$$

нулів. Тому $inx\Gamma= n\text{-}(n\text{-}\lambda)=\lambda$.

Наприклад.

$$\Gamma_{10}^{6}=\begin{pmatrix} 0&8&6&4&4&5&3&4&4&2\\ 2&0&8&6&4&4&5&3&4&4\\ 4&2&0&8&6&4&4&5&3&4\\ 4&4&2&0&8&6&4&4&5&3\\ 3&4&4&2&0&8&6&4&4&5\\ 5&3&4&4&2&0&8&6&4&4\\ 4&5&3&4&4&2&0&8&6&4\\ 4&4&5&3&4&4&2&0&8&6\\ 6&4&4&5&3&4&4&2&0&8\\ 8&6&4&4&5&3&4&4&2&0 \end{pmatrix},\ [Q(\Gamma_{10}^{6})]=\begin{pmatrix} 1&0&0&1&1&0&1&1&0&1\\ 1&1&0&0&1&1&0&1&1&0\\ 0&1&1&0&0&1&1&0&1&1\\ 1&0&1&1&0&0&1&1&0&1\\ 1&1&0&1&1&0&0&1&1&0\\ 0&1&1&0&1&1&0&0&1&1\\ 1&0&1&1&0&1&1&0&0&1\\ 1&1&0&1&1&0&1&1&0&0\\ 0&1&1&0&1&1&0&1&1&0\\ 0&0&1&1&0&1&1&0&1&1 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, q_{1j+1}=0 при наступних значеннях j

1. j=1;

2. $3\leq j\leq n-4$;

3. $j=\dfrac{n+\lambda-4}{2}$;

4. $\dfrac{n+3}{2}$;

5. $\dfrac{n+\lambda+2}{2}\leq j\leq n-1$.

Всього матриця $[Q(\Gamma)]$ в першому рядку має

$$1+\left(\frac{n+2-\lambda}{2}\right)+1+1+\left(n-1-\frac{n+\lambda}{2}\right)=n-\lambda$$

нулів. Тому $inx\Gamma= n-(n-\lambda)=\lambda$.

Теорема доведена.

2.7. Випадок n=2k+1 та λ=5.

Покладемо

$$t(i)=\begin{cases} n-1, & \text{якщо}, \quad i=1, \\ n-3, & \text{якщо}, \quad i=2, \\ n-i, & \text{якщо}, \quad 3\le i\le n-2, \\ 2, & \text{якщо}, \quad i=n-1. \end{cases}$$

Наприклад Γ_{13}^{5}=(0 12 10 10 9 8 7 6 5 4 3 2 2),

[Q(Γ_{13}^{5})]=(1 0 1 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1).

Зауважимо, що функція $t(i)$ незростаюча на [1, n-1]. Покажемо, що $t(i)+t(j)\geq t(k)$ Покажемо, що $t(i)+t(j)\geq t(k)$, де $k\equiv i+j$ (mod n). При κ=0 $t(k)$=0 і нерівність, очевидно, виконується.

Якщо i=0, то j=k, і, навпаки, якщо j=0, то i=k, і нерівність також виконується.

Тому вважатимемо, що i, j, k>0 та $i\leq j$.

Розглянемо випадки

(a) i=1;

(b) i=2;

(c) $3\leq i\leq n-2$;

(d) $i=n-1$;

(a) Нехай i=1. Оскільки $t(1)=\max\limits_{1\le l\le n-1} t(l)$, то $t(i)+t(j)\geq t(k)$ для всіх j, k.

(b) Нехай i=2. Тоді $t(j)\geq \min\limits_{2\le l\le n-1} t(l)=t(n-1)=2$ і

$$t(i)+ t(j)=(n-3)+2=n-1=\max_{1\le l\le n-1} t(l)\geq t(k)$$

для всіх k.

(c) Нехай $3\le i\le n$-2. Якщо $i\le j\le n$-2, то $6\le i+j\le 2n$-4. Припустимо, що $t(i)+t(j)<t(k)$.

Тоді

$$(n-i)+(n-j)<t(k),$$

$$t(k)>2n-(i+j).$$

Звідси маємо

$$n>t(k)>2n-(i+j),$$

$$i+j>n$$

Тому $k=i+j-n$. Маємо $t(k)>2n-(i+j)=n-(i+j-n)=n-k$.

Очевидно, що $k\notin[3, n-2]$. ($k=i+j-n\le n-4$). $k\neq 1, 2$, бо також отримуються суперечливі нерівності

$t(1)=n-1>n-1$ та

$t(2)=n-3>n-2$.

Отже, $t(i)+t(j)\ge t(k)$ при $3\le i\le n$-2.

(d) Нехай $i=n$-1. Тоді $i+j\ge n$ і $k=i+j-n$

Оскільки $i\le j\le n$-1, то $k=n$-2. Тому $t(i)+t(j)=2+2>2=n-(n-2)=t(k)$.

Таким чином, нерівність $t(i)+t(j)\ge t(k)$, де $k\equiv i+j \pmod n$ завжди виконується.

Перевіримо тепер виконання рівності $t(i)+t(n+1-i)=t(1)$ для всіх $i=2, \ldots, n-1$.

Якщо $i=2$, то $n+1-i=n-1$. І навпаки, якщо $i=n-1$, то $n+1-i=2$. Тому в цих випадках $t(i)+t(n+1-i)=t(2)+t(n-1)=(n-3)+2=n-1=t(1)$.

Якщо $3\le i\le n$-2, то $3=(n+1)-(n-2)\le n+1-3=n-2$. Тому

$$t(i)+t(n+1-i)=(n-i)+(n-(n+1-i))=n-1=t(1).$$

Отже, рівність $t(i)+ t(n+1-i)= t(1)$ виконується для всіх $i=2, \ldots, n-1$.

Обчислимо індекс матриці Γ. Для цього знайдемо всі j такі, що $q_{1j+1}=0$. Ця рівність рівносильна умові, що існує $v\neq 0, j$ таке, що $t(v)+t(l)=t(j)$, де $v+l\equiv j \ (mod\ n)$. З $v\neq 0, j$ випливає, що $l \neq 0, j$. Тому $t(v)>0$, $t(l)>0$ і $t(j)>0$.

Можна вважати, що $v\leq l$.

(a). Якщо $v=1$, то $t(v)=\max\limits_{1\leq l\leq n-1} t(l)\geq t(j)$. Тоді $t(v)+t(l)\geq t(j)+t(l)>t(j)$, для всіх i, j.

(b). Якщо $v=2$, то $t(v)+t(l)\geq(n-3)+\min\limits_{1\leq l\leq n-1} t(l)= (n-3)+2=n-1=\max\limits_{1\leq l\leq n-1} t(l)$.

Рівність $t(v)+t(l)=t(j)$ можлива лише при $j=1$, $l=n-1$.

Отже, $q_{12}=0$. ($v+l\equiv j \ (mod\ n)$).

(c). Нехай $3\leq v\leq n-2$. Якщо $3\leq l\leq n-2$, то рівність $t(v)+t(l)=t(j)$ набуває вигляду

$$(n-v)+(n-l)=t(j),$$

$$t(j)=2n-(v+l).$$

Оскільки $v+l\equiv j \ (mod\ n)$, то $t(j)\equiv n-j \ (mod\ n)$. Звідси $3\leq j\leq n-2$.

З іншого боку

$$2n-(v+l)=t(j)\leq n-1.$$

Тому $v+l\geq n+1$ і $j=v+l-n$. Враховуючи, що $6\leq v+l\leq 2n-4$, маємо $j\leq n-4$.

(d). Якщо $v=l=n-1$, то $j=v+l-n=2n-2$.

$$t(v)+t(l)=2+2>2= t(j).$$

Таким чином, $q_{1j+1}=0$ у випадках $j=1$ та $3\leq j\leq n-4$.

Всього матриця $[Q(\Gamma)]$ в першому рядку має $1+(n-4-2)=n-5$ нулів.

Тому $inx\Gamma= n-(n-5)=5$.

2.8. Випадок n=2k+1 та λ=2p+1≥7.

Елементи матриці показників визначаються за формулою:

$$t(i)=\begin{cases} n+6-\lambda, & \text{якщо} \quad i=1, \\ i, & \text{якщо} \quad 2\le i\le \dfrac{n+2-\lambda}{2}, \\ \dfrac{n+4-\lambda}{2}, & \text{якщо} \quad \dfrac{n+4-\lambda}{2}\le i\le \dfrac{n-1}{2}, \\ \dfrac{n+6-\lambda}{2}, & \text{якщо} \quad i=\dfrac{n+1}{2}, \\ \dfrac{n+8-\lambda}{2}, & \text{якщо} \quad \dfrac{n+3}{2}\le i\le \dfrac{n+\lambda-2}{2}, \\ i+5-\lambda, & \text{якщо} \quad \dfrac{n+\lambda}{2}\le i\le n-1. \end{cases}$$

Наприклад Γ_9^{15} дорівнює

$$\begin{pmatrix} 0 & 12 & 2 & 3 & 4 & 5 & 5 & 5 & 6 & 7 & 7 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 10 & 0 & 12 & 2 & 3 & 4 & 5 & 5 & 5 & 6 & 7 & 7 & 7 & 8 & 9 \\ 9 & 10 & 0 & 12 & 2 & 3 & 4 & 5 & 5 & 5 & 6 & 7 & 7 & 7 & 8 \\ 8 & 9 & 10 & 0 & 12 & 2 & 3 & 4 & 5 & 5 & 5 & 6 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 8 & 9 & 10 & 0 & 12 & 2 & 3 & 4 & 5 & 5 & 5 & 6 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 8 & 9 & 10 & 0 & 12 & 2 & 3 & 4 & 5 & 5 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 8 & 9 & 10 & 0 & 12 & 2 & 3 & 4 & 5 & 5 & 5 & 6 \\ 6 & 7 & 7 & 7 & 8 & 9 & 10 & 0 & 12 & 2 & 3 & 4 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 6 & 7 & 7 & 7 & 8 & 9 & 10 & 0 & 12 & 2 & 3 & 4 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 6 & 7 & 7 & 7 & 8 & 9 & 10 & 0 & 12 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 6 & 7 & 7 & 7 & 8 & 9 & 10 & 0 & 12 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 5 & 5 & 6 & 7 & 7 & 7 & 8 & 9 & 10 & 0 & 12 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 5 & 5 & 6 & 7 & 7 & 7 & 8 & 9 & 10 & 0 & 12 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 5 & 5 & 6 & 7 & 7 & 7 & 8 & 9 & 10 & 0 & 12 \\ 12 & 2 & 3 & 4 & 5 & 5 & 5 & 6 & 7 & 7 & 7 & 8 & 9 & 10 & 0 \end{pmatrix}$$

Зауважимо, що функція $t(i)$ зростає на $[2, n\text{-}1]$. Покажемо, що $t(i)+t(j)\geq t(k)$, де $k\equiv i+j \pmod n$. Вважатимемо, що $i, j, k>0$.

Оскільки функція $t(i)$ зростає на $[2, n$-$1]$, то з $i \geq k$, $k \neq 1$ випливає $t(i) \geq t(k)$, а тоді $t(i)+t(j)>t(k)$. Будемо також вважати, що $i \leq j$.

Розглянемо випадки.

(*1*) $i=1$;

(2) $2 \leq i \leq \frac{n+2-\lambda}{2}$;

(3) $\frac{n+4-\lambda}{2} \leq i \leq \frac{n-1}{2}$;

(4) $i=\frac{n+1}{2}$;

(5) $\frac{n+3}{2} \leq i \leq \frac{n+\lambda-2}{2}$;

(6) $\frac{n+\lambda}{2} \leq i \leq n-1$.

(1) Нехай $i=1$. Тоді $t(i)=n+6-\lambda=\max\limits_{1 \leq l \leq n-1} t(l) \geq t(k)$ для всіх k. Тому $t(i)+t(j) \geq t(k)$.

(2) $2 \leq i \leq \frac{n+2-\lambda}{2}$.

Будемо розглядати підвипадки.

(*a*) $2 \leq j \leq \frac{n+2-\lambda}{2}$**.** Тоді $4 \leq k=i+j=n+2-\lambda$. Тому $t(i)+t(j)=i+j=k$.

Якщо $2 \leq k \leq \frac{n+2-\lambda}{2}$, то $t(i)+t(j)=k=t(k)$.

Якщо $\frac{n+4-\lambda}{2} \leq k \leq \frac{n-1}{2}$, то $t(i)+t(j)=k \geq \frac{n+4-\lambda}{2}=t(k)$.

Якщо $k=\frac{n+1}{2}$**,** то $t(i)+t(j)=k=\frac{n+1}{2} \geq \frac{n+6-\lambda}{2}=t(k)$.

Якщо $\frac{n+3}{2} \le k \le \frac{n+\lambda-2}{2}$, то $t(i)+t(j)=k \ge \frac{n+3}{2} \ge \frac{n+8-\lambda}{2} = t(k)$.

Якщо $\frac{n+\lambda}{2} \le k \le n-1$, то $t(i)+t(j)=k > k+5-\lambda = t(k)$.

(b) $\frac{n+4-\lambda}{2} \le j \le \frac{n-1}{2}$. Тоді $i+j<n$, $k=i+j$.

З $k=i+j$ та зростання $t(i)$ на $[2, n-1]$ випливає, що $k \ge j$.

Якщо $\frac{n+4-\lambda}{2} \le k \le \frac{n-1}{2}$, то $t(j)=t(k)$, $t(i) \ge 2$ і тому $t(i)+t(j) \ge t(k)$.

Якщо $k=\frac{n+1}{2}$, то $t(k)= \frac{n+6-\lambda}{2} = \frac{n+4-\lambda}{2} +1= t(j)+1$, $t(i) \ge 2$. Тоді

$$t(i)+t(j) \ge 2+t(j) \ge t(j)+1=t(k).$$

Якщо $\frac{n+3}{2} \le k \le \frac{n+\lambda-2}{2}$, то $t(k)=\frac{n+8-\lambda}{2} = \frac{n+4-\lambda}{2} +2=t(j)+2$. Тоді $t(i)+t(j) \ge 2+t(j) \ge t(k)$.

Якщо $\frac{n+\lambda}{2} \le k \le n-1$, то нерівність $t(i)+t(j) \ge t(k)$ набуває вигляду

$$i+\frac{n+4-\lambda}{2} \ge k+5-\lambda = i+j+5-\lambda.$$

Ця нерівність рівносильна наступній $j \le \frac{n+\lambda-6}{2}$. Остання у випадку ($b$) завжди виконується.

$$j \le \frac{n-1}{2} \le \frac{n+\lambda-6}{2}.$$

(c) $j=\frac{n+1}{2}$. Тоді $i+j<n$, $k=i+j$.

Якщо $k=\frac{n+1}{2}$, то $t(k)=t(j)$ і $t(i)+t(j) \ge t(k)$.

Якщо $\frac{n+3}{2} \le k \le \frac{n+\lambda-2}{2}$, то $t(k)= \frac{n+8-\lambda}{2} = \frac{n+6-\lambda}{2}+1= t(j)+1$. Оскільки $t(i)\ge 2$, то $t(i)+t(j)\ge 2+t(j)\ge t(k)$.

Якщо $\frac{n+\lambda}{2} \le k \le n$-1, то нерівність $t(i)+t(j)\ge t(k)$ набуває вигляду

$$i+\frac{n+6-\lambda}{2} \ge k+5-\lambda=i+j+5-\lambda.$$

Ця нерівність рівносильна наступній

$$j\le \frac{n+\lambda-4}{2}.$$

Остання у випадку (c) завжди виконується.

$$j=\frac{n+1}{2}\le \frac{n+\lambda-4}{2}.$$

(d) $\frac{n+3}{2} \le j \le \frac{n+\lambda-2}{2}$. Тоді $i+j\le n$, $0\ne k=i+j$.

Якщо $\frac{n+3}{2} \le k \le \frac{n+\lambda-2}{2}$, то $t(k)= t(j)$ і $t(i)+t(j)\ge t(k)$.

Якщо $\frac{n+\lambda}{2} \le k \le n$-1, то нерівність $t(i)+t(j)\ge t(k)$ набуває вигляду

$$i+\frac{n+8-\lambda}{2} \ge k+5-\lambda=i+j+5-\lambda.$$

Ця нерівність рівносильна наступній

$$j\le \frac{n+\lambda-2}{2},$$

яка у випадку (d) завжди виконується.

(e) $\frac{n+\lambda}{2} \le j \le n$-1.

Якщо $i+j<n$, то $k=i+j$, $k\geq\frac{n+\lambda}{2}$ і маємо

$$t(i)+t(j)\geq i+(j+5-\lambda)=k+5-\lambda=t(k).$$

Якщо $i+j\geq n$, то $0\leq k=i+j-n\leq\frac{n-\lambda}{2}$.

При $k\neq1$, маємо $j>k$. Тоді $t(j)>t(k)$, бо $t(i)$ зростаюча на $[2, n-1]$ і $t(0)=0$. Тому $t(i)+t(j)\geq t(k)$.

При $k=1$ $j=n+1-i$ і маємо

$$t(i)+t(j)=i+(n+1-i+5-\lambda)= n+6-\lambda= t(1).$$

(3) $\frac{n+4-\lambda}{2}\leq i\leq\frac{n-1}{2}$.

(a) $\frac{n+4-\lambda}{2}\leq j\leq\frac{n-1}{2}$. Тоді $i+j<n$, $k=i+j$, $k\neq1$,

$$t(i)+t(j)=2\frac{n+4-\lambda}{2}=n+4-\lambda=\max_{2\leq l\leq n-1}t(l)\geq t(k).$$

(b) $j=\frac{n+1}{2}$. Тоді $i+j\leq n$. Звідси $k=0$ або $k=i+j>1$. Маємо

$$t(i)+t(j)=\frac{n+4-\lambda}{2}+\frac{n+6-\lambda}{2}=n+5-\lambda\geq\max_{2\leq l\leq n-1}t(l)\geq t(k).$$

(c) $\frac{n+3}{2}\leq j\leq\frac{n+\lambda-2}{2}$. Тоді

$$t(i)+t(j)=\frac{n+4-\lambda}{2}+\frac{n+8-\lambda}{2}=n+6-\lambda\geq\max_{2\leq l\leq n-1}t(l)\geq t(k).$$

(d) $\frac{n+\lambda}{2}\leq j\leq n-1$. Тоді $n+2\leq i+j\leq\frac{3}{2}(n-1)$, $2\leq k=i+j-n\leq\frac{n-3}{2}$.

Оскільки $j>k>1$, то $t(j)>t(k)$ і $t(i)+t(j)\geq t(k)$.

(4) $i=\frac{n+1}{2}$.

(a) $j=\frac{n+1}{2}$. Тоді $k=i+j-n=1$, $t(i)+t(j)=2\frac{n+6-\lambda}{2}=n+6-\lambda=t(1)=t(k)$.

(b) $\frac{n+3}{2}\le j\le\frac{n+\lambda-2}{2}$. Тоді $2\le k=i+j-n\le\frac{\lambda-1}{2}$. З $j>k>1$ слідує, що $t(j)>t(k)$ і $t(i)+t(j)\ge t(k)$.

(c) $\frac{n+\lambda}{2}\le j\le n-1$. Тоді $\frac{\lambda+1}{2}\le k=i+j-n\le\frac{n-1}{2}$.

Знову $j>k>1$, $t(j)>t(k)$ і $t(i)+t(j)\ge t(k)$.

(5) $\frac{n+3}{2}\le i\le\frac{n+\lambda-2}{2}$.

(a) $\frac{n+3}{2}\le j\le\frac{n+\lambda-2}{2}$. Тоді $3\le k=i+j-n\le\lambda-2$,

$$t(i)+t(j)=2\frac{n+8-\lambda}{2}=n+8-\lambda\ge n+6-\lambda=\max_{1\le l\le n-1}t(l)\ge t(k).$$

(b) $\frac{n+\lambda}{2}\le j\le n-1$. Тоді $\frac{\lambda+3}{2}\le k=i+j-n\le\frac{n+\lambda-4}{2}$. Маємо $j>k>1$, $t(j)>t(k)$ і

$$t(i)+t(j)\ge t(k).$$

(6) $\frac{n+\lambda}{2}\le i\le n-1$.

$\frac{n+\lambda}{2}\le j\le n-1$. Тоді $\lambda\le k=i+j-n\le n-2$.

$$t(i)+t(j)=(i+5-\lambda)+(j+5-\lambda)=n+k+10-2\lambda=(n+6-\lambda)+(k-\lambda+4)\ge n+6-\lambda=\max_{1\le l\le n-1}t(l)\ge t(k).$$

(Тут враховано, що $k-\lambda\ge 0$).

Отже, нерівність $t(i)+t(j)\ge t(k)$, де $k\equiv i+j \pmod n$, завжди виконується.

Перевіримо виконання рівності $t(i)+t(n+1-i)=t(1)$ для всіх $i=2, \dots , n-1$.

Якщо $2 \le i \le \frac{n+2-\lambda}{2}$, то $\frac{n+\lambda}{2} \le n+1-i \le n-1$ і навпаки, якщо

$\frac{n+\lambda}{2} \le i \le n-1$, то $2 \le n+1-i \le \frac{n+2-\lambda}{2}$. Тому

$$t(i)+t(n+1-i)=i+(n+1-i+5-\lambda)= n+6-\lambda=t(1).$$

$$t(i)+t(n+1-i)=(i+5-\lambda)+(n+1-i)=n+6-\lambda=t(1).$$

Якщо $\frac{n+4-\lambda}{2} \le i \le \frac{n-1}{2}$, то

$$\frac{n+3}{2} = n+1-\frac{n-1}{2} \le n+1-i \le n+1-\frac{n+4-\lambda}{2} = \frac{n+\lambda-2}{2}.$$

Тому

$$t(i)+t(n+1-i)= \frac{n+4-\lambda}{2} + \frac{n+8-\lambda}{2} =n+6-\lambda= t(1).$$

Навпаки, якщо $\frac{n+3}{2} \le i \le \frac{n+\lambda-2}{2}$, то $\frac{n+4-\lambda}{2} \le n+1-i \le \frac{n-1}{2}$.

$$t(i)+t(n+1-i)= \frac{n+8-\lambda}{2} + \frac{n+4-\lambda}{2} = n+6-\lambda= t(1).$$

Якщо $i=\frac{n+1}{2}$, то $n+1-i=\frac{n+1}{2}$ і $t(i)+t(n+1-i)=n+6-\lambda=t(1)$.

Отже, рівність $t(i)+t(n+1-i)= t(1)$ виконується для всіх $i=2,\dots, n-1$.

Обчислимо індекс матриці Γ. Для цього знайдемо всі j такі, що $q_{1j+1}=0$. Ця рівність рівносильна умові, що існує $v\neq 0, j$ таке, що $t(v)+t(l)=t(j)$, де $v+l\equiv j \ (mod\ n)$. З $v\neq 0, j$ випливає, що $l\neq 0, j$. Тому $t(v)>0$, $t(l)>0$ і $t(j)>0$.

Можна вважати, що $v \le l$.

Розглянемо випадки

1) $j=1$;

2) $2 \le j \le \frac{n+2-\lambda}{2}$;

3) $\frac{n+4-\lambda}{2} \le j \le \frac{n-1}{2}$;

4) $j=\frac{n+1}{2}$;

5) $\frac{n+3}{2} \le j \le \frac{n+\lambda-2}{2}$;

6) $\frac{n+\lambda}{2} \le j \le n-1$.

1). Нехай $j=1$, $t(1)=n+6-\lambda$.

Маємо рівність $t(i)+t(n+1-i)= t(1)$ для всіх $i=2,\dots,n-1$. Покладемо $v=i$, $l=n+1-i$. Тоді $v+l=n+1\equiv 1=j \pmod n$. Тому $q_{12}=0$.

2). Нехай $2 \le j \le \frac{n+2-\lambda}{2}$.

Оскільки функція $t(i)$ зростає на $[2, n-1]$ то з рівності $t(v)+ t(l)= t(j)$ отримуємо $t(v) \le t(l) < t(j)$. Звідси $1<v \le l<j$. Тому $2 \le v$, $l \le \frac{n+2-\lambda}{2}$.

Рівність $t(v)+t(l)=t(j)$ набуває вигляду $v+l=j$. Враховуючи, що $v \ge 2$, $l \ge 2$, отримуємо $t(v)+t(l)=t(j)$ для всіх $4 \le j \le \frac{n+2-\lambda}{2}$. Тому $q_{1j+1}=0$ для цих значень j.

3) Нехай $\frac{n+4-\lambda}{2} \le j \le \frac{n-1}{2}$. Тоді $t(j)=\frac{n+4-\lambda}{2}$.

Позаяк $t(v)$, $t(l)< t(j)$, то $t(v)$, $t(l) \le \frac{n+4-\lambda}{2}-1=\frac{n+2-\lambda}{2}$. Тому $2 \le v \le l \le \frac{n+2-\lambda}{2}$.

Рівність $t(v)+ t(l)= t(j)$ набуває вигляду $v+l=\frac{n+4-\lambda}{2}$, причому $v+l=j$.

Отже, тільки для $j=\frac{n+4-\lambda}{2}$ існує $v\neq 0$, j таке, що $t(v)+ t(j-v)= t(j)$. Тому $q_{1j+1}=0$.

4) Нехай $j=\frac{n+1}{2}$. Тоді $t(j)= \frac{n+6-\lambda}{2}$. Оскільки $t(v)\geq 2$, то

$$t(l) = t(j) - t(v) \leq \frac{n+6-\lambda}{2} - 2 = \frac{n+2-\lambda}{2}.$$

Звідси $2\leq v\leq l\leq \frac{n+2-\lambda}{2}$ і тоді $j=v+l<n$.

Рівність $t(v)+t(l)=t(j)$ набуває вигляду

$$v+l=\frac{n+6-\lambda}{2}$$

$$\text{або } j=\frac{n+6-\lambda}{2}.$$

Отримали протиріччя, бо $\frac{n+6-\lambda}{2}\neq\frac{n+1}{2}$.

(5) Нехай $\frac{n+3}{2}\leq j\leq\frac{n+\lambda-2}{2}$. Тоді $t(j)=\frac{n+8-\lambda}{2}$. Оскільки $t(v)\geq 2$, то

$$t(l)=t(j)-t(v)\leq\frac{n+8-\lambda}{2}-2=\frac{n+4-\lambda}{2}.$$

Звідси отримуємо, що або $t(l)= \frac{n+4-\lambda}{2}$, $t(v)=2$, або

$$t(v),\ t(l) \leq\frac{n+4-\lambda}{2}-1=\frac{n+2-\lambda}{2}.$$

Якщо $t(v),\ t(l)\leq\frac{n+2-\lambda}{2}$, то $2\leq v,\ l\leq\frac{n+2-\lambda}{2}$ і тоді $j=v+l$.

Рівність $t(v)+t(l)=t(j)$ набуває вигляду

$$v+l=\frac{n+8-\lambda}{2} \text{ або } j=\frac{n+8-\lambda}{2}.$$

Це значення j не належить проміжку $\left[\frac{n+3}{2},\quad \frac{n+\lambda-2}{2}\right]$.

Якщо $t(l)=\frac{n+4-\lambda}{2}$, $t(v)=2$, то $\frac{n+4-\lambda}{2}\le l\le\frac{n-1}{2}$, $v=2$.

Тоді $v+l\le\frac{n-1}{2}+2=\frac{n+3}{2}$. Тому $j=v+l=\frac{n+3}{2}$.

Отже, тільки для $j=\frac{n+3}{2}$ існує $v\neq0$, j таке, що $t(v)+ t(l)=t(j)$, де $v+l\equiv j(\mathrm{mod}\ n)$.

Тому $q_{1j+1}=0$.

6) Нехай $\frac{n+\lambda}{2}\le j\le n-1$. Тоді $t(j)=j+5-\lambda$.

Розглянемо підвипадки.

(а) $2\le v\le\frac{n+2-\lambda}{2}$.

Якщо $2\le l\le\frac{n+2-\lambda}{2}$, то $j=v+l$ і рівність $t(v)+t(l)=t(j)$ набуває вигляду

$$v+l=j+5-\lambda \text{ або } j=j+5-\lambda.$$

Прийшли до протиріччя.

Якщо $\frac{n+4-\lambda}{2}\le l\le\frac{n-1}{2}$, то $j=v+l<n$ і отримуємо рівність

$$v+\frac{n+4-\lambda}{2}=j+5-\lambda.$$

Звідси l=j-v= $\frac{n+4-\lambda}{2}$ +λ-5= $\frac{n+\lambda-6}{2} > \frac{n-1}{2}$.

Отримали протиріччя.

Якщо $l=\frac{n+1}{2}$, то $j=v+l<n$ і маємо рівність

$$v+\frac{n+6-\lambda}{2}=j+5-\lambda.$$

Звідси $l=j-v=\frac{n+6-\lambda}{2}+\lambda-5=\frac{n+\lambda-4}{2}\neq\frac{n+1}{2}$.

Якщо $\frac{n+3}{2}\leq l\leq\frac{n+\lambda-2}{2}$, то маємо рівність

$$v+\frac{n+8-\lambda}{2}=j+5-\lambda.$$

Звідси $j-v=\frac{n+8-\lambda}{2}+\lambda-5=\frac{n+\lambda-2}{2}>0$.

Якщо $j=v+l-n$, то $j-v=l-n<0$, що суперечить попередній нерівності. Тому $j=v+l$ і тоді

$$l=j-v=\frac{n+\lambda-2}{2}.$$

Оскільки $2\leq v\leq\frac{n+2-\lambda}{2}$, то $\frac{n+\lambda+2}{2}=2+\frac{n+\lambda-2}{2}\leq v+l\leq\frac{n+2-\lambda}{2}+\frac{n+\lambda-2}{2}=n$.

Отже, якщо $\frac{n+\lambda+2}{2}\leq j\leq n-1$, то існує $v\neq0$, j таке, що $t(v)+t(l)=t(j)$, де $v+l\equiv j(\mathrm{mod}\ n)$. Тому $q_{1j+1}=0$.

(b) $\frac{n+4-\lambda}{2}\leq v\leq\frac{n-1}{2}$, Якщо $\frac{n+4-\lambda}{2} \le l \le \frac{n-1}{2}$, то $j=v+l$ і маємо рівність

$$\frac{n+4-\lambda}{2}+\frac{n+4-\lambda}{2}=j+5-\lambda.$$

Звідси $j=n-1$. Отже, $q_{1n}=0$.

Якщо $l=\frac{n+1}{2}$, то $j=v+l$ і маємо рівність

$$\frac{n+4-\lambda}{2}+\frac{n+6-\lambda}{2}=j+5-\lambda \text{ або } n=j.$$

Отримали протиріччя.

Якщо $\frac{n+3}{2} \le l \le \frac{n+\lambda-2}{2}$, то маємо рівність

$$\frac{n+4-\lambda}{2}+\frac{n+8-\lambda}{2}=j+5-\lambda.$$

Але $\frac{n+4-\lambda}{2}+\frac{n+8-\lambda}{2}=n+6-\lambda=t(1)>t(j)$ при $j>1$.

Отримали протиріччя.

Якщо $\frac{n+\lambda}{2} \le l \le n-1$, то $v+l>n$ і тому $j=v+l-n$. Отримуємо рівність

$$\frac{n+4-\lambda}{2}+(l+5-\lambda)=j+5-\lambda.$$

Звідси $\frac{n+4-\lambda}{2}=j-l=v-n<0$. Отримали протиріччя.

(c) $v=\frac{n+1}{2}$. З $v \le l$ отримуємо, що $v+l>n$ і $j=v+l-n$.

Якщо $l=\frac{n+1}{2}$, то $t(v)+t(l)=\frac{n+6-\lambda}{2}+\frac{n+6-\lambda}{2}=n+6-\lambda=t(1)>t(j)$.

Якщо $\frac{n+3}{2}\leq l\leq\frac{n+\lambda-2}{2}$, то $t(v)+t(l)=\frac{n+6-\lambda}{2}+\frac{n+8-\lambda}{2}=n+7-\lambda> t(1)>t(j)$.

Якщо $\frac{n+\lambda}{2}\leq l\leq n-1$, то маємо рівність

$$\frac{n+6-\lambda}{2}+(l+5-\lambda)=j+5-\lambda\,.$$

Звідси $\frac{n+6-\lambda}{2}=j-l=v-n<0$ ($j=v+l-n$). Отримали протиріччя.

(d) $\frac{n+3}{2}\leq v\leq\frac{n+\lambda-2}{2}$. З $v\leq l$ випливає, що $v+l>n$ і $j=v+l-n$.

Якщо $\frac{n+3}{2}\leq l\leq\frac{n+\lambda-2}{2}$ то отримуємо рівність

$$\frac{n+8-\lambda}{2}+\frac{n+8-\lambda}{2}=j+5-\lambda \text{ або } n+3=j.$$

Отримали протиріччя.

Якщо $\frac{n+\lambda}{2}\leq l\leq n-1$, то маємо рівність

$$\frac{n+8-\lambda}{2}+(l+5-\lambda)=j+5-\lambda\,.$$

Звідси $\frac{n+8-\lambda}{2}=j-l=v-n<0$. Отримали протиріччя.

(e) $\frac{n+\lambda}{2}\leq l\leq n-1$. Тоді $\frac{n+\lambda}{2}\leq l\leq n-1$ і маємо рівність

$$(v+5-\lambda)+(l+5-\lambda)=j+5-\lambda.$$

або $v+l+5-\lambda=j$. Оскільки $v+l>n$, то $j=v+l-n$. Тоді $v+l+5-\lambda=j=v+l-n$. Звідси $\lambda=5+n$. Отримали протиріччя.

Таким чином, $q_{1j+1}=0$ при наступних значеннях j

1. j=1;

2. 3≤j≤n-4;

3. $j=\frac{n+\lambda-4}{2}$;

4. $\frac{n+3}{2}$;

5. $\frac{n+\lambda+2}{2}\le j\le n-1$.

Всього матриця [$Q(\Gamma)$] в першому рядку має

$$1+\left(\frac{n+2-\lambda}{2}\right)+1+1+\left(n-1-\frac{n+\lambda}{2}\right)=n-\lambda$$

нулів. Тому $inx\Gamma= n-(n-\lambda)=\lambda$.

Теорема доведена.

Отже, ми розглянули всі випадки основна теорема доведена

ВИСНОВКИ

Дипломна робота присвячена застосуванню орієнтованих графів в сучасній алгебрі, а саме в теорії кілець. В роботі досліджуються характеристики горенштейнових матриць. В науковій роботі доведено, що для довільного натурального числа, що не перевищує n, існує квадратна горенштейнова матриця порядку n з даним індексом. При доведенні використовуються комбінаторні та геометричні методи доведення, а також методи теорії графів.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Hazewinkel M. Algebras Rings and Modules, vol. 1/ M. Hazewinkel, N. Gubareni, V.V. Kirichenko – Kluwer Academic Publisheers, 2004.- 380 p.

2. Hazewinkel M. Algebras Rings and Modules, vol. 2/ M. Hazewinkel, N. Gubareni, V.V. Kirichenko – Kluwer Academic Publisheers, 2007.- 400 p.

3. Kirichenko V. V. Exponent Matrices and Tiled Order over Discrete Valuation Rings/ V. V. Kirichenko , O. V. Zelenskiy, V. N. Zhuravlev // International Journal of Algebra and Computation. – 2005. – Vol. 15, № 5 & 6. – p. 1-16.

4.Зеленський О. В. Жорсткі сагайдаки зведених матриць показників / О. В. Зеленський // Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки. – 2007. – №3. – С. 27-31.

5. Журавлев В. Н. Допустимые колчаны./ В.Н. Журавлев// Фундаментальная и прикладная математика. Том 14, 2008. 7, с. 121-128.

6. Кириченко В.В., Журавлёв В.Н., Цыгановская И.Н., О жестких колчанах // Фундаментальная и прикладная математика. Том 12, выпуск 8, 2006. Часть 1. С. 105 – 120.

7. Журавльов В. М. Одиничні сагайдаки матриці показників/ В.М. Журавльов, О.В. Зеленський, В.М. Дармосюк // Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки. – 2012. – №4. – С. 27-31.

8. Зеленський О. В. Цикли допустимих сагайдаків / О. В. Зеленський// Математичні студії. Том 42, випуск 1.С. 3-8.