Міністерство освіти і науки України
Кам’янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка
Фізико-математичний факультет
Кафедра математики

Дипломна робота
магістра

з теми: «**Методика вивчення теми «Степенева функція» в курсі математики 10 класу на академічному рівні**»

Виконав: студент 2 курсу ступеня вищої освіти магістр, групи М1-М22 спеціальності 014 Середня освіта (Математика)
Головацький Василь Васильович

Керівник: **Сморжевський Ю.Л.**, кандидат педагогічних наук, доцент

Рецензент: **Моцик Р.В.**, кандидат педагогічних наук, доцент

Кам'янець-Подільський – 2023

ЗМІСТ

Вступ

Актуальність теми дослідження полягає в тому, що тема «Степенева функція, її властивості та графіки» є однією з основних в шкільній програмі з математики в старшій школі. Вже зараз існує велика кількість методичної літератури, яка допомагає вчителю науково правильно і цікаво викласти матеріал. Враховуючи зміни у суспільстві, особливо впровадження профільності навчання у старшій школі, з'являється необхідність у постійному оновленні та вдосконаленні методики навчання математики. Але дещо залишається незмінним в силу того, що існує державний стандарт щодо цілей навчання математики.

Функції є також однією з важливих змістовних ліній шкільного курсу математики, осмислення ролі якої у реалізації сучасних підходів до навчання (компетентнісного, розвиваючого, дослідницького тощо) є актуальним методичним завданням. Функціональна лінія акумулює всі знання і прийоми діяльності з інших змістових ліній, має величезне значення для забезпечення математичної компетентності – здатності розв'язувати прикладні задачі та задачі з «життя», адже степенева функція слугує математичними моделями різноманітних закономірностей і явищ природи. Її потенціал у розвиненні пізнавальних прийомів діяльності практично невичерпний.

У процесі вивчення теми «Степенева функція, її властивості і графіки» в 10-х класах на різних рівнях учні дізнаються, яку функцію називають степеневою, вивчають її властивості; повторюють, систематизують, розширюють і поглиблюють знання про функції; розвивають вміння читати і будувати графіки степеневої функції, досліджувати функції елементарними методами, застосовувати степеневу функцію до моделювання реальних процесів. Ця тема повинна сприяти кристалізації функціонального типу мислення учнів.

Проблема організації вивчення функцій завжди перебувала в центрі уваги педагогічної науки і практики. Концепції змісту навчання функцій розробляли математики і методисти Н. Я. Віленкін, Г. М. Карпенко, Т. В. Колесник, В. Г. Кузнєцов, Є. І. Нелін, З. І. Слєпкань, Т. М. Хмара, М. І. Шкіль, та ін, але розроблені методики недостатньо задовольняють чотирьохрівневе навчання і не завжди відповідають новим підручникам з алгебри і початків аналізу для 10 класу.

У зв'язку з цим методика вивчення степеневої функції, яка б відповідала цим рівням, ще не повністю розроблена. Тому тема даного дослідження є досить актуальною.

Об'єктом дослідження є процес навчання математики у 10-х класах на різних рівнях.

Предметом дослідження є методика вивчення степеневої функції, її властивостей та графіків в курсі алгебри і початків аналізу у 10 класах на різних рівнях.

Мета дослідження полягає в тому, щоб розробити методику вивчення степеневої функції в курсі алгебри і початків аналізу 10-х класів різних рівнів, яка дасть можливість учням краще засвоїти матеріал з даної теми.

Гіпотеза: впровадження такої методичної системи, яка грунтується на сучасній концепції рівневого навчання за 12-бальною шкалою, забезпечить процес засвоєння учнями навчального матеріалу з теми «Степенева функція», поглибить знання, а також підвищить в учнів інтерес до вивчення даного матеріалу.

Для досягнення мети пропонується розв'язати такі **завдання:**

- дати характеристику рівнів навчання математики в старшій школі;
- з'ясувати, в якій мірі методична література, підручники та посібники задовольняють умови викладу матеріалу та рівневого навчання;
- розробити методику вивчення степеневої функції в курсі алгебри і початків аналізу у 10 класах різних рівнів;
- експериментально перевірити ефективність розробленої методики.

В процесі дослідження використовувалися такі **методи:**

— вивчення і використання історії математики і математичної освіти.

— вивчення і використання досвіду сучасного навчання.

— аналіз психологічної, дидактичної та методичної літератури з математики, підручників з математики.

— педагогічний експеримент та опрацювання його результатів методами математичної статистики.

Практичне значення полягає в тому, що розроблена методика допоможе вчителям при вивченні теми «Степенева функція», а саме в підборі та складанні відповідних завдань до кожного уроку з теми, організації диференційованої роботи з учнями, підвищить ефективність та цілеспрямованість навчання.

Розділ І: Рівневе вивчення математики в старшій школі

§1. Характеристика рівнів змісту навчання в старшій школі

З 2011 – 2012 навчального року учні 10-11 класів розпочали навчання за новими навчальними планами і програмами [23], [24], [29].

У старшій школі вивчення математики диференціюється за чотирма рівнями: рівнем стандарту, академічним, профільним та рівнем поглибленого вивчення математики. Кожному з них відповідає окрема навчальна програма.

Програма рівня стандарту визначає зміст навчання предмета, спрямований на завершення формування в учнів уявлення про математику як елемент загальної культури. При цьому не передбачається, що випускники школи продовжуватимуть вивчати математику або пов'язуватимуть із нею свою професійну діяльність.

Програма академічного рівня задає дещо ширший зміст і вищі вимоги до його засвоєння у порівнянні з рівнем стандарту. Вивчення математики на академічному рівні передбачається передусім у тих випадках, коли вона тісно пов'язана з профільними предметами і забезпечує їх ефективне засвоєння. Крім того, за цією програмою здійснюється математична підготовка старшокласників, які не визначилися щодо напряму спеціалізації.

Програма профільного рівня передбачає вивчення предмета з орієнтацією на майбутню професію, безпосередньо пов'язану з математикою або її застосуванням.

Програма поглибленого вивчення математики розрахована на поглиблене вивчення математики у 8-11 класах [13, С. 3 – 23].

Таблиця розподілу годин на вивчення математики за різними рівнями змісту освіти

Навчальні предмети	Кількість годин на тиждень у класах							
	Рівень стандарту		Академічний рівень		Профільний рівень		Рівень поглибленого вивчення	
	10	11	10	11	10	11	10	11
Математика	3	3	-	-	-	-	-	-
Алгебра і початки аналізу	-	-	2	3	5	5	5	5
Геометрія	-	-	2	2	4	4	4	4

Профільний підхід до організації навчання у старшій школі значно розширює можливості учнів у виборі власної освітньої траєкторії та створює сприятливі умови для врахування індивідуальних особливостей, інтересів і потреб учнів, для формування у школярів орієнтації на той чи інший вид майбутньої професійної діяльності. Профільне навчання спрямоване на формування ключових компетентностей старшокласників, набуття ними навичок самостійної науково-практичної, дослідницько-пошукової діяльності, розвиток їхніх інтелектуальних, психічних, творчих, моральних, фізичних, соціальних якостей, прагнення до саморозвитку і самоосвіти.

Математика є базовим предметом, а тому вивчається учнями в класах усіх профілів, але на різних рівнях.

Розглянемо коротко особливості вивчення математики на академічному і профільному рівні змісту освіти.

Академічний рівень [23]**.** Мета навчання математики на академічному рівні полягає у забезпеченні загальноосвітньої підготовки з математики, необхідної для успішної самореалізації особистості у динамічному соціальному середовищі, її соціалізації і достатньої для вивчення профільних предметів, для успішної майбутньої професійної діяльності в тих сферах, де математика відіграє роль апарату, специфічного засобу для вивчення і аналізу закономірностей, реальних явищ і процесів.

Змістове наповнення програми реалізує компетентнісний підхід до навчання, спрямований на формування системи відповідних знань, навичок, досвіду, здібностей і ставлення (відношення), яке дає змогу обґрунтовано судити про застосування математики в реальному житті, визначає готовність випускника школи до успішної діяльності в різних сферах.

За навчальною програмою академічного рівня [23] на вивчення алгебри і початків аналізу в 10 класі відводиться 70 годин. Орієнтовний розподіл навчального часу на вивчення окремих тем та орієнтовна кількість контрольних робіт можуть бути такими:

№ теми	**Назва теми**	**Кількість годин**	**Орієнтовна кількість контрольних робіт**
I	Функції, рівняння і нерівності	12	Діагностична
II	**Степенева функція**	**14**	**2**
III	Тригонометричні функції	20	2
IV	Тригонометричні рівняння і нерівності	16	2
	Систематизація та узагальнення, резервний час	8	1

При навчанні математики на академічному рівні основна увага приділяється не лише засвоєнню математичних знань, а й виробленню вмінь застосовувати їх до розв’язування практичних і прикладних задач, оволодінню математичними методами, моделями, що забезпечують успішне вивчення профільних предметів – хімії, фізики, біології, технологій. При цьому зв’язки математики з профільними предметами посилюються за рахунок розв’язання задач прикладного змісту, ілюстрацій застосування математичних понять, методів і моделей у шкільних курсах хімії, біології, фізики, технологій.

Рівень профільної підготовки [24]. Мета навчання математики в класах математичного та фізико-математичного профілів полягає у забезпеченні загальноосвітньої підготовки математики, необхідної для успішної самореалізації особистості у динамічному соціальному середовищі, її соціалізації, достатньої для успішного вивчення фізики та інших, у першу чергу, природничих предметів, продовження навчання у вищих закладах освіти за спеціальностями або безпосередньо пов'язаними з математикою, або за спеціальностями, де математика відіграє роль апарату для вивчення й аналізу закономірностей реальних явищ і процесів.

Програми для профільного рівня і класів з поглибленим вивченням математики відрізняються змістовим наповненням і структурно.

Орієнтовний розподіл навчального часу на вивчення окремих тем та орієнтовна кількість контрольних робіт за програмами профільного рівня з алгебри і початків аналізу можуть бути такими [13, С. 5 – 6].

№ теми	Назва теми	Кількість годин	Орієнтовна кількість контрольних робіт
I	Функції, многочлени, рівняння і нерівності	60	Діагностична 2
II	**Степенева функція**	**30**	**2**
III	Тригонометричні функції	30	2
IV	Тригонометричні рівняння і нерівності	35	2
	Систематизація та узагальнення, резервний час	20	1

Засвоєння змісту освіти у загальноосвітніх закладах з профільним навчанням має забезпечувати загальноосвітню підготовку учнів і підготовку їх до майбутньої професійної діяльності.

Отже, можна зробити висновок, що у старшій школі вивчення математики диференціюється за чотирма рівнями: рівень стандарту, академічний рівень, профільний рівень та поглиблене вивчення математики. Кожен з цих рівнів має як змістові, так і організаційно-методичні особливості, причому кожному з них відповідає окрема навчальна програма. У зв'язку з цим виникає потреба у розробці методик навчання, які б відповідали цим чотирьом рівням.

§2. Аналіз теми «Степенева функція» в підручниках для 10-х класів різних рівнів змісту освіти

У зв'язку з введенням у школах нових навчальних планів і програм з математики постала гостра потреба у підручниках, які б відповідали вимогам нових програм.

Міністерство освіти і науки України затвердило перелік підручників для використання в навчальному процесі. Розглянемо підручники, за якими здійснюється навчання алгебри і початків аналізу у десятих класах закладів загальної середньої освіти:

Рівень стандарту: «Математика 10 клас» (автори Г.П. Бевз і В.Г. Бевз); «Математика 10 клас» (автори М.І. Бурда, Т.В. Колесник, Ю.І. Мальований, Н.А. Тарасенкова).

Академічний рівень: «Алгебра і початки аналізу» (автор Є.П. Нелін); «Алгебра і початки аналізу» (автори А.Г. Мерзляк, Д.А. Номировський, В.Б. Полонський, М.С. Якір).

Профільний рівень: «Алгебра і початки аналізу» (автор Є.П. Нелін); «Алгебра і початки аналізу» (автори А.Г. Мерзляк, Д.А. Номировський, В.Б. Полонський, М.С. Якір).

Поглиблений рівень: «Алгебра і початки аналізу» (автори А.Г. Мерзляк, Д.А. Номировський, В.Б. Полонський, М.С. Якір).

Розглянемо, як висвітлений матеріал з теми «Степенева функція» в підручниках академічного і профільного рівнів.

Навчання математики на академічному рівні у 10 класах загальноосвітніх навчальних закладів здійснюється за двома підручниками [19] і [25], які створені відповідно до Державного стандарту та нових програм з математики [29]. Проаналізуємо ці підручники щодо викладу даної теми.

Розглянемо підручник [19]. Тема дослідження представлена в третьому параграфі, який так і називається «Степенева функція». Даний розділ складається з таких пунктів:

- 1. Степенева функція з натуральним показником.
- 2. Степенева функція з цілим показником.
- 3. Означення кореня *n*-го степеня.
- 4. Властивості кореня *n*-го степеня.
- 5. Тотожні перетворення виразів, які містять корені *n*-го степеня.
- 6. Функція $y = \sqrt[n]{x}$.
- 7. Означення та властивості степеня з раціональним показником.
- 8. Перетворення виразів, які містять степені з раціональним показником.
- 9. Ірраціональні рівняння.

Також автори на рубрику «коли зроблено уроки» відводять такий додатковий матеріал, який може бути використаний для організації роботи математичного гуртка і факультативних занять:

- Метод рівносильних перетворень при розв'язуванні ірраціональних рівнянь.
- Ірраціональні нерівності.

Проаналізуємо матеріал, що стосується лише степеневої функції, а саме такі пункти:

- 1. Степенева функція з натуральним показником.
- 2. Степенева функція з цілим показником.
- 6. Функція $y = \sqrt[n]{x}$.

Тепер розглянемо кожний із пунктів.

Перший пункт цього параграфа «Степенева функція з натуральним показником». Автори нагадують учням, що властивості і графіки функцій

$y = x$ і $y = x^2$ добре знайомі їм із попередніх класів, і що ці функції є окремим випадком функції $y = x^n, n \in \mathbb{N}$, яку називають степеневою функцією з натуральним показником.

Далі проводиться дослідження властивостей функції $y = x^n, n \in \mathbb{N}$ для двох випадків, коли n – парне натуральне число і n – непарне натуральне число. Наводяться властивості та графіки функції $y = x^n$ при $n = 2k,$ і $n = 2k + 1$, де $k \in \mathbb{N}$, а також по одному із прикладів до кожного з випадків ($y = x^4,\ y = x^5$). В кінці пункту наводиться таблиця властивостей функції $y = x^n$ для двох випадків і 6 контрольних запитань.

Другий пункт цього параграфа «Степенева функція з цілим показником» розпочинається з означення:

Функцію, яку можна задати формулою $y = x^n$, де $n \in \mathbb{Z}$, називають степеневою функцією з цілим показником.

Далі розглядаються випадки, коли показник n є цілим від'ємним числом або нулем, оскільки властивості цієї функції для натурального показника було розглянуто в попередньому пункті.

У цьому пункті автори звертають більшу увагу на випадок, коли n є цілим від'ємним числом. При цьому знову досліджуються властивості для двох випадків: $n = 2k,$ і $n = 2k + 1$, де $k \in \mathbb{N}$. Аналогічно до попереднього пункту, для кожного з випадків наведено графіки та приклади відповідно. На завершення пункту наводиться таблиця властивостей функції $y = x^{-n}$ для двох випадків та 9 контрольних запитань.

Шостий пункт – «Функція $y = \sqrt[n]{x}$», розпочинається із вивчення та дослідження властивостей функції $y = \sqrt[2k+1]{x}, k \in \mathbb{N}$, після чого наводиться сам графік функції та графіки функцій $y = \sqrt[3]{x}$ та $y = \sqrt[5]{x}$.

Далі розглядається функція $y = \sqrt[2k]{x}$, $k \in \mathbb{N}$. Досліджуються властивості цієї функції, наводиться її графік та графік функції $y = \sqrt[4]{x}$.

В кінці пункту наведено таблицю властивостей функції $y = \sqrt[n]{x}$ для двох вищерозглянутих випадків, приклад та 6 контрольних запитань.

Розглянувши матеріал, можна зробити наступні висновки про підручник [20]. Підручник повністю відповідає новій навчальній програмі з математики для учнів 10 класів загальноосвітніх навчальних закладів (академічний рівень), а також усім дидактичним принципам, потребам сучасного українського суспільства.

Розглянувши задачний матеріал по даній темі дослідження, дійшли висновку: всього 184 завдання , з них:

- 28 % початкового рівня (50 завдань);
- 21 % середнього рівня (39 завдань);
- 37 % достатнього рівня (69 завдань);
- 12 % високого рівня (22 завдання);
- 2 % задач для математичних гуртків і факультативів (4 завдання).

На нашу думку, у даному підручнику матеріал викладено більш доступно та зрозуміло, підручник орієнтований на чотирьохрівневе навчання, проте кількість задач всіх рівнів не відповідає правильному співвідношенню.

Проаналізувавши навчальний матеріал з теми дослідження у підручнику [20], бачимо, що однією відмінністю цього підручника від попереднього є те, що після пунктів відсутні питання теоретичного характеру та дається більше вправ для розв’язування.

- 49 % початкового рівня (130 завдань);
- 34 % середнього рівня (89 завдань);
- 15 % достатнього рівня (40 завдань);
- 2 % високого рівня (6 завдань);

В підручнику [25] тема дослідження представлена в другому розділі, який також називається «Степенева функція» і містить такі параграфи та пункти:

- 1. Корінь n-го степеня та його властивості. Функція $y = \sqrt[n]{x}$ та її графік.
- 2. Ірраціональні рівняння.

- 3. Узагальнення поняття степеня. Степенева функція, її властивості та графік.
  - 3.1. Узагальнення поняття степеня.
  - 3.2. Степенева функція, її властивості та графік.

Наступні параграфи і пункти автор виносить як додатковий матеріал для оволодіння темою на більш глибокому рівні (наприклад, для виконання складніших завдань з алгебри і початків аналізу зовнішнього незалежного оцінювання з математики). Учні можуть опановувати його як самостійно, так і під керівництвом учителя, а саме:

- 4. Застосування властивостей функцій до розв'язування ірраціональних рівнянь.
  - 4.1.Застосування властивостей функцій до розв'язування ірраціональних рівнянь.
  - 4.2.Приклади використання інших способів розв'язування ірраціональних рівнянь.
- 5. Ірраціональні нерівності.
- 6. Розв'язування ірраціональних рівнянь та нерівностей з параметрами.

Порівнюючи із попереднім підручником, у підручнику [25] до теми «Степенева функція» належать тільки два параграфи:

- 1. Коріня n-го степеня та його властивості. Функція $y = \sqrt[n]{x}$ та її графік.
- 3. Узагальнення поняття степеня. Степенева функція, її властивості та графік.
  - 3.1. Узагальнення поняття степеня.
  - 3.2. Степенева функція, її властивості та графік.

Розглянемо перший параграф «Коріня n-го степеня та його властивості. Функція $y = \sqrt[n]{x}$ та її графік».

На початку параграфа наведено довідкову таблицю, яка містить:

1. Основні означення параграфа, а саме означення квадратного кореня, кореня n-го степеня.

2. Властивості квадратного кореня та кореня n-го степеня.

3. Графік функції $y = \sqrt[n]{x}$ та її властивості для двох випадків: n — парне ($n = 2k, k \in N$) *і* n — непарне ($n = 2k + 1, k \in N$).

Після таблиці наводиться матеріал параграфа, який розбито на 4 пункти. Автор розпочинає пояснення нового матеріалу із пункту – «Означення кореня n-го степеня». Ми розглянемо останній пункт цього параграфа – «Функція $y = \sqrt[n]{x}$ та її графік». У даному пункті розглядаються властивості функції $y = \sqrt[n]{x}$ для двох випадків (коли n – парне, і коли n - непарне), тобто функцію досліджують на:

1) область визначення;

2) область значень;

3) парність чи непарність;

4) точки перетину з осями координат;

5) проміжки знакосталості;

6) проміжки зростання і спадання;

7) найбільше і найменше значення функції.

Наведено графіки функції та для ознайомлення з основними ідеями розв'язування задач наводиться 6 прикладів, у яких крім розв'язання міститься також коментар. З метою закріплення, контролю і самоконтролю засвоєння навчального матеріалу запропоновано 11 запитань.

Третій параграф цього розділу «Узагальнення поняття степеня. Степенева функція, її властивості та графік». Сюди входить два пункти:

- 3.1. Узагальнення поняття степеня.
- 3.2. Степенева функція, її властивості та графік.

Розглянемо перший пункт «Узагальнення поняття степеня». На початку наведена таблиця із прикладами степеня з натуральним показником, степеня з дробовим показником та властивостями степенів. Пояснення матеріалу розпочинається із нагадування означень та властивостей степеня з натуральним показником. Наводиться означення:

Степенем числа a > 0 з раціональним показником $r = \frac{m}{n}$, *де m — ціле число, а n — натуральне число (n > 1), називається число* $\sqrt[n]{a^m}$.

Також за означенням приймають*, що при r > 0,* $0^r = 0$.

Автор робить таке зауваження: *Значення степеня з раціональним показником* $a^{\frac{m}{n}}$ *(де n > 1) не означають при a < 0. Це пояснюють тим, що раціональне число r можна подати різними способами у вигляді дробу*.

Далі доводиться, що для введеного означення степеня з раціональним показником зберігаються всі властивості степенів з цілими показниками:

Для будь-яких раціональних чисел r і s та будь-яких додатних чисел a і b виконуються рівності: $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$, $a^r : a^s = a^{r-s}$, $(a^r)^s = a^{rs}$, $(ab)^r = a^r b^r$, $\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$.

Доводять ці властивості на основі означення степеня з раціональним показником та властивостей кореня *n* - го степеня.

Проводиться опис поняття степеня з ірраціональним показником. Після чого наводиться 4 приклади із розв'язаннями і коментарами та 6 контрольних запитань.

Другий пункт параграфа «Степенева функція, її властивості та графік» розпочинається із таблиці, в якій вміщено означення степеневої функції, її графіки та властивості для двох випадків (коли степінь є парним і непарним натуральним числом).

Пояснення матеріалу розпочинається з означення:

Степеневими функціями називають функції виду $y = x^{\alpha}$, *де* α *– будь-яке дійсне число.*

Зокрема наводяться приклади таких функцій, з якими учні уже знайомі з попередніх класів. Властивості степеневих функцій встановлено для випадків:

- Функція $y = x^{\alpha}$ (α — парне натуральне число).

- Функція $y = x^{\alpha}$ (α — непарне натуральне число).
- Функція $y = x^{\alpha}$ (α — непарне від'ємне число).
- Функція $y = x^{\alpha}$ (α — парне від'ємне число).
- Функція $y = x^{\alpha}$ (α — неціле додатне число).
- Функція $y = x^{\alpha}$ (α — неціле від'ємне число).
- Особливий випадок. Якщо α = 0.

Наводиться лише два приклади із розв'язанням і коментарем до кожного та два контрольних запитання.

Розглянувши задачний матеріал по даній темі дослідження, дійшли висновку, що даний підручник не відповідає чотирьохрівневому навчанню, оскільки систему вправ до основного матеріалу подано лише за двома рівнями:

- середнього – 33% (12 вправ);
- достатнього рівня – 67% (24 вправи).

Аналогічно до вищеописаного підручника степенева функція вивчається у підручнику [26], єдиною відмінністю є те, що розділ не поділено на основний і додатковий матеріал. Систему вправ у підручнику подано за трьома рівнями.

- середнього – 10 % (7 вправ);
- достатнього – 77 % (55 вправи);
- високого – 13 % (9 вправ).

Ми вважаємо, що задач середнього і високого рівня не достатньо.

Проаналізувавши навчальний матеріал підручників [19], [20], [25], [26], з методичної точки зору краще зарекомендували себе підручники [19] і [20], оскільки в них доступно, зрозуміло, структуровано та в достатній мірі подано навчальний матеріал, а також міститься багато вправ різних рівнів, рекомендованих для розв'язування.

Таким чином, в даний час діючих підручників з алгебри і початків аналізу для 10 класів є достатня кількість. Кожен авторський колектив вносить у зміст своїх підручників щось нове, що відрізняє їх від інших. Школа і вчителі мають право вибирати ті з них, які, на їхню думку, дадуть оптимальний рівень знань з алгебри і початків аналізу учням того чи іншого класу.

Проаналізувавши навчальний матеріал з теми «Степенева функція» у підручниках, бачимо, що дана тема висвітлена в різних підручниках по-різному. Всі вони не повністю орієнтовані на рівневе навчання. Тому існує необхідність у створенні методики навчання даної теми, а особливо системи задачного матеріалу та дидактичного матеріалів.

§3. Аналіз методичної літератури по темі дослідження

Степеневу функцію в школі вивчають у зв'язку з вивченням властивостей степеня з раціональним показником. Спочатку розглядають функцію $y = x^n$, де $n = 1, 2, 3, -1, -2$ у зв'язку з вивченням властивостей степеня з довільним цілим показником; потім розглядають функцію $y = x^n$ $(x > 0)$ для $n = \frac{1}{2}; \frac{1}{3}$ у зв'язку з вивченням властивостей степеня з дробовим показником; нарешті, розглядають загальні властивості степеневої функції $[8, \text{С. } 27]$.

На даному етапі навчання ще не можна повністю аналітично дослідити цю функцію, тому поруч з аналітичним треба застосовувати і графічний метод, використовуючи гафік не тільки для ілюстрації, а й для виявлення властивостей функції $[8, \text{С. } 27]$.

У ІІ розділі свого посібника ($[8, \text{С. } 27]$) М. Б. Гельфанд описує методику вивчення теми «Степенева функція», досліджуючи її властивості за допомогою проілюстрованих графіків функції, що дає можливість учням наочно досліджувати функції.

У статті $[1, \text{С. } 20 - 22]$ автор описує методику проведення нестандартного уроку – уроку-подорожі на тему «Степенева функція. Роз'язування вправ». На цьому уроці автор велику увагу звертає як на тестові завдання, так і на вправи практичного характеру, а саме: чи правильна рівність, спростіть вираз, розв'яжіть рівняння, розв'яжіть нерівності, спростіть вираз, розв'яжіть систему рівнянь. Автор ставить за ціль перевірити рівень засвоєння учнями основних понять теми, властивостей степеневої функції; з'ясувати рівень знань і вмінь застосовувати властивості степеневої функції, властивостей степеня з раціональним показником і кореня n-го степеня на практиці, оскільки поняття шкільного курсу математики – поняття функціональної залежності – досить часто учні засвоюють формально, через те, що вивчення його не підкріплюється необхідними навичками розв'язування достатньої кількості задач і вправ.

В методичній літературі [4], [33] стали звичними висловлювання про те, що поняття функції повинно бути центральним стержнем, навколо якого повинні групуватися всі інші питання шкільного курсу математики.

Поняття функції пронизує весь шкільний курс математики. Вперше його вводять в VII класі. Але корисно і в молодших класах проводити підготовчу роботу по формуванню в учнів цього поняття, тобто здійснювати функціональну пропедевтику [5, С. 237]. Пояснення краще починати з конкретних прикладів, а потім дати таке означення: залежність змінної y від змінної x називається функцією, якщо кожному значенню x відповідає єдине значення y…. Далі пояснюють учням, як задавати функцію за допомогою графіка і формули [5, С. 240 – 241].

Значна частина матеріалу фунуціональної лінії відноситься до вивчення класу функцій, який отримав назву елементарних. До елементарних відносять степеневу, показникову, логарифмічну, тригонометричні та обернені тригонометричні функції. Велику увагу автор приділяє арифметичним операціям, композиції і відображенню функцій та неперервності функцій.

Поняття функції здатне пов'язати різні розділи курсу алгебри в одне ціле і забезпечити цим самим неперервність розуміння навчального матеріалу.

Аналізуючи методичну літературу, зокрема праці Слєпкань З.І. [33], ми прийшли до наступних висновків:

- поняття функції доцільно трактувати з теоретико множинних позицій, адже це дасть можливість більш чіткого означення багатьох математичних понять;
- дослідження властивостей функцій у тій чи іншій формі має супроводжувати вивчення математики протягом усього навчання;
- при вивченні функцій слід робити наголос на моделюванні реальних процесів, інтерпретації фізичного процесу як функції від змінної

фізичної величини; учні мають асоціювати характер реального процесу з відповідною функцією, її графіком, властивостями, а притаманні явищу властивості пов'язувати із властивостями функцій (спадання, зростання);

- поняття функції здатне зв'язати різні розділи курсу алгебри в одне ціле і забезпечити, цим самим, неперервність сприймання та розуміння навчального матеріалу;
- головною умовою успішного вивчення функцій в шкільному курсі алгебри є широке використання функціональних понять, встановлення зв'язку з іншими поняттями;
- відбувається перехід на повне профільне навчання учнів.

Проаналізувавши методичну літературу, де викладено питання, що стосуються теми дослідження, математичні газети та журнали [7, С. 6 – 9], [13, С. 3 – 23], [18, С. 41 – 44], можна зробити висновок, що для вчителів існує багато літератури, яка в наші дні постійно поновлюється новими маатеріалами. Проте вони не зорієнтовані на сучасну школу з її особливостями та специфікою рівневого навчання.

Таким чином, ми прийшли до висновку про необхідність розробки методики вивчення теми «Степенева функція» в курсі алгебри і початків аналізу 10 класів, яка б відповідала сучасним вимогам освіти та була цікавою та доступною для учнів, що навчаються за академічним та профільним рівнями.

Розділ II: Методика вивчення теми «Степенева функція» в курсі алгебри і початків аналізу 10 класів різних рівнів змісту освіти

§1. Методика вивчення теми «Степенева функція» на академічному рівні

На вивчення теми «Степенева функція» в 10 класі відводиться 14 годин. Перед тим, як перейти до розгляду методики вивчення теми «Степенева функція», наведемо календарне планування даної теми на академічному рівні. При складанні календарного планування та розробці методики будемо орієнтуватися на підручник [19].

№ п/п	**Тема уроку**	**Кількість годин**
1	Степенева функція з натуральним показником	2
2	Степенева функція з цілим показником	2
3	Означення кореня n-го степеня	1
4	Властивості кореня n-го степеня	1
5	Тотожні перетворення виразів, які містять корені n-го степеня	1
6	Функція $y = \sqrt[n]{x}$	2
7	Означення та властивості степеня з раціональним показником	1
8	Перетворення виразів, які містять степені з раціональним показником	1
9	Ірраціональні рівняння	1
10	Ірраціональні нерівності	1
11	Контрольна робота №3	1

У зв'язку із обмеженістю обсягу дипломної роботи, розглянемо методику вивчення лише трьох основних тем: 1, 2, 6.

Методики вивчення степеневої функції з натуральним показником

Вивчення теми «Степенева функція» розпочинається із вивчення степеневої функції з натуральним показником.

Вчитель: Властивості і графіки функцій $y = x$ і $y = x^2$ добре знайомі вам з попередніх класів. Пригадаємо властивості цих функцій.

Учні по черзі називають властивості функцій $y = x$ та $y = x^2$.

Вчитель: Ці функції є окремим випадком функції $y = x^n, n \in \mathbb{N}$, яку називають **степеневою функцією з натуральним показником.** При якому значенню x вираз x^n має зміст?

Учень: Вираз x^n, $n \in \mathbb{N}$, має зміст при будь-якому x.

Вчитель: Отже областю визначення степеневої функції з натуральним показником є множина $\mathbb{R}$. Очевидно, що розглядувана функція має єдиний нуль $x = 0$. Розглянемо основні властивості функції $y = x^n$. Подальше дослідження властивостей функції $y = x^n$, $n \in \mathbb{N}$ проведемо для двох випадків: $n -$ парне натуральне число і $n -$ непарне натуральне число.

Вчитель пропонує учням розглянути перший випадок.

Учень: Розглянемо випадок коли $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$.

Підставивши $k = 1$, отримуємо функцію $y = x^2$, властивості і графік якої нам відомі. Оскільки при будь-якому x вираз x^{2k} набуває тільки невід'ємних значень, то область значень розглядуваної функції не містить жодного від'ємного числа.

Вчитель: Можна показати, що для будь-якого $a \geq 0$ існує таке значення аргументу x, що $x^{2k} = a$.

Учень: Сказане означає, що областю значень функції $y = x^n$, *де* n - парне натуральне число, є множина $[0; +\infty)$.

Вчитель: Що можна сказати про проміжки знакосталості функції та її парність?

Учень 1: Якщо $x \neq 0$, то $x^{2k} > 0$. Отже, проміжки $(-\infty; 0)$ і $(0; +\infty)$ є проміжками знакосталості функції $\mathrm{y} = \mathrm{x}^{\mathrm{n}}$, де n - парне натуральне число.

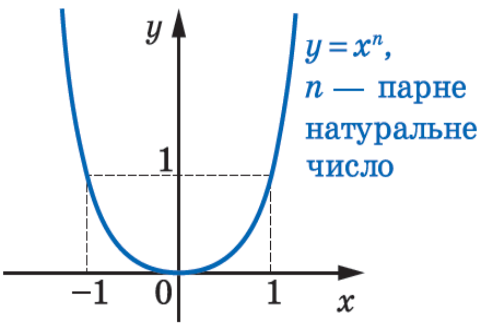
Учень 2: Функція $y = x^n$, де n - парне натуральне число, є парною, оскільки для будь-якого x з області визначення виконується рівність $(-x)^{2k} = x^{2k}$.

Вчитель: Розглянемо довільні числа x_1 і x_2 такі, що $x_1 \in (-\infty; 0]$, $x_2 \in (-\infty; 0]$ і $x_1 < x_2$. Тоді $-x_1 > -x_2 \geq 0$. Скориставшись властивістю числових нерівностей, отримуємо $(-x_1)^{2k} > (-x_2)^{2k}$. Звідси ${x_1}^{2k} > {x_2}^{2k}$.

Учень: Отже, функція $y = x^n$, де n - парне натуральне число, спадає на проміжку $(-\infty; 0]$. Аналогічно можна показати, що ця функція зростає на проміжку $[0; +\infty)$.

Вчитель: Отримані властивості дозволяють схематично зобразити графік функції $y = x^n$, де n - парне натуральне число.

Вчитель зображає на класній дошці графік функції $y = x^n$, де n - парне натуральне число.



Вчитель: Наведіть приклади таких функцій.

Учень 1: $y = x^4$; $y = x^6$.

Учень 2: $y = x^{2(n+1)}$.

Вчитель: Розглянемо випадок, коли n – непарне натуральне число.

Учень 1: Якщо n – непарне натуральне число, то, підставивши $n = 1$, отримуємо функцію $y = x$, властивості і графік якої нам відомі ще із 7 класу.

Вчитель: Тепер розглянемо випадок коли $n = 2k + 1$, $k \in \mathbb{N}$, і, аналогічно як і в першому випадку, встановимо властивості степеневої функції, але уже з непарним натуральним показником.

Можна показати, що для будь-якого a існує таке значення аргументу x, що $x^{2k+1} = a$.

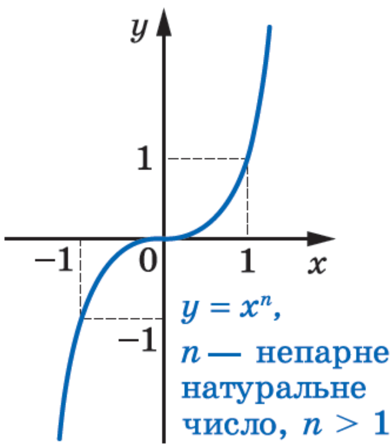
Учень 2: Це означає, що областю значень функції $y = x^n$, де n - непарне натуральне число, є множина $\mathbb{R}$.

Учень 3: Якщо $x < 0$, то $x^{2k+1} < 0$; якщо $x > 0$, то $x^{2k+1} > 0$. Отже, проміжки $(-\infty; 0)$ $і$ $(0; +\infty)$ є проміжками знакосталості функції $y = x^n$, де n-непарне натуральне число.

Учень 3: Оскільки, для будь-якого x з області визначення виконується рівність $(-x)^{2k+1} = -x^{2k+1}$, то функція $y = x^n$, *де* n - непарне натуральне число, є непарною.

Учень 4: Розглянемо довільні числа x_1 і x_2 такі, що $x_1 < x_2$. Скориставшись властивістю числових нерівностей, отримаємо ${x_1}^{2k+1} < {x_2}^{2k+1}$. Отже, функція $y = x^n$, де n - непарне натуральне число, є зростаючою.

Вчитель: Отримані властивості дозволяють схематично зобразити графік функції $y = x^n$, де n - непарне натуральне число, $n > 1$.



Зокрема, вчитель пропонує учням навести приклади деяких таких функцій.

Учень 1: $y = x^5$; $y = x^3$.

<u>Учень 2:</u> $y = x^7$; $y = x^{11}$.

На закріплення розв'язуємо вправи. Учні по черзі виходять до дошки і з допомогою вчителя, а далі і самостійно, розв'язують задачі. Решта учнів розв'язують завдання в зошитах.

Приклад №1: При яких значеннях *a* графік функції $y = ax^4$ проходить через точку *A* (2; –12)?

Розв'язання:

<u>Учень 1:</u> Оскільки точка *A* має координати (2; –12), то, підставивши значення координат x та y в нашу функцію, знайдемо значення a, при яких графік функції $y = ax^4$ проходить через точку *A*. Отже, $-12 = a2^4$. Звідси $a = -\frac{12}{16} = -\frac{3}{4}$.

Відповідь: при $a = -\frac{3}{4}$ графік функції $y = ax^4$ проходить через точку *A*.

Приклад №2: Розв'яжіть рівняння:

1) $x^4 = 81$; 2) $x^4 = -16$.

Розв'язання:

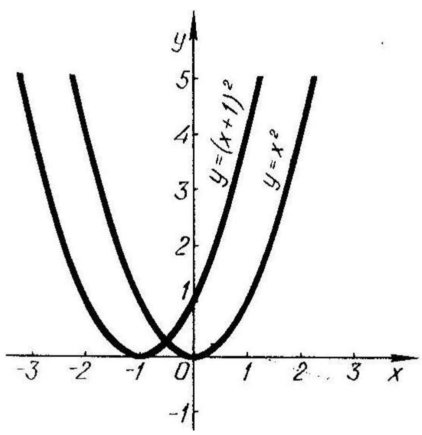
<u>Учень 2:</u> Розв'яжемо перше рівняння $x^4 = 81$. Оскільки $x = \sqrt[4]{81}$, то отримуємо що $x = \pm 3$. В другому рівнянні $x \in \emptyset$, оскільки 4-парний степінь, а будь-яке число в парному степені є число додатне.

Відповідь: 1)$x = \pm 3$; 2)$x \in \emptyset$.

Приклад №3: Побудуйте графік функції $y = (x+1)^2$.

Розв'язання:

<u>Учень 3:</u> Із перетвореннями графіків функцій ми знайомі ще із 9 класу. Отже, побудувавши графік функції $y = x^2$ і перенісши його паралельно на відстань 1 ліворуч в напрямку осі *x*, отримаємо графік функції $y = (x+1)^2$.



Далі вчитель пропонує аналогічні вправи для самостійного розв'язування:

I рівень:

1. Через які з даних точок проходить графік функції $y = x^5$:

   1) *A* (–1; 1); 2) *B* (2; 32)?

2. При яких значеннях a графік функції $y = ax^4$ проходить через точку *B* (–3; –3)?

3. Функцію задано формулою $f(x) = x^{19}$. Порівняйте:

   1) $f(1{,}4)$ і $f(1{,}8)$; 2) $f(-7{,}6)$ і $f(-8{,}5)$.

II рівень:

1. Розв'яжіть рівняння: $x^5 = 32$

2. Чи має дане рівняння від'ємний корінь:

   1) $x^6 = 2$; 2) $x^5 = -3$.

3. Розташуйте в порядку спадання значення виразів:

   $\left(-\frac{3}{4}\right)^5, \left(-2\frac{1}{3}\right)^5$.

III рівень:

1. Знайдіть точки перетину графіків функцій: $y = x^6$ і $y = 2x^4$.

2. Побудуйте графік функції $y = x^3 - 1$.

3. Знайдіть найбільше і найменше значення функції $f(x) = x^8$ на проміжку:

   1) $[0; 2]$; 2) $[-2; -1]$.

IV рівень:

1. Скільки коренів залежно від значення a має рівняння $x^{12} = a - 6$.

Учні дізналися про степеневу функцію з натуральним показником, які властивості має ця функція, навчилися будувати графік степеневої функції. Учні гарно засвоїли навчальний матеріал та вдало застосовували знання на практиці. Це все свідчить про ефективність розробленої методики.

Методика вивчення степеневої функції з цілим показником

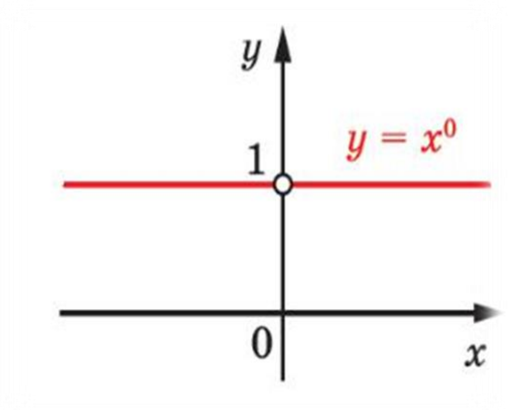
Далі переходимо до вивчення теми «Степенева функція з цілим показником».

<u>Вчитель:</u> Розглянемо степеневу функцію з цілим показником. Аналогічно до степеневої функції з натуральним показником сформулюйте означення степеневої функції з цілим показником.

<u>Учень:</u> Функцію, яку можна задати формулою $y = x^n$, де $n \in \mathbb{Z}$, називають **степеневою функцією з цілим показником.**

<u>Вчитель:</u> Властивості цієї функції для натурального показника було розглянуто на минулому уроці. Отже, ми розглянемо випадки, коли показник n є цілим від'ємним числом або нулем. Розгляньте випадок коли $n = 0$.

<u>Учень:</u> Областю визначення функції $y = x^0$ є множина $(-\infty; 0) \cup$
$\cup (0; +\infty)$, областю значень – одноелементна множина $\{1\}$. Графік цієї функції має вигляд:



<u>Вчитель</u>: Розглянемо функцію $y = x^{-n}$, де $n \in \mathbb{N}$.

<u>Учень 1:</u> Якщо $n = 1$, то тоді ми отримаємо функцію $y = \frac{1}{x}$, властивості якої нам відомі ще з 8 класу.

<u>Учень 2:</u> Якщо записати функцію $y = x^{-n}$ у вигляді $y = \frac{1}{x^n}$, то зрозуміло, що *областю визначення функції* $y = x^{-n}, n \in \mathbb{N}$, *є множина* $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

Вчитель: Що можна сказати про нулі функції?

Учень: Очевидно, що ця функція нулів не має.

Вчитель: Розглянемо перший випадок, коли n - парне натуральне число.

- **Перший випадок:** $\boldsymbol{n = 2k, k \in \mathbb{N}}$**.**

Маємо: $x^{-2k} = \frac{1}{x^{2k}}$. Оскільки вираз $\frac{1}{x^{2k}}$ набуває тільки додатних значень, то до області значень розглядуваної функції не входять від'ємні числа, а також число 0. Можна показати, що для будь-якого $a > 0$ існує таке значення аргументу x, що $x^{-2k} = a$.

- Сказане означає, що *областю значень функції* $y = x^{-n}$*, де* n *- парне натуральне число, є множина* $(0; +\infty)$.

- Очевидно, що *проміжки* $(-\infty; 0)$*і* $(0; +\infty)$ *є проміжками знакосталості функції* $y = x^{-n}$*, де* n *- парне натуральне число.*

- *Функція* $y = x^{-n}$*, де* n *- парне натуральне число, є парною.*

Справді, для будь-якого x з області визначення виконується рівність

$(-x)^{-2k} = \frac{1}{(-x)^{2k}} = \frac{1}{x^{2k}} = x^{-2k}$.

Вчитель: Що можна сказати про зростання чи спадання функції?

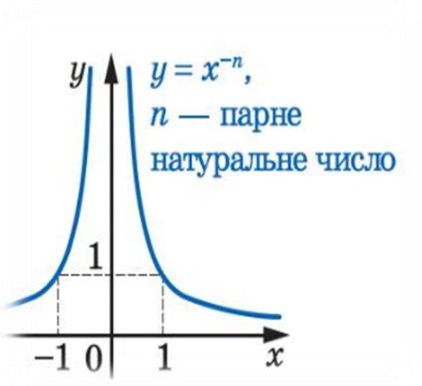
Учень: Розглянемо довільні числа x_1 і x_2 такі, що $x_1 \in (-\infty; 0)$, $x_2 \in$ $\in (-\infty; 0)$ і $x_1 < x_2$. Тоді $-x_1 > -x_2 > 0$. Скориставшись властивістю числових нерівностей, отримуємо $0 < -\frac{1}{x_1} < -\frac{1}{x_2}$. Звідси $\left(-\frac{1}{x_1}\right)^{2k} < \left(-\frac{1}{x_2}\right)^{2k}$; $\frac{1}{{x_1}^{2k}} < \frac{1}{{x_2}^{2k}}$; ${x_1}^{-2k} < {x_2}^{-2k}$.

- Отже, *функція* $y = x^{-n}$*, де* n *- парне натуральне число, зростає на проміжку* $(-\infty; 0)$.

- Аналогічно можна показати, що *функція* $y = x^{-n}$*, де* n *- парне натуральне число, спадає на проміжку* $(0; +\infty)$.

Вчитель: Слід зауважити, що зі збільшенням модуля *x* значення виразу $\frac{1}{x^{2k}}$, $k \in \mathbb{N}$, стає все меншим і меншим. Тому відстань від точки графіка функції $y = \frac{1}{x^{2k}}$, $k \in \mathbb{N}$, до осі абсцис зменшується і може стати як завгодно малою, але ніколи не дорівнюватиме нулю. Аналогічно можна встановити, що зі збільшенням модуля ординати відстань від точки графіка до осі ординати зменшується і може стати як завгодно малою, але ніколи не дорівнюватиме нулю.

Отримані властивості дозволяють схематично зобразити графік функції $y = x^{-n}$, де n - парне натуральне число.



Розглянемо наступний випадок.

- **Другий випадок: $\boldsymbol{n = 2k - 1, k \in \mathbb{N}}$.**

Можна показати, що для будь-якого $a \neq 0$ існує таке значення аргументу x, що $x^{-(2k-1)} = a$.

Що можна сказати про область значень, проміжки знакосталості та парність функції, а також про зростання чи спадання функції?

<u>Учень 1</u>:

➢ *Областю значень функції* $y = x^{-n}$, де n *– непарне натуральне число, є множина* $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

Якщо $x < 0$, то $\frac{1}{x^{2k-1}} < 0$; якщо $x > 0$, то $\frac{1}{x^{2k-1}} > 0$.

<u>Учень 2</u>:

➢ *Проміжки* $(-\infty; 0)$ *і* $(0; +\infty)$ *є проміжками знакосталості функції* $y = x^{-n}$, де n *– непарне натуральне число.*

<u>Учень 3</u>:

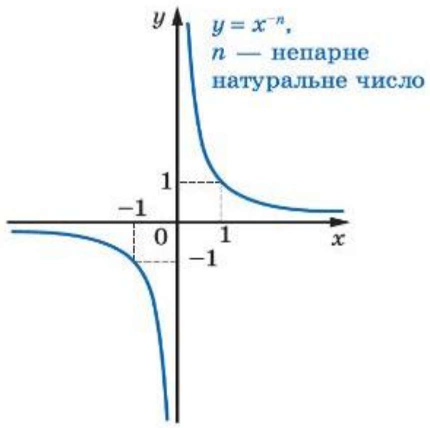
➢ *Функція* $y = x^{-n}$, де n *– непарне натуральне число, є непарною.*

Справді, для будь-якого x з області визначення виконується рівність $(-x)^{-(2k-1)} = \frac{1}{(-x)^{2k-1}} = \frac{1}{-x^{2k-1}} = -x^{-(2k-1)}$.

Учень 4: Розглянемо довільні числа x_1 і x_2 такі, що $x_1 \in (-\infty; 0)$, $x_2 \in (-\infty; 0)$ і $x_1 < x_2$. Тоді $-x_1 > -x_2 > 0$. Скориставшись властивістю числових нерівностей, отримуємо $-\frac{1}{x_1} < -\frac{1}{x_2}$. Звідси $\left(-\frac{1}{x_1}\right)^{2k-1} < \left(-\frac{1}{x_2}\right)^{2k-1}$; $-\frac{1}{{x_1}^{2k-1}} < -\frac{1}{{x_2}^{2k-1}}$; $\frac{1}{{x_1}^{2k-1}} > \frac{1}{{x_2}^{2k-1}}$. Аналогічно можна показати, що ця функція спадає і на проміжку $(0; +\infty)$.

- Отже, *функція* $y = x^{-n}$*, де* n *- непарне натуральне число, спадає на кожному з проміжків* $(-\infty; 0)$ *і* $(0; +\infty)$.

Вчитель: Отримані властивості дозволяють схематично зобразити графік функції $y = x^{-n}$*, де* n - непарне натуральне число.



На закріплення розв’язуємо вправи. Учні по черзі виходять до дошки і з допомогою вчителя, а далі і самостійно, розв'язують задачі. Решта учнів розв'язують завдання в зошитах.

Приклад №1: При яких значеннях a графік функції $y = ax^{-3}$ проходить через точку $B\left(2; \frac{1}{24}\right)$?

Розв'язання:

Учень 1: Оскільки точка B має координати $\left(2; \frac{1}{24}\right)$, то, підставивши значення координат x та y в нашу функцію, знайдемо значення a, при яких графік функції $y = ax^{-3}$ проходить через точку B. Отже, $\frac{1}{24} = a2^{-3}$. Тоді

$a = \frac{8}{24} = \frac{1}{3}$.

Відповідь: при $a = \frac{1}{3}$ графік функції $y = ax^{-3}$ проходить через точку B.

Приклад №2: Функцію задано формулою $f(x) = x^{-16}$. Порівняйте: 1) $f(1{,}6)$ і $f(2{,}2)$; 2) $f(-4{,}5)$ і $f(-3{,}6)$.

Розв'язання:

<u>Учень 2:</u> Запишемо $f(x) = x^{-16}$ у вигляді $f(x) = \frac{1}{x^{16}}$. Тоді очевидно, що $f(1{,}6) > f(2{,}2)$, а $f(-4{,}5) < f(-3{,}6)$. Оскільки, $\frac{1}{1{,}6^{16}} > \frac{1}{2{,}2^{16}}$, а $\frac{1}{-4{,}5^{16}} < \frac{1}{-3{,}6^{16}}$.

Відповідь: 1) $f(1{,}6) > f(2{,}2)$; 2) $f(-4{,}5) < f(-3{,}6)$.

Приклад №3: Знайдіть область визначення функції $y = (x^{-1})^{-1}$,

Розв'язання:

<u>Учень 3:</u> Знайдемо область визначення функції $y = (x^{-1})^{-1}$. Запишемо її у вигляді $y = \left(\frac{1}{x}\right)^{-1}$, $y = x$, $x > 0$. Отже, область визначення функції – $D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

Відповідь: 1)$D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

Приклад №4:

Побудуйте графіки функцій: $y = -\frac{1}{2}x^{-2}$.

Розв'язання:

<u>Вчитель</u>: В цьому випадку пропоную скласти таблиці значень цих функцій для цілих значень аргументу.

Учень 4: Запишемо таблицю значень для першої функції, і нанесемо на координатну площину точки, координати яких подано у цій таблиці (рис. 1).

X	-2	-1	-0,5	0	0,5	1	2
Y	-0,125	-0,5	-2	-	-2	-0,5	-0,125

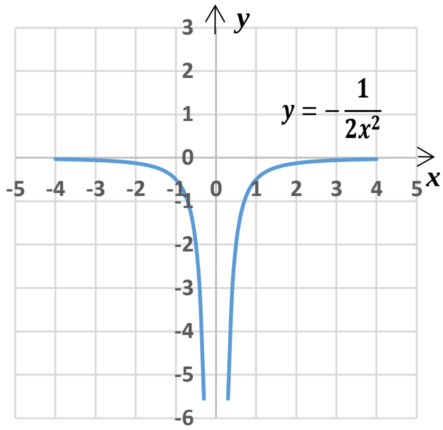


Рис. 1

Далі вчитель пропонує аналогічні вправи для самостійного розв'язування:

I рівень:

1. Через які з даних точок проходить графік функції $y = x^{-4}$:

   1) $A\left(2;\frac{1}{16}\right)$; 2) $B\left(-2;\frac{1}{8}\right)$?

2. При яких значеннях a графік функції $y = ax^4$ проходить через точку A (–5; 20)?

3. Функцію задано формулою $f(x) = x^{-19}$. Порівняйте:

   1) $f(1{,}6)$ і $f(2)$; 2) $f(-5{,}6)$ і $f(-6{,}5)$.

II рівень:

1. Чи має дане рівняння від'ємний корінь:

   1) $x^{-6} = 2$; 2) $x^{-5} = 0{,}3$?

2. Знайдіть точки перетину графіків функцій $y = x^{-4}$ і $y = \frac{1}{32}x$.

III рівень:

1. Побудуйте графік функції: $y = x^{-2} + 2$.

2. Знайдіть найбільше і найменше значення функції $f(x) = x^{-6}$ на проміжку: $\left[\frac{1}{2};1\right]$.

IV рівень:

1. Установіть графічно кількість розв'язків системи рівнянь:

$$\begin{cases} y = x^{-6}, \\ y = 4 - x^2. \end{cases}$$

Отже, учні дізналися, яку функцію називають степеневою функцією з цілим показником, які властивості має ця функція. Учні гарно засвоїли навчальний матеріал та вдало застосовували його на практиці.

Методика вивчення теми «Функція $y = \sqrt[n]{x}$»

<u>**Вчитель:**</u> Розглянемо випадок коли n – непарне натуральне число, $n > 1$. При вивченні теми «Означення кореня n-го степеня» було встановлено, що корінь непарного степеня з будь-якого числа існує і набуває тільки одного значення. Тому кожному дійсному числу x можна поставити у відповідність єдине число y таке, що $y = \sqrt[2k+1]{x}$. Тим самим для всіх $k \in \mathbb{N}$ задано функцію $f(x) = \sqrt[2k+1]{x}$ з областю визначення $\mathbb{R}$.

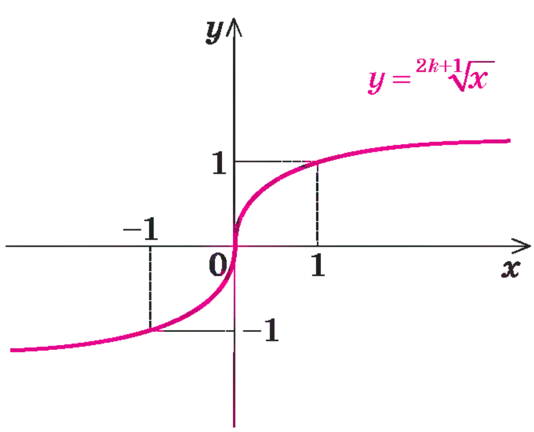
Покажемо, що функція f є оберненою до функції $g(x) = x^{2k+1}$, $k \in \mathbb{N}$.

<u>**Учень 1:**</u> Оскільки рівняння $\sqrt[2k+1]{x} = a$ при будь-якому a має корінь $x = a^{2k+1}$, то областю значень функції f є множина $\mathbb{R}$.

Маємо: $D(f) = E(g) = \mathbb{R}$, $E(f) = D(g) = \mathbb{R}$.

Для всіх $x \in \mathbb{R}$ виконується рівність $\sqrt[2k+1]{x^{2k+1}} = x$, тобто $f\big(g(x)\big) = x$ для всіх $x \in D(g)$. Отже, f і g – взаємно обернені функції.

<u>**Вчитель:**</u> Побудуємо графік функції, використовуючи графік функції $y = x^{2k+1}$ і теорему про те, що графіки взаємно обернених функцій симетричні відносно прямої $y = x$.



<u>**Вчитель:**</u> Що можна сказати про зростання чи спадання функції?

<u>Учень 2:</u> Оскільки функція $g(x) = x^{2k+1}$ є зростаючою, то за теоремою про те, що якщо функція f є зростаючою (спадною), то обернена функція g є також зростаючою (спадною), отримаємо що функція $f(x) = \sqrt[2k+1]{x}$ також є зростаючою. Функція $f(x) = \sqrt[2k+1]{x}$ має єдиний нуль $x = 0$.

Якщо $x < 0$, то $f(x) < 0$; якщо $x > 0$, то $f(x) > 0$. Отже, проміжки $(-\infty; 0)$ і $(0; +\infty)$ є проміжками знакосталості функції f. Для будь-якого x з області визначення функції f виконується рівність $f(-x) = \sqrt[2k+1]{-x} = -\sqrt[2k+1]{x} = -f(x)$. Отже, функція fє непарною.

<u>Вчитель:</u> Розглянемо випадок, коли n – парне натуральне число.

<u>Учень 1:</u> При вивченні теми «Означення кореня n-го степеня» було встановлено, що арифметичний корінь парного степеня з будь-якого невід'ємного числа існує і набуває тільки одного значення. Тому кожному числу x з проміжку $[0;+\infty)$ можна поставити у відповідність єдине число y таке, що $y = \sqrt[2k]{x}$. Отже, задано функцію $f(x) = \sqrt[2k]{x}$, $k \in \mathbb{N}$, з областю визначення $[0;+\infty)$.

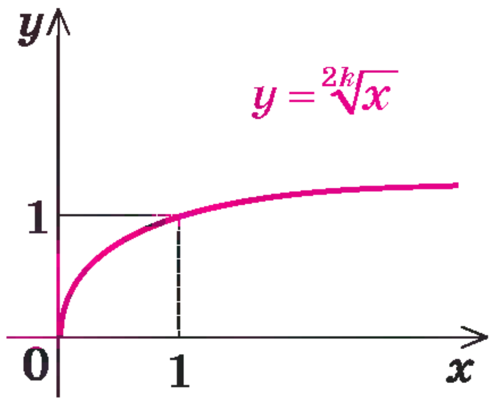
<u>Учень 2:</u> Покажемо, що функція f є оберненою до функції $g(x) = x^{2k}$, $k \in \mathbb{N}$, з областю визначення $[0;+\infty)$.

Оскільки рівняння $\sqrt[2k]{x} = a$ при будь-якому $a \geq 0$ має корінь $x = a^{2k}$ і при будь-якому $a < 0$ не має коренів, то областю значень функції $f(x) = \sqrt[2k]{x}$ є проміжок $[0;+\infty)$. Маємо: $D(f) = E(g) = [0;+\infty)$,

$$E(f) = D(g) = [0;+\infty).$$

Для будь-якого $x \in [0;+\infty)$ виконується рівність $\sqrt[2k]{x^{2k}} = x$, тобто $f\big(g(x)\big) = x$ для всіх $x \in D(g)$. Отже, f і g – взаємно обернені функції.

<u>Вчитель:</u> Побудуємо графік функції.



<u>Учень 3:</u> Функція $g(x) = x^{2k}$, $k \in \mathbb{N}$, $D(g) = [0;+\infty)$, є зростаючою, то функція $f(x) = \sqrt[2k]{x}$ також є зростаючою.

Функція f має єдиний корінь $x = 0$. Якщо $x > 0$, то $f(x) > 0$. Отже, проміжок $(0; +\infty)$ є проміжками знакосталості функції f.

Оскільки область визначення функції f не є симетричною відносно початку координат, то функція f не є ні парною, ні непарною.

На закріплення розв'язуємо вправи. Учні по черзі виходять до дошки і з допомогою вчителя, а далі і самостійно, розв'язують задачі. Решта учнів розв'язують завдання в зошитах.

Приклад №1: Знайдіть область визначення функції:

1) $y = \sqrt[5]{\frac{x-1}{x+2}}$;

2) $y = \sqrt[6]{x+1}$.

Розв'язання:

<u>Учень 1:</u>

1) Оскільки $x + 2 \neq 0$, $x \neq -2$, то тоді $D(y) = (-\infty; -2) \cup (-2; +\infty)$;

2) Оскільки $x + 1 \geq 0$, $x \geq -1$. Отже, $D(y) = [-1; +\infty)$.

Відповідь: 1) $D(y) = (-\infty; -2) \cup (-2; +\infty)$; 2) $D(y) = [-1; +\infty)$.

Приклад №2: Порівняйте: 1) $4\sqrt[4]{\frac{3}{4}}$ і $5\sqrt[4]{\frac{2}{5}}$; 2) $6\sqrt[3]{\frac{1}{9}}$ і $4\sqrt[3]{\frac{3}{8}}$.

Розв'язання:

<u>Учень 2:</u>

1) Запишемо:

$$4\sqrt[4]{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{\frac{4^4 \cdot 3}{4}} = \sqrt[4]{64 \cdot 3} = \sqrt[4]{252} > 5\sqrt[4]{\frac{2}{5}} = \sqrt[4]{\frac{5^4 \cdot 2}{5}} = \sqrt[4]{250}.$$

2) Запишемо:

$$6\sqrt[3]{\frac{1}{9}} = \sqrt[3]{\frac{6^3 \cdot 1}{9}} = \sqrt[3]{24} = 4\sqrt[3]{\frac{4^3 \cdot 3}{8}} = \sqrt[3]{\frac{4^3 \cdot 3}{8}} = \sqrt[3]{24}.$$

Відповідь: 1)$4\sqrt[4]{\frac{3}{4}} > 5\sqrt[4]{\frac{2}{5}}$; 2) $6\sqrt[3]{\frac{1}{9}} = 4\sqrt[3]{\frac{3}{8}}$.

Приклад №3:

Побудуйте графіки функцій: 1) $y = \sqrt[3]{x-2}$, 2) $y = \sqrt[4]{x} + 3$.

Розв'язання:

Вчитель: В цьому випадку пропоную скласти таблиці значень цих функцій для цілих значень аргументу.

Учень 3: Запишемо таблицю значень для першої функції і нанесемо на координатну площину точки, координати яких подано у цій таблиці (рис. 2).

X	-2	-1	0	1	2	3	10
Y	-1,6	-1,4	-1,3	-1	0	1	2

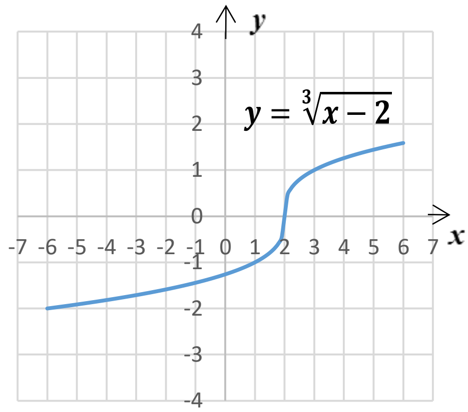


Рис. 2

Складемо другу таблицю і побудуємо графік (рис. 3):

X	0	1	16	81
Y	3	4	5	6

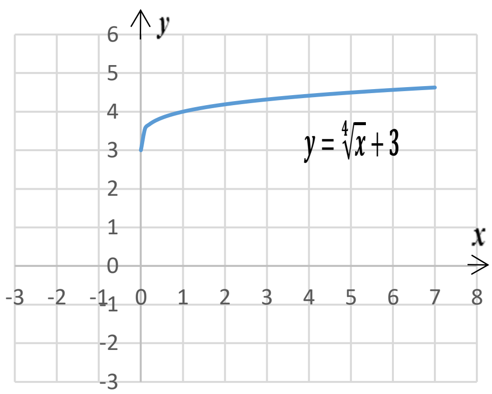


Рис. 3

Далі вчитель пропонує аналогічні вправи для самостійного розв'язування:

I рівень:

1. Через які з даних точок проходить графік функції $y = \sqrt[4]{x}$.

1) $A\ (2;16)$; 2) $B(16;2)$; 3) $C\ (-1;1)$; 4) $D(81;3)$?

2. Порівняйте:

1) $\sqrt[3]{1,6}$ і $\sqrt[3]{1,4}$; 2) $\sqrt[5]{-23}$ і $\sqrt[5]{-26}$;

3) 2 і $\sqrt[4]{17}$; 4) $2\sqrt[3]{3}$ і $3\sqrt[3]{2}$.

II рівень:

1. Між якими двома послідовними цілими числами знаходиться на координатній прямій число:

1) $\sqrt{3}$; 2) $\sqrt[3]{3}$; 3) $\sqrt[4]{21}$; 4) $\sqrt[3]{100}$?

2. Розташуйте в порядку зростання числа:

1) $\sqrt{2}, \sqrt[3]{3},$ і $\sqrt[5]{4}$;

2) $\sqrt[5]{3}, \sqrt[3]{2}$ і $\sqrt[15]{30}$;

3) $\sqrt{3}, \sqrt[3]{5}$ і $\sqrt[4]{7}$.

III рівень:

1. Побудуйте графік функції:

1) $y = \sqrt[3]{x} - 2$; 2) $y = \sqrt[3]{2 - x}$; 3) $y = \sqrt[3]{x - 2} - 2$.

2. Побудуйте графік функції:

1) $y = \sqrt[4]{x + 3}$; 2) $y = \sqrt[4]{x + 3} + 1$; 3) $y = \sqrt[3]{-x}$.

IV рівень:

1. Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{2x - 2} = 2$;

2) $\sqrt[5]{x - 6} = -3$.

Учні познайомилися ще з однією новою для них функцією – $y = \sqrt[n]{x}$, встановили її властивості та навчилися застосовувати ці властивості при дослідженні та побудові графіків конкретних функцій такого виду. Це все свідчить про ефективність розробленої методики.

Для перевірки та корекції знань з теми «Степенева функція» учні виконують контрольну роботу, яка складається із завдань 4-х рівнів:

Рівнева перевірочна робота по темі

«Степенева функція»

<u>Початковий рівень</u>

1. Обчислити: $\frac{\sqrt[4]{243}}{\sqrt[4]{3}}, 27^{\frac{1}{3}}, 64^{-\frac{1}{2}}$.

2. Знайти значення виразу: $\sqrt[3]{8 \cdot 0{,}001}$.

3. Подати у вигляді степеня: $a)\sqrt[3]{7^2}$; б) $\sqrt[12]{x^{-11}}$.

4. Функцію задано формулою $f(x) = x^{19}$. Порівняти:

   $a)$ $f(1{,}4)$ і $f(1{,}8)$; б)$f(-6{,}9)$ і $f(6{,}9)$; в) $f(0{,}2)$ і $f(12)$.

5. Спростити вираз: $\left(a^{\frac{1}{3}} \div a^{\frac{1}{6}}\right) \times a^{\frac{1}{8}}$.

<u>Середній рівень</u>

1. Спростити вирази:

   $a)\left(x^{\frac{2}{11}}\right)^3 \cdot x^{\frac{3}{11}}$;   б) $\sqrt[6]{\sqrt[3]{a}} + 2\sqrt[36]{a^2} + 3\left(\sqrt[54]{a}\right)^3$.

2. Розв'язати рівняння: $\sqrt[3]{x^2} - 6\sqrt[3]{x} + 5 = 0$.

3. При яких значеннях *a* графік функції $y = ax^{-3}$ проходить через точку *A(-5, 20)* ?

4. Знайти область визначення функції:

   а) $y = (5x-2)^{1,3}$;   б) $y = (4x+5)^{-1,3}$.

<u>Достатній рівень</u>

1. 1) Знайти найбільше і найменше значення функції $f(x) = x^{-3}$ на проміжку: 1) $\left[\frac{1}{3}; 2\right]$; 2) $[-2; -1]$; 3) $[-\infty; -3]$.

   2) Подати у вигляді степеня вираз $\sqrt[5]{b^{\frac{5}{6}} \cdot b^{\frac{5}{8}}} \div b^{\frac{1}{4}}$.

   3) Побудувати графіка функції $f(x) = \sqrt[4]{x+3} + 1$.

2. Обчислити значення виразу $25^{1,5} + (0{,}25)^{-0,5} - 81^{0,75}$.

3. Розв'язати рівняння $\sqrt{x+7} + \sqrt{3x-2} - 3 = 0$.

Високий рівень

1. Знайти область визначення функції:

$$y = (x^2 - 4)^{\frac{1}{3}} + (4 - x)^{-\frac{1}{3}}.$$

2. Спростити вираз:

$$\frac{2}{x^{-0,5}} + \frac{x - 1}{x + x^{0,5} + 1} \div \frac{x^{0,5} + 1}{x^{1,5} - 1}.$$

3. Розв’язати рівняння:

$$2\sqrt{x^2 - 3x + 11} = 4 + 3x - x^2.$$

Одержані результати експерименту свідчать про доцільність та ефективність використання розробленої методики на академічному рівні, адже учні на високому та достатньому рівнях оволоділи навчальним матеріалом.

§2. Методика вивчення теми «Степенева функція» на профільному рівні

На вивчення теми «Степенева функція» в 10 класі відводиться 30 годин. Перед тим, як перейти до розгляду методики вивчення теми «Степенева функція», наведемо календарне планування даної теми на профільному рівні. При складанні календарного планування та розробці методики будемо орієнтуватися на підручник [20].

№ п/п	Тема уроку	Кількість годин
1	Корінь n-го степеня Арифметичний корінь n–го степеня, його властивості	3
2	Степенева функція з натуральним показником	1
3	Степенева функція з цілим показником	1
4	Перетворення виразів з коренями n–го степеня	2
5	Функція $y = \sqrt[n]{x}$	2
6	Ірраціональні рівняння	2
7	Ірраціональні нерівності	3
8	Підготовка до к/р. Систематизація знань з теми	1
9	К/р № 4 «Корінь n–го степеня»	1
10	Аналіз к/р. Узагальнення знань з теми	1
11	Степінь з раціональним показником, його властивості	1
12	Перетворення виразів, які містять степінь з раціональним показником	3
13	Ірраціональні рівняння та нерівності з параметрами	2
14	Оборотні функції	2
15	Взаємно обернені функції	2
16	Підготовка до к/р. Систематизація знань з теми	1
17	К/р № 5 «Степенева функція»	1
18	Аналіз к/р	1

У зв'язку із обмеженістю обсягу дипломної роботи, розглянемо методику вивчення лише трьох основних тем у такій послідовності:

- Методика вивчення степеневої функції з натуральним показником.
- Методика вивчення степеневої функції з цілим показником.
- Методика вивчення теми «Функція $y = \sqrt[n]{x}$».

Методика вивчення степеневої функції з натуральним показником

При поясненні теоретичного матеріалу даної теми, на нашу думку, можна використовувати розроблену нами методику вивчення цієї теми на академічному рівні (див. С. 23 – 27).

На закріплення вивченого матеріалу можна запропонувати ще такі вправи:

Приклад №1:

Побудуйте графіки функцій: 1) $y = x^4 - 4$, 2) $y = (x+2)^3$.

Розв'язання:

Вчитель: В цьому випадку пропоную скласти таблиці значень цих функцій для цілих значень аргументу.

Учень 1: Запишемо таблицю значень для першої функції і нанесемо на координатну площину точки, координати яких подано у цій таблиці (рис. 4).

X	-2	-1	0	1	2
Y	12	-3	-4	-3	12

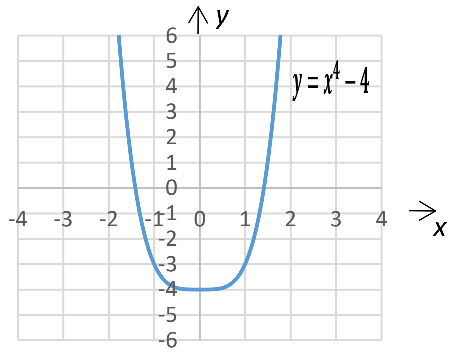


Рис.4

Учень 2: Складемо другу таблицю і побудуємо графік другої функції (рис. 5):

X	-4	-3	-2	-1	0	1
Y	-8	-1	0	1	8	27

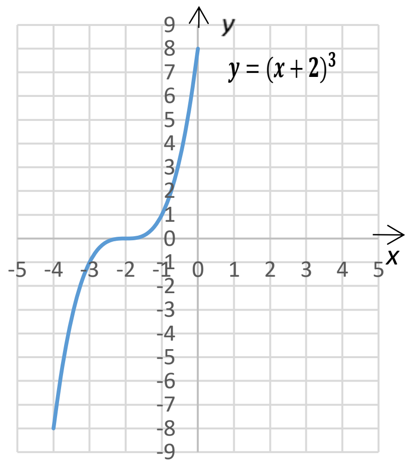


Рис.5

Приклад №2:

Скільки коренів залежно від значення a має рівняння $x^8 = 9a - a^3$?

Розв'язання:

Учень 3: Графік функції $y = x^8$ симетричний відносно осі OY, $y \geq 0$. Отже, якщо $9a - a^3 = 0$, тобто $a(9 - a^2) = 0$, $a(3 - a)(3 + a) = 0$, $a = 0$, $a = -3$ і $a = 3$, то задане рівняння має один корінь.

Якщо $9a - a^3 > 0$,то $a(3 - a)(3 + a) > 0$, тобто $a \in (-\infty; -3) \cup (0; 3)$, тоді рівняння має два кореня.

Якщо $9a - a^3 < 0$,то $a(3 - a)(3 + a) < 0$, тобто $a \in (-3; 0) \cup (3; +\infty)$, тоді рівняння не має коренів.

Відповідь: якщо $a = 0$, $a = -3$, $a = 3$, то рівняння має один корінь; якщо $a \in (-\infty; -3) \cup (0; 3)$, то рівняння має два корені; якщо $a \in (-3; 0) \cup \cup (3; +\infty)$, тоді рівняння не має коренів.

Також доцільно розв'язувати і такі вправи:

I рівень:

1. Через які з даних точок проходить графік функції $y = x^7$

   1) *C* (–0,2; –0,0032); 2) *D* (–3;–243)?
2. При яких значеннях *a* графік функції $y = ax^2$ проходить через точку *B* (–3; –3)?
3. Функцію задано формулою $f(x) = x^{19}$. Порівняйте:

   1) $f(-6{,}9)$ і $f(6{,}9)$; 2) $f(0{,}2)$ і $f(-12)$.

II рівень:

4. Розв'яжіть рівняння: $x^3 = -\frac{8}{27}$.
5. Чи має дане рівняння від'ємний корінь:

   1) $x^7 = 9$; 2) $x^6 = -10$?
6. Розташуйте в порядку спадання значення виразів:

   $\left(-\frac{2}{3}\right)^5, \left(-2\frac{2}{5}\right)^5$.

III рівень:

4. Знайдіть точки перетину графіків функцій: $y = x^4$ і $y = -27x$.
5. Побудуйте графік функції:

   1) $y = x^3 - 1$; 2) $y = (x + 1)^4$.

6. Знайдіть найбільше і найменше значення функції $f(x) = x^8$ на проміжку:

   1) $[0; 2]$; 2) $[-2; -1]$; 3) $[-1; 1]$; 4) $(-\infty; -2]$.

   IV рівень:

5. Скільки коренів залежно від значення a має рівняння $x^{24} = a^2 + 7a - 8$?

Результати експериментальної перевірки свідчать про ефективність розробленої методики.

Методика вивчення степеневої функції з цілим показником

Пояснюючи теоретичний матеріал даної теми, слід використати розроблену методику вивчення теми на академічному рівні (див. С. 28 – 33).

На закріплення розглядаються наступні задачі:

Приклад №1: Знайдіть область визначення функцій:

$y = ((x-2)^{-2})^{-2}$.

Розв'язання:

<u>Учень 1:</u> Функцію $y = ((x-2)^{-2})^{-2}$ запишемо у вигляді $y = \left(\frac{1}{(x-2)^2}\right)^{-2}$, $x - 2 \neq 0, x \neq 2$. Отже, $D(y) = (-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$.

Відповідь: 1)$D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; 2)$D(y) = (-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$.

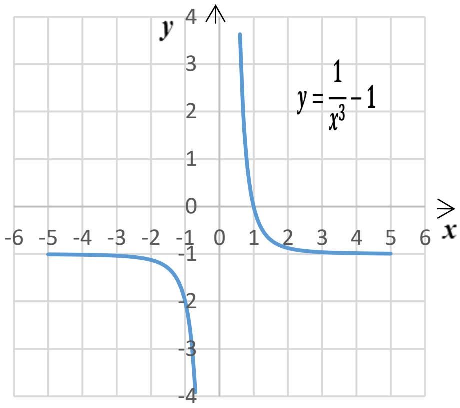
Приклад №2:

Побудуйте графіки функції $y = x^{-3} - 1$.

Розв'язання:

<u>Вчитель</u>: В цьому випадку пропоную скласти таблиці значень цих функцій для цілих значень аргументу.

Учень 2: Запишемо таблицю значень для першої функції, і нанесемо на координатну площину точки, координати яких подано у цій таблиці.



X	-2	-1	-0,5	0	0,5	1	2
Y	-0,125	-2	-9	-	7	0	-0,875

Далі вчитель пропонує аналогічні вправи для самостійного розв'язування:

I рівень:

1. Через які з даних точок проходить графік функції $y = x^{-4}$

   1) $C\left(\frac{1}{3}; 81\right)$; 2) $D\left(\sqrt{2}; -\frac{1}{4}\right)$?

2. При яких значеннях a графік функції $y = ax^4$ проходить через точку A (20; -5)?

3. Функцію задано формулою $f(x) = x^{-19}$. Порівняйте:

   1) $f(-9{,}6)$ і $f(9{,}6)$; 2) $f(0{,}1)$ і $f(-10)$.

II рівень:

1. Чи має дане рівняння від'ємний корінь:

   1) $x^{-7} = -3$; 2) $x^{-8} = -2$?

2. Знайдіть точки перетину графіків функцій $y = x^{-6}$ і $y = \frac{1}{32}x^3$.

III рівень:

1. Побудуйте графік функції: $y = (x-1)^{-3}$.
2. Знайдіть найбільше і найменше значення функції $f(x) = x^{-6}$ на проміжку:

   1) $\left[-1; -\frac{1}{2}\right]$; 2) $[1; +\infty)$.

IV рівень:

2. Установіть графічно кількість розв'язків системи рівнянь:

$$\begin{cases} y = x^{-8}, \\ y = 4 - x^4. \end{cases}$$

Результати експериментальної перевірки свідчать про ефективність розробленої методики.

Методика вивчення теми «Функція $y = \sqrt[n]{x}$»

При поясненні теоретичного матеріалу даної теми, на нашу думку, можна використовувати розроблену нами методику вивчення цієї теми на академічному рівні (див. С. 34 – 38).

На закріплення вивченого матеріалу можна запропонувати ще такі вправи:

Приклад №1. Порівняйте числа:

1) $\sqrt[4]{50}\ і\ \sqrt{7}$; 2) $\sqrt[4]{3}\ і\ \sqrt[3]{3}$.

Два учні по черзі виходять до дошки і виконують завдання.

Учень 1 : Для порівняння заданих чисел у кожному завданні достатньо привести всі корені до одного показника кореня і врахувати, що *для будь-яких невід'ємних чисел a* і *b, якщо a* > *b*, то $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$. Отже, $\sqrt{7} = \sqrt[4]{7^2} = \sqrt[4]{49}$. Оскільки 50 > 49, то $\sqrt[4]{50} > \sqrt[4]{49}$, тобто $\sqrt[4]{50} > \sqrt{7}$.

Учень 2: Запишемо $\sqrt[4]{3} = \sqrt[12]{3^3} = \sqrt[4]{27}, \sqrt[3]{3} = \sqrt[12]{3^4} = \sqrt[12]{81}$. Оскільки 27 < 49, то $\sqrt[4]{27} < \sqrt[12]{81}$, тобто $\sqrt[4]{3} < \sqrt[3]{3}$.

Приклад №2. Подайте вираз у вигляді дробу, знаменник якого не містить кореня n-го степеня:

1) $\frac{1}{\sqrt[5]{3}}$; 2) $\frac{1}{\sqrt{a}+1}$.

Учень 3: У завданні 1 урахуємо, що $\sqrt[5]{3^5} = 3$, отже, після множення чисельника і знаменника заданого дробу на $\sqrt[5]{3^4}$ знаменник можна буде записати без знака радикала: $\frac{1}{\sqrt[5]{3}} = \frac{\sqrt[5]{3^4}}{\sqrt[5]{3}\,\sqrt[5]{3^4}} = \frac{\sqrt[5]{3^4}}{\sqrt[5]{3^5}} = \frac{\sqrt[5]{3^4}}{3}$.

Вчитель: Виконання аналогічного перетворення в завданні 2 пов'язане з певними проблемами. ОДЗ виразу $\frac{1}{\sqrt{a}+1}$ є $a \geq 0$ (і всі тотожні перетворення потрібно виконувати для всіх значень $a \geq 0$). Ми хочемо домножити чисельник і знаменник заданого дробу на вираз $\sqrt{a} - 1$. За основною властивістю дробу це можна зробити тільки для випадку, коли $\sqrt{a} - 1 \neq 0$, тобто тільки при $a \neq 1$. Але $a = 1$ входить до ОДЗ початкового виразу, і тому вибраний нами спосіб розв'язування приведе до звуження ОДЗ початкового виразу. Дійсно, якщо записати, що $\frac{1}{\sqrt{a}+1} = \frac{\sqrt{a}-1}{(\sqrt{a}+1)(\sqrt{a}-1)} = \frac{\sqrt{a}-1}{a-1}$,то ця рівність не є тотожністю, оскільки не виконується для $a = 1$ з ОДЗ початкового виразу. У цьому разі, щоб не припуститися помилок, можна користуватися таким орієнтиром: *якщо для тотожних перетворень* (чи для розв'язування рівнянь і нерівностей) *доводиться використовувати перетворення* (*чи формули*)*, які призводять до звуження ОДЗ початкового виразу, то значення, на які звужується ОДЗ заданого виразу, слід розглянути окремо.*

Учень 4: Позначимо $A = \frac{1}{\sqrt{a}+1}$. Тоді при $a = 1$ одержуємо $A = \frac{1}{\sqrt{1}+1} = \frac{1}{2}$. При $a \neq 1$ $(a \geq 0)$ маємо $A = \frac{1}{\sqrt{a}+1} = \frac{\sqrt{a}-1}{(\sqrt{a}+1)(\sqrt{a}-1)} = \frac{\sqrt{a}-1}{a-1}$.

Відповідь: при $a = 1$ $A = \frac{1}{2}$, при $a \neq 1$ $(a \geq 0)$ $A = \frac{\sqrt{a}-1}{a-1}$ (тобто відповідь не можна записати однозначно).

Приклад №3. Спростіть вираз $\sqrt{a^4\sqrt[3]{a^2}}$.

Вчитель: В умові не сказано про те, що значення a невід'ємні, тому доведеться спочатку визначити ОДЗ заданого виразу. Вираз $\sqrt[3]{a^2}$ існує при будь-яких значеннях a і є невід'ємним. Вираз a^4 також існує і невід'ємний при будь-яких значеннях a. Отже, при будь-яких значеннях a під знаком квадратного кореня буде міститися невід'ємний вираз $a^4\sqrt[3]{a^2}$, тобто заданий вираз існує при будь-яких значеннях a (ОДЗ: будь-яке $a \in \boldsymbol{R}$), і його перетворення потрібно виконати на всій ОДЗ. Можливими є декілька шляхів перетворення заданого виразу, наприклад: 1) спочатку розглянути корінь квадратний із добутку, а потім скористатися формулою кореня з кореня і основною властивістю кореня; 2) внести вираз a^4 під знак кубічного кореня, а потім теж використати формулу кореня з кореня і основну властивість кореня. На кожному з цих шляхів ураховуємо, що при будь-яких значеннях a значення $a^2 \geq 0$ і $a \geq 0$ (а значить, для цих виразів можна користуватися основними формулами). Використовуючи основну властивість кореня, доводиться ділити показник кореня і показник степеня підкореневого виразу на парне натуральне число 2. Тому в результаті основу степеня підкореневого виразу потрібно брати за модулем (оскільки $a \in \boldsymbol{R}$).

<u>Учень 5</u>*:* Розв'яжемо приклад двома способами:

I. $\sqrt{a^4\sqrt[3]{a^2}} = \sqrt{a^4}\sqrt{\sqrt[3]{a^2}} = a^2\sqrt[6]{a^2} = a^2\sqrt[6]{|a|^2} = a^2\sqrt[3]{|a|}$.

II. $\sqrt{a^4\sqrt[3]{a^2}} = \sqrt{\sqrt[3]{a^{12}a^2}} = \sqrt[6]{a^{14}} = \sqrt[6]{|a|^{14}} = \sqrt[3]{|a|^7} = \sqrt[3]{|a|^6|a|} =$

$= \sqrt[3]{|a|^6}\sqrt[3]{|a|} = |a|^2\sqrt[3]{|a|} = a^2\sqrt[3]{|a|}$.

Приклад №4. Розв'яжіть рівняння $\sqrt[3]{8-x} + \sqrt[3]{x+1} = 3$.

<u>Учень 6</u>*:* Піднесемо до куба обидві частини рівняння і одержимо:

$8 - x + 3(\sqrt[3]{8-x})^2 \cdot \sqrt[3]{x+1} + 3\sqrt[3]{8-x}(\sqrt[3]{x+1})^2 + x + 1 = 27$,

$3\sqrt[3]{8-x}\,\sqrt[3]{x+1}(\sqrt[3]{8-x} + \sqrt[3]{x+1}) = 18$.

За умовою $\sqrt[3]{8-x} + \sqrt[3]{x+1} = 3$, тому

$3\sqrt[3]{8-x}\,\sqrt[3]{x+1} \cdot 3 = 18$,

$\sqrt[3]{8-x}\,\sqrt[3]{x+1} = 2$,

$x^2 - 7x = 0$.

Звідси $x = 0$, $x = 7$. Перевіркою впевняємося, що обидві корені є коренями даного рівняння.

Відповідь: 0; 7.

Результати експериментальної перевірки свідчать про ефективність розробленої методики.

Рівнева перевірочна робота по темі «Степенева функція»

<u>Початковий рівень</u>

1. Обчислити:

А) $\sqrt[3]{25} \cdot \sqrt[3]{5} - \sqrt[4]{16}$;

а) 1; б) 2; в) 3; г) 4.

Б) $16^{\frac{3}{4}} + 25^{\frac{1}{2}}$;

а) 9; б) 12; в) 13; г) 15.

В) $\sqrt[3]{5^6 \cdot 2^9}$

а) 200; б) 8000; в) 1600; г) 400.

2. Знайти область визначення функції.

а) $y = \sqrt[4]{3 + 2x}$; б) $y = (3x + 9)^{-1/5}$.

3. Знайти значення виразу:

$$1)\, 4\sqrt[3]{8} + 5\sqrt[5]{-32}\,; \qquad 2)\ \frac{\sqrt[3]{648}}{\sqrt[3]{3}}\,; \qquad 3)\, \sqrt[4]{7-\sqrt{33}} * \sqrt[4]{7+\sqrt{33}}\,.$$

4. Побудувати графік функції $y = x^{-6}$ і назвати її властивості.
5. Через яку точку проходить графік функції $y = x^{-6}$

а) A(-2; -128); б) B $(-\frac{1}{2}; -64)$; в) C(-2; $\frac{1}{64}$); г) D(-1; -1)?

<u>Середній рівень</u>

1. Розв'язати рівняння.

а) $x + \sqrt{x+5} = 7$; б) $\sqrt{17 - x} + \sqrt{x - 7} = 4$; *в)* $x^{0,5} + 5x^{\frac{1}{4}} - 14 = 0$.

2. Знайти значення виразу $\frac{\sqrt{a} - \sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[4]{b} + \sqrt[3]{b}} + \sqrt[3]{b}$, якщо a=16, b =13.

3. Скоротити дріб:

$$a)\ \frac{\sqrt{m^2 n} - \sqrt{mn^2}}{m - n}; \quad b)\ \frac{m + n}{\sqrt[3]{m^2} - \sqrt[3]{mn} + \sqrt[3]{n^2}}.$$

<u>Достатній рівень</u>

1. Розв'язати графічно рівняння: $x^{\frac{5}{2}} = 2 - x$.

2. Знайти розв'язки нерівностей:

$$a)\ \sqrt{x-1} > 5; \quad b)\ \sqrt{x-1} < -5; \quad c)\ \sqrt{x^2+3} > \sqrt{3x+3}.$$

3. Звільнитися від ірраціональності в знаменнику дробу:

$$1)\ \frac{12}{\sqrt[3]{3}}; \qquad 2)\ \frac{2}{\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{3}}.$$

4. Знайти значення виразу $\sqrt{2x + 13}$, якщо значення x задовольняє умову $\sqrt{2x + 13} = 1 - x$.
5. Знайти область визначення функції:

а) $y=\left|\sqrt{3-x-2}\right|^{\frac{1}{4}}$; б) $y=\left(\sqrt{2x+4}-5\right)^{\frac{1}{6}}$.

Високий рівень

1. Розв'язати: $a)\ \sqrt[3]{4x-3}-\sqrt[3]{x+2}=1;\quad b)\ (x^2-4)\sqrt{25-x^2}\geq 0.$
2. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases}\sqrt{x}-\sqrt[3]{y}=4\\ \sqrt{x}+\sqrt[3]{4}=6\end{cases}$.
3. Спростити вираз:

$$\frac{b^{\frac{1}{2}}-4}{b-2b^{\frac{1}{2}}-8}\cdot\left(\frac{b^{\frac{1}{2}}}{2b^{\frac{1}{2}}-8}-\frac{b+16}{2b-32}+\frac{4}{b+4b^{\frac{1}{2}}}\right).$$

Розробивши методику вивчення теми «Степенева функція» на профільному рівні, можна зробити висновок про специфіку даної методики. На цьому рівні пояснення усіх тем аналогічне до того, яке дається на академічному рівні. На профільному рівні більше уваги приділяється розв'язуванню складніших вправ.

Основне завдання, яке стоїть перед вчителем на цьому рівні, дати учням глибокі математичні знання і математичний розвиток на базі основного курсу математики. На даний рівень виноситься велика кількість завдань, які передбачають доведення певних тверджень та дозволяють проявити творчість при їх розв'язуванні.

§3. Експериментальна перевірка розробленої методики

Аналіз сучасної методичної літератури та підручників показує, що в процесі навчання математики не враховується різнорівневе засвоєння учнями матеріалу. В результаті цього – відсутність зацікавленості у вивченні матеріалу, низькі знання учнів з математики.

Тому нами було поставлено завдання провести дослідження використання методики, пов'язаної з вивченням степеневої функції, як її впровадження впливає на навчальний процес та засвоєння учнями матеріалу.

Важливо, щоб вчитель систематично одержував об'єктивну інформацію про хід навчально-пізнавальної діяльності учнів. Таку інформацію він може одержати лише здійснюючи контроль та діагностування процесу навчання. За допомогою контролю вчитель може виявити, встановити і оцінити реальний рівень знань учнів, тобто визначити об'єм та якість засвоєння навчального матеріалу, прогалини в знаннях і, відповідно, одразу їх усувати, вносити корективи в процес навчання та вдосконалювати його зміст, методи, засоби та форми організації.

Саме тому будь-яка розроблена методика потребує експериментальної перевірки.

Експериментальна перевірка розробленої методики проводилася в ліцеях №3 та №5 м. Кам’янця-Подільського.

Вчителям було пояснено, в чому полягає суть експерименту, які особливості навчання за розробленою методикою. Учні контрольної групи працювали за діючою програмою, підручниками і традиційною методикою, а учні експериментального класу працювали за розробленою нами методикою. В кінці вивчення теми «Степенева функція» учням чотирьох груп було запропоновано перевірочні контрольні роботи .

Наведемо результати контрольних робіт по даній темі в експериментальних та контрольних групах.

Академічний рівень. (К. р. див. на С. 38 – 40).

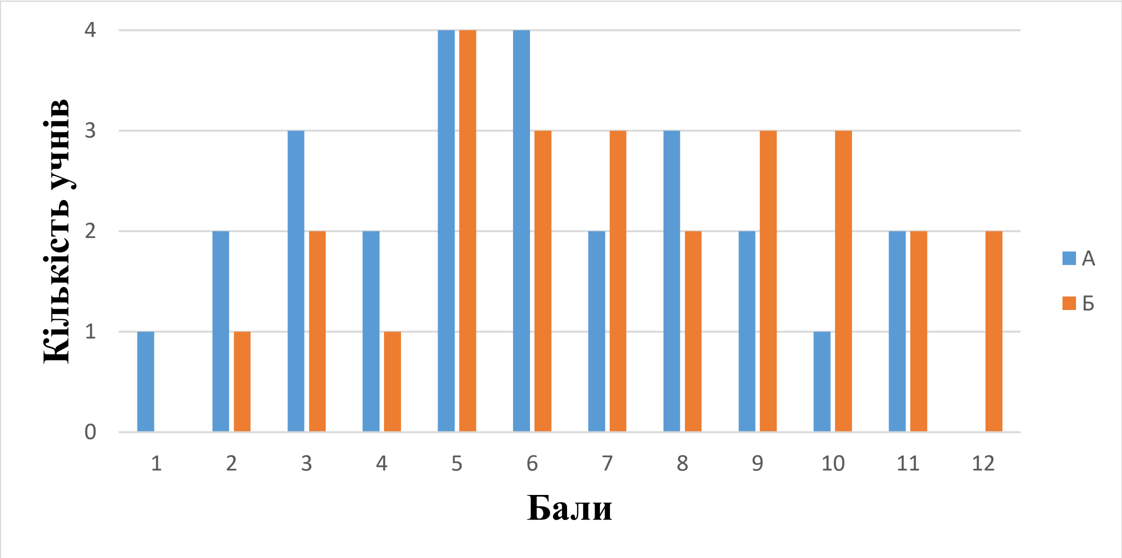
За експериментальну групу було взято учнів 10-го Б класу. Середній бал успішності за минулий навчальний рік становив 6,8. За контрольну групу було взято учнів 10-А класу. Середній бал успішності в даному класі за минулий рік становив 7,6.

Учні цих класів отримали такі оцінки:

Бали	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
А	1	2	3	2	4	4	2	3	2	1	2	0
Б	0	1	2	1	4	3	3	2	3	3	2	2

А – кількість учнів, що одержали відповідні бали (в контрольному класі);
Б – кількість учнів, що одержали відповідні бали (в експериментальному класі).

Результати роботи в графічному зображенні:



Як видно з одержаних графіків, в експериментальному класі спостерігається ріст балів достатнього і високого рівнів, причому кількість їх більша, ніж в контрольному. Це говорить про те, що розроблена методика є ефективною.

Для того, щоб з'ясувати точно, як впливає використання розробленої методики у навчанні алгебри на формування та засвоєння математичних знань, застосуємо метод кореляції на прикладі даних класів. Для цього визначимо коефіцієнт кореляції, який є мірое цілісності розглянутого зв'язку. Чим ближчий коефіцієнт до 1, тим ближча залежність між застосуванням розробленої методики та підтвердження відповідних рівнів знань. Якщо зв'язок між ознаками відсутній, то коефіцієнт кореляції буде рівний або близький до 0 [14].

Обчислимо коефіцієнт кореляції по даних контрольної роботи.

Коефіцієнт визначається за формулою:

$$r = \frac{SP_{xy}}{\sqrt{SS_x \cdot SS_y}},$$

де SS_x – сума квадратів відхилень:

$$SS_x = \sum x^2 - \frac{(\sum x)^2}{N},$$

аналогічно для SS_y – сума квадратів відхилень:

$$SS_y = \sum y^2 - \frac{(\sum y)^2}{N},$$

де N – кількість учнів.

Кількість учнів	**Загальна кількість балів**		**Допоміжні розрахунки**		
N	В контрольному класі	В експериментальному класі	$\sum x \cdot y$	$\sum x^2$	$\sum y^2$
26	154	190	2874	2818	4166

1. Знаходимо суму квадратів відхилень:

$$SS_x = 1000 - \frac{90^2}{14} = 1000 - 579 = 1906;$$

$$SS_y = 1629 - \frac{111^2}{14} = 1629 - 880 = 2778.$$

2. Сума скоректованих добутків:

$$SP_{xy} = 1117 - \frac{90 \cdot 111}{14} = 1117 - 714 = 1749.$$

3. Коефіцієнт:

$$r = \frac{403}{\sqrt{421 \cdot 749}} = \frac{403}{561} = 0{,}76.$$

Бачимо, що одержаний коефіцієнт кореляції близький до одиниці. Це свідчить про існування тісного зв'язку між застосованою методикою та досягненням учнями відповідних рівнів знань.

Тому можна говорити про доцільність впровадження такої методики в навчальний процес. Її використання в шкільній практиці забезпечує засвоєння учнями навчального матеріалу, сприяє розвитку в учнів стійкого інтересу до вивчення математики, веде до формування даних рівнів знань, їх об'єктивної перевірки.

Профільний рівень (К. р. див. на С. 48 – 50).

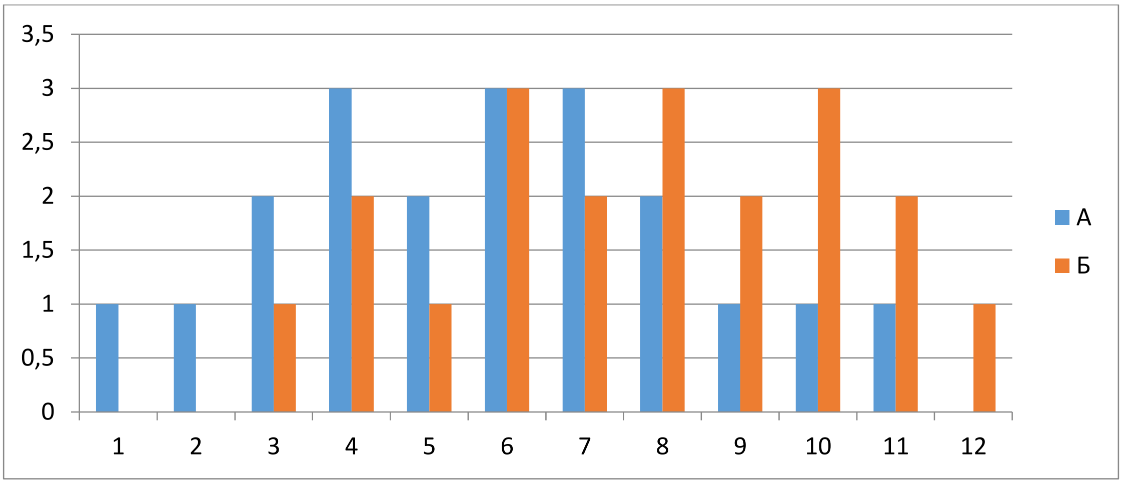
За експериментальну групу було взято учнів 10-го Б класу Кам'янець-Подільського ліцею №3. Середній бал успішності за минулий навчальний рік становив 7,5. За контрольну групу було взято учнів 10-А класу Кам'янець-Подільського ліцею №5. Середній бал успішності в даному класі за минулий рік становив 8.

Учні контрольної групи працювали за діючою програмою, підручниками і традиційною методикою, а учні експериментального класу працювали за розробленою нами методикою. В кінці вивчення теми «Степенева функція» учням обох груп було запропоновано перевірочну контрольну роботу.

Наведемо результати контрольних робіт по даній темі в експериментальній та контрольній групах.

Бали	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
А	1	1	2	3	2	3	3	2	1	1	1	0
Б	0	0	1	2	1	3	2	3	2	3	2	1

Результати роботи в графічному зображенні:



А – кількість учнів, що одержали відповідні бали (в контрольному класі);

Б – кількість учнів, що одержали відповідні бали (в експериментальному класі).

Аналогічно, як і в попередньому випадку, застосуємо метод кореляції для з'ясування впливу розробленої методики на формування та засвоєння математичних знань.

Кількість учнів	Загальна кількість балів		Допоміжні розрахунки		
N	В контрольному класі	В експериментальному класі	$\sum x \cdot y$	$\sum x^2$	$\sum y^2$
20	116	154	1860	1608	3046

1. Знаходимо суму квадратів відхилень:

$$SS_x = 1608 - \frac{116^2}{20} = 1608 - 673 = 935,$$

$$SS_y = 3046 - \frac{154^2}{20} = 3046 - 1186 = 1860.$$

2. Сума скоректованих добутків:

$$SP_{xy} = 1860 - \frac{116 \cdot 154}{20} = 1860 - 893 = 967.$$

3. Коефіцієнт:

$$r = \frac{967}{\sqrt{935 \cdot 1860}} = \frac{967}{1318} = 0,73.$$

Бачимо, що одержаний коефіцієнт кореляції близький до одиниці. Це свідчить про існування тісного зв’язку між застосуванням розробленої методики і досягненням учнів відповідних рівнів знань.

Тому можна говорити про доцільність впровадження такої методичної системи в навчальний процес. Її використання в шкільній практиці забезпечить засвоєння учнями навчального матеріалу, сприятиме розвитку учнів стійкого інтересу до вивчення математики, веде до формування даних рівнів знань, їх об'єктивної перевірки.

Таким чином, опираючись на дані експериментальної перевірки, можна стверджувати, що розроблену методику можна використовувати у старшій школі при вивченні теми «Степенева функція» на різних рівнях.

Висновки та рекомендації

Урахування сучасних вимог до системи освіти, які передбачають особистісну орієнтацію навчання, всебічний розвиток учня, зростання його самостійності, активності, підвищення рівня мислення, вироблення у кожного розуміння необхідності та уміння навчатися впродовж життя, потребує засвоєння учнями математичних знань і вмінь, які є складовими загальнолюдської культури. Значну роль у цьому відіграє алгебра і початки аналізу, зокрема одна із тем цього курсу – «Степенева функція та її властивості».

Реформування системи освіти завжди відбувається в умовах подальшого розвитку методологічних підходів, розробки нових норм і принципів навчання. Теоретичною базою слугують наукові дослідження провідних психологів та педагогів, а практичною – нормативні державні документи.

Виходячи з аналізу літератури, ми показали роль та місце теми дослідження в навчальному процесі. Проведена характеристика функціональної лінії свідчить про її високий потенціал у реалізації сучасних підходів до навчання математики.

Для успішного навчання школярів математики треба глибоко і повсякчасно вдосконалювати не лише зміст, а й методи навчання. Аналіз навчального матеріалу підручників з досліджуваної теми показав, що вони не завжди забезпечують рівневе навчання. Внаслідок цього виникає необхідність розробити методику вивчення теми «Степенева функція» та перевірити рівень здобутих учнями знань при використанні методики.

Навчання при правильній його організації сприяє розвитку розумових здібностей учнів; самостійності; розвитку творчого мислення. Воно забезпечує міцне засвоєння знань; розвиває аналітичне та логічне мислення. Його можна застосовувати для засвоєння узагальнених знань – понять, правил, законів, причино-наслідкових і інших логічних залежностей.

Провідну роль у процесі оволодіння знаннями, вміннями та навичками відіграє система задач і вправ. Вона має охоплювати широкий діапазон завдань, використання яких забезпечувало б реалізацію різних дидактичних функцій на всіх етапах навчання.

У зв'язку з тим, що вивчення математики у старшій школі диференціюється за чотирма рівнями змісту освіти і методика вивчення степеневої функції, яка б відповідала цим рівням, ще не повністю розроблена, нами була поставлена мета розробити методику для вказаної теми на академічному та профільному рівнях.

Запропонована методика дозволяє вчителю здійснювати навчання учнів і допомагає виділити той спосіб організації навчального процесу, який є оптимальним для учнів даного класу, школи.

Проведена експериментальна перевірка методики свідчить про існування тісного зв'язку між застосуванням даної методики пояснення теоретичного матеріалу, розробкою завдань для перевірки навчальних досягнень та досягненням учнями відповідного рівня знань.

Одержані результати дослідження дають можливість зробити наступні висновки:

- ✓ після застосування даної методики відбулося зростання в школярів інтересу до математики, збільшилась їхня активність на уроках, заповнилися прогалини в знаннях;
- ✓ запропонована методика дозволяє вчителю продуктивніше здійснювати навчання учнів і поглибити їхні знання по темі «Степенева функція»;
- ✓ розроблена методика дає змогу підвищити рівень засвоєння учнями матеріалу теми «Степенева функція», покращує успішність учнів.

Виходячи з даного дослідження, рекомендуємо вчителям математики використовувати дану методику, оскільки:

- як свідчать результати дослідження, розроблена методика допоможе вчителям при вивченні теми «Степенева функція» в підборі навчального матеріалу та відповідних завдань до кожного уроку з даної теми, підвищить ефективність навчання;
- розроблені завдання тематичної перевірочної роботи відповідають вимогам чотирьохрівневого навчання;
- дана методика дає можливість вчителю об'єктивно оцінити досягнення учнів, розвинути в учнів самооцінку.

Тому можна говорити про доцільність впровадження такої методики у навчальний процес.

Список використаних джерел

1. Андрющенко Р.Х. Степенева функція. Розв'язування вправ / Р. Х. Андрющенко // Математика в школі. – 2013. – №32 – С. 20 – 22.
2. Афанасьєва О.М. Про функціональну змістову лінію шкільного курсу математики / О.М. Афанасьєва, Я.С. Бродський, О.Л. Павлов, А.К. Сліпенко // Математика в школі. – 2007. – №5 – С. 18 – 27, № 6. – С. 31 – 37.
3. Бевз Г.П. Алгебра: підручник для 7-9 кл. 4-те вид. / Г.П. Бевз. – К.: Школяр, 2002. – 303 с.
4. Бевз Г. П. Методика викладання алгебри: посібник для вчителів / Г. П. Бевз. – К.: Радянська школа, 1971. – С. 70 – 96.
5. Бевз Г.П. Методика викладання математики / Г.П. Бевз. – К.: Вища школа, 1989. – 367 с.
6. Бевз В.Г. Провідні методологічні підходи у навчанні математики в профільній школі / В.Г. Бевз, В.С. Кузьменко // Математика в школі. – 2010. №8. – С. 3 – 7.
7. Білоцький М. Алгоритмічний підхід до поняття елементарної функції / М. Білоцький, І. Субботін // Математика в школі. – 1998. – №4. – С. 6 – 9.
8. Гельфанд М.Б. Основні питання викладання алгебри в IX-XI класах / М.Б. Гельфанд. – К.: Радянська школа, 1963. – С. 26 – 35, 93 – 119.
9. Дем'яненко О. Урок з теми: "Функції. Властивості функції. Перетворення графіків функцій" / О. Дем'яненко // Математика в школе. – 2006. – № 5. – С. 33 – 36.
10. Єргіна О. Про вивчення математики в 2010-2011 навчальному році / О. Єргіна, О. Олексюк // Математика. – 2010. – № 33 – 35 (573-575). – С. 3 – 8.
11. Забранський В. Організація письмових самостійних та контрольних робіт при диференційованому навчанні математики / В. Забранський, Н. Забранська // Математика в школе. – 2000. – № 5. – С. 30 – 33.

12. Зайченко І.В. Педагогіка: Навчальний посібник для студентів вищих пед.навч. закладів / І.В. Зайченко. – К.: Освіта України, 2006. – 528 с.
13. Інструктивно-методичний лист про вивчення математики у 2010/2011 навчальному році // Математика в школі. – 2010. – № 9. – С. 3 – 23.
14. Конет І.М. Теорія ймовірностей та математична статистика / І.М. Конет. – Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський державний педагогічний університет, інформаційно-видавничий відділ, 1999. – 214 с.
15. Коротка Н.І. Думки з приводу оцінювання / Н.І. Коротка // Математика. – 2003. – № 13. – С. 1 – 3.
16. Крайзман М.Л. Шляхи активізації розумової діяльності учнів при викладанні математики / М.Л. Крайзман. – К.: Радянська школа, 1964. – 96 с.
17. Критерії оцінювання навчальних досягнень учнів у системі загальної середньої школи // Математика. – 2000. – № 6. – С. 2 – 6, 2001. – № 4. – С. 7 – 9.
18. Кушнір В. Методичні особливості формування умінь побудови графіків функцій методом перетворень / В. Кушнір, Г. Кушнір, Р. Ріжняк // Математика в школі. – 2007. – № 3. – С. 41 – 44.
19. Мерзляк А.Г. Алгебра і початки аналізу 10 клас: підручник для загальноосвітніх навчальних закладів: академічний рівень / А.Г. Мерзляк, Д.А. Номіровський, В.Б. Полонський, М.С. Якір. – Харків: Гімназія, 2010. – 352 с.
20. Мерзляк А.Г. Алгебра і початки аналізу. 10 клас: підручник для загальноосвітніх навчальних закладів: профільний рівень / А.Г. Мерзляк, Д.А. Номіровський, В.Б. Полонський, М.С. Якір. – Х.: Гімназія, 2010. – 416 с.
21. Мойсеєв С. Про поняття функції в курсі алгебри / С. Мойсеєв // Математика в школі. – 2003. – № 5. – С. 19 – 21.
22. Музиченко С. Задачі на перехід від одного способу задання функції до іншого / С. Музиченко // Математика в школі. – 2008. – № 1. – С. 11 – 18.

23. Навчальна програма для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Математика (рівень стандарту та академічний рівень). – К., 2010. – 112 с.
24. Навчальна програма для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Математика (профільний рівень і рівень поглибленого вивчення). – К., 2010. – 110 с.
25. Нелін Є.П. Алгебра і початки аналізу 10 клас: підручник для загальноосвітніх навчальних закладів: академічний рівень / Є.П. Нелін. – Харків: Гімназія, 2010. – 416 с.
26. Нелін Є.П. Алгебра і початки аналізу. 10 клас: підручник для загальноосвітніх навчальних закладів: профільний рівень / Є.П. Нелін – Х.: Гімназія, 2010. – 432 с.
27. Педагогічний словник: за ред. М. . Ярмаченка. – К.: Пед. думка, 2001. – 516 с.
28. Питання методики викладання математики в середній школі. Алгебра: збірник статей. – К.: Радянська школа, 1951. – С. 278 – 300.
29. Програма з математики для загальноосвітніх навчальних закладів, 10-11 класи: рівень стандарту, академічний рівень, профільний рівень. – 2010. – С. 22 – 32, 34 – 36.
30. Прокопенко Н. Інструктивно-методичний лист про вивчення математики у 2010 – 2011 навчальному році / Н. Прокопенко // Математика в школі. – 2010. – №9. – С. 22 – 23.
31. Резніченко Р. Степенева функція та прийоми розумової діяльності / Р. Резніченко // Математика в школі. – 2005. – № 9. – С. 20 – 26.
32. Семенець С. Про вивчення функцій у класах фізико-математичного профілю / С. Семенець // Математика в школі. – 2005. – № 7. – С. 33 – 35.
33. Слєпкань З. І. Методика навчання математики: Підручник. – 2-ге вид., допов. і переробл. – К.: Вища шк., 2006. – 582 с.

34. Солдатов В.І. Формування наукового світогляду учнів при викладанні математики / В.І. Солдатов, О.Ф. Семенович, Ф.Ф. Нагібін. – К.: 1972. – 144 с.
35. Удосконалення навчально-виховної роботи з математики в школі. Посібник для вчителів: збірник статей, за редакцією доктора педагогічних наук професора І. Ф. Тесленка. – К.: Радянська школа, 1979. – 144 с.
36. Шкіль М.І. Алгебра і початки аналізу 10 клас: підручник для загальноосвітніх навчальних закладів. / М.І. Шкіль, З.І. Слепкань, О.С. Дубинчук. – К.: Зодіак-Еко, 2002. – 272 с.