Міністерство освіти і науки України
Кам’янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка
Фізико-математичний факультет
Кафедра математики

Дипломна робота
магістра

з теми: «**ЗАДАЧА ВІДШУКАННЯ ВІДСТАНІ МІЖ ЗАМКНЕНОЮ КУЛЕЮ ТА ОПУКЛОЮ МНОЖИНОЮ ЛІНІЙНОГО НОРМОВАНОГО ПРОСТОРУ ТА ДЕЯКІ ЇЇ ЧАСТКОВІ ВИПАДКИ**»

Виконав: студент ІІ курсу, М1-М22 групи
спеціальності 014 Середня освіта
(Математика)
Коберник Денис Олександрович

Керівник: **Гнатюк В.О.,**
кандидат фізико-математичних наук,
доцент

Рецензент: **Щирба В. С.,**
кандидат фізико-математичних наук,
доцент

Кам’янець-Подільський – 2023

ЗМІСТ

ВСТУП

В роботі досліджується задача відшукання відстані між замкненою кулею та опуклою множиною лінійного нормованого простору.

Актуальність теми. Постановка задачі. Відомо, що останнім часом велика увага приділяється математичним екстремальним задачам теорії апроксимації. Це зумовлено, перш за все, їх практичним змістом. Адже ідея теорії апроксимації полягає в тому, що складні математичні об'єкти наближаються (замінюються) найкращим чином простими і зручними у використанні (обчисленні) математичними об'єктами. Так, наприклад, складна неперервна дійснозначна функція замінюється найкращим способом алгебраїчним многочленом, значення якого обчислюється просто (в результаті виконання лише операції додавання, віднімання та множення дійсних чисел).

В процесі дослідження задач теорії наближення складних функції простими стало зрозумілим, що задачі найкращого наближення складних функцій простими допускають загальну постановку в термінах нормованих просторів, якщо в якості міри відхилення розглядається норма простору. Ця задача в лінійному нормованому просторі $(Z, \|\cdot\|)$ формуються таким чином: в Z фіксується точка z_0 та вибирається множина B цього простору. Потрібно знайти таку точку $y^* \in B$, для якої

$$\inf_{y \in B} \|z_0 - y\| = \|z_0 - y^*\|, \quad (0.1)$$

тобто таку точку множини B , відстань від точки z_0 до якої не перевищуватиме відстаней від z_0 до інших точок множини B (є найменшою з відстаней від z_0 до точок множини B). Точку y^* в цьому випадку називають найкращим наближенням точки z_0 в множині B або просто екстремальним елементом для величини (0.1).

Основні результати дослідження величини (0.1) подані, зокрема, у монографіях Н.І. Ахієзера [1], В.К. Дзядика [2], М.П. Корнєйчука [3], П.-Ж. Лорана [4], О.І. Степанця [5,6] та ін.

Якщо в задачі відшукання величини (0.1) точку z_0 замінити замкненою кулею $B_r(z_0) = \{z \in Z : \|z - z_0\| \leq r\}$лінійного нормованого простору $(Z, \|\cdot\|)$ з центром у точці z_0 і радіусом r, то прийдемо до задачі практичного змісту, а саме до задачі відшукання величини між замкненою кулею $B_r(z_0)$ лінійного нормованого простору $(Z, \|\cdot\|)$ та множиною B цього простору, тобто до задачі відшукання величини

$$\alpha^*(B_r(z_0), B) = \inf_{\substack{z \in B_r(z_0), \\ y \in B}} \|z - y\|. \qquad (0.2)$$

Оскільки задача відшукання величини (0.1) є частковим випадком задачі відшукання величини (0.2), то результати загального характеру, отримані при дослідженні задачі (0.2), представляють самостійний інтерес і можуть бути відправним пунктом при дослідженні задачі (0.1) та інших задач, які вкладаються у схему постановки задачі (0.2).

Актуальним, зокрема, є питання зв'язку між величинами (0.1) та (0.2), між їх оптимальними роз'язками, питання існування цих оптимальних розв'язків, їх єдиності, характеризації та інші питання, які вирішуються в теорії апроксимації при розгляді подібних задач.

Задача відшукання величини (0.2) і згадані вище питання та інші питання, які, зазвичай, розглядаються в теорії апроксимації і стосуються дослідження апроксимаційних задач розглядаються в дипломній роботі.

Отже, задача, що досліджується в роботі – це задача такого змісту.

Нехай Z - лінійний над полем дійсних чисел простір, а $\|\cdot\|$ - норма, задана на просторі Z.

Для $z_0 \in Z$ та $r \geq 0$ позначимо через $B_r(z_0) = \{z \in Z : \|z - z_0\| \leq r\}$ - кулю з центром у точці z_0 радіуса r. Через B будемо позначати довільну фіксовану опуклу множину простору $(Z, \|\cdot\|)$. Відстанню між замкненою кулею $B_r(z_0)$ та множиною B будемо називати величину

$$\alpha^*(B_r(z_0), B) = \inf_{\substack{z \in B_r(z_0), \\ y \in B}} \|z - y\|. \tag{0.3}$$

Поставимо задачу відшукання цієї величини. Отже, в роботі розглядається задача (0.3) відшукання відстані (найкращої) між замкненою кулею $B_r(z_0)$ та довільною фіксованою опуклою множиною B лінійного нормованого простору Z.

Якщо елемент $(z^*, y^*) \in B_r(z_0) \times B$ такий, що $\|z^* - y^*\| \leq \|z - y\|$ для всіх $(z, y) \in B_r(z_0) \times B$, тобто $\alpha^*(B_r(z_0), B) = \inf_{\substack{z \in B_r(z_0) \\ y \in B}} \|z - y\| = \|z^* - y^*\|$, то цей елемент (z^*, y^*) будемо називати екстремальним елементом для величини (0.3).

Мета, об'єкт, предмет і задачі дослідження.

Метою роботи є повторення або ознайомлення з поняттями та твердженнями, які використовуються як допоміжні при виконанні роботи; побудова задачі еквівалентної до задачі (0.3), встановлення зв'язку між цими задачами; встановлення зв'язку між величинами (0.1) та (0.3), їх екстремальними послідовностями та екстремальними елементами; встановлення та доведення теорем існування екстремального елемента для задачі (0.3) в загальному випадку; доведення теорем існування та єдиності екстремального елемента для задач відшукання величини (0.1) та (0.3) в банаховому просторі, в якому в якому має місце «нерівність паралелограма»; доведення теореми єдиності екстремального елемента для задачі (0.1) та (0.3) у строго нормованому просторі; встановлення співвідношення двоїстості для задачі відшукання величини (0.3), критеріїв екстремального елемента для цієї величин, основаних на співвідношенні двоїстості та їх конкретизація на окремі часткові випадки.

Об'єктом дослідження є задача відшукання відстані між замкненою кулею та опуклою множиною лінійного нормованого простору.

Предметом дослідження є такі питання теорії екстремальних задач в лінійних нормованих просторах, як побудова еквівалентних їм екстремальних задач; які є простішими для дослідження; встановлення теореми існування та єдиності екстремальних елементів цих задач; встановлення двоїстих співвідношень між досліджуваною задачею та двоїстою їй задачею. Встановлення критеріїв екстремальності допустимих розв'язків двоїстих задач, основаних на співвідношенні двоїстості.

Задачами дослідження є:

1. Побудова в лінійному нормованому просторі задачі відшукання величини (2.4),еквівалентної досліджуваній задачі (2.1),встановлення зв'язку між цими величинами та їх екстремальними елементами.

2. Встановлення зв'язку між величинами (2.1) та (2.2), їх екстремальними послідовностями та екстремальними елементами.

3. Встановлення та доведення теорем існування екстремального елемента для задачі відшукання величини (2.1) в загальному випадку.

4. Доведення теорем існування та єдиності екстремального елемента для задач відшукання величини (2.1) та (2.2) в банаховому просторі, в якому має місце « нерівність паралелограма».

5. Доведення теореми єдиності екстремального елемента для задач (2.1) та (2.2) у строго нормованому просторі.

6. Встановлення співвідношення двоїстості (3.25) для задачі відшукання величини (2.1) та задачі в спряженому просторі Z^*, яка фігурує у правій частині рівності (3.25).

7. Доведення критерія екстремальності допустимого елемента для задачі відшукання величини (2.1), основаного на співвідношенні двоїстості (3.25).

8. Конкретизація критерія екстремальності допустимого елемента для задачі відшукання величини (2.1) на випадок, коли множина B, що фігурує в задачі відшукання величини (2.1), є опуклим конусом з вершиною в точці 0, підпростором, скінченновимірним підпростором простору Z.

При вирішенні зазначених вище задач в дипломній роботі використовувались методи метематичного, функціонального, опуклого аналізів; теорії оптимізації, апроксимації, екстремальних задач.

Наукова новизна отриманих результатів. Результати роботи є новими і полягають в наступному:

1. Побудовано в лінійному нормованому просторі задачу оптимізації (2.4), еквівалентну досліджуваній задачі (2.1) відшукання найкращої відстані від замкненої кулі до опуклої множини.

Встановлено зв'язок між оптимальними значеннями їх цільової функції та між їх екстремальними елементами.

2. Встановлено зв'язок між шуканою величиною (2.1) та величиною (2.2) найкращого наближення центра кулі опуклою множиною, що фігурують у постановці задачі відшукання величини (2.1), між екстремальними послідовностями та екстремальними елементами цих величин.

3. Встановлено та доведено теореми існування екстремального елемента для величини (2.1) в загальному випадку.

4. Доведено теореми існування та єдиності екстремального елемента для задач відшукання величин (2.1) та (2.2) в банаховому просторі, в якому має місце «нерівність паралелограма».

5. Доведено теореми єдиності екстремального елемента для задач (2.1); (2.2) у строго нормованому просторі.

6. Встановлено співвідношення двоїстості (3.25) для задачі відшукання величини (2.1) та задачі в спряженому просторі Z^*, яка фігурує у правій частині рівності (3.25).

7. Доведено критерії екстремальності допустимого елемента для задачі відшукання величини (2.1), основані на співвідношенні двоїстості (3.25).

8. Конкретизовано критерії екстремальності допустимого елемента для задачі відшукання величини (2.1) на випадок, коли множина B, що фігурує в задачі відшукання величини (2.1) є опуклим конусом з вершиною в точці 0, підпростором, скінченновимірним підпростором простору Z.

Практичне застосування отриманих результатів. Дипломна робота має теоретичний характер. Її результати можна використати при відшукані відстані між замкненою кулею та опуклою множино в тому числі між замкненою кулею та опуклим конусом, підпростором, скінченновимірним підпростором; між точкою лінійного нормованого простору та опуклою множиною (підпростором, скінченновимірним підпростором). Результати дипломної роботи можна використати також при дослідженні, розв’язуванні й інших екстремальних задач, розвитку їх теорії.

Апробація результатів роботи. Результати роботи доповідались на науковій конференції здобувачів вищої освіти фізико-математичного факультету 1 листопада 2023 року.

Основні результати наукових досліджень опубліковано в працях:

Коберник Д. Задача відшукання відстані між замкненою кулею та опуклою множиною лінійного нормованого простору та деякі її часткові випадки. Збірник матеріалів наукової конференції здобувачів вищої освіти фізико-математичного факультету Кам’янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка. 1 листопада 2023 року [http://elar.kpnu.edu.ua:8081/xmlui/bitstream/handle/123456789/7648/Konferentsiia-studentska-fiz-mat-2023.pdf?sequence=3&isAllowed=y]. Кам’янець-

Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2023. С.10-12.

Структура роботи. Робота складається зі вступу, трьох розділів, висновків та списку використаних джерел.

У першому розділі розглянуто деякі поняття та твердження, які використовуються в дипломній роботі при дослідженні поставленої в ній задачі (поняття лінійного нормованого простору, замкненої та відкритої кулі, опуклої множини; відстані між двома множинами лінійного нормованого простору; скінченновимірного підпростору; банахового та гільбертового просторів; лінійного неперервного функціонала тощо).

У другому розділі поставлено задачу відшукання величини (2.1) та її екстремального елемента; побудовано задачу відшукання величини (2.4), еквівалентну досліджуваній задачі відшукання величини (2.1), встановлено зв'язки між величинами (2.1) та (2.4) та їх екстремальними елементами; встановлено зв'язки між величинами (2.1) та (2.2) і їх екстемальними елементами та екстремальними послідовностями; доведено теореми існування екстремального елемента для задачі відшукання величини (2.1) в загальному випадку.

У третьому розділі доведено теореми існування та єдиності екстремального елемента для задач відшукання величини (2.1) та (2.2) в банаховому просторі, в якому має місце «нерівність паралелограма»; доведено теореми єдиності екстремального елемента для задач (2.1),(2.2) у строго нормованому просторі; встановлено співвідношення двоїстості (3.25) для задачі відшукання величини (2.1); доведено критерії екстремальності допустимого елемента для задачі відшукання величини (2.1); конкретизовано критерії екстремального елемента для величини (2.1) на випадок, коли множина B є опуклим конусом, з вершиною в точці 0, підпростором, скінченновимірним підпростором.

ВИСНОВКИ

У дипломній роботі « Задача відшукання відстані між замкненою кулею та опуклою множиною лінійного нормованого простору та деякі її часткові випадки»:

1. Побудовано в лінійному нормованому просторі задачу оптимізації (2.4), еквівалентну досліджуваній задачі (2.1) відшукання найкращої відстані від замкненої кулі до опуклої множини.

Встановлено зв’язок між оптимальними значеннями їхніх цільових функцій та між їхніми екстремальними елементами.

2. Встановлено зв’язок між шуканою величиною (2.1) та величиною (2.2) найкращого наближення центра кулі опуклою множиною, що фігурують у постановці задачі відшукання величини (2.1), між екстремальними послідовностями та екстремальними елементами цих величин.

3. Встановлено та доведено теореми існування екстремального елемента для величини (2.1) в загальному випадку.

4. Доведено теореми існування та єдиності екстремального елемента для задач відшукання величин (2.1) та (2.2) в банаховому просторі, в якому має місце «нерівність паралелограма».

5. Доведено теореми єдиності екстремального елемента для задач (2.1), (2.2) у строго нормованому просторі.

6. Встановлено співвідношення двоїстості (3.25) для задачі відшукання величини (2.1) та задачі в спряженому просторі Z^*, яка фігурує у правій частині рівності (3.25).

7. Доведено критерій екстремальності допустимого елемента для задачі відшукання величини (2.1), оснований на співвідношенні двоїстості (3.25).

8. Конкретизовано критерій екстремальності допустимого елемента для задачі відшукання величини (2.1) на випадок, коли множина B, що фігурує в

задачі відшукання величини (2.1) є опуклим конусом з вершиною в точці 0, підпростором, скінченновимірним підпростором простору Z.

Результати дипломної роботи можна використати при дослідженні та розв'язуванні й інших екстремальних задач, які вкладаються у схему постановки задачі (2.1).

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Ахиезер Н.И. Лекции по теории аппроксимации / Н.И. Ахиезер. – М.: Наука, 1965. – 407 с.

2. Дзядык В.К. Введение в теорию равномерного приближения функций / В.К. Дзядык. – М.: Наука, 1977. – 510 с.

3. Корнейчук Н.П. Экстремальные задачи теории приближения / Н.П. Корнейчук. – М.: Наука, 1976. – 320 с.

4. Лоран П.-Ж. Аппроксимация и оптимизация / П.-Ж. Лоран. – М.: Мир, 1975. – 496 с.

5. Степанец А.И. Методы теории приближений / А.И. Степанец. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. – Ч.I. – 427 с.

6. Степанец А.И. Методы теории приближений / А.И. Степанец. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. – Ч.II. – 468 с.

7. Ус С.А Функціональний аналіз: навч. посібник / С.А. Ус. – Д.: Національний гірничий університет, 2013. – 236 с.

8. Гудима У.В. Опуклий аналіз: навчальний посібник / У.В. Гудима, В.О. Гнатюк. – Кам’янець-Подільський: – Кам’янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2019. – 112 с.

9. Гудима У.В. Умови існування екстремального елемента для задачі відшукання відстані між двома множинами, єдиності екстремального елемента еквівалентної їй задачі, властивості функцій відстані / У.В. Гудима, В.О. Гнатюк // Математичне та комп’ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки: зб. наук. праць. - Кам’янець-Подільський: Кам’янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2020. – Вип. 21. – С.84-98.

10. Колмогоров А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. – М.: Наука, 1976. – 543 с.

11. Люстерник Л.А. Краткий курс функционального анализа / Л.А. Люстерник, В.И.Соболев. – М.: Высшая школа, 1982. – 271 с.

12. Гудима У.В. Критерії екстремальної послідовності для задачі відшукання відстані між двома опуклими множинами лінійного нормованого простору / У.В. Гудима, В.О. Гнатюк // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки: зб. наук. праць. - Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2019. – Вип. 20. – С.13-24.

13.Шунда Н.М. Практикум з математичного аналізу: Вступ до аналізу. Диференціальне числення: Навч. посібник // Н.М. Шунда, А.А. Томусяк. – К.: Вища шк., 1993. – 375 с.

14. Жалдак М.І. Основи теорії і методів оптимізації: Навчальний посібник / М.І. Жалдак, Ю.В. Триус. – Черкаси: Брама-Україна, 2005. – 608 с.

15. Кадец В.М. Курс функционального анализа: Учебное пособие для студентов механико-математического факультета / В.М. Кадец. – Х.: ХНУ имени В.Н. Каразина, 2006. – 607 с.

16. Гудима У.В. Найкраща рівномірна апроксимація неперервного компактнозначного відображення множинами неперервних однозначних відображень / У.В. Гудима // Укр. мат. журн. – 2005. – 57, №12. – С. 1601-1619.

17. Bynum W.L. Weak parallelogram lows for Banach spaces / W.L. Bynum. – Can. Math. Bull. – 1976. – 19, №3. – P. 269-275.