Міністерство освіти і науки України
Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка
Фізико-математичний факультет
Кафедра математики

Дипломна робота
магістра

з теми: «ЗАДАЧА НАЙКРАЩОГО У РОЗУМІННІ ЗВАЖЕНОЇ ВІДСТАНІ НАБЛИЖЕННЯ ДЕЯКОГО АБСТРАКТНОГО ДИСКРЕТНОГО БАГАТОЗНАЧНОГО ВІДОБРАЖЕННЯ МНОЖИНОЮ НЕПЕРЕРВНИХ ОДНОЗНАЧНИХ ВІДОБРАЖЕНЬ»

Виконала: студентка ІІ курсу, групи М1-М22
спеціальності 014 Середня освіта
(Математика)
Савчук Марія Русланівна

Керівник: кандидат фізико-математичних
наук, доцент **Гудима У.В.**

Рецензент: кандидат фізико-математичних
наук, доцент **Сорич В.А.**

Кам'янець-Подільський – 2023

ЗМІСТ

ВСТУП

Теорія наближення функцій, певним чином, має справу з наближенням окремих функцій та класів функцій за допомогою підпросторів, кожен з яких складається з функцій, що є в деякій мірі більш простими, ніж апроксимовані функції.

Задачі наближення функції беруть свій початок ще з часів Архімеда і в математиці вони зустрічаються постійно. Однак датою народження теорії наближення прийнято вважати 1854 р., коли П. Л. Чебишев опублікував свою працю, в якій досліджуючи задачу про рівномірне наближення неперервної на відрізку дійснозначної функції підмножиною алгебраїчних поліномів степеня, що не перевищує m, сформулював перші принципи пошуку найкращого наближення.

Згодом у працях багатьох математиків було розглянуто різні постановки задач теорії наближення функцій, зокрема і абстрактних, які відрізняються вибором міри відхилення та апроксимуючої множини.

Серед них особливе місце займають задачі одночасного наближення кількох або нескінченної кількості елементів [1-5,7,10,11,13,14,16].

Одна із таких задач розглядається в роботі.

Позначимо через K — компакт, z — його елементи, Y — лінійний над полем дійсних чисел нормований простір, $C(K,Y)$ — лінійний над полем дійсних чисел нормований простір однозначних відображень $p: K \to Y$ з нормою $\|p\| = \max\limits_{z \in K} \|p(z)\|$, $(C(K,Y))^m$ — впорядкована множина m відображень простору $C(K,Y)$: $\left\{a_i\right\}_{i=1}^{m} \in (C(K,Y))^m$, $a_i \in C(K,Y)$, $i = \overline{1,m}$, $\delta_i \in C(K)$, $\delta_i(z) > 0$, $i = \overline{1,m}$, $z \in K$, $W \subset C(K,Y)$.

Задачею найкращої у розумінні зваженої відстані наближення абстрактного дискретного відображення $\{a_i\}_{i=1}^{m}$ множиною W простору $C(K,Y)$ будемо називати задачу відшукання величини

$$\alpha^*(W;\{a_i\}_{i=1}^{m};\{\delta_i\}_{i=1}^{m}) = \inf_{p\in W}\max_{1\le i\le m}\max_{z\in K}\delta_i(z)\|p(z)-a_i(z)\|. \qquad (0.1)$$

Якщо існує елемент $p^*\in W$ такий, що має місце рівність

$$\alpha^*(W;\{a_i\}_{i=1}^{m};\{\delta_i\}_{i=1}^{m}) = \inf_{p\in W}\max_{1\le i\le m}\max_{z\in K}\delta_i(z)\|p_i(z)-a_i(z)\| =$$

$$=\max_{1\le i\le m}\max_{z\in K}\delta_i(z)\|p_i^*(z)-a_i(z)\|,$$

то його будемо називати екстремальним елементом для задачі відшукання величини (0.1).

У випадку, коли $\delta_i(z)=1,\ z\in K,\ i=\overline{1,m}$ задача відшукання величини (0.1) є задачею одночасної апроксимації кількох неперервних на компакті абстрактних функції лінійного над полем дійсних чисел нормованого простору підмножиною цього підпростору.

Метою роботи є: розглянути властивості функціоналу та оператора найкращого наближення для задачі відшукання величини (0.1); встановити деякі теореми існування екстремального елемента для задачі (0.1); умови характеризації та єдиності екстремального для величини (0.1); критерії екстремального елемента для задачі відшукання величини (0.1) у випадку апроксимації скінченновимірною множиною; співвідношення двоїстості для задачі відшукання величини (0.1) у випадку апроксимації скінченновимірною опуклою множиною; теорему про очистку.

Об'єктом дослідження є задача найкращого у розумінні зваженої відстані наближення деякого абстрактного дискретного багатозначного відображення множиною неперервних однозначних відображень.

Предметом дослідження є проблеми теорії наближення, що стосуються задачі найкращої у розумінні зваженої відстані наближення абстрактного дискретного відображення множиною неперервних однозначних відображень.

Завданнями дослідження є:

– розглянути властивості функціоналом рівномірного наближення $\alpha^*(W;\{a_i\}_{i=1}^m;\{\delta_i\}_{i=1}^m)$;

– розглянути властивості оператора найкращого наближення A: $(C(K,Y))^m \to W$;

– встановити деякі теореми існування екстремального елемента для задачі (0.1);

– розглянути необхідні, достатні умови та критерії екстремальності елемента для задачі відшукання величини (0.1);

– розглянути необхідні та достатні умови єдиності екстремального елемента для задачі відшукання величини (0.1);

– встановити критерій екстремального елемента для задачі відшукання величини (0.1) у випадку апроксимації скінченновимірною множиною;

– встановити співвідношення двоїстості для задачі відшукання величини (0.1) у випадку апроксимації скінченновимірною опуклою множиною;

– сформулювати та довести теорему «про очистку» на випадок задачі (0.1).

Наукова новизна отриманих результатів

Результати роботи є новими і полягають у наступному:

– встановлено властивості функціоналом рівномірного наближення $\alpha^*(W;\{a_i\}_{i=1}^m;\{\delta_i\}_{i=1}^m)$;

– встановлено властивості оператора найкращого наближення A: $(C(K,Y))^m \to W$;

– доведено деякі теореми існування екстремального елемента для задачі (0.1);

– розглянуто необхідні, достатні умови та критерії екстремальності елемента для задачі відшукання величини (0.1);

– сформульовано та доведено теореми єдиності екстремального елемента для задачі відшукання величини (0.1);

– сформульовано та доведено критерії екстремального елемента для задачі відшукання величини (0.1) у випадку апроксимації скінченновимірною множиною;

– встановлено співвідношення двоїстості для задачі відшукання величини (0.1) у випадку апроксимації скінченновимірною опуклою множиною;

– узагальнено теорему «про очистку» на випадок задачі відшукання величини (0.1);

– окремі результати конкретизовані на деякі часткові випадки.

Практичне значення отриманих результатів. Результати отримані в роботі носять теоретичний характер і можуть бути використанні для подальшого дослідження задачі найкращої у розумінні зваженої відстані наближення абстрактного дискретного відображення множиною неперервних однозначних відображень.

Апробація результатів роботи. Результати роботи доповідались на науковій конференції здобувачів вищої освіти фізико-математичного факультету 1 листопада 2023 року.

Основні результати наукових досліджень опубліковано у працях:

Савчук М. Задача найкращого у розумінні зваженої відстані наближення деякого абстрактного дискретного багатозначного відображення опуклою скінченновимірною множиною неперервних однозначних відображень. Збірник матеріалів наукової конференції здобувачів вищої освіти фізико-математичного факультету Кам’янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка. 1 листопада 2023 року [Електронний ресурс]. Кам’янець-Подільський : Кам’янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2023. С. 12-15.

Савчук М. Задача найкращого у розумінні зваженої відстані наближення деякого абстрактного дискретного багатозначного відображення опуклою скінченновимірною множиною неперервних однозначних відображень. Вісник Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка. Фізико-математичні науки. Випуск 16. Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2023. С.67-72.

Структура дипломної. Дипломна робота складається із вступу, двох розділів, висновків та списку використаних джерел.

У першому розділі доведено деякі теореми існування екстремального елемента для задачі відшукання величини (0.1), встановлено властивості функціонала та оператора найкращого наближення для задачі відшукання величини (0.1), розглянуто необхідні, достатні умови та критерії екстремального елемента для задачі відшукання величини (0.1), доведено теореми характеризації та єдиності екстремального елемента.

У другому розділі роботи встановлено критерії екстремального елемента для задачі відшукання величини (0.1) у випадку апроксимації скінченновимірною множиною, співвідношення двоїстості для задачі відшукання величини (0.1) у випадку апроксимації скінченновимірною опуклою множиною та узагальнено теорему «про очистку» на випадок задачі відшукання величини (0.1).

РОЗДІЛ 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ. УМОВИ ХАРАКТЕРИЗАЦІЇ ТА ЄДИНОСТІ ЕКСТРЕМАЛЬНОГО ЕЛЕМЕНТА ДЛЯ ЗАДАЧІ НАЙКРАЩОЇ У РОЗУМІННІ ЗВАЖЕНОЇ ВІДСТАНІ НАБЛИЖЕННЯ АБСТРАКТНОГО ДИСКРЕТНОГО ВІДОБРАЖЕННЯ МНОЖИНОЮ НЕПЕРЕРВНИХ ОДНОЗНАЧНИХ ВІДОБРАЖЕНЬ

1.1 Постановка задачі. Властивості функціоналу та оператора найкращого наближення

Позначимо через K — компакт, z — його елементи, Y — лінійний над полем дійсних чисел нормований простір, $C(K,Y)$ — лінійний над полем дійсних чисел нормований простір однозначних відображень $p:K\to Y$ з нормою $\|p\|=\max\limits_{z\in K}\|p(z)\|$, $(C(K,Y))^m$ — впорядкована множина m відображень простору $C(K,Y)$: $\{a_i\}_{i=1}^m\in(C(K,Y))^m$, $a_i\in C(K,Y)$, $i=\overline{1,m}$, $\delta_i\in C(K)$, $\delta_i(z)>0$, $i=\overline{1,m}$, $z\in K$, $W\subset C(K,Y)$.

Задачею найкращої у розумінні зваженої відстані наближення абстрактного дискретного відображення $\{a_i\}_{i=1}^m$ множиною W простору $C(K,Y)$ будемо називати задачу відшукання величини

$$\alpha^*(W;\{a_i\}_{i=1}^m;\{\delta_i\}_{i=1}^m)=\inf_{p\in W}\max_{1\le i\le m}\max_{z\in K}\delta_i(z)\|p(z)-a_i(z)\|. \quad (1.1)$$

Оскільки,

$$\max_{1\le i\le m}\max_{z\in K}\delta_i(z)\|p(z)-a_i(z)\|=\max_{z\in K}\max_{1\le i\le m}\delta_i(z)\|p(z)-a_i(z)\|,$$

то

$$\alpha^*(W;\{a_i\}_{i=1}^m;\{\delta_i\}_{i=1}^m)=\inf_{p\in W}\max_{1\le i\le m}\max_{z\in k}\delta_i(z)\|p(z)-a_i(z)\|=$$

$$=\inf_{p\in W}\max_{z\in K}\max_{1\le i\le m}\delta_i(z)\|p(z)-a_i(z)\|.$$

Дійсно нехай індекс $i_0\in\{1,\dots,m\}$ такий, що,

$$\max_{1\le i\le m}\max_{z\in K}\delta_i(z)\|p(z)-a_i(z)\|=\max_{z\in K}\delta_{i_0}(z)\|p(z)-a_{i_0}(z)\|,$$

елемент $z_0\in K$ такий, що

$$\max_{z\in K}\delta_{i_0}(z)\|p(z)-a_{i_0}(z)\|=\delta_{i_0}(z_0)\|p(z_0)-a_{i_0}(z_0)\|.$$

Тоді

$$\max_{1\le i\le m}\max_{z\in K}\delta_i(z)\|p(z)-a_{i_0}(z)\|=\max_{z\in K}\delta_{i_0}(z)\|p(z)-a_{i_0}(z)\|=$$

$$=\delta_{i_0}(z_0)\|p(z_0)-a_{i_0}(z_0)\|\le\max_{1\le i\le m}\delta_i(z_0)\|p(z_0)-a_i(z_0)\|\le$$

$$\le\max_{z\in K}\max_{1\le i\le m}\delta_i(z)\|p(z)-a_i(z)\|. \quad (1.2)$$

З іншого боку, якщо $z_0\in K$ такий, що

$$\max_{z\in K}\max_{1\le i\le m}\delta_i(z)\|p(z)-a_i(z)\|=\max_{1\le i\le m}\delta_i(z_0)\|p(z_0)-a_i(z_0)\|,$$

а $i_0\in\{1,...,m\}$ такий що:

$$\max_{1\le i\le m}\delta_i(z_0)\|p(z_0)-a_i(z_0)\|=\delta_{i_0}(z_0)\|p(z_0)-a_{i_0}(z_0)\|,$$

тоді

$$\max_{z\in K}\max_{1\le i\le m}\delta_i(z)\|p(z)-a_i(z)\|=\max_{1\le i\le m}\delta_i(z_0)\|p(z_0)-a_i(z_0)\|=$$

$$=\delta_{i_0}(z_0)\|p(z_0)-a_{i_0}(z_0)\|\le\max_{z\in K}\delta_{i_0}(z)\|p(z)-a_{i_0}(z)\|\le$$

$$\le\max_{1\le i\le m}\max_{z\in K}\delta_i(z)\|p(z)-a_i(z)\|. \quad (1.3)$$

З нерівностей (1.2), (1.3) випливає, що

$$\max_{1\le i\le m}\max_{z\in K}\delta_i(z)\|p(z)-a_i(z)\|=\max_{z\in K}\max_{1\le i\le m}\delta_i(z)\|p(z)-a_i(z)\|.$$

Якщо існує елемент $p^*\in W$ такий, що має місце рівність

$$\alpha^*(W;\{a_i\}_{i=1}^m;\{\delta_i\}_{i=1}^m)=\inf_{p\in W}\max_{1\le i\le m}\max_{z\in K}\delta_i(z)\|p_i(z)-a_i(z)\|=$$

$$=\max_{1\le i\le m}\max_{z\in K}\delta_i(z)\|p_i^*(z)-a_i(z)\|,$$

то його будемо називати екстремальним елементом для задачі відшукання величини (1.1).

Між елементами простору $(C(K,Y))^m$ визначимо метрику Чебишова:

$$\rho(\{\varphi_i\}_{i=1}^m;\{\omega_i\}_{i=1}^m)=\max_{1\le i\le m}\|\varphi_i-\omega_i\|=\max_{1\le i\le m}\max_{z\in K}\|\varphi_i(z)-\omega_i(z)\|.$$

Тоді простір $(C(K,Y))^m$ — метричний простір з метрикою ρ.

Нехай W — фіксована множина простору $C(K,Y)$, тоді величина (1.1) задає на $(C(K,Y))^m$ деякий функціонал $\alpha^*(W;\{a_i\}_{i=1}^m;\{\delta_i\}_{i=1}^m)$, який у відповідність $\{a_i\}_{i=1}^m\in(C(K,Y))^m$ ставить число $\alpha^*(W;\{a_i\}_{i=1}^m;\{\delta_i\}_{i=1}^m)$, який надалі будемо називати функціоналом рівномірного наближення.

Теорема 1.1. *Функціонал* $\alpha^*(W;\{a_i\}_{i=1}^m;\{\delta_i\}_{i=1}^m)$ *є неперервним по* $\{a_i\}_{i=1}^m$ *на* $((C(K,Y))^m,\rho)$ *для довільної множини* W.

Якщо W *— підпростір, то функціонал* $\alpha^*(W;\{a_i\}_{i=1}^m;\{\delta_i\}_{i=1}^m)$ *є напівадетивним на* $(C(K,Y))^m$ *та додатно однорідним.*

Доведення. Покажемо, що функціонал $\alpha^*(W;\{a_i\}_{i=1}^m;\{\delta_i\}_{i=1}^m)$ неперервний на $(C(K,Y))^m$. Для $\{a_i\}_{i=1}^m$, $\{b_i\}_{i=1}^m$ із $(C(K,Y))^m$ будемо мати:

$$\max_{z\in K}\max_{1\le i\le m}\delta_i(z)\|p(z)-a_i(z)\|=$$

$$=\max_{z\in K}\max_{1\le i\le m}\delta_i(z)\|p(z)-b_i(z)+b_i(z)-a_i(z)\|\le$$

$$\le\max_{z\in K}\max_{1\le i\le m}\delta_i(z)(\|p(z)-b_i(z)\|+\|b_i(z)-a_i(z)\|)\le$$

$$\le\max_{z\in K}\max_{1\le i\le m}(\delta_i(z)\|p(z)-b_i(z)\|+\delta_i(z)\|b_i(z)-a_i(z)\|)\le$$

$$\le\max_{z\in K}\max_{1\le i\le m}\delta_i(z)\|p(z)-b_i(z)\|+\max_{z\in K}\max_{1\le i\le m}\delta_i(z)\|b_i(z)-a_i(z)\|. \qquad (1.4)$$

З нерівності (1.4) одержимо:

$$\inf_{p\in W}\max_{z\in K}\max_{1\le i\le m}\delta_i(z)\|p(z)-a_i(z)\|\le$$

$$\le\inf_{p\in W}\max_{z\in K}\max_{1\le i\le m}\delta_i(z)\|p(z)-b_i(z)\|+\max_{z\in K}\max_{1\le i\le m}\delta_i(z)\|b_i(z)-a_i(z)\|.$$

Звідси

$$\alpha^*(W;\{a_i\}_{i=1}^m;\{\delta_i\}_{i=1}^m)\le$$

$$\le\alpha^*(W;\{b_i\}_{i=1}^m;\{\delta_i\}_{i=1}^m)+$$

$$+\max_{z\in K}\max_{1\le i\le m}\delta_i(z)\left\|b_i(z)-a_i(z)\right\|.$$

Покладемо $M=\max_{z\in K}\max_{1\le i\le m}\delta_i(z)$.

Тоді

$$\alpha^*(W;\{a_i\}_{i=1}^m;\{\delta_i\}_{i=1}^m)\le\alpha^*(W;\{b_i\}_{i=1}^m;\{\delta_i\}_{i=1}^m)+$$

$$+M\max_{z\in K}\max_{1\le i\le m}\left\|b_i(z)-a_i(z)\right\|=$$

$$=\alpha^*(W;\{b_i\}_{i=1}^m;\{\delta_i\}_{i=1}^m)+M\max_{1\le i\le m}\max_{z\in K}\left\|b_i(z)-a_i(z)\right\|\le$$

$$\le\alpha^*(W;\{b_i\}_{i=1}^m;\{\delta_i\}_{i=1}^m)+M\rho(\{b_i\}_{i=1}^m;\{a_i\}_{i=1}^m);$$

$$\alpha^*(W;\{a_i\}_{i=1}^m;\{\delta_i\}_{i=1}^m)-\alpha^*(W;\{b_i\}_{i=1}^m;\{\delta_i\}_{i=1}^m)\le M\rho(\{b_i\}_{i=1}^m;\{a_i\}_{i=1}^m).$$

Для довільного $\varepsilon>0$ покладемо $\delta=\dfrac{\varepsilon}{M}$. Тоді

$$\alpha^*(W;\{a_i\}_{i=1}^m;\{\delta_i\}_{i=1}^m)-\alpha^*(W;\{b_i\}_{i=1}^m;\{\delta_i\}_{i=1}^m)\le$$

$$\le M\rho(\{b_i\}_{i=1}^m;\{a_i\}_{i=1}^m)<M\delta=M\frac{\varepsilon}{M}=\varepsilon, \tag{1.5}$$

для довільних $\{a_i\}_{i=1}^m;\{b_i\}_{i=1}^m\in(C(K,Y))^m$ таких, що

$$\rho(\{b_i\}_{i=1}^m;\{a_i\}_{i=1}^m)<\delta.$$

Аналогічно

$$\max_{z\in K}\max_{1\le i\le m}\delta_i(z)\left\|p(z)-b_i(z)\right\|=$$

$$=\max_{z\in K}\max_{1\le i\le m}\delta_i(z)\left\|p(z)-a_i(z)+a_i(z)-b_i(z)\right\|\le$$

$$\le\max_{z\in K}\max_{1\le i\le m}\delta_i(z)(\left\|p(z)-a_i(z)\right\|+\left\|a_i(z)-b_i(z)\right\|)=$$

$$=\max_{z\in K}\max_{1\le i\le m}(\delta_i(z)\left\|p(z)-a_i(z)\right\|+\delta_i(z)\left\|a_i(z)-b_i(z)\right\|)\le$$

$$\le\max_{z\in K}\max_{1\le i\le m}\delta_i(z)\left\|p(z)-a_i(z)\right\|+\max_{z\in K}\max_{1\le i\le m}\delta_i(z)\left\|a_i(z)-b_i(z)\right\|\le$$

$$\le\max_{z\in K}\max_{1\le i\le m}\delta_i(z)\left\|p(z)-a_i(z)\right\|+M\max_{z\in K}\max_{1\le i\le m}\left\|a_i(z)-b_i(z)\right\|=$$

$$=\max_{z\in K}\max_{1\le i\le m}\delta_i(z)\left\|p(z)-a_i(z)\right\|+M\max_{1\le i\le m}\max_{z\in K}\left\|a_i(z)-b_i(z)\right\|=$$

$$=\max_{z\in K}\max_{1\le i\le m}\delta_i(z)\left\|p(z)-a_i(z)\right\|+M\rho(\{b_i\}_{i=1}^m;\{a_i\}_{i=1}^m).$$

Звідси

$$\inf_{p\in W}\max_{z\in K}\max_{1\le i\le m}\delta_i(z)\left\|p(z)-b_i(z)\right\|\le$$

$$\le\inf_{p\in W}\max_{z\in K}\max_{1\le i\le m}\delta_i(z)\left\|p(z)-a_i(z)\right\|+M\rho(\{b_i\}_{i=1}^m;\{a_i\}_{i=1}^m);$$

$$\alpha^*(W;\{b_i\}_{i=1}^m;\{\delta_i\}_{i=1}^m)\le\alpha^*(W;\{a_i\}_{i=1}^m;\{\delta_i\}_{i=1}^m)+M\rho(\{a_i\}_{i=1}^m;\{b_i\}_{i=1}^m);$$

$$\alpha^*(W;\{b_i\}_{i=1}^m;\{\delta_i\}_{i=1}^m)-\alpha^*(W;\{a_i\}_{i=1}^m;\{\delta_i\}_{i=1}^m)\le M\rho(\{b_i\}_{i=1}^m;\{a_i\}_{i=1}^m).$$

Звідси

$$\alpha^*(W;\{b_i\}_{i=1}^m;\{\delta_i\}_{i=1}^m)-\alpha^*(W;\{a_i\}_{i=1}^m;\{\delta_i\}_{i=1}^m)\le$$

$$\le M\rho(\{a_i\}_{i=1}^m;\{b_i\}_{i=1}^m)<M\frac{\varepsilon}{M}=\varepsilon, \tag{1.6}$$

для довільних $\{a_i\}_{i=1}^m;\{b_i\}_{i=1}^m\in(C(K,Y))^m$ таких, що

$$\rho(\{b_i\}_{i=1}^m;\{a_i\}_{i=1}^m)<\delta.$$

З нерівностей (1.5), (1.6) випливає, що для довільного $\varepsilon>0$ існує $\delta=\dfrac{\varepsilon}{M}$, що для $\{a_i\}_{i=1}^m;\{b_i\}_{i=1}^m\in(C(K,Y))^m$ таких, що $\rho(\{b_i\}_{i=1}^m;\{a_i\}_{i=1}^m)<\delta$:

$$\left|\alpha^*(W;\{a_i\}_{i=1}^m;\{\delta_i\}_{i=1}^m)-\alpha^*(W;\{b_i\}_{i=1}^m;\{\delta_i\}_{i=1}^m)\right|<\varepsilon.$$

А це й означає, що функціонал $\alpha^*(W;\{a_i\}_{i=1}^m;\{b_i\}_{i=1}^m)$ є неперервним по $\{a_i\}_{i=1}^m$ на $(C(K,Y))^m$.

Нехай тепер W — підпростір. Покажемо що функціонал $\alpha^*(W;\{a_i\}_{i=1}^m;\{b_i\}_{i=1}^m)$ є напівадетивнимна $(C(K,Y))^m$, тобто, що має місце нерівність:

$$\alpha^*(W;\{a_i\}_{i=1}^m+\{b_i\}_{i=1}^m;\{\delta_i\}_{i=1}^m)\le\alpha^*(W;\{a_i\}_{i=1}^m;\{\delta_i\}_{i=1}^m)+\alpha^*(W;\{b_i\}_{i=1}^m;\{\delta_i\}_{i=1}^m).$$

Дійсно, для довільних $p_1,p_2\in W$

$$\alpha^*(W;\{a_i\}_{i=1}^m+\{b_i\}_{i=1}^m;\{\delta_i\}_{i=1}^m)=$$

$$=\inf_{p\in W}\max_{1\le i\le m}\max_{z\in K}\delta_i(z)\left\|p(z)-(a_i(z)+b_i(z))\right\|\le$$

$$\le \max_{1\le i\le m}\max_{z\in K}\delta_i(z)\|p_1(z)+p_2(z)-(a_i(z)+b_i(z))\|=$$

$$=\max_{1\le i\le m}\max_{z\in K}\delta_i(z)\|p_1(z)-a_i(z)+p_2(z)-b_i(z)\|\le$$

$$\le \max_{1\le i\le m}\max_{z\in K}(\delta_i(z)\|p_1(z)-a_i(z)\|+\delta_i(z)\|p_2(z)-b_i(z)\|\le$$

$$\le \max_{1\le i\le m}\max_{z\in K}\delta_i(z)\|p_1(z)-a_i(z)\|+\max_{1\le i\le m}\max_{z\in K}\delta_i(z)\|p_2(z)-b_i(z)\|. \quad (1.7)$$

З нерівності (1.7) випливає

$$\alpha^*(W;\{a_i\}_{i=1}^m+\{b_i\}_{i=1}^m;\{\delta_i\}_{i=1}^m)\le$$

$$\le \inf_{p_1\in W}\max_{1\le i\le m}\max_{z\in K}\delta_i(z)\|p_1(z)-a_i(z)\|+$$

$$+\inf_{p_2\in W}\max_{1\le i\le m}\max_{z\in K}\delta_i(z)\|p_2(z)-b_i(z)\|=$$

$$=\alpha^*(W;\{a_i\}_{i=1}^m;\{\delta_i\}_{i=1}^m)+\alpha^*(W;\{b_i\}_{i=1}^m;\{\delta_i\}_{i=1}^m).$$

Отже,

$$\alpha^*(W;\{a_i\}_{i=1}^m+\{b_i\}_{i=1}^m;\{\delta_i\}_{i=1}^m)\le$$

$$\le \alpha^*(W;\{a_i\}_{i=1}^m;\{\delta_i\}_{i=1}^m)+\alpha^*(W;\{b_i\}_{i=1}^m;\{\delta_i\}_{i=1}^m).$$

Звідси випливає. що функціонал $\alpha^*(W;\{a_i\}_{i=1}^m;\{\delta_i\}_{i=1}^m)$ напівадетивний на $(C(K,Y))^m$, у випадку, коли W є підпростором простору $C(K,Y)$.

Покажемо, що у випадку, коли W — підпростір, то функціонал $\alpha^*(W;\{a_i\}_{i=1}^m;\{\delta_i\}_{i=1}^m)$ є додатно однорідним, тобто має місце рівність

$$\alpha^*(W;\lambda\{a_i\}_{i=1}^m;\{\delta_i\}_{i=1}^m)=|\lambda|\alpha^*(W;\{a_i\}_{i=1}^m;\{\delta_i\}_{i=1}^m),$$

де λ — довільне дійсне число.

Припустимо, що $\lambda\ne 0$, тоді

$$\alpha^*(W;\lambda\{a_i\}_{i=1}^m;\{\delta_i\}_{i=1}^m)=$$

$$=\inf_{p\in W}\max_{z\in K}\max_{1\le i\le m}\delta_i(z)\|p(z)-\lambda a_i(z)\|=$$

$$=\inf_{p\in W}\max_{z\in K}\max_{1\le i\le m}|\lambda|\delta_i(z)\left\|\frac{p}{\lambda}(z)-a_i(z)\right\|=$$

$$=|\lambda| \inf_{\frac{p}{\lambda}\in W} \max_{z\in K} \max_{1\le i\le m} \delta_i(z) \left\| \frac{p}{\lambda}(z) - a_i(z) \right\| =$$

$$=|\lambda| \inf_{p_i\in W} \max_{z\in K} \max_{1\le i\le m} \delta_i(z) \left\| p_1(z) - a_i(z) \right\| =$$

$$=|\lambda| \alpha^*(W;\{a_i\}_{i=1}^m;\{\delta_i\}_{i=1}^m).$$

Нехай тепер $\lambda = 0$, тоді

$$\alpha^*(W;0\cdot\{a_i\}_{i=1}^m;\{\delta_i\}_{i=1}^m) = 0 = 0\cdot\alpha^*(W;\{a_i\}_{i=1}^m;\{\delta_i\}_{i=1}^m).$$

Отже,

$$\alpha^*(W;\lambda\{a_i\}_{i=1}^m;\{\delta_i\}_{i=1}^m) = |\lambda| \alpha^*(W;\{a_i\}_{i=1}^m;\{\delta_i\}_{i=1}^m),$$

для довільних дійсних чисел λ.

Теорему доведено.

Надалі будемо припускати, що W є множиною існування та єдиності екстремального елемента для задачі відшукання величини (1.1). Розглянемо оператор A: $(C(K,Y))^m \to W$, тобто A у відповідність $\{a_i\}_{i=1}^m \in (C(K,Y))^m$ ставить єдиний елемент $p\in W$:

$$\alpha^*(W;\{a_i\}_{i=1}^m;\{\delta_i\}_{i=1}^m) = \max_{1\le i\le m} \max_{z\in K} \delta_i(z) \left\| A_{\{a_i\}_{i=1}^m}(z) - a_i(z) \right\|.$$

Теорема 1.2. *Якщо W — підпростір простору $C(K,Y)$, то оператор найкращого наближення A для задачі відшукання величини (1.1) є однорідним.*

Доведення. Нехай для $\{a_i\}_{i=1}^m \in (C(K,Y))^m$ оператор A ставить у відповідність $\{a_i\}_{i=1}^m$ єдиний елемент $A_{\{a_i\}_{i=1}^m}$, тоді

$$\max_{1\le i\le m} \max_{z\in K} \delta_i(z) \left\| \lambda A_{\{a_i\}_{i=1}^m}(z) - \lambda a_i(z) \right\| =$$

$$=|\lambda| \max_{1\le i\le m} \max_{z\in K} \delta_i(z) \left\| A_{\{a_i\}_{i=1}^m}(z) - a_i(z) \right\| =$$

$$=|\lambda| \alpha^*(W;\{a_i\}_{i=1}^m;\{\delta_i\}_{i=1}^m),$$

для довільного дійсного числа λ.

З урахуванням того, що

$$\alpha^*(W;\lambda\{a_i\}_{i=1}^m;\{\delta_i\}_{i=1}^m) = |\lambda|\alpha^*(W;\{a_i\}_{i=1}^m;\{\delta_i\}_{i=1}^m) =$$

$$= \max_{1\le i\le m}\max_{z\in K}\delta_i(z)\left\|A_{\{\lambda a_i\}_{i=1}^m}(z) - \lambda a_i(z)\right\| =$$

$$= \max_{1\le i\le m}\max_{z\in K}\delta_i(z)\left\|\lambda A_{\{a_i\}_{i=1}^m}(z) - \lambda a_i(z)\right\|.$$

Оскільки за припущенням екстремальний елемент для кожної послідовності $\{a_i\}_{i=1}^m \in (C(K,Y))^m$ існує та єдиний, то можемо зробити висновок, що

$$A_{\{\lambda a_i\}_{i=1}^m} = \lambda A_{\{a_i\}_{i=1}^m}.$$

Отже, оператор A — однорідний.

Теорему доведено.

Теорема 1.3. *Нехай* W *— скінченновимірний підпростір простору* $C(K,Y)$, *тоді оператор* $A\colon (C(K,Y)^m;\rho) \to W$ *є неперервним на* $C(K,Y)$ *просторі.*

Доведення. Нехай $\{a_i^0\}_{i=1}^m, \{a_i^k\}_{i=1}^m \in (C(K,Y))^m$ такі, що $\lim\limits_{k\to\infty}\{a_i^k\}_{i=1}^m = \{a_i^0\}_{i=1}^m$, тобто

$$\lim_{k\to\infty}\rho(\{a_i^k\}_{i=1}^m;\{a_i^0\}_{i=1}^m) = \lim_{k\to\infty}\max_{1\le i\le m}\max_{z\in K}\left\|a_i^k(z) - a_i^0\right\| = 0.$$

Нехай $p_k^* = A_{\{a_i^k\}_{i=1}^m}$, $p_0^* = A_{\{a_i^0\}_{i=1}^m}$. Тоді

$$\left\|p_k^*(z) - p_0^*(z)\right\| = \frac{1}{\delta_i(z)}\delta_i(z)\left\|p_k^*(z) - p_0^*(z)\right\| \le$$

$$\le \frac{1}{\min\limits_{1\le i\le m}\min\limits_{z\in K}\delta_i(z)}\delta_i(z)\left\|p_k^*(z) - p_0^*(z)\right\| =$$

$$= L_1\delta_i(z)\left\|p_k^*(z) - p_0^*(z)\right\| =$$

$$= L_1\delta_i(z)\left\|p_k^*(z) - a_i^k(z) + a_i^k(z) - a_i^0(z) + a_i^0(z) - p_0^*(z)\right\| \le$$

$$\le L_1\delta_i(z)(\left\|p_k^*(z) - a_i^k(z)\right\| + \left\|a_i^k(z) - a_i^0(z)\right\| + \left\|a_i^0(z) - p_0^*(z)\right\|) =$$

$$= L_1(\delta_i(z)\left\| p_k^*(z) - a_i^k(z)\right\| + \delta_i(z)\left\| a_i^k(z) - a_i^0(z)\right\| + \delta_i(z)\left\| a_i^0(z) - p_0^*(z)\right\|) \le$$

$$\le L_1(\delta_i(z)\left\| p_k^*(z) - a_i^k(z)\right\| + (\max_{1\le i\le m}\max_{z\in K}\delta_i(z))\left\| a_i^k(z) - a_i^0(z)\right\| + \delta_i(z)\left\| p_0^*(z) - a_i^0(z)\right\|) =$$

$$= L_1(\delta_i(z)\left\| p_k^*(z) - a_i^k(z)\right\| + L_2\left\| a_i^k(z) - a_i^0(z)\right\| + \delta_i(z)\left\| p_0^*(z) - a_i^0(z)\right\|),$$

$$z \in K, i \in \{1,...,m\},$$

де $L_1 = \dfrac{1}{\min\limits_{1\le i\le m}\min\limits_{z\in K}\delta_i(z)}, L_2 = \max\limits_{1\le i\le m}\max\limits_{z\in K}\delta_i(z)$.

Звідси

$$\left\| p_k^* - p_0^*\right\| = \left\| A_{\{a_i^k\}_{i=1}^m} - A_{\{a_i^0\}_{i=1}^m}\right\| = \max_{z\in K}\left\| p_k^*(z) - p_0^*(z)\right\| \le$$

$$\le L_1(\max_{z\in K}\delta_i(z)\left\| p_k^*(z) - a_i^k(z)\right\| + L_2\max_{z\in K}\left\| a_i^k(z) - a_i^0(z)\right\| + \max_{z\in K}\delta_i(z)\left\| p_0^*(z) - a_i^0(z)\right\|) \le$$

$$\le L_1(\max_{1\le i\le m}\max_{z\in K}\delta_i(z)\left\| p_k^*(z) - a_i^k(z)\right\| + L_2\max_{1\le i\le m}\max_{z\in K}\left\| a_i^k(z) - a_i^0(z)\right\| +$$

$$+\max_{1\le i\le m}\max_{z\in K}\delta_i(z)\left\| p_0^*(z) - a_i^0(z)\right\|) = L_1\alpha^*(W;\{a_i^k\}_{i=1}^m;\{\delta_i\}_{i=1}^m) +$$

$$+L_2\rho(\{a_i^k\}_{i=1}^m;\{a_i^0\}_{i=1}^m) + \alpha^*(W;\{a_i^0\}_{i=1}^m;\{\delta_i\}_{i=1}^m)).$$

Оскільки функціонал $\alpha^*(W;\{a_i\}_{i=1}^m;\{\delta_i\}_{i=1}^m)$ неперервний по $\{a_i\}_{i=1}^m$ на $(C(K,Y)^m;\rho)$, то

$$\alpha^*(W;\{a_i^k\}_{i=1}^m;\{\delta_i\}_{i=1}^m)\xrightarrow{k\to\infty}\alpha^*(W;\{a_i^0\}_{i=1}^m;\{\delta_i\}_{i=1}^m),$$

та,

$$\rho(\{a_i^k\}_{i=1}^m;\{a_i^0\}_{i=1}^m) = 0,$$

тому послідовність $\{A_{\{a_i^k\}_{i=1}^m} - A_{\{a_i^0\}_{i=1}^m}\}_{k=1}^\infty$ є обмеженою послідовністю, тобто існує $L > 0$, таке, що

$$\left\| p_k^* - p_0^*\right\| = \left\| A_{\{a_i^k\}_{i=1}^m} - A_{\{a_i^0\}_{i=1}^m}\right\| \le L,$$

тоді

$$\left\| p_k^*\right\| - \left\| p_0^*\right\| \le \left\| p_k^* - p_0^*\right\| \le L,$$

$$\left\|p_k^*\right\| \le L + \left\|p_0^*\right\|.$$

Отже, послідовність $\{p_k^*\}_{k=1}^{\infty}$ є обмеженою послідовність підпростору W, тоді вона містить збіжну підпослідовність $\{p_{k_l}^*\}_{k=1}^{\infty} : \lim\limits_{l\to\infty} p_{k_l}^* = \overline{p}$, тобто

$$\left\|p_{k_l}^* - \overline{p}\right\| \xrightarrow{l\to 0} 0.$$

З урахуванням того, що W є замкненою множиною, то $\overline{p} \in W$.

Оскільки $p_{k_l}^* = A_{\{a_i^{k_l}\}_{i=1}^m}$, то

$$\max_{1\le i\le m}\max_{z\in K} \delta_i(z)\left\|p_{k_l}^*(z) - a_i^{k_l}(z)\right\| \le \max_{1\le i\le m}\max_{z\in K} \delta_i(z)\left\|p_0^*(z) - a_i^{k_0}(z)\right\|.$$

Перейшовши до границі при $k\to\infty$, одержимо

$$\max_{1\le i\le m}\max_{z\in K} \delta_i(z)\left\|\overline{p}(z) - a_i^0(z)\right\| \le \max_{1\le i\le m}\max_{z\in K} \delta_i(z)\left\|p_0^*(z) - a_i^0(z)\right\|.$$

Звідси випливає, що $\overline{p} = p_0^*$, а тому $\lim\limits_{l\to\infty} p_{k_l}^* = \overline{p} = p_0^*$, $\lim\limits_{k\to\infty} p_k^* = p_0^*$, тобто

$$\left\|p_k^* - p_0^*\right\| \xrightarrow{k\to\infty} 0;$$

$$A_{\{a_i^k\}_{i=1}^m} \xrightarrow{k\to\infty} A_{\{a_i^0\}_{i=1}^m}.$$

Звідси можна зробити висновок, що у випадку, коли W — скінченновимірний простір простору $C(K,Y)$, то оператор A є неперервним на $C(K,Y)^m$.

Теорему доведено.

1.2 Деякі теореми існування екстремального елемента для задачі (1.1)

Твердження 1.1. *Функція*

$$\Phi_{\{a_i\}_{i=1}^m;\{\delta_i\}_{i=1}^m}(p) = \max_{1\le i\le m}\max_{z\in K}\left(\delta_i(z)\left\|p(z) - a_i(z)\right\|\right),\ p \in C(K,Y),$$

є неперервною на $C(K,Y)$.

Доведення. Нехай $p_0 \in C(K,Y)$. Для довільного $p \in C(K,Y)$ візьмемо індекс $i_p \in \{1,\dots,m\}$ такий, що

$$\max_{1\le i\le m}\max_{z\in K}\left(\delta_i(z)\|p(z)-a_i(z)\|\right)=\max_{z\in K}\left(\delta_{i_p}(z)\left\|p(z)-a_{i_p}(z)\right\|\right),$$

та елемент $z_p \in K$ такий, що

$$\max_{z\in K}\left(\delta_{i_p}(z)\left\|p(z)-a_{i_p}(z)\right\|\right)=\delta_{i_p}(z_p)\left\|p(z_p)-a_{i_p}(z_p)\right\|.$$

Тоді

$$\Phi_{\{a_i\}_{i=1}^m;\{\delta_i\}_{i=1}^m}(p)-\Phi_{\{a_i\}_{i=1}^m;\{\delta_i\}_{i=1}^m}(p_0)=$$

$$=\max_{1\le i\le m}\max_{z\in K}\left(\delta_i(z)\|p(z)-a_i(z)\|\right)-\max_{1\le i\le m}\max_{z\in K}\left(\delta_i(z)\|p_0(z)-a_i(z)\|\right)=$$

$$=\max_{z\in K}\delta_{i_p}(z)\left\|p(z)-a_{i_p}(z)\right\|-\max_{1\le i\le m}\max_{z\in K}\delta_i(z)\|p_0(z)-a_i(z)\|=$$

$$=\delta_{i_p}(z_p)\left\|p(z_p)-a_{i_p}(z_p)\right\|-\max_{1\le i\le m}\max_{z\in K}\delta_i(z)\|p_0(z)-a_i(z)\|\le$$

$$\le\delta_{i_p}(z_p)\left\|p(z_p)-a_{i_p}(z_p)\right\|-\delta_{i_p}(z_p)\left\|p_0(z_p)-a_{i_p}(z_p)\right\|=$$

$$\le\delta_{i_p}(z_p)\left(\left\|p(z_p)-a_{i_p}(z_p)\right\|-\left\|p_0(z_p)-a_{i_p}(z_p)\right\|\right)\le$$

$$\le\delta_{i_p}(z_p)\left\|p(z_p)-a_{i_p}(z_p)-\left(p_0(z_p)-a_{i_p}(z_p)\right)\right\|=$$

$$=\delta_{i_p}(z_p)\left\|p(z_p)-p_0(z_p)\right\|\le M\|p-p_0\|, \tag{1.8}$$

де $M=\max\limits_{1\le i\le m}\max\limits_{z\in K}\delta_i(z)$.

Розглянемо індекс $i_{p_0} \in \{1,\dots,m\}$ такий, що

$$\max_{1\le i\le m}\max_{z\in K}\delta_i(z)\|p_0(z)-a_i(z)\|=\max_{z\in K}\delta_{i_{p_0}}(z)\left\|p_0(z)-a_{i_{p_0}}(z)\right\|,$$

а елемент $z_{p_0} \in K$ такий, що

$$\max_{z\in K}\delta_{i_{p_0}}(z)\left\|p_0(z)-a_{i_{p_0}}(z)\right\|=\delta_{i_p}(z_{p_0})\left\|p_0(z_{p_0})-a_{i_p}(z_{p_0})\right\|.$$

Тоді

$$\Phi_{\{a_i\}_{i=1}^m;\{\delta_i\}_{i=1}^m}(p_0)-\Phi_{\{a_i\}_{i=1}^m;\{\delta_i\}_{i=1}^m}(p)=$$

$$= \max_{1\le i\le m}\max_{z\in K}\left(\delta_i(z)\left\|p_0(z)-a_i(z)\right\|\right)-\max_{1\le i\le m}\max_{z\in K}\left(\delta_i(z)\left\|p(z)-a_i(z)\right\|\right)=$$

$$=\max_{z\in K}\delta_{i_{p_0}}(z)\left\|p_0(z)-a_{i_{p_0}}(z)\right\|-\max_{1\le i\le m}\max_{z\in K}\delta_i(z)\left\|p(z)-a_i(z)\right\|=$$

$$\le\delta_{i_{p_0}}(z_{p_0})\left\|p_0(z_{p_0})-a_{i_{p_0}}(z_{p_0})\right\|-\delta_{i_{p_0}}(z_{p_0})\left\|p(z_{p_0})-a_{i_{p_0}}(z_{p_0})\right\|=$$

$$=\delta_{i_{p_0}}(z_{p_0})\left(\left\|p_0(z_{p_0})-a_{i_{p_0}}(z_{p_0})\right\|-\left\|p(z_{p_0})-a_{i_{p_0}}(z_{p_0})\right\|\right)\le$$

$$\le\delta_{i_{p_0}}(z_{p_0})\left\|p_0(z_{p_0})-a_{i_{p_0}}(z_{p_0})-\left(p(z_{p_0})-a_{i_{p_0}}(z_{p_0})\right)\right\|=$$

$$=\delta_{i_{p_0}}(z_{p_0})\left\|p_0(z_{p_0})-p(z_{p_0})\right\|\le$$

$$\le\delta_{i_{p_0}}(z_{p_0})\left\|p(z_{p_0})-p_0(z_{p_0})\right\|\le M\left\|p-p_0\right\|. \quad (1.9)$$

З нерівностей (1.8), (1.9) випливає, що

$$\left|\Phi_{\{a_i\}_{i=1}^m;\{\delta_i\}_{i=1}^m}(p)-\Phi_{\{a_i\}_{i=1}^m;\{\delta_i\}_{i=1}^m}(p_0)\right|<M\left\|p-p_0\right\|.$$

Тоді для довільного $\varepsilon>0$ існує $\delta=\dfrac{\varepsilon}{M}$ таке, що для $p\in C(K,Y)$ таких, що

$$\left\|p-p_0\right\|<\delta=\frac{\varepsilon}{M},$$

виконується нерівність

$$\left|\Phi_{\{a_i\}_{i=1}^m;\{\delta_i\}_{i=1}^m}(p)-\Phi_{\{a_i\}_{i=1}^m;\{\delta_i\}_{i=1}^m}(p_0)\right|\le M\left\|p-p_0\right\|<$$

$$<M\delta=M\,\frac{\varepsilon}{M}=\varepsilon.$$

Звідси випливає, що функція $\Phi_{\{a_i\}_{i=1}^m;\{\delta_i\}_{i=1}^m}(p)$ є неперервною на $C(K,Y)$.

Твердження доведено.

Теорема 1.4. *Нехай W — замкнена локально компактна множина простору $C(K,Y)$. У цьому випадку екстремальний елемент для задачі відшукання величини (1.1) існує.*

Доведення. Розглянемо послідовність $\{p_k\}_{k=1}^{\infty}$ таку, що

$$\lim_{k\to\infty}\Phi_{\{a_i\}_{i=1}^m;\{\delta_i\}_{i=1}^m}(p_k)=\lim_{k\to\infty}\max_{1\le i\le m}\max_{z\in K}\delta_i(z)\|p_k(z)-a_i(z)\|=$$

$$=\alpha^*\left(W;\{a_i\}_{i=1}^m;\{\delta_i\}_{i=1}^m\right). \qquad (1.10)$$

Таку послідовність будемо називати екстремальною послідовністю.

Екстремальна послідовність $\{p_k\}_{k=1}^\infty$ є обмеженою послідовністю W.

Дійсно для $k=\overline{1,\infty}$ та $z\in K$ будемо мати

$$\|p_k(z)\|=\frac{1}{\delta_i(z)}\delta_i(z)\|p_k(z)\|\le\frac{1}{\min\limits_{1\le i\le m}\min\limits_{z\in K}\delta_i(z)}\delta_i(z)\|p_k(z)\|=$$

$$=N\delta_i(z)\|p_k(z)\|=N\left(\delta_i(z)\|p_k(z)-a_i(z)+a_i(z)\|\right)\le$$

$$\le N\left(\delta_i(z)\left(\|p_k(z)-a_i(z)\|+\|a_i(z)\|\right)\right)=$$

$$=N\left(\delta_i(z)\|p_k(z)-a_i(z)\|+\delta_i(z)\|a_i(z)\|\right)\le$$

$$\le N\left(\max_{z\in K}\delta_i(z)\|p_k(z)-a_i(z)\|+\max_{z\in K}\delta_i(z)\|a_i(z)\|\right)=$$

$$=N\left(\max_{z\in K}\delta_i(z)\|p_k(z)-a_i(z)\|+\|\delta_i a_i\|\right)\le$$

$$\le N\left(\max_{1\le i\le m}\max_{z\in K}\delta_i(z)\|p_k(z)-a_i(z)\|+\max_{1\le i\le m}\|\delta_i a_i\|\right)=$$

$$=N\left(\Phi_{\{a_i\}_{i=1}^m;\{\delta_i\}_{i=1}^m}(p)+\max_{1\le i\le m}\|\delta_i a_i\|\right),$$

де $N=\dfrac{1}{\min\limits_{1\le i\le m}\min\limits_{z\in K}\delta_i(z)}$.

Звідси з урахуванням (1.10) будемо мати, що послідовність $\{p_k\}_{k=1}^\infty$ є обмеженою послідовністю елементів W.

Врахувавши, що W є замкненою локально компактною множиною простору $C(K,Y)$, обмеженість послідовності $\{p_k\}_{k=1}^\infty$, то можна вибрати збіжну до $p^*\in W$ підпослідовність $\{p_{k_l}\}_{l=1}^\infty$ послідовності $\{p_k\}_{k=1}^\infty$.

Оскільки згідно з твердженням 1.1 функція $\Phi_{\{a_i\}_{i=1}^m;\{\delta_i\}_{i=1}^m}(p)$ є неперервною на $C(K,Y)$, то

$$\lim_{k\to\infty}\Phi_{\{a_i\}_{i=1}^m;\{\delta_i\}_{i=1}^m}(p_k)=\Phi_{\{a_i\}_{i=1}^m;\{\delta_i\}_{i=1}^m}(p^*)=$$

$$=\max_{1\le i\le m}\max_{z\in K}\delta_i(z)\left\|p^*(z)-a_i(z)\right\|=\alpha^*\left(W;\{a_i\}_{i=1}^m;\{\delta_i\}_{i=1}^m\right). \qquad (1.11)$$

З (1.11) випливає, що p^* є екстремальний елементом для задачі відшукання величини (1.1).

Теорему доведено.

Наслідок 1.1. Якщо W є компактною множиною простору $C(K,Y)$, то екстремальний елемент для задачі відшукання величини (1.1) існує.

Наслідок 1.2. Якщо W — скінченновимірний підпростір простору $C(K,Y)$, то екстремальний елемент для задачі відшукання величини (1.1) існує.

1.3. Умови характеризації та єдиності екстремального для величини(1.1)

Надалі будемо припускати, що умова $p\in W$ є суттєвою, тобто

$$\alpha^*(W;\{a_i\}_{i=1}^m;\{\delta_i\}_{i=1}^m)=$$

$$=\inf_{p\in W}\max_{1\le i\le m}\max_{z\in K}\delta_i(z)\left\|p(z)-a_i(z)\right\|>$$

$$>\alpha^*(\{a_i\}_{i=1}^m;\{\delta_i\}_{i=1}^m)=$$

$$=\inf_{p\in C(K,Y)}\max_{1\le i\le m}\max_{z\in K}\delta_i(z)\left\|p(z)-a_i(z)\right\|.$$

Через Y^* будемо позначати спряжений простір до лінійного над полем дійсних чисел нормованого простору Y, S^* — замкнену одиничну кулю простору $Y^*: S^*=\{\varphi\in Y^*:\|\varphi\|\le 1\}$.

Для $\{a_i\}_{i=1}^m\in(C(K,Y))^m$, $p^*\in W$ покладемо

$$a_{\{a_i\}_{i=1}^m;\{\delta_i\}_{i=1}^m}(p^*) = \max_{1\le i\le m}\max_{z\in K}\delta_i(z)\left\|p^*(z)-a_i(z)\right\|;$$

$$C^*_{\{a_i\}_{i=1}^m;\{\delta_i\}_{i=1}^m}(p^*) = \{p : p\in C(K,Y); \max_{1\le i\le m}\max_{z\in K}\delta_i(z)\left\|p(z)-a_i(z)\right\| < a_{\{a_i\}_{i=1}^m;\{\delta_i\}_{i=1}^m}(p^*)\};$$

$$I^*_{\{a_i\}_{i=1}^m;\{\delta_i\}_{i=1}^m}(p^*) = \{i : i\in\{1,...,m\}; \max_{z\in K}\delta_i(z)\left\|p^*(z)-a_i(z)\right\| = a_{\{a_i\}_{i=1}^m;\{\delta_i\}_{i=1}^m}\left(p^*\right)\}$$

;

$$K^*_i(p^*) = \{z : z\in K; \delta_i(z)\left\|p^*(z)-a_i(z)\right\| = a_{\{a_i\}_{i=1}^m;\{\delta_i\}_{i=1}^m}\left(p^*\right)\},$$

$$i\in I^*_{\{a_i\}_{i=1}^m;\{\delta_i\}_{i=1}^m}(p^*);$$

$$S^*_i(p^*,z) = \{\varphi : \varphi\in S^*; \varphi\left(p^*(z)-a_i(z)\right) = \left\|p^*(z)-a_i(z)\right\|\},$$

$$i\in I^*_{\{a_i\}_{i=1}^m;\{\delta_i\}_{i=1}^m}(p^*), z\in K^*_i(p^*).$$

Теорема1.5. [12] *Для* $p^*\in W$ *має місце рівність:*

$$\Gamma(C^*_{\{a_i\}_{i=1}^m;\{\delta_i\}_{i=1}^m}(p^*), p^*) =$$

$$= \bigcap_{i\in I^*_{\{a_i\}_{i=1}^m;\{\delta_i\}_{i=1}^m}(p^*)}\ \bigcap_{z\in K^*_i(p^*)}\ \bigcap_{\varphi\in S^*_i(p^*,z)} \{p : p\in C(K,Y), \varphi(p(z))<0\}. \quad (1.12)$$

Теорема1.6. [12] *Нехай* W *— довільна множина простору* $C(K,Y)$. *Для того щоб елемент* $p^*\in W$ *був екстремальним елементом для задачі відшукання величини (1.1), необхідно, щоб не існувало такого елемента* $g\in\Gamma^*(W,p^*)$, *що для всіх* $i\in I^*_{\{a_i\}_{i=1}^m;\{\delta_i\}_{i=1}^m}(p^*)$, $z\in K_i^*(p^*)$, $\varphi\in S_i^*(p^*;z)$

$$\varphi\left(g(z)\right)<0.$$

Доведення. Нехай p^* є екстремальним елементом для відшукання величини (1.1).

Тоді (див., наприклад, теорему 1.4.1, [9]) має місце співвідношення

$$\Gamma(C^*_{\{a_i\}_{i=1}^m;\{\delta_i\}_{i=1}^m}(p^*), p^*)\bigcap\Gamma^*(W,p^*) = \varnothing.$$

Звідси випливає, що якщо $g\in\Gamma^*(W,p^*)$, то $g\notin\Gamma(C^*_{\{a_i\}_{i=1}^m;\{\delta_i\}_{i=1}^m}(p^*))$. Згідно з теоремою 1.5

$$\Gamma(C^*_{\{a_i\}_{i=1}^m;\{\delta_i\}_{i=1}^m}(p^*), p^*) =$$

$$= \bigcap_{i\in I^*_{\{a_i\}_{i=1}^m;\{\delta_i\}_{i=1}^m}(p^*)} \ \bigcap_{z\in K^*_i(p^*)} \ \bigcap_{\varphi\in S^*_i(p^*,z)} \{p : p\in C(K,Y), \varphi(p(z))<0\}.$$

Тоді для довільного $g\in\Gamma^*(W,p^*)$ існують елементи $i_g\in I^*_{\{a_i\}_{i=1}^m;\{\delta_i\}_{i=1}^m}(p^*)$, $z_g\in K^*_{i_g}(p^*)$, $\varphi_g\in S^*_{i_g}(p^*;z_g)$ такі, що

$$\varphi_g\left(g(z_g)\right)\ge 0.$$

Теорему доведено.

Наслідок 1.3. Нехай W — довільна множина простору $C(K,Y)$. Для того щоб p^* був екстремальним елементом для задачі відшукання величини (1.1), необхідно, щоб для будь-якого $g\in\Gamma^*(W,p^*)$ існували елементи $i_g\in I^*_{\{a_i\}_{i=1}^m;\{\delta_i\}_{i=1}^m}(p^*)$, $z_g\in K^*_{i_g}(p^*)$, $\varphi\in S^*_{i_g}(p^*;z_g)$ для яких

$$\varphi_g\left(g(z_g)\right)\ge 0.$$

Наслідок 1.4. Нехай W — довільна множина простору $C(K,Y)$. Для того щоб елемент $p^*\in W$ був екстремальним елементом для задачі відшукання величини (1.1) необхідно, щоб для будь-яких $g\in\Gamma^*(W,p^*)$ існували елементи $i_g\in\{1,...,m\}$, $z_g\in K$, $\varphi_g\in S^*$, для яких виконуються умови

$$\max_{1\le i\le m}\max_{z\in K}\delta_i(z)\left\|p^*(z)-a_i(z)\right\| = \max_{z\in K}\delta_{i_g}(z)\left\|p^*(z)-a_{i_g}(z)\right\| =$$

$$=\delta_{i_g}(z_g)\left\|p^*(z_g)-a_{i_g}(z_g)\right\| = \delta_{i_g}(z_g)\max_{\varphi\in S^*}\left(p^*(z_g)-a_{i_g}(z_g)\right) =$$

$$=\delta_{i_g}(z_g)\varphi_g\left(p^*(z_g)-a_{i_g}(z_g)\right),$$

$$\varphi_g\left(g(z_g)\right)\ge 0.$$

Теорема 1.7. [12] *Нехай* $p^*\in W$, W *є* Γ^**-множиною відносно* p^* *(в тому числі зірковою відносно* p^* *або опуклою множиною).*

Для того, щоб елемент p^* *був екстремальним елементом для задачі відшукання величини (1.1), необхідно, щоб для будь-якого* $p\in W$ *існували елементи* $i_p\in\{1,...,m\}$, $z_p\in K$, $\varphi_p\in S^*$ *такі, що*

$$\max_{1\le i\le m}\max_{z\in K}\delta_i(z)\left\|p^*(z)-a_i(z)\right\|=\max_{z\in K}\delta_{i_p}(z)\left\|p^*(z)-a_{i_p}(z)\right\|=$$

$$=\delta_{i_p}(z_p)\left\|p^*(z_p)-a_{i_p}(z_p)\right\|=\delta_{i_p}(z_p)\varphi_p\left(p^*(z_p)-a_{i_p}(z_p)\right), \qquad (1.13)$$

$$\varphi_p\left(p(z_p)-p^*(z_p)\right)\ge 0. \qquad (1.14)$$

Теорема 1.8. *Нехай* W *— довільна множина простору* $C(K,Y)$. *Для того, щоб* $p^*\in W$ *був екстремальним елементом для задачі відшукання величини (1.1), достатньо, щоб для кожного* $p\in W$ *існували елементи* $i_p\in\{1,...,m\}$, $z_p\in K$, $\varphi_p\in S^*$ *для яких виконуються умови (1.13), (1.14).*

Доведення. Припустимо, що для довільного $p\in W$ існують елементи $i_p\in\{1,...,m\}$, $z_p\in K$, $\varphi_p\in S^*$ такі, що

$$\max_{1\le i\le m}\max_{z\in K}\delta_i(z)\left\|p^*(z)-a_i(z)\right\|=\max_{z\in K}\delta_{i_p}(z)\left\|p^*(z)-a_{i_p}(z)\right\|=$$

$$=\delta_{i_p}(z_p)\left\|p^*(z_p)-a_{i_p}(z_p)\right\|=\delta_{i_p}(z_p)\varphi_p\left(p^*(z_p)-a_{i_p}(z_p)\right),$$

$$\varphi_p\left(p(z_p)-p^*(z_p)\right)\ge 0.$$

Доведемо, що в цьому випадку p^* є екстремальним елементом для задачі відшукання величини (1.1).

Оскільки

$$\varphi_p\left(p(z_p)-p^*(z_p)\right)\ge 0,$$

то

$$\delta_{i_p}(z_p)\varphi_p\left(p(z_p)-p^*(z_p)\right)\ge 0$$

Звідси одержимо,

$$0 \le \delta_{i_p}(z_p)\varphi_p\Big(p(z_p) - p^*(z_p)\Big) =$$

$$= \delta_{i_p}(z_p)\varphi_p\Big(p(z_p) - a_{i_p}(z_p) + a_{i_p}(z_p) - p^*(z_p)\Big) =$$

$$= \delta_{i_p}(z_p)\Big(\varphi_p\Big(p(z_p) - a_{i_p}(z_p)\Big) - \varphi_p\Big(p^*(z_p) - a_{i_p}(z_p)\Big)\Big) =$$

$$= \delta_{i_p}(z_p)\varphi_p\Big(p(z_p) - a_{i_p}(z_p)\Big) - \delta_{i_p}(z_p)\varphi_p\Big(p^*(z_p) - a_{i_p}(z_p)\Big) =$$

$$= \delta_{i_p}(z_p)\varphi_p\Big(p(z_p) - a_{i_p}(z_p)\Big) - \max_{1\le i\le m}\max_{z\in K}\delta_i(z)\left\|p^*(z) - a_i(z)\right\| \le$$

$$\le \max_{1\le i\le m}\max_{z\in K}\delta_i(z)\left\|p(z) - a_i(z)\right\| - \max_{1\le i\le m}\max_{z\in K}\delta_i(z)\left\|p^*(z) - a_i(z)\right\|.$$

Звідси випливає, що для будь-якого $p \in W$

$$\max_{1\le i\le m}\max_{z\in K}\delta_i(z)\left\|p(z) - a_i(z)\right\| \le \max_{1\le i\le m}\max_{z\in K}\delta_i(z)\left\|p^*(z) - a_i(z)\right\|.$$

А, отже, елемент p^* є екстремальним елементом для задачі відшукання величини (1.1).

Теорему доведено.

Теорема 1.9. *Нехай W є Γ-множиною відносно кожного свого елемента.*

Для того, щоб елемент $p^* \in W$ був екстремальним елементом для величини (1.1) необхідно і достатньо, щоб для кожного $p \in W$ елемента існували елементи $i_p \in \{1,...,m\}$, $z_p \in K, \varphi_p \in S^*$ для яких виконуються умови (1.13)-(1.14).

Наслідок 1.5. Нехай W є опуклою множиною простору $C(K,Y)$. Для того, щоб $p^* \in W$ був екстремальним елементом для задачі відшукання величини (1.1) необхідно і достатньо, щоб для кожного $p \in W$ існували елементи $i_p \in \{1,...,m\}$, $z_p \in K, \varphi_p \in S^*$ для яких виконуються умови (1.13)-(1.14).

Наслідок 1.6. *Нехай* W *— підпростір простору* $C(K,Y)$. *Для того щоб елемент* $p^* \in W$ *був екстремальним елементом для задачі відшукання величини (1.1), необхідно і достатньо, щоб для будь-якого* $p \in W$ *існували елементи* $i_p \in \{1,...,m\}$, $z_p \in K$, $\varphi_p \in S^*$ *такі, що*

$$\max_{1\le i\le m}\max_{z\in K}\delta_i(z)\left\|p^*(z)-a_i(z)\right\| = \max_{z\in K}\delta_{i_p}(z)\left\|p^*(z)-a_{i_p}(z)\right\| =$$

$$=\delta_{i_p}(z_p)\left\|p^*(z_p)-a_{i_p}(z_p)\right\| = \delta_{i_p}(z_p)\varphi_p\left(p^*(z_p)-a_{i_p}(z_p)\right),$$

$$\varphi_p\left(p(z_p)\right)\ge 0.$$

Теорема 1.10. *Для того щоб елемент* $p^* \in W$ *був екстремальним елементом для величини (1.1), необхідно, а у випадку, коли* W *є* Γ*-множиною відносно* p^* *(зірковою відносно* p^* *або опуклою множиною), достатньо, щоб для кожного* $p \in W$ *існували елементи* $i_p \in \{1,...,m\}, z_p \in K, \varphi_p \in S^*$ *для яких виконуються умови:*

$$\max_{1\le i\le m}\max_{z\in K}\delta_i(z)\left\|p(z)-a_i(z)\right\| = \max_{z\in K}\delta_{i_p}(z)\left\|p(z)-a_{i_p}(z)\right\| =$$

$$=\delta_{i_p}(z_p)\left\|p(z_p)-a_{i_p}(z_p)\right\| = \delta_{i_p}(z_p)\varphi_p\left(p(z_p)-a_{i_p}(z_p)\right); \tag{1.15}$$

$$\varphi_p\left(p(z_p)-p^*(z_p)\right)\ge 0. \tag{1.16}$$

Доведення. Необхідність. Припустимо, що p^* є екстремальним елементом для величини (1.1).

Доведемо, що для кожного $p \in W$, елементів $i_p \in \{1,...,m\}$, $z_p \in K, \varphi_p \in S^*$ для яких має місце рівність (1.15) виконується співвідношення (1.16).

Дійсно

$$\delta_{i_p}(z_p)\varphi_p\left(p(z_p)-p^*(z_p)\right) =$$

$$=\delta_{i_p}(z_p)\varphi_p\left(p(z_p)-a_{i_p}(z_p)+a_{i_p}(z_p)-p^*(z_p)\right) =$$

$$= \delta_{i_p}(z_p)\Big(\varphi_p(p(z_p) - a_{i_p}(z_p)) + \varphi_p(a_{i_p}(z_p) - p^*(z_p))\Big) =$$

$$= \delta_{i_p}(z_p)\Big(\varphi_p(p(z_p) - a_{i_p}(z_p)) - \varphi_p(p^*(z_p) - a_{i_p}(z_p))\Big) =$$

$$= \delta_{i_p}(z_p)\left\| p^*(z_p) - a_{i_p}(z_p) \right\| - \delta_{i_p}(z_p)\varphi_p(p^*(z_p) - a_{i_p}(z_p)) \geq$$

$$\geq \max_{1\leq i\leq m} \max_{z\in K} \delta_i(z)\left\| p(z) - a_{i_p}(z) \right\| - \delta_{i_p}(z_p)\varphi_p(p^*(z_p) - a_{i_p}(z_p)) \geq$$

$$\geq \max_{1\leq i\leq m} \max_{z\in K} \delta_i(z)\| p(z) - a_i(z) \| - \delta_{i_p}(z_p)\left\| p^*(z_p) - a_{i_p}(z_p) \right\| \geq$$

$$\geq \max_{1\leq i\leq m} \max_{z\in K} \delta_i(z)\| p(z) - a_i(z) \| - \max_{z\in K} \delta_{i_p}(z)\left\| p^*(z) - a_{i_p}(z) \right\| \geq$$

$$\geq \max_{1\leq i\leq m} \max_{z\in K} \delta_i(z)\| p(z) - a_i(z) \| - \max_{1\leq i\leq m} \max_{z\in K} \delta_i(z)\left\| p^*(z) - a_i(z) \right\|. \quad (1.17)$$

Оскільки p^* є екстремальним елементом для величини (1.1), тоді для $p \in W$

$$\inf_{p\in W} \max_{1\leq i\leq m} \max_{z\in K} \delta_i(z)\| p(z) - a_i(z) \| =$$

$$= \max_{1\leq i\leq m} \max_{z\in K} \delta_i(z)\left\| p^*(z) - a_i(z) \right\| \leq$$

$$\leq \max_{1\leq i\leq m} \max_{z\in K} \delta_i(z)\| p(z) - a_i(z) \|.$$

Тоді

$$\max_{1\leq i\leq m} \max_{z\in K} \delta_i(z)\| p(z) - a_i(z) \| - \max_{1\leq i\leq m} \max_{z\in K} \delta_i(z)\left\| p^*(z) - a_i(z) \right\| \geq 0.$$

Звідси та нерівності (1.17) одержимо, що

$$\delta_{i_p}(z_p)\varphi_p(p(z_p) - p^*(z_p)) \geq 0,$$

$$\varphi_p(p(z_p) - p^*(z_p)) \geq 0.$$

Необхідність доведено.

Достатність. Нехай $p^* \in W$, є Γ-множиною відносно p^* та для кожного $p \in W$ існують елементи $i_p \in \{1,...,m\}, z_p \in K, \varphi_p \in S^*$ такі, що виконують співвідношення (1.15), (1.16).

Доведемо, що p^* є екстремальним елементом для величини (1.1).

Доведення проведемо від супротивного. Припустимо, що існує елемент $\overline{p} \in W$ такий, що

$$\max_{1\le i\le m}\max_{z\in K}\delta_i(z)\left\|\overline{p}(z)-a_i(z)\right\| < \max_{1\le i\le m}\max_{z\in K}\delta_i(z)\left\|p^*(z)-a_i(z)\right\|.$$

Множина W, за умовою, є Γ-множиною відносно p^*, то для послідовності $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^{\infty}, \varepsilon_k > 0$, такої, що

$$\lim_{k\to\infty}\varepsilon_k = 0,$$

існує послідовність $\{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\alpha_k \in (0,\varepsilon_k)$, що $p_k = p^* + \alpha_k(\overline{p} - p^*) \in W$ для всіх достатньо великих натуральних k.

Зрозуміло, що

$$\lim_{k\to\infty} p_k = p^*. \tag{1.18}$$

Згідно з твердженням 1.1 функція

$$\Phi_{\{a_i\}_{i=1}^{k};\{\delta_i\}_{i=1}^{k}}\max_{1\le i\le m}\max_{z\in K}\delta_i(z)\left\|p(z)-a_i(z)\right\|$$

є неперервною на $C(K,Y)$, тоді з (1.16) випливає, що існує індекс k такий, що $0<\alpha_k<1$ і

$$\max_{1\le i\le m}\max_{z\in K}\delta_i(z)\left\|\overline{p}(z)-a_i(z)\right\| < \max_{1\le i\le m}\max_{z\in K}\delta_i(z)\left\|p_k(z)-a_i(z)\right\|.$$

З останньої нерівності випливає, що для довільних $i_{p_k} \in \{1,\dots,m\}$, $z_{p_k} \in K$, $\varphi_{p_k} \in S^*$ таких, що

$$\max_{1\le i\le m}\max_{z\in K}\delta_i(z)\left\|p_k(z)-a_i(z)\right\| =$$

$$= \max_{z\in K}\delta_{i_{p_k}}(z)\left\|p_k(z)-a_{i_{p_k}}(z)\right\| =$$

$$= \delta_{i_{p_k}}(z_{p_k})\left\|p_k(z_{p_k})-a_{i_{p_k}}(z_{p_k})\right\| =$$

$$= \delta_{i_{p_k}}(z_{p_k})\varphi_{p_k}\left(p_k(z_{p_k})-a_{i_{p_k}}(z_{p_k})\right),$$

будемо мати

$$\max_{1\le i\le m}\max_{z\in K}\delta_i(z)\left\|p_k(z)-a_i(z)\right\| =$$

$$= \delta_{i_{p_k}}(z_{p_k})\Big(p_k(z_{p_k}) - a_{i_{p_k}}(z_{p_k})\Big) >$$

$$> \max_{1\le i\le m}\max_{z\in K}\delta_i(z)\left\|\overline{p}(z) - a_i(z)\right\| \ge$$

$$\ge \max_{z\in K}\delta_{i_{p_k}}(z)\left\|\overline{p}(z) - a_{i_{p_k}}(z)\right\| \ge$$

$$\ge \delta_{i_{p_k}}(z_{p_k})\left\|\overline{p}(z_{p_k}) - a_{i_{p_k}}(z_{p_k})\right\| =$$

$$= \delta_{i_k}(z_{p_k})\max_{\varphi\in S^*}\varphi(\overline{p}(z_{p_k}) - a_{i_{p_k}}(z_{p_k})) \ge$$

$$\ge \delta_{i_{p_k}}(z_{p_k})\varphi_{p_k}(\overline{p}(z_{p_k}) - a_{i_{p_k}}(z_{p_k})).$$

Звідси

$$\delta_{i_{p_k}}(z_{p_k})\varphi_{p_k}\Big(p_k(z_{p_k}) - a_{i_{p_k}}(z_{p_k})\Big) > \delta_{i_{p_k}}(z_{p_k})\varphi_{p_k}(\overline{p}(z_{p_k}) - a_{i_{p_k}}(z_{p_k}));$$

$$\varphi_{p_k}\Big(p_k(z_{p_k}) - a_{i_{p_k}}(z_{p_k})\Big) > \varphi_{p_k}(\overline{p}(z_{p_k}) - a_{i_{p_k}}(z_{p_k}));$$

$$\varphi_{p_k}\Big(p_k(z_{p_k}) - a_{i_{p_k}}(z_{p_k})\Big) - \varphi_{p_k}(\overline{p}(z_{p_k}) - a_{i_{p_k}}(z_{p_k})) > 0;$$

$$\varphi_{p_k}\Big(p_k(z_{p_k}) - a_{i_{p_k}}(z_{p_k}) - \Big(\overline{p}(z_{p_k}) - a_{i_{p_k}}(z_{p_k})\Big)\Big) > 0;$$

$$\varphi_{p_k}\Big(p_k(z_{p_k}) - a_{i_{p_k}}(z_{p_k}) - \overline{p}(z_{p_k}) + a_{i_{p_k}}(z_{p_k})\Big) > 0;$$

$$\varphi_{p_k}(p_k(z_{p_k}) - \overline{p}(z_{p_k})) > 0;$$

$$\varphi_{p_k}(\overline{p}(z_{p_k}) - p_k(z_{p_k})) < 0.$$

З урахуванням того , що

$$p_k(z) = p^*(z) + \alpha_k(\overline{p}(z) - p^*(z)),\, z \in K,$$

будемо мати

$$p_k(z_{p_k}) = p^*(z_{p_k}) + \alpha_k\overline{p}(z_{p_k}) - \alpha_k p_k(z_{p_k}) + \alpha_k p_k(z_{p_k}) - \alpha_k p^*(z_{p_k});$$

$$p_k(z_{p_k}) - p^*(z_{p_k}) = \alpha_k(\overline{p}(z_{p_k}) - p_k(z_{p_k})) + \alpha_k(p_k(z_{p_k}) - p^*(z_{p_k}));$$

$$p_k(z_{p_k}) - p^*(z_{p_k}) - \alpha_k(p_k(z_{p_k}) - p^*(z_{p_k})) = \alpha_k(\overline{p}(z_{p_k}) - p_k(z_{p_k}))$$

$$\alpha_k(\overline{p}(z_{p_k}) - p_k(z_{p_k})) = (1-\alpha_k)(p_k(z_{p_k}) - p^*(z_{p_k}));$$

$$p_k(z_{p_k}) - p^*(z_{p_k}) = \frac{\alpha_k}{(1-\alpha_k)}(\bar{p}(z_{p_k}) - p_k(z_{p_k})).$$

Тоді

$$\varphi_{p_k}\left(p_k(z_{p_k}) - p^*(z_{p_k})\right) = \varphi_{p_k}(\frac{\alpha_k}{1-\alpha_k}(\bar{p}(z_{p_k}) - p_k(z_{p_k})) =$$

$$= \frac{\alpha_k}{1-\alpha_k}\varphi_{p_k}(\bar{p}(z_{p_k}) - p_k(z_{p_k})) < 0.$$

Отже,

$$\varphi_{p_k}(p_k(z_{p_k}) - p^*(z_{p_k})) < 0,$$

що суперечить умові (1.16) теореми.

Одержана суперечність доводить, що p^* є екстремальним елементом для задачі відшукання величини (1.1).

Достатність доведено.

Теорему доведено.

Теорема 1.11. *Для того щоб елемент $p^* \in W$ був єдиним екстремальним елементом для задачі відшукання величини (1.1) необхідно, а у випадку, коли W є Γ-множиною відносно p^* та Γ^*-множиною відносно кожного іншого свого елемента достатньо, щоб для кожного $p \in W, p \neq p^*$ та таких, що*

$$\max_{1\le i\le m}\max_{z\in K}\delta_i(z)\left\|p(z)-a_i(z)\right\| = \max_{z\in K}\delta_{i_p}(z)\left\|p(z)-a_{i_p}(z)\right\| =$$

$$= \delta_{i_p}(z_p)\left\|p(z_p)-a_{i_p}(z_p)\right\| = \delta_{i_p}(z_p)\varphi_p\left(p(z_p)-a_{i_p}(z_p)\right), \tag{1.19}$$

виконувалася нерівність:

$$\varphi_p\left(p(z_p) - p^*(z_p)\right) > 0. \tag{1.20}$$

Доведення. Необхідність. Припустимо, що p^* є єдиним екстремальним елементом для задачі відшукання величини(1.1). Доведемо, що для кожного

$p \in W, p \neq p^*$, $i_p \in \{1,...,m\}, z_p \in K, \varphi_p \in S^*$ таких що має місце (1.19) і виконується нерівність (1.20).

Доведення проведемо від супротивного.

Нехай для кожного $p \in W$, $p \neq p^*$ існують елементи $i_p \in \{1,...,m\}$, $z_p \in K, \varphi_p \in S^*$ для яких виконується рівність (1.19) та

$$\varphi_p\left(p(z_p) - p^*(z_p)\right) \leq 0.$$

Тоді для $p \in W,\ p \neq p^*$

$$\max_{1 \leq i \leq m} \max_{z \in K} \delta_i(z) \| p(z) - a_i(z) \| = \max_{z \in K} \delta_{i_p}(z) \left\| p(z) - a_{i_p}(z) \right\| =$$

$$= \delta_{i_p}(z_p) \left\| p(z_p) - a_{i_p}(z_p) \right\| = \delta_{i_p}(z_p) \varphi_p \left(p(z_p) - a_{i_p}(z_p) \right) =$$

$$= \delta_{i_p}(z_p) \varphi_p \left(p(z_p) - p^*(z_p) + p^*(z_p) - a_{i_p}(z_p) \right) =$$

$$= \delta_{i_p}(z_p) \varphi_p \left(p(z_p) - p^*(z_p) \right) + \delta_{i_p}(z_p) \varphi_p \left(p^*(z_p) - a_{i_p}(z_p) \right) \leq$$

$$\leq \delta_{i_p}(z_p) \varphi_p \left(p^*(z_p) - a_{i_p}(z_p) \right) \leq$$

$$\leq \max_{1 \leq i \leq m} \max_{z \in K} \delta_{i_p}(z_p) \left\| p^*(z_p) - a_{i_p}(z_p) \right\|.$$

Звідси для $p \in W,\ p \neq p^*$

$$\max_{1 \leq i \leq m} \max_{z \in K} \delta_i(z) \| p(z) - a_i(z) \| \leq \max_{1 \leq i \leq m} \max_{z \in K} \delta_{i_p}(z_p) \left\| p^*(z_p) - a_{i_p}(z_p) \right\|.$$

Остання нерівність можлива лише за умови, що p є екстремальним елементом для задачі відшукання величини (1.1), а це неможливо, оскільки за умовою p^* є єдиним екстремальним елементом для задачі відшукання величини (1.1).

Одержана суперечність доводить, що

$$\varphi_p\left(p(z_p) - p^*(z_p)\right) > 0.$$

Необхідність доведено.

Достатність. Нехай $p^* \in W$, W є Γ-множиною відносно p^* та Γ^*-множиною відносно кожного свого елемента $p \in W, p \neq p^*$, та для $i_p \in \{1,...,m\}, z_p \in K, \varphi_p \in S^*$ таких, що задовольняють умову (1.19), виконується нерівність (1.20).

Доведемо, що p^* є єдиним екстремальним елементом.

Згідно з теоремою 1.10 p^* є екстремальним елементом для задачі відшукання величини (1.1).

Доведемо, що в цьому випадку p^* є єдиним екстремальним елементом.

Доведення проведемо від супротивного.

Припустимо, що існує елемент $\tilde{p} \in W, \tilde{p} \neq p^*$, який також є екстремальним елементом для задачі відшукання величини (1.1).

Тоді згідно з теоремою 1.9 існують елементи $i_{\tilde{p}} \in \{1,...,m\}, z_{\tilde{p}} \in K, \varphi_{\tilde{p}} \in S^*$ такі, що

$$\max_{1 \le i \le m} \max_{z \in K} \delta_i(z) \left\| \tilde{p}(z) - a_i(z) \right\| = \max_{z \in K} \delta_{i_{\tilde{p}}}(z) \left\| \tilde{p}(z) - a_{i_{\tilde{p}}}(z) \right\| =$$

$$= \delta_{i_{\tilde{p}}}(z_{\tilde{p}}) \left\| \tilde{p}(z_{\tilde{p}}) - a_{i_{\tilde{p}}}(z_{\tilde{p}}) \right\| = \delta_{i_{\tilde{p}}}(z_{\tilde{p}}) \max_{\varphi \in S^*} \left(\tilde{p}(z_{\tilde{p}}) - a_{i_{\tilde{p}}}(z_{\tilde{p}}) \right) =$$

$$= \delta_{i_{\tilde{p}}}(z_{\tilde{p}}) \varphi_{\tilde{p}} \left(\tilde{p}(z_{\tilde{p}}) - a_{i_{\tilde{p}}}(z_{\tilde{p}}) \right),$$

$$\varphi_{\tilde{p}} \left(p^*(z_{\tilde{p}}) - \tilde{p}(z_{\tilde{p}}) \right) \ge 0,$$

$$\varphi_p \left(\tilde{p}(z_p) - p^*(z_p) \right) \le 0,$$

що суперечить умовам (1.19), (1.20).

Одержана суперечність доводить, що p^* є єдиним екстремальним елементом у цьому випадку.

Достатність доведено.

Теорему доведено.

РОЗДІЛ 2. ЗАДАЧА ВІДШУКАННЯ ВЕЛИЧИНИ (1.1) У ВИПАДКУ АПРОКСИМАЦІЇ СКІНЧЕННОВИМІРНОЮ ОПУКЛОЮ МНОЖИНОЮ

2.1. Критерій екстремального елемента для задачі відшукання величини (1.1) у випадку апроксимації скінченновимірною множиною

Надалі будемо припускати, що W — опукла скінченновимірна множина простору $C(K,Y)$ розмірності n. Тоді існує лінійний підпростір V простору $C(K,Y)$ породжений лінійно незалежними відображеннями $p_j \in C(K,Y),\ j=\overline{1,n},$ такий, що $W \subset V + p_0$, де p_0 — довільний фіксований елемент множини W.

Нехай $p^* \in W$. Покажемо, що $V + p_0 = V + p^*$.

Оскільки $p^* \in W \subset V + p_0$, то $p^* = v + p_0$, де $v \in V$. Тоді $p_0 = p^* - v$. Звідси $V + p_0 = V + p^* - v$.

Оскільки V — лінійний підпростір, то з урахуванням того, що $v \in V$, одержимо $V - v = V$.

Отже, $V + p_0 = V + p^*$.

Позначимо через

$$\omega(p^*) = \bigcup_{i \in I^*_{\{a_i\}_{i=1}^n;\{\delta_i\}_{i=1}^n}(p^*)} \ \bigcup_{z \in K_i^*(p^*)} \ \bigcup_{f \in S_i^*(p^*,z)} (\delta_i(z) f(p_1(z)),\dots,\delta_i(z) f(p_n(z))).$$

Твердження 2.1. *Нехай* $f_\mu \in S^*, \mu = 1,2,\dots,\ f_\mu \xrightarrow[\mu\to\infty]{\text{слабко}} f^*$, $f^* \in Y^*;\ y_\mu \in Y,\ y_\mu \xrightarrow[\mu\to\infty]{\text{сильно}} y^*$.

Тоді $f^* \in S^*$ *та*

$$\lim_{\mu\to\infty} f_\mu(y_\mu) = f^*(y^*) \Big(f_\mu(y_\mu) \xrightarrow{\mu\to\infty} f^*(y^*) \Big)$$

Доведення. Оскільки $f_\mu \xrightarrow[\mu\to\infty]{\text{слабко}} f^*$, то (дивися, наприклад, [6])

$$\left\| f^* \right\| \le \varliminf_{\mu \to \infty} \left\| f_\mu \right\| \le 1,$$

Оскільки $f_\mu \in S^*$ і, отже, $\left\| f_\mu \right\| \le 1, \mu = 1, 2, \ldots$.

Тоді $f^* \in S^*$.

Маємо, що для $\mu = 1, 2, \ldots$

$$\left| f_\mu(y_\mu) - f^*(y^*) \right| = \left| f_\mu(y_\mu) - f_\mu(y^*) + f_\mu(y^*) - f^*(y^*) \right| \le$$

$$\le \left| f_\mu(y_\mu) - f_\mu(y^*) \right| + \left| f_\mu(y^*) - f^*(y^*) \right| =$$

$$= \left| f_\mu(y_\mu - y^*) \right| + \left| f_\mu(y^*) - f^*(y^*) \right| \le$$

$$\le \left\| f_\mu \right\| \left\| y_\mu - y^* \right\| + \left| f_\mu(y_\mu) - f^*(y^*) \right| \le$$

$$\le \left\| y_\mu - y^* \right\| + \left| f_\mu(y_\mu) - f^*(y^*) \right| \xrightarrow{\mu \to \infty} 0,$$

Оскільки $y_\mu \xrightarrow[\mu \to \infty]{сильно} y^*$, то $\left\| y_\mu - y^* \right\| \xrightarrow{\mu \to \infty} 0$, $f_\mu \xrightarrow[\mu \to \infty]{слабо} f^*$, тому $f_\mu(y^*) \to f^*(y^*)$, тоді

$$f_\mu(y^*) - f^*(y^*) \xrightarrow{\mu \to \infty} 0.$$

Отже,

$$\lim_{\mu \to \infty} \left| f_\mu(y_\mu) - f^*(y^*) \right| = 0.$$

Це й означає, що

$$\lim_{\mu \to \infty} f_\mu(y_\mu) = f^*(y^*).$$

Твердження доведено.

Твердження 2.2. *Нехай K — метричний компакт, Y — лінійний над полем дійсних чисел нормований сепарабельний простір, тоді $\omega(p^*)$ є компактом простору R''.*

Доведення. Доведемо, що $\omega(p^*)$ є обмеженою та замкненою множиною простору R'', а, отже, компактом R'' (дивися, наприклад, [8, с. 67]).

Переконаємося в обмеженості множини $\omega(p^*)$. Для будь-яких $i \in I^*_{\{a_i\}_{i=1}^n;\{\delta_i\}_{i=1}^n}(p^*), z \in K_i^*(p^*), f \in S_i^*(p^*, z)$ будемо мати

$$\left\|\delta_i(z) f(p_1(z)),...,\delta_i(z) f(p_n(z))\right\| \le \sqrt{\sum_{j=1}^n \left(\delta_i(z) f(p_j(z))\right)^2} =$$

$$= \delta_i(z)\sqrt{\sum_{j=1}^n \left(f(p_j(z))\right)^2} \le \delta_i(z)\sqrt{\sum_{j=1}^n \|f\|^2 \|p_j\|^2} \le$$

$$\le \delta_i(z)\sqrt{\sum_{j=1}^n \|p_j\|^2} \le \max_{z\in K} \delta_i(z)\sqrt{\sum_{j=1}^n \|p_j\|^2} \le$$

$$\le \max_{1\le i\le m} \max_{z\in K} \delta_i(z)\sqrt{\sum_{j=1}^n \|p_j\|^2} = M\sqrt{\sum_{j=1}^n \|p_j\|^2},$$

де $M = \max\limits_{1\le i\le m} \max\limits_{z\in K} \delta_i(z)$.

Звідси випливає, що $\omega(p^*)$ є обмеженою множиною.

Доведемо замкненість множини $\omega(p^*)$.

Нехай $l^* = (l_1^*,...,l_n^*) \in R''$ є граничною точкою множини $\omega(p^*)$. Тоді існують $i_k \in I^*_{\{a_i\}_{i=1}^n;\{\delta_i\}_{i=1}^n}(p^*), z_k \in K_{i_k}^*(p^*), f_k \in S_{i_k}^*(p^*, z_k)$, $k = 1,2,...,$ такі, що

$$\left(\delta_{i_k}(z_k) f_k(p_1(z_k)),...,\delta_{i_k}(z_k) f_k(p_n(z_k))\right) \xrightarrow{k\to\infty} (l_1^*,...,l_n^*).$$

Тому

$$\lim_{k\to\infty}\left(\delta_{i_k}(z_k) f_k(p_j(z_k))\right) = l_j^*, \; j = \overline{1,n}. \tag{2.1}$$

Оскільки $i_k \in \{1,...,m\}, k = 1,2,...,$, а множина $\{1,...,m\}$є скінченою, то існує послідовність $\{i_{k_\nu}\}_{\nu=1}^\infty$, послідовності $\{i_k\}_{k=1}^\infty$, така, що $i_{k_\nu} = i^* \in \{1,...,m\}$.

Отже, $i_{k_\nu} = i^* \in I^*_{\{a_i\}_{i=1}^n;\{\delta_i\}_{i=1}^n}(p^*), z_{k_\nu} \in K_{i^*}^*(p^*), f_{k_\nu} \in S_{i^*}^*(p^*, z_{k_\nu})$.

Тому

$$\max_{1\le i\le m} \max_{z\in K} \delta_i(z)\left\|p^*(z) - a_i(z)\right\| =$$

$$=\max_{z\in K}\delta_{i^*}(z)\left\|p^*(z)-a_{i^*}(z)\right\|=$$

$$=\delta_{i^*}(z_{k_\nu})\left\|p^*(z_{k_\nu})-a_{i^*}(z_{k_\nu})\right\|=$$

$$=\delta_{i^*}(z_{k_\nu})\max_{f\in S^*} f\left(p^*(z_{k_\nu})-a_{i^*}(z_{k_\nu})\right)=$$

$$=\delta_{i^*}(z_{k_\nu})f_{k_\nu}\left(p^*(z_{k_\nu})-a_{i^*}(z_{k_\nu})\right). \qquad (2.2)$$

Оскільки $z_{k_\nu}\in K$, де K — компакт, то з послідовності $\{z_{k_\nu}\}_{\nu=1}^{\infty}$ можна вибрати підпослідовність, яка сильно збігається до $z^*\in K$. Не зменшуючи загальності, будемо припускати, що уже

$$z_{k_\nu}\xrightarrow[\nu\to\infty]{\text{сильно}} z^*\in K.$$

Оскільки K — метричний компакт, а Y — нормований сепарабельний простір, то з послідовності $\{f_{k_\nu}\}_{\nu=1}^{\infty}$ можна вибрати підпослідовність, яка слабко збігається до $f^*\in Y$ [8 c.43].

Припустимо, що $\{f_{k_\nu}\}_{\nu=1}^{\infty}$ уже слабко збігається до $f^*\in Y^*$. Згідно з твердженням 2.1 $f^*\in S^*$.

Внаслідок неперервності функцій $\delta_{i^*}, p^*, a_{i^*}$ та твердження 2.1 одержимо, що

$$\delta_{i^*}(z_{k_\nu})\xrightarrow{\nu\to\infty}\delta_{i^*}(z^*);$$

$$p^*(z_{k_\nu})\xrightarrow{\nu\to\infty}p^*(z^*);$$

$$a_{i^*}(z_{k_\nu})\xrightarrow{\nu\to\infty}a_{i^*}(z^*),$$

$$p^*(z_{k_\nu})-a_{i^*}(z_{k_\nu})\xrightarrow{\nu\to\infty}p^*(z^*)-a_{i^*}(z^*).$$

Оскільки $z_{k_\nu}\xrightarrow[\nu\to\infty]{\text{сильно}} z^*\in K$, тому

$$f_{k_\nu}\left(p^*(z_{k_\nu})-a_{i^*}(z_{k_\nu})\right)\xrightarrow{\nu\to\infty}f^*\left(p^*(z^*)-a_{i^*}(z^*)\right).$$

З урахуванням зазначеного при переході до границі при $\nu \to \infty$ з рівності (2.2) одержимо, що

$$\max_{1\le i\le m}\max_{z\in K}\delta_i(z)\left\|p^*(z)-a_i(z)\right\| = \max_{z\in K}\delta_{i^*}(z)\left\|p^*(z)-a_{i^*}(z)\right\| =$$

$$= \delta_{i^*}(z^*)\left\|p^*(z^*)-a_{i^*}(z^*)\right\| = \delta_{i^*}(z^*)\, f^*\left(p^*(z^*)-a_{i^*}(z^*)\right) \le$$

$$\le \delta_{i^*}(z^*)\max_{f\in S^*} f\left(p^*(z^*)-a_{i^*}(z^*)\right) = \delta_{i^*}(z^*)\left\|p^*(z^*)-a_{i^*}(z^*)\right\|.$$

З цих співвідношень випливає, що

$$i^* \in I^*_{\{a_i\}_{i=1}^n;\{\delta_i\}_{i=1}^n}(p^*), z^* \in K^*_{i^*}(p^*), f^* \in S^*_{i^*}(p^*, z^*).$$

Тому

$$\left(\delta_{i^*}(z^*)\, f^*(p_1(z^*)),\dots,\delta_{i^*}(z^*)\, f^*(p_n(z^*))\right) \in \omega(p^*). \tag{2.3}$$

З іншого боку, з (2.1) та твердження 2.1 випливає, що

$$\lim_{\nu\to\infty}\delta_{i_{k_\nu}}(z_{k_\nu})\, f_{k_\nu}(p_j(z_{k_\nu})) = \lim_{\nu\to\infty}\delta_{i^*}(z_{k_\nu})\, f_{k_\nu}(p_j(z_{k_\nu})) =$$

$$= \delta_{i^*}(z^*)\, f^*(p_j(z^*)) = l_j^*,\ j = \overline{1,n}.$$

Звідси та з (2.3) робимо висновок, що

$$l^* = (l_1^*,\dots,l_n^*) \in \omega(p^*).$$

Тому $\omega(p^*)$ є замкненою множиною простору R''.

Оскільки $\omega(p^*)$ є обмеженою та замкненою множиною простору R'', то $\omega(p^*)$ є компактом цього простору.

Твердження доведено.

Розглянемо оператор T, який у відповідність кожному вектору $p \in V + p^*$ ставить вектор $\lambda = (\lambda_1,\dots,\lambda_n) \in R''$ такий, що

$$p = \sum_{j=1}^{n}\lambda_j p_j + p^*.$$

Зрозуміло, що кожному $p \in V + p^*$ відповідає єдиний вектор $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_n) \in R''$ такий, що $p = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j p_j + p^*$.

Дійсно, припустимо, що $p = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^1 p_j + p^*$ і $p = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^2 p_j + p^*$ тоді

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j^1 p_j + p^* = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^2 p_j + p^*,$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j^1 p_j = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^2 p_j,$$

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\lambda_j^1 - \lambda_j^2 \right) p_j = 0.$$

Оскільки відображення $p_j \in C(K,Y),\ j = \overline{1,n}$ — лінійно незалежні, то

$$\lambda_j^1 - \lambda_j^2 = 0 \Rightarrow \lambda_j^1 = \lambda_j^2.$$

Отже, у відповідність кожному $p \in V + g^*$ оператор T ставить у вектор $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_n) \in R''$, який визначається однозначно.

Твердження 2.3. *Множина $T(W)$ є опуклою множиною простору R''.*

Доведення. Нехай $\lambda^1 = (\lambda_1^1, ..., \lambda_n^1), \lambda^2 = (\lambda_1^2, ..., \lambda_n^2) \in T(W)$. Тоді існують $p_1, p_2 \in W$ такі, що

$$T(p_1) = (\lambda_1^1, ..., \lambda_n^1),$$

$$T(p_2) = (\lambda_1^2, ..., \lambda_n^2);$$

$$p_1 = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^1 p_j + p^*,$$

$$p_2 = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^2 p_j + p^*.$$

Для довільного $\alpha \in [0;1]$ розглянемо вектор

$$\lambda^\alpha = (1-\alpha)\lambda^1 + \alpha\lambda^2 = ((1-\alpha)\lambda_1^1 + \alpha\lambda_1^2, ..., (1-\alpha)\lambda_n^1 + \alpha\lambda_n^2).$$

Покажемо, що $\lambda^{\alpha} \in T(W)$.

Оскільки W — опукла множина, то $[p_1, p_2] \subset W$, тобто для $\alpha \in [0;1]$

$$p_{\alpha} = (1-\alpha) p_1 + \alpha p_2 \in W,$$

$$p_{\alpha} = (1-\alpha)\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j^1 p_j + p^* \right) + \alpha \left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j^2 p_j + p^* \right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (1-\alpha)\lambda_j^1 p_j + (1-\alpha) p^* + \sum_{j=1}^{n} \alpha \lambda_j^2 p_j + \alpha p^* =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \left((1-\alpha)\lambda_j^1 + \alpha \lambda_j^2 \right) p_j + p^* . \qquad (2.4)$$

З (2.4) випливає, що

$$T(p_{\alpha}) = ((1-\alpha)\lambda_1^1 + \alpha\lambda_1^2, ..., (1-\alpha)\lambda_n^1 + \alpha\lambda_n^2) = \lambda^{\alpha}, \ \alpha \in [0,1].$$

Оскільки $p_{\alpha} \in W$, то $\lambda^{\alpha} \in T(W)$. Звідси випливає, що $T(W)$ є опуклою множиною простору R''.

Твердження доведено.

Теорема 2.1. *Нехай K — метричний компакт, Y — лінійний над полем дійсних чисел нормований сепарабельний простір, W — опукла скінченновимірна множина розмірності* n *простору $C(K,Y)$.*

Для того щоб елемент $p^* \in W$ був екстремальним елементом для величини (1.1) необхідно і достатньо, щоб існував вектор $b^* \in co\omega(p^*)$ для якого

$$\inf_{\lambda \in T(W)} \left\langle b^*; \lambda \right\rangle \geq 0, \qquad (2.5)$$

де $co\omega(p^*)$ — опукла оболонка множини $\omega(p^*)$.

Доведення. Необхідність. Нехай p^* є екстремальним елементом для задачі відшукання величини (1.1). Розглянемо функцію

$$\psi(b;\lambda) = \left\langle b;\lambda \right\rangle, \ b,\lambda \in R'',$$

де $\langle b;\lambda\rangle$ — скалярний добуток векторів $b=(b_1,...,b_n)$ та $\lambda=(\lambda_1,...,\lambda_n)$ простору R''.

Функція $\psi(b;\lambda)$ є опуклою по λ при фіксованому $b\in R''$, випуклою по b для кожного фіксованого $\lambda\in R''$ та неперервною по b при фіксованому λ.

Оскільки множина $\omega(p^*)$ є компактом (див., твердження 2.2), то $co\omega(p^*)$ є опуклим компактом; $T(W)$ — опукла множина простору R'', то на підставі теореми Фань-Цзі (див., наприклад, [15]) одержимо

$$\inf_{\lambda\in T(W)}\max_{b\in co\omega(p^*)}\langle b;\lambda\rangle=\max_{b\in co\omega(p^*)}\inf_{\lambda\in T(W)}\langle b;\lambda\rangle. \tag{2.6}$$

Нехай $b^*\in co\omega(p^*)$ такий елемент, що

$$\max_{b\in co\omega(p^*)}\inf_{\lambda\in T(W)}\langle b;\lambda\rangle=\inf_{\lambda\in T(W)}\langle b^*;\lambda\rangle,$$

тобто $b^*\in co\omega(p^*)$ — елемент на якому реалізується максимум у правій частині рівності (2.6).

Оскільки p^* є екстремальним елементом для задачі відшукання величини (1.1), то згідно з теоремою 1.9. для довільного $p\in W$ існують елементи $i_p\in I^*_{\{a_i\}_{i=1}^n;\{\delta_i\}_{i=1}^n}(p^*), z_p\in K^*_{i_p}(p^*), f_p\in S^*_{i_p}(p^*,z_p)$ такі, що

$$f_p(p(z_p)-p^*(z_p))\ge 0,$$

$$\delta_{i_p}(z_p)f_p(p(z_p)-p^*(z_p))\ge 0.$$

Оскільки $p\in W\subset V+p^*$, то $p=\sum_{j=1}^n\lambda_j p_j+p^*$, тоді

$$\delta_{i_p}(z_p)f_p\left(\sum_{j=1}^n\lambda_j p_j(z_p)+p^*(z_p)-p^*(z_p)\right)\ge 0,$$

$$\delta_{i_p}(z_p)f_p\left(\sum_{j=1}^n\lambda_j p_j(z_p)\right)\ge 0.$$

Звідси випливає, що

$$\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\delta_i(z_p)f_p\left(p_j(z_p)\right)\geq 0\,.$$

Оскільки $i_p\in I^*_{\{a_i\}_{i=1}^n;\{\delta_i\}_{i=1}^n}(p^*), z_p\in K^*_{i_p}(p^*), f_p\in S^*_{i_p}(p^*,z_p)$, то вектор

$$\left(\delta_{i_p}(z_p)f_p(p_1(z_p)),...,\delta_{i_p}(z_p)f_p(p_n(z_p))\right)\in co\omega(p^*),$$

тоді

$$\inf_{\lambda\in T(W)}\max_{b\in co\omega(p^*)}\left\langle b;\lambda\right\rangle\geq 0,$$

а, отже

$$\inf_{\lambda\in T(W)}\left\langle b^*;\lambda\right\rangle\geq 0\,.$$

Необхідність доведено.

Достатність. Припустимо, що існує вектор $b^*\in co\omega(p^*)$ такий, що

$$\inf_{\lambda\in T(W)}\left\langle b^*;\lambda\right\rangle\geq 0\,.$$

Оскільки $b^*\in co\omega(p^*)$, то b^* є опуклою комбінацією елементів $\omega(p^*)$. Згідно з теоремою Каратеодорі (див., наприклад, [9]) існують елементи $b_k\in\omega(p^*)$, $1\leq k\leq r\leq n+1$, такі, що

$$b^*=\sum_{k=1}^{r}\beta_k b_k\,, \tag{2.7}$$

де $\beta_k\in R$, $\beta_k\geq 0$, $k=\overline{1,r}$, $\sum_{k=1}^{r}\beta_k=1$.

Оскільки $b_k\in\omega(p^*)$, то існують $i_k\in I^*_{\{a_i\}_{i=1}^n;\{\delta_i\}_{i=1}^n}(p^*)$, $z_k\in K^*_{i_k}(p^*)$, $f_k\in S^*_{i_k}(p^*,z_k)$ такі, що

$$b_k=(\delta_{i_k}(z_k)f_k(p_1(z_k)),...,\delta_{i_k}(z_k)f_k(p_n(z_k)))\,,\ k=\overline{1,r}\,.$$

З (2.7) випливає, що

$$\inf_{\lambda\in T(W)}\left\langle b^*;\lambda\right\rangle=\inf_{\lambda\in T(W)}\left\langle\sum_{k=1}^{r}\beta_k b_k;\lambda\right\rangle\geq 0\,.$$

Нехай $p \in W$ і $T(p) = \lambda^p = \left(\lambda_1^p, ..., \lambda_n^p\right)$. Тоді

$$p = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^p p_j + p^* .$$

Звідси одержимо

$$\left\langle b^*; \lambda^p \right\rangle \geq \inf_{\lambda \in T(W)} \left\langle b^*; \lambda \right\rangle \geq 0 ,$$

$$\left\langle b^*; \lambda^p \right\rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{r} \beta_k b_k ; \lambda^p \right\rangle \geq 0 ,$$

$$\sum_{k=1}^{r} \beta_k \left\langle b_k ; \lambda^p \right\rangle \geq 0 . \tag{2.8}$$

З останньої нерівності випливає, що існує індекс $k_p \in \{1,...,r\}$ такий, що

$$\left\langle b_{k_p}, \lambda^p \right\rangle \geq 0 . \tag{2.9}$$

Дійсно, якби для довільного $k \in \{1,...,r\}$

$$\left\langle b_{k_p}, \lambda^p \right\rangle < 0 ,$$

то з урахуванням того, що $\beta_k \geq 0$, $\sum_{k=1}^{r} \beta_k = 1$, а, отже,серед $\beta_k, k \in \{1,...,r\}$ є відмінні від нуля, одержимо

$$\sum_{k=1}^{r} \beta_k \left\langle b_k ; \lambda^p \right\rangle < 0 ,$$

що суперечить (2.8).

З (2.7) та (2.9) випливає

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j^p \delta_{i_{k_p}} (z_{i_{k_p}}) f_{k_p} (p_j (z_{k_p})) \geq 0 ,$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j^p f_{k_p} (p_j (z_{k_p})) \geq 0 ,$$

$$f_{k_p} \left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j^p p_j (z_{k_p}) \right) \geq 0 ,$$

$$f_{k_p}\left(\sum_{j=1}^{n}\lambda_j^p p_j(z_{k_p})+p^*(z_{k_p})-p^*(z_{k_p})\right)=$$

$$=f_{k_p}\left(p(z_{k_p})-p^*(z_{k_p})\right)\geq 0.$$

Отже, для довільного $p\in W$ існують $i_{k_p}\in I^*_{\{a_i\}_{i=1}^n;\{\delta_i\}_{i=1}^n}(p^*)$, $z_{k_p}\in K^*_{i_{k_p}}(p^*)$, $f_{k_p}\in S^*_{i_{k_p}}(p^*,z_{k_p})$ для яких

$$f_{k_p}\left(p(z_{k_p})-p^*(z_{k_p})\right)\geq 0.$$

Згідно з теоремою1.9 p^* є екстремальним елементом для величини (1.1).

Достатність доведено.

Теорему доведено.

Теорема 2.2. *Нехай* K *— метричний компакт,* Y *— лінійний над полем дійсних чисел нормований сепарабельний простір,* W *— лінійний многовид розмірності n простору* $C(K,Y)$.

Для того щоб $p^*\in W$ *був екстремальним елементом для задачі відшукання величини (1.1), необхідно і достатньо, щоб*

$$0\in co\omega(p^*).$$

Доведення. Необхідність. Припустимо, що p^* є екстремальним елементом для задачі відшукання величини (1.1). Доведемо, що в цьому випадку

$$0\in co\omega(p^*).$$

Оскільки W — лінійний многовид розмірності n простору $C(K,Y)$, а, отже, опукла скінченновимірна множина розмірності n простору $C(K,Y)$, то згідно з теоремою 2.1 існує $b^*\in co\omega(p^*)$ такий, що

$$\inf_{\lambda\in T(W)}\left\langle b^*;\lambda\right\rangle\geq 0.$$

Оскільки W — лінійний многовид, то $T(W)$ співпадає з R'', а, отже, в цьому випадку $b^* = 0$.

Тому $0 \in co\omega(p^*)$.

Необхідність доведено.

Достатність. Припустимо, що $0 \in co\omega(p^*)$.

Доведемо, що в цьому випадку p^* є екстремальним елементом для величини (1.1).

Дійсно, нехай $b^* = 0$, тоді

$$\inf_{\lambda \in T(W)} \left\langle b^*; \lambda \right\rangle = \inf_{\lambda \in T(W)} \left\langle 0; \lambda \right\rangle = 0 \geq 0.$$

Оскільки W — лінійний многовид розмірності n, а, отже, скінченновимірна опукла множина розмірності n, то згідно з теоремою 2.1 p^* є екстремальним елементом для задачі відшукання величини (1.1).

Достатність доведено.

Теорему доведено.

Теорема 2.3. *Нехай K — метричний ком пакт, Y — лінійний над полем дійсних чисел нормований сепарабельний простір, W — опукла скінченновимірна множина розмірності n простору $C(K,Y)$.*

Для того щоб елемент $p^* \in W$ був екстремальним елементом для величини (1.1) необхідно і достатньо, щоб існували елементи $i_k \in \{1,...,m\}$, $z_k \in K$, $f_k \in S^*$, $\beta_k \in R$, $\beta_k \geq 0$, $1 \leq k \leq r \leq n+1$, $\sum_{k=1}^{r} \beta_k = 1$ такі, що

$$\max_{1 \leq i \leq m} \max_{z \in K} \delta_i(z) \left\| p^*(z) - a_i(z) \right\| =$$

$$= \max_{z \in K} \delta_{i_k}(z) \left\| p^*(z) - a_{i_k}(z) \right\| =$$

$$= \delta_{i_k}(z_k) \left\| p^*(z_k) - a_{i_k}(z_k) \right\| =$$

$$= \delta_{i_k}(z_k) \max_{f \in S^*} f\left(p^*(z_k) - a_{i_k}(z_k)\right) =$$

$$= \delta_{i_k}(z_k) f_k\left(p^*(z_k) - a_{i_k}(z_k)\right),$$

$$\min_{p \in W} \sum_{k=1}^{r} \beta_k \delta_{i_k}(z_k) f_k(p(z_k)) = \sum_{k=1}^{r} \beta_k \delta_{i_k}(z_k) f_k(p^*(z_k)).$$

Доведення. Необхідність. Припустимо, що p^* є екстремальним елементом для задачі відшукання величини (1.1), тоді згідно з теоремою 2.1 існує $b^* \in co\omega(p^*)$ такий, що

$$\inf_{\lambda \in T(W)} \left\langle b^*, \lambda \right\rangle \geq 0.$$

Оскільки $b^* \in co\omega(p^*)$, то існують $b_k \in \omega(p^*)$, $1 \leq k \leq r \leq n+1$, $\beta_k \geq 0$, $k = \overline{1,r}$, $\sum_{k=1}^{r} \beta_k = 1$ такі, що $b^* = \sum_{k=1}^{r} \beta_k b_k$.

Оскільки $b_k \in \omega(p^*)$, то $b_k = (\delta_{i_k}(z_k) f_k(p_1(z_k)), \ldots, \delta_{i_k}(z_k) f_k(p_n(z_k)))$, причому $i_k \in \{1, \ldots, m\}$, $z_k \in K$, $f_k \in S^*$ такі, що

$$\max_{1 \leq i \leq m} \max_{z \in K} \delta_i(z) \left\| p^*(z) - a_i(z) \right\| =$$

$$= \max_{z \in K} \delta_{i_k}(z) \left\| p^*(z) - a_{i_k}(z) \right\| =$$

$$= \delta_{i_k}(z_k) \left\| p^*(z_k) - a_{i_k}(z_k) \right\| =$$

$$= \delta_{i_k}(z_k) \max_{f \in S^*} f\left(p^*(z_k) - a_{i_k}(z_k)\right) =$$

$$= \delta_{i_k}(z_k) f_k\left(p^*(z_k) - a_{i_k}(z_k)\right).$$

Для $p \in W$, $p = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j p_j + p^*$ будемо мати

$$\left\langle b^*; \lambda \right\rangle \geq 0,$$

$$\left\langle \sum_{k=1}^{r} \beta_k b_k ; \lambda \right\rangle \geq 0,$$

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\left(\sum_{k=1}^{r} \beta_k \delta_{i_k}(z_k)\, f_k(p_j(z_k) \right) \lambda_j \right) \geq 0,$$

$$\sum_{k=1}^{r} \beta_k \delta_{i_k}(z_k)\, f_k \left(\sum_{j=1}^{n} p_j(z_k) \lambda_j \right) \geq 0,$$

$$\sum_{k=1}^{r} \beta_k \delta_{i_k}(z_k)\, f_k \left(\sum_{j=1}^{n} p_j(z_k) \lambda_j + p^*(z_k) - p^*(z_k) \right) \geq 0,$$

$$\sum_{k=1}^{r} \beta_k \delta_{i_k}(z_k)\, f_k(p(z_k) - p^*(z_k)) \geq 0,$$

$$\sum_{k=1}^{r} \beta_k \delta_{i_k}(z_k)\, f_k(p(z_k)) \geq \sum_{k=1}^{r} \beta_k \delta_{i_k}(z_k)\, f_k(p^*(z_k)).$$

Оскільки p — довільний елемент з W, то з останньої нерівності випливає, що

$$\min_{p \in W} \sum_{k=1}^{r} \beta_k \delta_{i_k}(z_k)\, f_k(p(z_k)) = \sum_{k=1}^{r} \beta_k \delta_{i_k}(z_k)\, f_k(p^*(z_k)).$$

Необхідність доведено.

Достатність. Припустимо, що для довільного $p \in W$ існують елементи $i_k \in \{1,...,m\}$, $z_k \in K$, $f_k \in S^*$, $\beta_k \in R$, $\beta_k \geq 0$, $k = \overline{1,r}$, $1 \leq k \leq r \leq n+1$, $\sum_{k=1}^{r} \beta_k = 1$ такі, що

$$\max_{1 \leq i \leq m} \max_{z \in K} \delta_i(z) \left\| p^*(z) - a_i(z) \right\| =$$

$$= \max_{z \in K} \delta_{i_k}(z) \left\| p^*(z) - a_{i_k}(z) \right\| =$$

$$= \delta_{i_k}(z_k) \left\| p^*(z_k) - a_{i_k}(z_k) \right\| =$$

$$= \delta_{i_k}(z_k) \max_{f \in S^*} f\left(p^*(z_k) - a_{i_k}(z_k) \right) =$$

$$= \delta_{i_k}(z_k)\, f_k\left(p^*(z_k) - a_{i_k}(z_k)\right),$$

$$\min_{p \in W} \sum_{k=1}^{r} \beta_k \delta_{i_k}(z_k)\, f_k(p(z_k)) = \sum_{k=1}^{r} \beta_k \delta_{i_k}(z_k)\, f_k(p^*(z_k)) .$$

Тоді для довільного $p \in W$ будемо мати

$$\max_{1 \le i \le m} \max_{z \in K} \delta_i(z) \left\| p^*(z) - a_i(z) \right\| =$$

$$= \sum_{k=1}^{r} \beta_k \max_{1 \le i \le m} \max_{z \in K} \delta_{i_k}(z) \left\| p^*(z) - a_{i_k}(z) \right\| =$$

$$= \sum_{k=1}^{r} \beta_k \delta_{i_k}(z_k)\, f_k\left(p^*(z_k) - a_{i_k}(z_k)\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{r} \beta_k \delta_{i_k}(z_k) \left(f_k\left(p^*(z_k)\right) - f_k\left(a_{i_k}(z_k)\right) \right) \le$$

$$\le \sum_{k=1}^{r} \beta_k \delta_{i_k}(z_k) \left(f_k\left(p(z_k)\right) - f_k\left(a_{i_k}(z_k)\right) \right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{r} \beta_k \delta_{i_k}(z_k)\, f_k\left(p(z_k) - a_{i_k}(z_k)\right) \le$$

$$\le \sum_{k=1}^{r} \beta_k \delta_{i_k}(z_k) \max_{f \in S^*} f\left(p(z_k) - a_{i_k}(z_k)\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{r} \beta_k \delta_{i_k}(z_k) \left\| p(z_k) - a_{i_k}(z_k) \right\| \le$$

$$\le \sum_{k=1}^{r} \beta_k \max_{z \in K} \delta_{i_k}(z) \left\| p(z) - a_{i_k}(z) \right\| \le$$

$$\le \sum_{k=1}^{r} \beta_k \max_{1 \le i \le m} \max_{z \in K} \delta_i(z) \left\| p^*(z) - a_i(z) \right\| =$$

$$= \max_{1 \le i \le m} \max_{z \in K} \delta_i(z) \left\| p(z) - a_i(z) \right\| .$$

Отже, для довільного $p \in W$ будемо мати, що

$$\max_{1 \le i \le m} \max_{z \in K} \delta_i(z) \left\| p^*(z) - a_i(z) \right\| \le \max_{1 \le i \le m} \max_{z \in K} \delta_i(z) \left\| p(z) - a_i(z) \right\| .$$

Це і означає, що елемент $p^* \in W$ є екстремальним елементом для задачі відшукання величини (1.1).

Достатність доведено.

Теорему доведено.

Наслідок 2.1.*Нехай* K *— метричний компакт,* Y *— лінійний над полем дійсних чисел нормований сепарабельний простір,* W *— лінійний многовид простору* $C(K,Y)$.

Для того щоб $p^* \in W$ *був екстремальним елементом для величини (1.1), необхідно і достатньо, щоб існували елементи* $i_k \in \{1,...,m\}$, $z_k \in K$, $f_k \in S^*$, $\beta_k \in R$, $\beta_k \ge 0$, $k = \overline{1,r}$, $1 \le k \le r \le n+1$, $\sum_{k=1}^{r} \beta_k = 1$ *такі, що*

$$\max_{1\le i\le m} \max_{z\in K} \delta_i(z) \left\| p^*(z) - a_i(z) \right\| =$$

$$= \max_{z\in K} \delta_{i_k}(z) \left\| p^*(z) - a_{i_k}(z) \right\| =$$

$$= \delta_{i_k}(z_k) \left\| p^*(z_k) - a_{i_k}(z_k) \right\| =$$

$$= \delta_{i_k}(z_k) \max_{f\in S^*} f\left(p^*(z_k) - a_{i_k}(z_k) \right) =$$

$$= \delta_{i_k}(z_k) f_k\left(p^*(z_k) - a_{i_k}(z_k) \right),$$

$$\sum_{k=1}^{r} \beta_k \delta_{i_k}(z_k) f_k\left(p(z_k) \right) = \sum_{k=1}^{r} \beta_k \delta_{i_k}(z_k) f_k\left(p^*(z_k) \right),$$

для всіх $p \in W$.

Наслідок 2.2. *Нехай* K *— метричний компакт,* Y *— лінійний над полем дійсних чисел нормований сепарабельнийпростір,* W *— лінійний підпростір простору* $C(K,Y)$.

Для того щоб $p^* \in W$ *був екстремальним елементом для величини (1.1), необхідно і достатньо, щоб існували елементи* $i_k \in \{1,...,m\}$, $z_k \in K$, $f_k \in S^*$, $\beta_k \in R$, $\beta_k \geq 0$, $k = \overline{1,r}$, $1 \leq k \leq r \leq n+1$, $\sum_{k=1}^{r} \beta_k = 1$ *такі, що*

$$\max_{1\leq i\leq m} \max_{z\in K} \delta_i(z) \left\| p^*(z) - a_i(z) \right\| =$$

$$= \max_{z\in K} \delta_{i_k}(z) \left\| p^*(z) - a_{i_k}(z) \right\| =$$

$$= \delta_{i_k}(z_k) \left\| p^*(z_k) - a_{i_k}(z_k) \right\| =$$

$$= \delta_{i_k}(z_k) \max_{f\in S^*} f\left(p^*(z_k) - a_{i_k}(z_k) \right) =$$

$$= \delta_{i_k}(z_k) f_k\left(p^*(z_k) - a_{i_k}(z_k) \right),$$

$$\sum_{k=1}^{r} \beta_k \delta_{i_k}(z_k) f_k\left(p(z_k) \right) = 0,$$

для всіх $p \in W$.

2.2 Співвідношення двоїстості у випадку апроксимації скінченновимірною опуклою множиною. Теорема про очистку

Теорема 2.4. *Нехай* K *— метричний компакт,* Y *— лінійний над полем дійсних чисел нормований сепарабельний простір,* W *— замкнена опукла множина розмірності* n *простору* $C(K,Y)$. *Має місце співвідношення двоїстості*

$$\alpha^*\left(W; \{a_i\}_{i=1}^m; \{\delta_i\}_{i=1}^m\right) = \inf_{p\in W} \max_{1\leq i\leq m} \max_{z\in K} \delta_i(z) \left\| p(z) - a_i(z) \right\| =$$

$$= \max\left\{ \inf_{p\in W} \sum_{k=1}^{r} \beta_k \delta_{i_k}(z_k) f_k\left(p(z_k) - a_{i_k}(z_k) \right), i_k \in \{1,...,m\}, z_k \in K, f_k \in S^*, \beta_k \geq 0, \right.$$

$$\left. 1 \leq k \leq r \leq n+1, \sum_{k=1}^{r} \beta_k = 1 \right\}. \qquad (2.10)$$

Доведення. Нехай

$$\tilde{\alpha}\left(W;\{a_i\}_{i=1}^m;\{\delta_i\}_{i=1}^m\right)=$$

$$=\max\left\{\inf_{p\in W}\sum_{k=1}^r \beta_k\delta_{i_k}(z_k)\,f_k\left(p(z_k)-a_{i_k}(z_k)\right), i_k\in\{1,\dots,m\}, z_k\in K,\right.$$

$$\left. f_k\in S^*, \beta_k\ge 0, 1\le k\le r\le n+1, \sum_{k=1}^r \beta_k=1\right\}.$$

Доведемо, що

$$\alpha^*\left(W;\{a_i\}_{i=1}^m;\{\delta_i\}_{i=1}^m\right)=\tilde{\alpha}\left(W;\{a_i\}_{i=1}^m;\{\delta_i\}_{i=1}^m\right).$$

Оскільки W — замкнена опукла множина розмірності n простору $C(K,Y)$, то W є замкненою локально компактною множиною простору $C(K,Y)$. Згідно з теоремою 1.4, в цьому випадку, екстремальний елемент для задачі відшукання величини (1.1) існує.

Нехай $p^*\in W$ — екстремальний елемент для величини (1.1).

Згідно з теоремою 2.4 існують $i_k\in\{1,\dots,m\}$, $z_k\in K$, $f_k\in S^*$, $\beta_k\ge 0$, $1\le k\le r\le n+1$, $\sum_{k=1}^r \beta_k=1$ такі, що

$$\max_{1\le i\le m}\max_{z\in K}\delta_i(z)\left\|p^*(z)-a_i(z)\right\|=$$

$$=\max_{z\in K}\delta_{i_k}(z)\left\|p^*(z)-a_{i_k}(z)\right\|=$$

$$=\delta_{i_k}(z_k)\left\|p^*(z_k)-a_{i_k}(z_k)\right\|=$$

$$=\delta_{i_k}(z_k)\max_{f\in S^*} f\left(p^*(z_k)-a_{i_k}(z_k)\right)=$$

$$=\delta_{i_k}(z_k)\,f_k\left(p^*(z_k)-a_{i_k}(z_k)\right),$$

$$\min_{p\in W}\sum_{k=1}^r \beta_k\delta_{i_k}(z_k)\,p(z_k)=\sum_{k=1}^r \beta_k\delta_{i_k}(z_k)\,p^*(z_k).$$

Звідси випливає, що

$$\alpha^*\left(W;\{a_i\}_{i=1}^m;\{\delta_i\}_{i=1}^m\right)=$$

$$=\inf_{p\in W}\max_{1\le i\le m}\max_{z\in K}\delta_i(z)\left\|p(z)-a_i(z)\right\|=$$

$$=\max_{1\le i\le m}\max_{z\in K}\delta_i(z)\left\|p^*(z)-a_i(z)\right\|=$$

$$=\sum_{k=1}^{r}\beta_k\delta_{i_k}(z_k)f_k\left(p^*(z_k)-a_{i_k}(z_k)\right)=$$

$$=\min_{p\in W}\sum_{k=1}^{r}\beta_k\delta_{i_k}(z_k)f_k\left(p(z_k)-a_{i_k}(z_k)\right).$$

Тому

$$\alpha^*\left(W;\{a_i\}_{i=1}^m;\{\delta_i\}_{i=1}^m\right)\le\tilde{\alpha}\left(W;\{a_i\}_{i=1}^m;\{\delta_i\}_{i=1}^m\right). \tag{2.11}$$

Нехай $i_k\in\{1,...,m\}$, $z_k\in K$, $f_k\in S^*$, $\beta_k\ge 0$, $1\le k\le r\le n+1$, $\sum_{k=1}^{r}\beta_k=1$,

тоді

$$\inf_{p\in W}\sum_{k=1}^{r}\beta_k\delta_{i_k}(z_k)f_k\left(p(z_k)-a_{i_k}(z_k)\right)\le$$

$$\le\sum_{k=1}^{r}\beta_k\delta_{i_k}(z_k)f_k\left(p^*(z_k)-a_{i_k}(z_k)\right)\le$$

$$\le\sum_{k=1}^{r}\beta_k\delta_{i_k}(z_k)\max_{f\in S^*}f\left(p^*(z_k)-a_{i_k}(z_k)\right)=$$

$$=\sum_{k=1}^{r}\beta_k\delta_{i_k}(z_k)\left\|p^*(z_k)-a_{i_k}(z_k)\right\|\le$$

$$\le\sum_{k=1}^{r}\beta_k\max_{z\in K}\delta_{i_k}(z)\left\|p^*(z)-a_{i_k}(z)\right\|\le$$

$$\le\sum_{k=1}^{r}\beta_k\max_{1\le i\le m}\max_{z\in K}\delta_i(z)\left\|p^*(z)-a_i(z)\right\|=$$

$$=\max_{1\le i\le m}\max_{z\in K}\delta_i(z)\left\|p^*(z)-a_i(z)\right\|=$$

$$= \inf_{p\in W}\max_{1\le i\le m}\max_{z\in K}\delta_i(z)\left\|p(z)-a_i(z)\right\| =$$

$$=\alpha^*\left(W;\{a_i\}_{i=1}^m;\{\delta_i\}_{i=1}^m\right).$$

Отже,

$$\tilde{\alpha}\left(W;\{a_i\}_{i=1}^m;\{\delta_i\}_{i=1}^m\right)\le\alpha^*\left(W;\{a_i\}_{i=1}^m;\{\delta_i\}_{i=1}^m\right). \tag{2.12}$$

З (2.11), (2.12) випливає, що

$$\alpha^*\left(W;\{a_i\}_{i=1}^m;\{\delta_i\}_{i=1}^m\right)=\tilde{\alpha}\left(W;\{a_i\}_{i=1}^m;\{\delta_i\}_{i=1}^m\right).$$

Теорему доведено.

Теорема 2.5. *Нехай* K *— метричний компакт,* Y *— лінійний над полем дійсних чисел нормований сепарабельний простір,* W *— лінійний многовид розмірності* n *простору* $C(K,Y)$, $\tilde{p}$ *— довільний елемент* W. *Має місце співвідношення двоїстості*

$$\alpha^*\left(W;\{a_i\}_{i=1}^m;\{\delta_i\}_{i=1}^m\right)= \inf_{p\in W}\max_{1\le i\le m}\max_{z\in K}\delta_i(z)\left\|p(z)-a_i(z)\right\| =$$

$$=\max\left\{\inf_{p\in W}\sum_{k=1}^r\beta_k\delta_{i_k}(z_k)\,f_k\left(\tilde{p}(z_k)-a_{i_k}(z_k)\right):\right.$$

$$i_k\in\{1,...,m\};z_k\in K;\,f_k\in S^*;\beta_k\ge 0;1\le k\le r\le n+1;$$

$$\left.\sum_{k=1}^r\beta_k=1;\sum_{k=1}^r\beta_k\delta_{i_k}(z_k)\,f_k\left(p^*(z_k)\right)=\sum_{k=1}^r\beta_k\delta_{i_k}(z_k)\,f_k\left(\tilde{p}(z_k)\right)\right\}.$$

Доведення. Нехай

$$\tilde{\alpha}\left(W;\{a_i\}_{i=1}^m;\{\delta_i\}_{i=1}^m\right)=$$

$$=\max\left\{\inf_{p\in W}\sum_{k=1}^r\beta_k\delta_{i_k}(z_k)\,f_k\left(\tilde{p}(z_k)-a_{i_k}(z_k)\right),i_k\in\{1,...,m\},z_k\in K,\right.$$

$$f_k\in S^*,\beta_k\ge 0,1\le k\le r\le n+1;\sum_{k=1}^r\beta_k=1;$$

$$\left.\sum_{k=1}^r\beta_k\delta_{i_k}(z_k)\,f_k\left(p^*(z_k)\right)=\sum_{k=1}^r\beta_k\delta_{i_k}(z_k)\,f_k\left(\tilde{p}(z_k)\right)\right\}.$$

Оскільки W — лінійний многовид розмірності n простору $C(K,Y)$, то W є опуклою локально компактною множиною, а, отже, згідно з теоремою 1.4 існує $p^* \in W$, такий, що p^* є екстремальним елементом для задачі відшукання величини (1.1).

Згідно з наслідком 2.1 існують $i_k \in \{1,...,m\}$, $z_k \in K$, $f_k \in S^*$, $\beta_k \geq 0$, $1 \leq k \leq r \leq n+1$, $\sum_{k=1}^{r} \beta_k = 1$ такі, що

$$\max_{1 \leq i \leq m} \max_{z \in K} \delta_i(z) \left\| p^*(z) - a_i(z) \right\| =$$

$$= \max_{z \in K} \delta_{i_k}(z) \left\| p^*(z) - a_{i_k}(z) \right\| =$$

$$= \delta_{i_k}(z_k) \left\| p^*(z_k) - a_{i_k}(z_k) \right\| =$$

$$= \delta_{i_k}(z_k) \max_{f \in S^*} f\left(p^*(z_k) - a_{i_k}(z_k) \right) =$$

$$= \delta_{i_k}(z_k) f_k\left(p^*(z_k) - a_{i_k}(z_k) \right),$$

$$\sum_{k=1}^{r} \beta_k \delta_{i_k}(z_k) f_k\left(\tilde{p}(z_k) \right) = \sum_{k=1}^{r} \beta_k \delta_{i_k}(z_k) f_k\left(p^*(z_k) \right),$$

для всіх $\tilde{p} \in W$.

Тоді

$$\alpha^*\left(W; \{a_i\}_{i=1}^m; \{\delta_i\}_{i=1}^m \right) = \sum_{k=1}^{r} \beta_k \delta_{i_k}(z_k) f_k\left(p^*(z_k) - a_{i_k}(z_k) \right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{r} \beta_k \delta_{i_k}(z_k) f_k\left(\tilde{p}(z_k) - a_{i_k}(z_k) \right).$$

Звідси випливає, що

$$\alpha^*\left(W; \{a_i\}_{i=1}^m; \{\delta_i\}_{i=1}^m \right) \leq \tilde{\alpha}\left(W; \{a_i\}_{i=1}^m; \{\delta_i\}_{i=1}^m \right). \qquad (2.13)$$

Навпаки, нехай $i_k \in \{1,...,m\}$, $z_k \in K$, $f_k \in S^*$, $\beta_k \geq 0$, $1 \leq k \leq r \leq n+1$, $\sum_{k=1}^{r} \beta_k = 1$. Тоді для p^* будемо мати

$$\sum_{k=1}^{r} \beta_k \delta_{i_k}(z_k) f_k\left(\tilde{p}(z_k) - a_{i_k}(z_k)\right) \le$$

$$\le \sum_{k=1}^{r} \beta_k \delta_{i_k}(z_k) f_k\left(p^*(z_k) - a_{i_k}(z_k)\right) \le$$

$$\le \max_{1\le i\le m} \max_{z\in K} \delta_i(z) \left\| p^*(z) - a_i(z) \right\| =$$

$$= \inf_{p\in W} \max_{1\le i\le m} \max_{z\in K} \delta_i(z) \left\| p(z) - a_i(z) \right\| =$$

$$= \alpha^*\left(W; \{a_i\}_{i=1}^m; \{\delta_i\}_{i=1}^m\right).$$

Отже,

$$\tilde{\alpha}\left(W; \{a_i\}_{i=1}^m; \{\delta_i\}_{i=1}^m\right) \le \alpha^*\left(W; \{a_i\}_{i=1}^m; \{\delta_i\}_{i=1}^m\right). \tag{2.14}$$

З (2.13), (2.14) випливає

$$\tilde{\alpha}\left(W; \{a_i\}_{i=1}^m; \{\delta_i\}_{i=1}^m\right) = \alpha^*\left(W; \{a_i\}_{i=1}^m; \{\delta_i\}_{i=1}^m\right).$$

Теорему доведено.

Наслідок 2.3. *Нехай* K *— метричний компакт,* Y *— лінійний над полем дійсних чисел нормований сепарабельний простір,* W *— лінійний підпростір розмірності* n *простору* $C(K,Y)$.

Має місце співвідношення двоїстості

$$\alpha^*\left(W; \{a_i\}_{i=1}^m; \{\delta_i\}_{i=1}^m\right) = \inf_{p\in W} \max_{1\le i\le m} \max_{z\in K} \delta_i(z) \left\| p(z) - a_i(z) \right\| =$$

$$= \max\left\{ \inf_{p\in W} \sum_{k=1}^{r} \beta_k \delta_{i_k}(z_k) f_k\left(\tilde{p}(z_k) - a_{i_k}(z_k)\right) : \right.$$

$$i_k \in \{1,\dots,m\};\, z_k \in K;\, f_k \in S^*;\, \beta_k \ge 0; 1 \le k \le r \le n+1;$$

$$\left. \sum_{k=1}^{r} \beta_k = 1; \sum_{k=1}^{r} \beta_k \delta_{i_k}(z_k) f_k\left(p(z_k)\right) < 0;\, p \in W \right\}.$$

Теорема 2.6. *Нехай* K *— метричний компакт,* Y *— лінійний над полем дійсних чисел нормований сепрабельний простір,* W *— замкнена опукла* *множина розмірності* n *простору* $C(K,Y)$. *Тоді існують елементи* $i_k \in \{1,\dots,m\}$, $z_k \in K$, $f_k \in S^*$, $\beta_k \ge 0$, $1 \le k \le r \le n+1$, $\sum_{k=1}^{r} \beta_k = 1$ *такі, що*

$$\alpha^*\left(W;\{a_i\}_{i=1}^m;\{\delta_i\}_{i=1}^m\right) = \inf_{p \in W} \sum_{k=1}^{r} \beta_k \delta_{i_k}(z_k) f_k\left(p(z_k) - a_{i_k}(z_k)\right) =$$

$$= \inf_{p \in W} \sum_{k=1}^{r} \beta_k \delta_{i_k}(z_k) \left| f_k\left(p(z_k) - a_{i_k}(z_k)\right)\right| =$$

$$= \inf_{p \in W} \sum_{k=1}^{r} \beta_k \delta_{i_k}(z_k) \left\| p(z_k) - a_{i_k}(z_k)\right\| =$$

$$= \inf_{p \in W} \max_{1 \le k \le r} \left(\delta_{i_k}(z_k) \left\| p(z_k) - a_{i_k}(z_k)\right\|\right). \qquad (2.15)$$

Довільний екстремальний елемент для задачі відшукання величини (1.1) буде оптимальним розв'язком для екстремальних задач, які містяться у рівності (2.15).

Доведення. Нехай $i_k \in \{1,\dots,m\}$, $z_k \in K$, $f_k \in S^*$, $\beta_k \ge 0$, $1 \le k \le r \le n+1$, $\sum_{k=1}^{r} \beta_k = 1$ такі, що на них реалізується максимум у рівності (1.1). Припустимо, що $p^* \in W$ є екстремальним елементом для задачі відшукання величини (1.1). Тоді

$$\alpha^*\left(W;\{a_i\}_{i=1}^m;\{\delta_i\}_{i=1}^m\right) = \inf_{p \in W} \sum_{k=1}^{r} \beta_k \delta_{i_k}(z_k) f_k\left(p(z_k) - a_{i_k}(z_k)\right) \le$$

$$\le \sum_{k=1}^{r} \beta_k \delta_{i_k}(z_k) f_k\left(p^*(z_k) - a_{i_k}(z_k)\right) \le$$

$$\le \sum_{k=1}^{r} \beta_k \delta_{i_k}(z_k) \left\| p^*(z_k) - a_{i_k}(z_k)\right\| \le$$

$$\le \sum_{k=1}^{r} \beta_k \max_{z \in K} \delta_{i_k}(z) \left\| p^*(z) - a_{i_k}(z)\right\| \le$$

$$\le \sum_{k=1}^{r} \beta_k \max_{1\le i\le m} \max_{z\in K} \delta_i(z) \left\| p^*(z) - a_i(z) \right\| =$$

$$= \max_{1\le i\le m} \max_{z\in K} \delta_i(z) \left\| p^*(z) - a_i(z) \right\| =$$

$$= \inf_{p\in W} \max_{1\le i\le m} \max_{z\in K} \delta_i(z) \left\| p(z) - a_i(z) \right\| =$$

$$= \alpha^* \left(W; \{a_i\}_{i=1}^{m}; \{\delta_i\}_{i=1}^{m} \right).$$

Звідси випливає справедливість теореми.

Теорему доведено.

ВИСНОВКИ

У роботі розглядалась задача найкращого у розумінні зваженої відстані наближення деякого абстрактного дискретного багатозначного відображення множиною неперервних однозначних відображень.

Зокрема:

– розглянуто властивості функціоналу рівномірного наближення $\alpha^*(W;\{a_i\}_{i=1}^m;\{\delta_i\}_{i=1}^m)$, зокрема, встановлено, що функціонал рівномірного наближення $\alpha^*(W;\{a_i\}_{i=1}^m;\{\delta_i\}_{i=1}^m)$ є неперервним по $\{a_i\}_{i=1}^m$ на $((C(K,Y))^m,\rho)$ для довільної множини W та напівадетивним на $(C(K,Y))^m$ та додатно однорідним, якщо W — підпростір простору $C(K,Y)$;

– розглянуто властивості оператора найкращого наближення $A:(C(K,Y))^m \to W$, зокрема, встановлено, що оператор найкращого наближення A є однорідним , якщо W — підпростір простору $C(K,Y)$ та неперервним на $C(K,Y)$, якщо W — скінченновимірний підпростір простору$C(K,Y)$;

– доведено деякі теореми існування екстремального елемента для задачі (1.1);

– розглянуто необхідні, достатні умови та критерії екстремальності елемента для задачі відшукання величини (1.1);

– сформульовано та доведено теореми єдиності екстремального елемента для задачі відшукання величини (1.1);

– сформульовано та доведено критерії екстремального елемента для задачі відшукання величини (1.1) у випадку апроксимації скінченновимірною множиною;

– встановлено співвідношення двоїстості для задачі відшукання величини (1.1) у випадку апроксимації скінченновимірною опуклою множиною;

– узагальнено теорему «про очистку» на випадок задачі відшукання величини (1.1);

– окремі результати конкретизовані на деякі часткові випадки.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Ward J. D. Chebyshev centers in spaces of continuous functions: Pacific journal of mathematics. 1974. №1. P.283-287.

2. Гнатюк Ю. В. Алгоритми найкращого одночасного рівномірного наближення сім’ї неперервних на компакті функцій чебишовським підпростором. Український математичний журнал. 2003. №2. С. 291-307.

3. Гнатюк Ю. В. Найкраще рівномірне наближення сім’ї неперервних на компакті функцій: Український математичний журнал. 2002. №11. С. 1574-1580.

4. Гнатюк Ю. В. Основні властивості задачі найкращого одночасного наближення кількох елементів: Український математичний журнал. 1996. №9. С.1183-1193.

5. Гольштейн Е. Г. Теория двойственности в математическом программировании и ее приложения: Наука, 1971. 352 с.

6. Кантович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный аналіз: Наука, 1977. 742 с.

7. Klee V. L. Circumspheres and inner products: Math. Scand. 1960. №2. P. 363-370.

8. Лисенко З. М., Шанін Р. В. Функціональний аналіз: Метричні простори: Конспект лекцій: Одеса: Одеський національний університет імені І. І. Мечникова, 2022. Ч І. 43 с.

9. Лоран П.-Ж.. Апроксимация и оптимизация: Мир, 1975. 496 с.

10. Mach J. On the existence of best simultaneous approximation: J. Approximation theory. 1989. P.258-265.

11. Pevae L. Chebyshev centres in normed spaces: Publications de L’Institut Mathematique. 1989. Tome 49. P. 109-112.

12. Саранчук С. Б. Задача найкращого зваженого рівномірного відновлення неточно заданої за допомогою абстрактних функцій функціональної залежності елементами опуклої множини з додатковим

обмеженням, що задається системою многогранних множин, які неперервно змінюються: магістерська роб.: 014 Середня освіта (Математика). Кам'янець-Подільський, 2018. 63 с.

13. Степанец А. И. Методы теории приближений: Киев: Ин-т математика НАН Украины, 2002. Ч I. 427 с.

14. Степанец А. И. Методы теории приближений: Киев: Ин-т математика НАН Украины, 2002. Ч II. 438 с.

15. Фань Цзи. Теоремы о минимаксе. Бесконечные антагонистические игры: М : Физматгиз, 1963. С. 31-39.

16. Franchetti C., Singer I. Deviation and farthest points in normed linear spaces: Rev. Roum. Math. Pures et Appl. 1979. №3. P. 373-381.