Міністерство освіти і науки України
Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка
Фізико-математичний факультет
Кафедра математики

Дипломна робота
магістра

з теми: **«Відносна задача Штейнера в лінійному нормованому просторі, в якій міра відхилення між елементами оцінюється з допомогою невід'ємної опуклої функції повільного зростання, та деякі її часткові випадки»**

Виконав: студент II курсу, М1-М22 групи
спеціальності 014 Середня освіта (Математика)
Вербівський Ярослав Васильович

Керівник: **Гнатюк В.О.,**
кандидат фізико-математичних наук, доцент

Рецензент: **Щирба В. С.,**
кандидат фізико-математичних наук, доцент

Кам'янець-Подільський – 2023

ЗМІСТ

ВСТУП

Як відомо, останнім часом інтенсивно розвиваються такі галузі математики, які теорія оптимізації, теорія екстремальних задач та інші, результати дослідження яких широко використовуються в економіці, теорії оптимального керування, теорії апроксимації, теорії багатозначних відображень тощо.

Класичною задачею теорії апроксимації є задача про наближення неперервної на відрізку [c,d] функції $c(s)$ множиною А алгебраїчних поліномів $y(s)$, степеня, що не перевищує n, тобто задача відшукання величини

$$\inf_{y \in A} \max_{s \in [c,d]} |y(s) - c(s)|, \tag{0.1}$$

яка розглядалась у 50-х роках XIX століття.

Пізніше досліджувалось багато подібних задач, у яких функції наближають алгебраїчними, тригонометричними функціями в різних просторах.

З розвитку теорії лінійних нормованих просторів стає зрозуміло, що низка з цих задач вкладаються в постановку задачі такого змісту:

Нехай $(Y, \|\circ\|)$ є лінійним нормованим, в тому числі і банаховим простором, $e \in Y, A \subset Y$.

Задачею найкращого наближення елемента $e \in Y$ множиною $A \subset Y$ називають задачу відшукання величини

$$\inf_{y \in A} \|y - e\|. \tag{0.2}$$

Якщо існує елемент $y^* \in A$ такий, що

$$\|y^* - e\| = \inf_{y \in A} \|y - e\|, \tag{0.3}$$

то його називають елементом найкращого наближення елемента e в множині А (множиною А) або екстремальним елементом для величини (0.2).

Мірою відхилення елементів $y \in A$ до елемента e в задачі відшукання величини (0.2) виступає норма $\|\circ\|$, шукається у множині А елемент $y^* \in A$, який у розумінні норми має найменше відхилення від елемента e.

Елемент $y^* \in A$, який задовольняє співвідношення (0.3), найкраще у розумінні норми наближає елемент e порівняно з іншими елементами $y \in A$.

Однак, серед задач апроксимації гідне місце займають останнім часом задачі теорії найкращої апроксимації не у розумінні норми, а у розумінні, так званої, «викривленої метрики». Серед цих задач є задачі найкращого наближення за переднормою, будь-якою опуклою функцією, в тому числі й опуклою функцією повільного зростання (див., наприклад, [4, 7-9]), задача Чебишова – Стілтьєса, задача Поссе (див., наприклад, [10]) та інші.

Розглянуті вище приклади зводяться до задачі відшукання величини

$$\inf_{y \in A} h(y - e), \tag{0.4}$$

де e та A визначаються, як і вище, а h є переднормою, невід'ємним сублінійним функціоналом.

Узагальненням задачі (0.4) є класична задача Штейнера, яка полягає у відшуканні

$$\inf_{y \in A} \sum_{i=1}^{r} \|y^* - e_i\|, \tag{0.5}$$

де $e_i \in Y, i = \overline{1,r},$ – фіксовані елементи лінійного нормованого простору $(Y, \|\circ\|)$ (див., наприклад, [11, с. 314]).

Якщо існує елемент $y^* \in A$ такий, що

$$\sum_{i=1}^{r} \|y^* - e_i\| = \inf_{y \in A} \sum_{i=1}^{r} \|y^* - e_i\|\,,$$

то його називають точкою Штейнера відносно множини А фіксованих точок $y_1, \dots, y_r$ лінійного нормованого простору $(Y, \|\circ\|)$ або просто екстремальним елементом для задачі відшукання величини (0.5).

Практичне значення точки Штейнера полягає в тому, що це точка множини A, сума відстаней від якої до фіксованих точок $y_1, \dots, y_r$ лінійного нормованого простору $(Y, \|\circ\|)$ не перевищує (є найменшою) суми відстаней від інших точок множини A до цих фіксованих точок $e_i, i = \overline{1,r}$.

Узагальненням задачі (0.4) для випадку, коли h є невід'ємною неперервною опуклою функцією повільного зростання, є задача відшукання величини

$$\Im_A^h(\{e_i\}_{i=1}^r) = \inf_{y \in A} \sum_{i=1}^{r} h(y - e), \qquad (0.6)$$

яка розглядається у дипломній роботі і називається відносною задачею Штейнера в лінійному нормованому просторі $(Y, \|\circ\|)$, в якому відхилення між елементами множини A та фіксованими елементами $e_i, i = \overline{1,r}$, цього простору оцінюється з допомогою невід'ємної опуклої неперервної функції повільного зростання h.

Якщо існує елемент $y^* \in A$ такий, що

$$\sum_{i=1}^{r} h(y^* - e_i) \ \leq \sum_{i=1}^{r} h(y - e), y \in A,$$

тобто, для якого

$$\mathfrak{J}_A^h(\{e_i\}_{i=1}^r) = \inf_{y \in A} \sum_{i=1}^{r} h(y - e) = \sum_{i=1}^{r} h(y^* - e_i),$$

то його будемо називати узагальненою точкою Штейнера в розумінні функції повільного зростання h у множині A або екстремальним елементом для величини (0.6).

Отримані при дослідженні задачі (0.6) результати мають теоретичне значення. Їх можна використати також при дослідженні задач, які включаються у постановку задачі (0.6), як її часткові випадки, зокрема при дослідженні задач (0.1), (0.2), (0.4), (0.5) та задач типу задачі (0.6), в яких h є нормою, переднормою, сублінійним функціоналом.

Актуальним також є питання існування екстремального елемента для задачі відшукання величини (0.6), умови його екстремальності та інші питання, які розглядаються в дипломній роботі.

<u>Метою роботи</u> є: ознайомитись з деякими допоміжними поняттями та твердженнями, які використовуються в роботі, зокрема, з поняттям функції (функціонала) повільного зростання, розглянути різного роду приклади функціоналів повільного зростання; встановити властивості цільової функції задачі відшукання величини (0.6) та властивості спряженої до неї функції; запропонувати свій метод доведення замкнутості та локальної компактності скінченновимірного підпростору лінійного нормованого простору; сформувати та довести теорему існування екстремального елемента для задачі відшукання величини (0.6), розглянути наслідки з теорем (часткові випадки задачі (0.6)); отримати двоїсте подання похідної за будь-яким напрямком цільової функції задачі відшукання величини (0.6) у випадку, коли простір $(Y, \|\cdot\|)$ є банаховим простором, а h є неперервним сублінійним функціоналом, заданим на $(Y, \|\cdot\|)$, які потрібні для встановлення умов екстремальності допустимого елемента задачі відшукання величини (0.6); встановити необхідну, достатню умову та критерії екстремальності допустимого елемента задачі відшукання величини (0.6) в розглядуваному випадку. Отримані умови та критерії конкретизувати на деякі задачі, які вкладаються у схему постановки задачі відшукання величини (0.6).

Об'єктом дослідження є дослідження задачі Штейнера в лінійному нормованому просторі, в якому міра відхилення між елементами оцінюється з допомогою невід'ємної опуклої неперервної функції повільного зростання.

Предметом дослідження є такі проблеми теорії екстремальних задач, як теореми існування та екстремальності елементів, необхідні, достатні умови та критерії екстремальності допустимих елементів цих задач. В роботі ці та інші проблеми досліджуються стосовно відносної задачі Штейнера в лінійному нормованому просторі, в якому міра відхилення між елементами оцінюється з допомогою невід'ємної неперервної функції повільного зростання, зокрема з допомогою невід'ємного неперервного сублінійного функціонала, заданого на цьому лінійному просторі.

Задачами дослідження є :

1. Ознайомитись з деякими допоміжними поняттями та твердженнями, зокрема з поняттям функції (функціонала) повільного зростання, розглянути приклади функціоналів повільного зростання.
2. Встановити властивості цільової функції задачі відшукання величини (0.6) та властивості спряженої до неї функції.
3. Сформулювати та довести теореми існування екстремального елемента для задачі відшукання величини (0.6) та наслідки з цих теорем, які стосуються часткових випадків задачі відшукання величини (0.6).

4. Отримати двоїсте подання похідної за будь-яким напрямком цільової функції задачі відшукання величини (0.6) та двоїсте подання конуса внутрішніх напрямків для деякої лебегової множини цільової функції задачі (0.6) у випадку, коли h є невід'ємним неперервним сублінійним функціоналом.
5. Встановити необхідні, достатні умови та критерії екстремальності допустимого елемента для задачі відшукання величини (0.6) у випадку, коли h є невід'ємним неперервним сублінійним функціоналом, та конкретизувати ці умови і критерії на важливі часткові випадки.

При вирішенні постановлених задач в дипломній роботі використовувались методи математичного, функціонального та опуклого аналізів, методи теорії екстремальних задач, теорії оптимізації.

Наукова новизна отриманих результатів

Результати роботи є новими і полягають в наступному:

1. Розглянуто низку прикладів функцій повільного зростання, заданих на лінійному нормованому просторі. Наведено відповідні обґрунтування.
2. Встановлено властивості цільової функції задачі відшукання величини (0.6) та властивості спряженої до неї функції.
3. Сформульовано та доведено теореми існування екстремального елемента для задачі відшукання величини (0.6) та наслідки з цих теорем, які стосуються часткових випадків задачі (0.6).
4. Отримано двоїсте подання похідної за напрямками цільової функції задачі відшукання величини (0.6) та двоїсте подання конуса внутрішніх напрямків для деякої лебегової множини цільової функції задачі (0.6) у випадку, коли h є невід'ємним неперервним сублінійним функціоналом.

5. Встановлено необхідні, достатні умови та критерії екстремальності допустимого елемента для задачі відшукання величини (0.6) у випадку, коли h є невід'ємним неперервним сублінійним функціоналом, та конкретизовано ці умови і критерії на важливі часткові випадки.

Практичне значення отриманих результатів

Наукове та практичне значення роботи. Дипломна робота має суто теоретичний характер, її результати можна застосувати при побудові збіжних чисельних методів розв'язування задачі (0.6) та інших задач, які вкладаються у схему постановки задачі (0.6), при дослідженні задач апроксимаційного характеру, в яких міра відхилення між елементами визначається «викривленою метрикою».

Структура роботи. Робота складається зі вступу, трьох розділів, висновків та списку використаних джерел.

У першому розділі наведені основні поняття та твердження, які використовуються в дипломній роботі. Розглянуто з відповідним обґрунтуванням низку прикладів функціоналів повільного зростання.

У другому розділі роботи постановлено задачу відшукання точки Штейнера в лінійному нормованому просторі $(Y, \|\cdot\|)$, в якому міра відхилення між елементами оцінюється з допомогою невід'ємної неперервної функції повільного зростання h, тобто задачу відшукання величини

$$\mathfrak{I}_A^{\|\cdot\|}(\{e_i\}_{i=1}^r) = \inf_{y\in A} \sum_{i=1}^{r} (y - e_i), \text{де } e_i \in Y, i = \overline{1, r}, A \subset Y. \qquad (2.1)$$

В цьому ж розділі встановлено властивості цільової функції задачі (2.1), сформульовано та доведено теореми існування екстремального елемента для задачі відшукання величини (2.1) та наслідки з цих теорем.

В третьому розділі для випадку, коли h є невід'ємним неперервним сублінійним функціоналом, отримано двоїсте подання похідної за напрямком цільової функції задачі відшукання величини (2.1) та двоїсте подання конуса внутрішніх напрямків для деякої лебегової множини цільової функції задачі (2.1), які використано при встановленні умов екстремальності допустимого розв'язку задачі (2.1).

Встановлено необхідні, достатні умови та критерії екстремальності допустимого елемента для задачі (2.1) та конкретизовано умови та критерії на важливі часткові випадки.

РОЗДІЛ 1. ДЕЯКІ ДОПОМІЖНІ ПОНЯТТЯ ТА ТВЕРДЖЕННЯ. ФУНКЦІОНАЛИ ПОВІЛЬНОГО ЗРОСТАННЯ. ПРИКЛАДИ ФУНКЦІОНАЛІВ ПОВІЛЬНОГО ЗРОСТАННЯ

.1.1 Поняття опуклої множини, опуклої функції, лінійного неперервного функціонала, простору, спряженого з лінійним нормованим простором

В роботі через У будемо позначати лінійний над полем дійсних чисел простір, а через ||◦|| – норму, задану на У. Отже, (У, ||◦||) є лінійним нормованим простором.

В просторі У будемо розглядати опуклі множини.

Означення 1.1.1 (див., наприклад [12]). Множину А лінійного над полем дійсних чисел простору У будемо називати опуклою множиною цього простору, якщо разом з довільними двома точками $y_{1,}$ y_2 вона включає відрізок [$y_{1,}$ y_2], тобто для будь яких точок $y_{1,}$ $y_2 \in$ A, числа $\propto \in [0, 1]$ точка $(1-\propto)y+\propto y_2$ належить А.

Прикладом опуклої множини лінійного нормованого простору (У, ||◦||) може бути замкнена куля цього простору з центром у точці а і радіусом r ≥ 0, тобто множина $\mathrm{B}(a,r) = \{y \in Y : ||\mathrm{y}-\mathrm{a}|| \leq \mathrm{r}\}$, де $\alpha \in$ У, $r \in R$ і r ≥ 0, в тому числі замкнена куля $B(0,1) = \{y \in Y: ||\mathrm{y}|| \leq 1\}$ з центром у точці 0 і радіусом 1(див., наприклад, [12, с. 32]).

Дійсно, якщо

$y_1, y_2 \in B(a.r), \propto \in [0,1]$, то $\|(1-\propto)y_1+\propto y_2 - a\| = \|(1-\propto)y_1+\propto y_2 - (1-\propto)a-\propto a\| = \|(1-\propto)(y_1-a) +\propto (y_2-a)\| = \|(1-\propto)(y_1-a)\| + \|\propto (y_2-a)\| = \|(1-\propto)(y_1-a)\| + \|\propto (y_2-a)\| = |1-\propto|\|(y_1-a) + |\propto|(y_2-a)\| = (1-\propto)\|y_1-a\|+\propto \|(y_2-a\|$, оскільки $0 \leq\propto\leq 1$ $(\alpha \geq 0, 1-\propto \geq 0), y_1, y_2 \in B(a,r)$.

Отже, встановлено, що $\forall y_1, y_2 \in B(a,r), \alpha \in [0,1]$ маємо що $\|(1-\propto)y_1 + \propto y_2 - a\| \leq r.$ Тому можна зробити висновок, що $(1-\propto)y_1 + \propto y_2 \in B(a,r),$ отже $B(a,r)$ є опуклою множиною лінійного нормованого простору (У, ||◦||).

Також будемо розглядати опуклі функції, які задані на (У, ||◦||) і які на цьому просторі приймають скінченні значення, тобто такі функції $P: Y \to R$, що для будь-яких $y_1, y_2 \in Y, \alpha \in [0,1]$ виконуються нерівності: $P\big((1-\propto)y_1 + \propto y_2\big) = (1-\propto)p(y_1) + 2p(y_2), \alpha \in$
$[0,1], (\text{див.}, \text{наприклад}, [12\ , c. 56]).$

Прикладом такої функції, заданої на (У, ||◦||), може бути, наприклад, функція $p(y) = \big||y - a|\big|, y \in Y$, де α – фіксована точка Y. Дійсно, для будь-яких

$y_1, y_2 \in Y, \alpha \in [0,1]$ будемо мати, що $p\big((1-\propto)y_1 + \propto y_2\big) = \|(1-\propto)y_1 + \propto y_2 - a\| = \|(1-\propto)y_1 + \propto y_2 - (1-\propto)a - \propto a\| = \|(1-\propto)y_1 + \propto y_2 - (1-\propto)a - \propto a\| = \|(1-\propto)(y_1 - a)\| + \|\alpha(y_2 - a)\| = (1-\propto)\|y_1 - a\| + \propto \|y_2 - a\| = (1-\propto)p(y_1) + \propto p(y_2).$ Отже, для будь-яких $y_1, y_2 \in Y, \alpha \in [0,1]$ випливає, що $p\big((1-\propto)y_1 + \propto y_2\big) \leq (1-\propto)p(y_1) + \alpha p(y_2))$.

Це й означає, що функція p є опуклою функцією, заданою на Y.

Серед функцій, заданих на (У, ||◦||) особливе місце займають неперервні на (У, ||◦||) функції.

Якщо функція $P: Y \to R$ є неперервною в кожній точці $y_0 \in Y$, то її називають неперевною на (У, ||◦||) .

Прикладом неперервної на (У, ||◦||) функції може бути функція $P(y) = \|y\|, y \in Y$, (див., наприклад, [14, с. 64]).

Дійсно, нехай $y_0 \in Y, \varepsilon >> 0$. Тоді $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta = \varepsilon)(\forall y: \|y - y_0\| < \delta = \varepsilon)||P(y) - P(y_0)| = |\|y\| - \|y_0\|| \leq \|y - y_0\| < \delta = \varepsilon$.

Це й означає, що $P(y) = \|y\|, y \in Y$, є функцією, неперервною у кожній точці $y_0 \in Y$ і, отже, на У.

Важливий клас функцій, заданих на лінійному нормованому просторі (У, ||◦||),утворюють лінійні неперервні функціонали, задані на цьому просторі.

Означення 1.1.3 (див., наприклад, [12,с.39]). Функціонали $f: Y \to R$ називається лінійним на Y, якщо

1) $(\forall x, y \in Y) f(x + y) = f(x) + f(y)$,
2) $(\forall \propto \in R)(\forall x \in X) f(\propto x) = \propto f(x)$.

Розглянемо приклад лінійного функціонала, заданого на лінійному просторі Y=C[a,b], тобто на просторі дійсно значних неперивних функцій, заданих на сегменті [a,b]. Для $y \in C$[a,b] покладемо $f(y) = y(t_0)$, де t_0 – довільна фіксована точка сегменту [a,b]. Маємо, що для $x, y \in C[a, b], \propto \in R: f(x + y) = (x + y)(t_0) = x(t) + y(t_0) = f(x) + f(y), f(\propto y) = (\propto y)(t_0) = \propto y(t_0) = \propto f(y)$ (див., наприклад, [12, с.40]). Отже, f є лінійним функціоналом, заданим на лінійному просторі C[a,b].

Переконаємося, що цей функціонал є неперервним у будь-якій точці $y_0 \in$ C[a,b].

Дійсно, для довільного $\varepsilon > 0$ будемо мати, що

$$|f(y) - f(y_0)| = |y(t_0) - y_0(t_0)| \leq max|(y(t) - y_0(t)| = \|y - y_0\|.$$

Тому $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta = \varepsilon > 0)\big(\forall y: \big|| y - y_0 |\big| < \delta\big)|f(y) - f(y_0)| < \varepsilon$, тобто f є лінійним функціоналом на Y, неперервним в довільній точці $y_0 = \mathrm{C}[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$, (див., наприклад, [12, с.42]).

Виявляється, що множина всіх лінійних неперервних функціоналів, заданих на лінійному нормованому просторі (У, ||◦||), є лінійним над полем дійсних чисел простором.

Означення 1.1.3. Нехай (У, ||◦||) є лінійним над полем дійсних чисел нормованим простором. Тоді лінійний простір всіх лінійних неперервних функціоналів, заданих на лінійному нормованому просторі (У, ||◦||), називають простором спряженим з (У, ||◦||).

Якщо для $f \in Y^*$ покласти:

$\|f\| = \underset{\substack{y \in Y \\ y \neq 0}}{sup} \frac{|f(y)|}{\|f\|}$, то $(Y^*$, ||◦||), де $||°||\colon \mathrm{f} \in Y^* \to \sup\limits_{\substack{y \in Y \\ y \neq 0}} \frac{f(y)}{\|y\|}$, є лінійним нормованим простором (див., наприклад, [13, с.119]).

1.2. Сильна та слабка топології на просторі, спряженому до лінійного нормованого простору*

Топологію на Y^*, індуковану нормою $\|f\| = \sup\limits_{\substack{y \in Y, \\ y \neq 0}} \frac{|f(y)|}{\|y\|}, f \in Y^*$, називають сильною топологією, заданою наY^*.

В роботі будемо використовувати поняття слабкої топології простору Y^*, яка вводиться в такий спосіб.

Нехай $f_0 \in Y^*$. Околом точки $f_0 \in Y^*$, який визначається точкою f_0, скінченною кількістю точок $y_1 \dots \dots . y_m$ із X та числом $\varepsilon > 0$, будемо називати множину.

$0(f_0) = 0(f_0;\ y_1 \dots \dots . y_m; \varepsilon) = \{f \in Y^*\colon |f(y_i) - f_0(y_i)| < \varepsilon, i = 1, m.$

Якщо відкритою множиною в Y^* вважати таку множину, яка разом з точкою f_0 включає деякий окіл $0(f_0)$, описаний вище, то сукупність таких відкритих множин задає топологію на Y^* (див., наприклад, [12, с.43-48]).

Простір Y^* разом з слабкою * топологією, заданою на ньому, буде локально опуклим віддільним лінійним топологічним простором (див., наприклад, [12 с.45]).

1.3. Поняття спряженої функції та її ефективної множини. Теорема Фенхеля - Моро. Поняття опорного функціонала до опуклого неперервного функціонала, заданого на лінійному нормованому просторі

Означення 1.3.1 (див., наприклад, [12, с.64]). Припустимо, що $P: Y \to R$ є функцією, заданою на лінійному нормованому просторі (У, ||◦||). Нехай Y^* - простір, спряжений з (У, ||◦||).

Функцію $P^*(f) = \sup\limits_{y \in Y}\big(f(y) - P(y)\big), f \in Y^*$, назвемо функцією, спряженою з Р, або полярою функції P (див., наприклад, [12, с.64]).

Означення 1.3.2 (див., наприклад, 12, с.54]). Нехай $P: Y \to R$, де (У, ||◦||) – лінійний нормований простір, Y^* - простір, спряжений з (У, ||◦||), $P^*(f) = sup_{y \in Y}\big(f(y) - P(y)\big), f \in Y^*$, - функція, спряжена з Р. Ефективною множиною функцій Р* будемо називати множину $domP^* = \{f \in X^*: P^*(f) < +\infty\}$.

Мають місце такі твердження.

Теорема 1.3.1(Фенхеля – Моро). Нехай Р – функція на (У, ||◦||), всюди більша $-\infty$. Тоді $P = (P^*)^*$ і тільки тоді, коли P є опуклою і замкненою (див., наприклад, [15, с.186]).

Теорема 1.3.2 (див., наприклад, [15, с.248]). Якщо Р є опуклою неперервною функцією, заданою на (У, ||◦||), то $P(y) = \max\limits_{f \in domP^*}(f(y) - P^*(f)), y \in Y$.

Нехай на лінійному нормованому просторі (У, ||◦||) задано опуклий неперервний функціонал Р. Тоді опорним до нього будемо називати такий функціонал $g(y) = f(y) + d, y \in Y, a\ f \in Y^*$, для якого $g(y) = f(y) + d = P(y), y \in Y$.

Якщо функціонал g є опорним до опуклого неперервного функціонала P, що заданий на Y, і, крім того, $g(y_0) = \mathrm{f}(y_0) + \mathrm{d} = \mathrm{P}(y_0)$, то його будемо називати опорним до функціонального P в точці y_0.

1.4. Функціонали повільного зростання. Приклади спряжених функціоналів та функціоналів повільного зростання

Означення 1.4.1 (див., наприклад, [16]). Опуклий неперервний функціонал P, заданий на лінійному неперервному просторі (У, ||◦||), називають функціоналом повільного зростання, якщо його спряжений функціонал, обмежений зверху на своїй ефективній множині, тобто, якщо існує таке число C, що $P^*(f) \leq C$ для всіх $f \in domP^*$.

Розглянемо деякі приклади спряжених функцій та функціоналів повільного зростання.

Приклад 1.4.1. Нехай (У, ||◦||) є лінійним нормованим простором; Y^* - простір, спряжений з (У, ||◦||); $f_0 \in Y^*, P(y) = f_0(y), y \in Y$.

Тоді

$$P^*(f) = \begin{cases} 0, \text{якщо} f = f_0 \\ +\infty, \text{якщо } f \neq f_0 \end{cases}.$$

Отже, $domP^* = \{f_0\}$і $P^*(f) = 0 \leq 0$ на $domP^* = \{f_0\}$.

Тому $P(y) = f_0(y), y \in Y$, є функціоналом повільного зростання.

Дійсно, нехай $f = f_0$. Маємо, що $P^*(f_0) = \sup\limits_{y \in Y}\big(f_0(y) - P(y)\big) = \sup\limits_{y \in Y}\big(f_0(y) - f_0(y)\big) = 0$. Нехай тепер $f \in Y^*$ та $f \neq f_0$. Тоді існує $y_0 \in$

Y, що $f(y_0) \neq f_0(y_0)$. Припустимо, що $f(y_0) > f_0(y_0)$, тобто $f(y_0) - f_0(y_0) = (f - f_0)(y_0) > 0$).

Тоді одержимо, що

$$+\infty \geq P^*(f) = \sup_{y \in Y}(f(y) - P(y) = \sup_{y \in Y}\big(f(y) - f_0(y)\big) = \sup_{y \in Y}(f - f_0)\,(y) \geq$$

$$\sup_{t >> 0}(f - f_0)\,(ty_0) = \sup_{t > 0}\big((f - f_0)(y_0)\big)t = (f - f_0)(y_0)\sup_{t > 0}(t) = +\infty,$$

оскільки $(f - f_0)(y_0) > 0$.

Отже, в цьому випадку доведено, що $P^*(f) = +\infty$, якщо $f \neq f_0$.

Розглянемо випадок, коли $f(y_0) < f_0(y_0)$, тобто $(f - f_0)(y_0) = f(y_0) - f_0(y_0) < 0$. В цьому випадку (див. вище) $+\infty \geq P^*(f) = \sup_{y \in Y}(f - f_0)(y) \geq \sup_{t < 0}(f - f_0)(ty_0) = \sup_{t < 0}\big((f_0 - f)(y_0)\big)(-t) = (f_0 - f)(y_0)\sup_{t < 0}(-t) = +\infty$, оскільки $(f_0 - f)(y_0) > 0$.

Отже, встановлено, що $P^*(f)$=$+\infty$ для всіх $f \neq f_0$ та $P^*(f_0)$=0.

Це й означає, що $dom\ P^* = \{f_0\}, P^*(f) = 0 \leq 0$ на $dom\ P^*$.

P є функціоналом повільного зростання.

Приклад 1.4.2. Нехай (У, ||◦||) є лінійним нормованим простором, Y^*-простір, спрямований з (У, ||◦||); $f_0 \in Y^*, \beta \in R; P(y) = f_0(y) + \beta, y \in Y$, тобто P є афінним функціоналом, заданим на (У, ||◦||).

Тоді

$$P^*(f) = \begin{cases} -\beta, & \text{якщо } f = f_0 \\ +\infty, & \text{якщо } f \neq f_0 \end{cases}$$

Отже, $dom\ P^* = \{f_0\}$ і $P^*(f) = -\beta \leq -\beta$ на $dom\ P^* = \{f_0\}$.

Тому $P(y) = f_0(y) + \beta, y \in Y$ є функціоналом повільного зростання.

Дійсно, якщо $f = f_0$, то

$$P^*(f_0) = \sup_{y \in Y}(f(y) - P(y)) = \sup_{y \in Y}(f(y) - (f_0(y) + \beta) = \sup_{y \in Y}(f(y) -$$

$$f_0(y) - \beta) = \sup_{y \in Y}(f(y) - f_0(y)) + (-\beta).$$

Згідно з прикладом 1

$$\sup_{y \in Y}\big(f(y) - f_0(y)\big) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } f = f_0 \\ +\infty, & \text{якщо } f \neq f_0 \end{cases}$$

З урахуванням цього та попередніх рівностей одержимо, що

$$P^*(f_0) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } f = f_0 \\ +\infty, & \text{якщо } f \neq f_0 \end{cases} + (-\beta) = \begin{cases} -\beta, & \text{якщо } f = f_0 \\ +\infty, & \text{якщо } f \neq f_0 \end{cases}$$

Звідси випливає, що

$$dom\, P^* = \{f_0\}, P^*(f) = -\beta \leq -\beta \text{ на } dom\, P^* = \{f_0\}$$

Отже, Р є функціоналом повільного зростання на (У, ||◦||).

Приклад 1.4.3. Нехай (У, ||◦||) є лінійним нормованим простором; Y^* - простір, спряжений з (У, ||◦||); $f_i \in Y^*, \beta_i \in R, i = \overline{1m}$; $P_i(y) = f_i(y) - \beta_i, y \in Y$; $P(y) = \max_{1 \leq i \leq m} P_i(y) = \max_{1 \leq i \leq m}(f_i(y) - \beta_i), y \in Y$.

Тоді

$$dom\, P^* = \mathrm{co}\{f_1, \dots, f_m\}$$
$$= \left\{\sum_{i=1}^{m} \propto_i f_i \colon \propto_i \geq 0, \sum_{i=1}^{m} \propto_i = 1\right\}, \tag{1.1}$$

$$P^*(f) = \begin{cases} min\left\{\sum_{i=1}^{m} \propto_i \beta_i : \propto_i \geq 0, i = \overline{1,m}; \sum_{i=1}^{m} \propto_i = 1; \sum_{i=1}^{m} \propto_i f_i = f\right\}, \text{якщо } f \\ +\infty, \text{якщо } f \notin domP^* = \text{co}\{f_1, \dots, f_m\}. \end{cases}$$

$\in domP^*,$

Оскільки для всіх

$$\propto = (\propto_i, \dots, \propto_m) : \propto_i \geq 0, i = \overline{1m}, \sum_{i=1}^{m} \propto_i = 1$$

маємо, що

$$\sum_{i=1}^{m} \propto_i \beta_i \leq C = \max_{1 \leq i \leq m} \beta_i, \text{ то } P^*(f) \leq c, f \in dom\, P^*.$$

Тому P є функціоналом повільного зростання.

Дійсно, $P_i(y) = f_i(y) - \beta_i, y \in Y, i = \overline{1m},$ є неперервними на Y функціями, тому що $f_i \in Y^*$ і, отже, є лінійним неперервним функціоналом, заданим на Y, а $-\beta_i$ є сталою, яка неперервна на Y.

Тому P_i є неперервною функцією на Y, як сума двох неперервних на Y функцій.

Кожна функція $P_i, i = \overline{1,m},$ є опуклою на Y.

Дійсно, для $y_1, y_2 \in Y, \propto \in [0,1]$ маємо, що $P_i((1-\propto)y_1 + \propto y_2) = f_i((1-\propto)y_1 + \propto y_2) - \beta_i = (1-\propto)f_i(y_1) + \propto f_i(y_2) + (1-\propto)(-\beta_i) + \propto (-\beta_i) = (1-\propto)(f_i(y_1) - \beta_i) + \propto (f_i(y_2) - \beta_i = (1-\propto)P_i(y_1) + \propto P_i(y_2).$

Отже, $P_i((1-\propto)y_1 + \propto y_2) \leq (1-\propto)P_i(y_1) + \propto P_i(y_2)$

Це й означає, що P_i є опуклою на Y функції.

Тому для кожного $f \in dom\, P^*$ згідно з теоремою 2 [15, с.18] знайдуться такі $\varphi_i \in dom\, P_i^*, i = \overline{1,m},$ що

$$f = \sum_{i=1}^{m} \propto_i \varphi_i, \propto_i \geq 0, i = \overline{1m}, \sum_{i=1}^{m} \propto_i = 1.$$

Але ж згідно з прикладом 2 $dom\, P_i^* = \{f_i\}, i = \overline{1m}.$ Тому $\varphi_i = f_i,\ i = \overline{1,m}.$

Отже, для кожного $f \in domP^*$ маємо, що знайдуться такі числа

$$\propto_i \geq 0, i = \overline{1m}, \sum_{i=1}^{m} \propto_i = 1, \text{що}\ f = \sum_{i=1}^{m} \propto_i f_i.$$

Тому

$$f \in CO\{f_1, \dots, f_m\} = \left\{ \sum_{i=1}^{m} \propto_i f_i, \propto_i \geq 0, i = \overline{1m}, \sum_{i=1}^{m} \propto_i = 1 \right\},$$

де $\mathrm{CO}\{f_1, \dots, f_m\}$ є опуклою оболочкою функціоналів $f_i,\ i = \overline{1m}.$

Звідси випливає, що $domP^* \subset CO\{f_1, \dots, f_m\}.$

(1.2)

Нехай тепер $f \in CO\{f_1, \dots, f_m\}$. Тоді існують числа

$$\propto_i \geq 0, i = \overline{1m}, f = \sum_{i=1}^{m} \propto_i f_i.$$

Розглянемо

$$P^*(\mathrm{f}) = P^*\left(\sum_{i=1}^{m} \propto_i f_i. \right).$$

Внаслідок того, що функції $P_i, i = \overline{1,m}$, є скінченними на Y, то функція $\mathrm{P(y)} = \max_{1 \le i \le m} P_i(y), y \in Y$, також приймає лише скінченні значення. Отже, вона є власною функцією (див., наприклад, $[12, \text{с}. 54]$).

Функція P є опуклою функцією, оскільки вона є максимумом опуклих функцій (див., наприклад, $[15, \text{с}. 180]$). Вона є неперервною функцією як максимум кількох неперервних функцій. Тому P^* є власною (див., наприклад, твердження 8.2.9 $[\ 12, \text{с}. 70]$).та опуклою функцією (див., $[15, \text{с}. 185]$).

З урахуванням цих властивостей можна зробити висновок, що

$$P^*(f) = P^*\left(\sum_{i=1}^{m} \propto_i f_i\right) \le \sum_{i=1}^{m} \propto_i P^*(f_i) = \sum_{i=1}^{m} \propto_i \beta_i < +\infty. \qquad (1.3)$$

Звідси випливає, що $f \in domP^*$ для всіх $f \in CO\{f_1, \dots, f_m\}$. Тому

$$CO\{f_1, \dots, f_m\} \subset domP^* \qquad (1.4)$$

зі співвідношень $(1.2), (1.4)$ одержимо, що

$$domP^* = CO\{f_1, \dots, f_m\}$$

Співвідношення (1.1) встановлено.

Нехай тепер $f \in domP^*$. Тоді існують

$$\propto = (\propto_i, \dots, \propto_m) : \propto_i \ge 0, i = \overline{1m}, \sum_{i=1}^{m} \propto_i = 1$$

такі, що

$$f = \sum_{i=1}^{m} \propto_i f_i \ \ (\text{див.}, 1.1)$$

Для $f \in domP^*$ позначимо через

$$\wedge_f = \left\{\propto = (\propto_i, \dots, \propto_m) \in R^m : \propto_i \geq 0, i = \overline{1m}, \sum_{i=1}^{m} \propto_i = 1;\ f = \sum_{i=1}^{m} \propto_i f_i\right\}.$$

Переконаємося, що $\wedge_f$ є обмеженою та замкненою множиною простору R^m. Нехай $\propto \in \wedge_f$. Маємо, що

$$\|\propto\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \propto_i{}^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{m} 1} = \sqrt{m}$$

оскільки $0 \leq \propto_i \leq 1, i = \overline{1, m}$.

Звідси випливає обмеженість множини $\wedge_f$.

Доведемо її замкненість. Нехай $\propto^* = (\propto_1{}^*, \dots, \propto_m{}^*)$ є граничною точкою для $\wedge_f$. Тоді існує послідовність точок $\propto^k = (\propto_1{}^k, \dots, \propto_m{}^k) \in \wedge_f$ і таких, що $\lim_{k\to\infty} \propto^k = \lim_{k\to\infty} (\propto_1{}^k, \dots, \propto_m{}^k) = \propto^* = (\propto_1{}^*, \dots, \propto_m{}^*)$. Це означає, що $\lim_{k\to\infty} \propto_i{}^k = \propto_i{}^*, i = \overline{1, m}$. Оскільки $\propto_i{}^k \geq 0, i \in \{1, \dots, m\}, k = 1,2, \dots,$ то $\propto_i{}^* \geq 0, i = \overline{1, m}$.

Оскільки

$$\sum_{i=1}^{m} \propto_i{}^k = 1\,, \text{то} \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{m} \propto_i{}^k = \sum_{i=1}^{m} \lim_{k\to\infty} \propto_i{}^k = \sum_{i=1}^{m} \propto_i{}^* = 1\,.$$

Крім того, мають місце рівності

$$f = \sum_{i=1}^{m} \propto_i{}^k f_i\,, k = 1,2, \dots.$$

Звідси, для всіх $k = 1,2, \ldots$.

$$0 \le \left\| f - \sum_{i=1}^{m} \propto_i^* f_i \right\| = \left\| \sum_{i=1}^{m} \propto_i^k f_i - \sum_{i=1}^{m} \propto_i^* f_i \right\| = \left\| \sum_{i=1}^{m} (\propto_i^k - \propto_i^*) f_i \right\|$$

$$\le \sum_{i=1}^{m} |\propto_i - \propto_i^*| \, \|f_i\| \xrightarrow{k \to \infty} 0, \text{оскільки } \propto_i^k \xrightarrow{k \to \infty} \propto_i^*, i = \overline{1, m}.$$

Завдяки цьому робимо висновок, що

$$\left\| f - \sum_{i=1}^{m} \propto_i^* f_i \right\| = 0 \Longrightarrow f = \sum_{i=1}^{m} \propto_i^* f_i$$

Отже, $\propto^* = (\propto_1^*, \ldots, \propto_m^*)$ є такою точкою простору R^m, для якої

$$\propto_i^* \ge 0, i = \overline{1, m}; \sum_{i=1}^{m} \propto_i^* = 1, f = \sum_{i=1}^{m} \propto_i^* f_i$$

Це означає, що $\propto^* \in \Lambda_f$.

Тому Λ_f є замкненою множиною простору R^m.

Вище було доведено, що ця множина є обмеженою множиною простору R^m. Взявши це до уваги, робимо висновок, що Λ_f є компактом R^m (див., наприклад, $[14, \text{с}. 48]$).

Для $f \in domP^*$ розглянемо

$$\min \left\{ \sum_{i=1}^{m} \propto_i \beta_i : \propto = (\propto_1, \ldots, \propto_m) \in \Lambda_f \right\}$$

Оскільки

$$\propto = (\propto_1, \dots, \propto_m) \to \sum_{i=1}^{m} \propto_i \beta_i$$

є лінійним i, отже, неперервним відображенням, заданим на R^m, а за доведеним вище Λ_f є компактом простору R^m, то існує $\propto^f = \left(\propto_1{}^f, \dots, \propto_m{}^f\right) \in \Lambda_f$ таке, що

$$\min\left\{\sum_{i=1}^{m} \propto_i \beta_i : \propto = (\propto_1, \dots, \propto_m) \in \Lambda_f\right\} = \sum_{i=1}^{m} \propto_i{}^f \beta_i$$

Згідно з нерівністю (1.3) маємо, що для будь-якого $\propto = (\propto_1, \dots, \propto_m) \in \Lambda_f$, де

$$f \in domP^*: P^*(f) = P^*\left(\sum_{i=1}^{m} \propto_i f_i\right) \le \sum_{i=1}^{m} \propto_i \beta_i.$$

Звідси випливає, що

$$P^*(f) \le \min\left\{\sum_{i=1}^{m} \propto_i \beta_i : \propto = (\propto_1, \dots, \propto_m) \in \Lambda_f\right\} \le \sum_{i=1}^{m} \propto_i{}^f \beta_i. \tag{1.5}$$

Водночас, відповідно до теореми 2 [15, с.189] для $f \in domP^*$ існують такі невід’ємні числа

$$\overline{\propto_i}^f, i = \overline{1, m}, \sum_{i=1}^{m} \overline{\propto_i}^f = 1, \text{що } f = \sum_{i=1}^{m} \overline{\propto_i}^f, \text{то } P^*(f) = \sum_{i=1}^{m} \overline{\propto_i}^f \beta_i.$$

Звідси та (1.5) одержимо, що

$$\sum_{i=1}^{m} \propto_i{}^f \beta_i \le P^*\left(\sum_{i=1}^{m} \overline{\propto_i}^f f_i\right) = P^*(f) \le \sum_{i=1}^{m} \propto_i{}^f \beta_i.$$

Тому для всіх $f \in domP^* = CO\{f_1, \dots, f_m\}$

$$P^*(f) = \sum_{i=1}^{m} \propto_i{}^f \ \beta_i,$$

де $\propto^f = \left(\propto_1{}^f, \dots, \propto_m{}^f\right)$ є оптимальний розв'язок задачі відшукання.

$$\min\left\{\sum_{i=1}^{m} \propto_i \ \beta_i : \propto = (\propto_1, \dots, \propto_m) \in \ \Lambda_f\right\},$$

тобто

$$P^*(f) = \ \min\left\{\sum_{i=1}^{m} \propto_i \ \beta_i : \propto_i \geq 0, i = \overline{1,m}; \sum_{i=1}^{m} \propto_i = 1; \ \sum_{i=1}^{m} \propto_i \ f_i = f \ \right\}$$

Остаточно отримаємо, що для всіх $f \in domP^*$:

$$P^*(f) = \sum_{i=1}^{m} \propto_i{}^f \ \beta_i \leq \sum_{i=1}^{m} \propto_i \ \max_{1\leq i\leq m} \beta_i = \max_{1\leq i\leq m} \beta_i \sum_{i=1}^{m} \propto_i = \max_{1\leq i\leq m} \beta_i = \mathrm{C}.$$

Тому Р є функціоналом повного зростання, що й потрібно було встановити.

Приклад 1.4.4. Нехай (У, ||◦||) є лінійним нормованим простором; Y^*-простір, спряжений з (У, $\| \circ \|$); $f_i \in Y^*, \beta_i \in R, i = \overline{1,m}$; $P_i(y) = |f_i(y) - \beta_i|, y \in Y; P(y) = \max_{1\leq i\leq m} P_i(y) = \max_{1\leq i\leq m} |P_i(y) - \beta_i|, y \in Y$.

Покладемо $f_{\mathrm{m}+i} = -f_i, \beta_{\mathrm{m}+i} = \beta_i, \ i = \overline{1,m}$. Тоді

$$domP^* = \mathrm{C}O\{f_1, \dots, f_m, -f_1, \dots, -f_m\} = CO\{f_1, \dots, f_m, f_{m+1}, \dots, f_{2m}\},$$

$$P^*(f) = \begin{cases} \min \sum_{i=1}^{2m} \propto_i \beta_i : \propto_i \geq 0, i = \overline{1,2m}; \sum_{i=1}^{2m} \propto_i = 1;\ f = \sum_{i=1}^{2m} \propto_i f_i, \\ \text{якщо } f \in domP^*, \\ +\infty, \text{якщо } f \notin domP^* \end{cases}$$

Оскільки для

$$\propto_i \geq 0, i = \overline{1,2m}, \sum_{i=1}^{2m} \propto_i = 1: \sum_{i=1}^{2m} \propto_i \beta_i \leq \max_{1 \leq i \leq m} |\beta_i|, \text{то } P^*(f) \leq \max_{1 \leq i \leq m} |\beta_i|$$
$$= \text{C для всіх } f \in domP^*$$

Тому P є функціоналом повільного зростання, заданим на лінійному нормованому просторі (У, ‖ ° ‖).

Дійсно

$$P(y) = \max_{1 \leq i \leq m} P_i(y) = \max_{1 \leq i \leq m} |f_i(y) - \beta_i|$$
$$= max\{f_1(y) - \beta_1, (-f_1)(y) + \beta_1; f_2(y) - \beta_2, (-f_2)(y) + \beta_2; \ldots\ldots; f_\mathrm{m}(y) - \beta_\mathrm{m}, (-f_\mathrm{m})(y) + \beta_\mathrm{m}\} \qquad (1.6)$$

Для доведення (1.6) припустимо, що для $y \in Y$

$P(y) = \max_{1 \leq i \leq m} P_i(y) = \max_{1 \leq i \leq m} |f_i(y) - \beta_i|$=$|f_{i0}(y) - \beta_{i0}|$, де $i_0 \in \{1, \ldots, m\}$ (1.7)

Нехай $|f_{i0}(y) - \beta_{i0}| = f_{i0}(y) - \beta_{i0}$. Тоді одержимо, що

$$P(y) = f_{i0}(y) - \beta_{i0} \leq$$
$$max\left\{ \begin{matrix} f_1(y) - \beta_1, (-f_1)(y) + \beta_1; \ldots\ldots; (f_{i0})(y) - \beta_{i0}, (-f_{i0}) \\ (y) + \beta_{i0}; \ldots; f_\mathrm{m}(y) - \beta_\mathrm{m}, (-f_\mathrm{m})(y) + \beta_\mathrm{m} \end{matrix} \right\} = \bar{P}(y).$$

Отже, в цьому випадку

$$P(y) \leq \bar{P}(y). \qquad (1.8)$$

Нехай

$$\bar{P}(y) = max\{f_1(y) - \beta_1, (-f_1)(y) + \beta_1; \dots; f_{\mathrm{m}}(y) - \beta_{\mathrm{m}}, (-f_{\mathrm{m}})(y) + \beta_{\mathrm{m}}\}$$
$$= (-f_{\mathrm{j}})(y) + \beta_{\mathrm{j}}, \text{де } j \in \{1, \dots, m\}$$

Тоді

$$\bar{P}(y) = (-f_{\mathrm{j}})(y) + \beta_{\mathrm{j}} \leq \left|(-f_{\mathrm{j}})(y) + \beta_{\mathrm{j}}\right| = \left|-(f_{\mathrm{j}}(y) - \beta_{\mathrm{j}})\right| = \left|f_{\mathrm{j}}(y) - \beta_{\mathrm{j}}\right|$$
$$\leq \max_{1 \leq i \leq m} \left|f_{\mathrm{j}}(y) - \beta_{\mathrm{j}}\right| = P(y)$$

Отже, в розглядуваному випадку

$$\bar{P}(y) \leq P(y). \tag{1.9}$$

Зі співвідношень (1.8), (1.9) випливає, що в цьому випадку

$$\bar{P}(y) = P(y) \tag{1.10}$$

Аналогічно доводиться справедливість рівності (1.10) і тоді, коли

$$|(f_{i0})(y) - \beta_{i0}| = (-f_{i0})(y) + \beta_{i0}$$

Отже, рівності (1.10) , (1.6) мають місце для всіх $y \in Y$.

Покладемо $\beta_{m+i} = -\beta_i \geq (f_{m+i} = -f_i, i = \overline{1, m}$

З рівності (1.6) та прикладу 3 випливає, що

$$domP^* = CO\{f_1, \dots, f_m, -f_1, \dots, -f_m\} = CO\{f_1, \dots, f_m, f_{m+1}, \dots, f_{2m}\}$$

$$P^*(f)$$
$$= \begin{cases} min\left\{\sum_{i=1}^{2m} \propto_i (-\beta_i) : \propto_i \geq 0, i = \overline{1,2m}; \sum_{i=1}^{2m} \propto_i = 1; f = \sum_{i=1}^{2m} \propto_i f_i\right\}, \text{якщо } f \\ +\infty, \text{якщо } f \notin domP^*. \end{cases}$$
$$\in domP^*$$

Оскільки, для

$$\propto_i \geq 0, i = \overline{1{,}2m}, \sum_{i=1}^{2m} \propto_i$$
$$= 1; \sum_{i=1}^{2m} \propto_i (-\beta_i)$$
$$\leq \sum_{i=1}^{2m} \propto_i \max\{|\beta_1|, \dots, |\beta_m|\}$$
$$= \max_{1 \leq i \leq \mathrm{m}} |\beta_i| \sum_{i=1}^{2m} \propto_i = \max_{1 \leq i \leq \mathrm{m}} |\beta_i|, \text{то } P^*(f)$$
$$\leq \max_{1 \leq i \leq \mathrm{m}} |\beta_i| = \mathrm{C}, f \in domP^* \ .$$

Тому P є функціоналом повільного зростання, що й потрібно встановити.

Приклад 1.4.5. Нехай (У, ‖◦‖) є лінійним нормованим простором; Y^*-простір, спряжений з (У, ‖◦‖);

$$f_i \in Y^*;\ P(y) = \max_{1 \leq i \leq m} f_i(y), y \in Y$$

Тоді

$$domP^* = CO\{f_1, \dots, f_m,\}$$

$$P^*(f) = \begin{cases} 0, \ \text{якщо } f \in domP^*, \\ +\infty, \text{якщо} f \notin domP^*. \end{cases}$$

Оскільки $P^*(f) = 0 \leq 0$ для всіх $f \in domP^*$, то P є функціоналом повільного зростання, заданим на (У, ‖◦‖).

Справедливість зазначеного випливає з прикладу 1.4.3, частковим випадком якого є цей приклад.

Приклад 1.4.6. Нехай (У, ||◦||) є лінійним нормованим простором, Y^*-простір, спряжений з (У, ||◦||);

$$f_i \in Y^*; P(y) = \max_{1 \le i \le m} |f_i(y)|, y \in Y.$$

Покладемо $f_{\mathrm{m}+i} = (-f_i), i = \overline{1, m}$. Тоді

$$domP^* = CO\{f_1, \dots, f_m, -f_1, \dots, -f_m\} = CO\{f_1, \dots, f_m, f_{m+1}, \dots, f_{2m}\}$$

$$P^*(f) = \begin{cases} 0, \text{ якщо } f \in domP^* \\ +\infty, \text{якщо} f \notin domP^* \end{cases}$$

Справедливість зазначеного випливає з прикладу 1.4.4, частковим випадком якого є цей приклад.

Приклад 1.4.7. Нехай (У, ||◦||) є лінійним нормованим простором, Y^*-простір, спряжений з (У, ||◦||);

$$f_0 \in Y^*; \beta_0 \in R; P(y) = |f_0(y) - \beta_0|, y \in Y.$$

Тоді

$$domP^* = C_0\{f_0, -f_0\} = [f_0, -f_0].$$

якщо $f_0 \neq 0$, то

$$P^*(f) = \propto_1 \beta_0 + \propto_2 (-\beta_0), \text{де } f = \propto_1 f_0 + \propto_2 (-f_0), \propto_1 \geq 0, \propto_2 \geq 0, \propto_1 + \propto_2 = 1.$$

Якщо ж $f_0 = 0$, то $domP^* = \{0\}$ та $P^*(0) = -|\beta_0|$

В усіх випадках $P^*(f) \le |\beta_0|, f \in domP^*$.

Тому P є функціоналом повільного зростання, що й потрібно встановити.

Дійсно, згідно з прикладом 1.1.4

$domP^{*} = CO\{f_0, -f_0\} = \{\propto_1 f_0 + \propto_2 (-f_0) : \propto_1 \geq 0, \propto_2 \geq 0, \propto_1 + \propto_2 = 1\} = [f_0, -f_0]$ - випадок, кінцями якого є функціонали f_0 та $-f_0$. Згідно з цим прикладом одержуємо також, що

$$P^{*}(f) = \min\{\propto_1 \beta_0 + \propto_2 (-\beta_0) : \propto_1 \geq 0, \propto_2 \geq 0, \propto_1 + \propto_2 = 1, f = \propto_1 f_0 + \propto_2 (-f_0)\}.$$

Припустимо, що $f_0 \neq 0$. Тоді для подання

$$f = \propto_1 f_0 + \propto_2 (-f_0), \propto_1 \geq 0, \propto_2 \geq 0, \propto_1 + \propto_2 = 1,$$

одержимо, що $\propto_1 = 1 - \propto_2$, $f = (1 - \propto_2) f_0 + \propto_2 (-f_0) = f_0 - 2 \propto_2 f_0$.

Для іншого такого подання $f = \propto_1' f_0 + \propto_2' (-f_0), \propto_1' \geq 0, \propto_2' \geq 0, \propto_1' + \propto_2' = 1$, отримаємо, що $\propto_1' = 1 - \propto_2'$

$f = (1 - \propto_2') f_0 + \propto_2' (-f_0) = f_0 - 2 \propto_2' f_0$.

Тому $f_0 - 2 \propto_2 f_0 = f_0 - 2 \propto_2' f_0 - 2 \propto_2 f_0 = -2 \propto_2' f_0, \propto_2 f_0 = \propto_2' f_0, (\propto_2 - \propto_2') f_0 = 0$. Оскільки $f_0 \neq 0$, то $\propto_2 - \propto_2' = 0, \propto_2' = \propto_2$. Тоді і $\propto_1' = 1 - \propto_2' = 1 - \propto_2 = \propto_1$.

Отже, подання $f \in domP^{*} = [f_0, -f_0]$ у вигляді $f = \propto_1 f_0 + \propto_2 (-f_0), \propto_1 \geq 0, \propto_2 \geq 0, \propto_1 + \propto_2 = 1$ єдине.

Тому і

$$P^{*}(f) = \propto_1 \beta_0 + \propto_2 (-\beta_0), \text{де } f = \propto_1 f_0 + \propto_2 (-f_0)$$

Якщо ж $f_0 = 0$, то $P(y) = |0(y) - \beta_0| = |\beta_0|$

Звідки

$$P^*(f) = \sup_{y \in Y}(f(y) - P(y) = \sup_{y \in Y}(0(y) - \beta_0) = -|\beta_0|, \text{якщо } f = 0 \text{ і } P^*(f)$$
$$= +\infty, \text{якщо } f \neq 0.$$

Отже, в розглядуваному випадку маємо, що

$$domP^* = [f_0, -f_0]$$

Якщо $f \in domP^*$ і $f_0 \neq 0,$ то $f = \propto_1 f_0 + \propto_2 (-f_0)$ і таке подання єдине. У зв'язку з цим $P^*(f) = \propto_1 \beta_0 + \propto_2 (-\beta_0)$.

якщо ж $f = 0,$ то $domP^* = \{0\}$ і $P^*(0) = -|\beta_0|$.

В усіх випадках $P^*(f) \leq |\beta_0|$ для $f \in domP^* = [f_0, -f_0]$.

Тому P є функціоналом повільного зростання, що й потрібно було встановити.

Приклад 1.4.8. Нехай (У, ||◦||) є лінійним нормованим простором, Y^*- простір, спряжений з (У, ||◦||);

$$P(y) = \|\text{y}\|, y \in Y.$$

Тоді $domP^* = \{f \in X^*: \|f\| \leq 1\} = B_1^*(0) = B^*;$ $P^*(f) = 0, f \in domP^*$ (див., наприклад, [17, с. 227]).

Тому P є функціоналом повільного зростання, заданим на (У, ||◦||).

Дійсно, переконаємося, що P є опуклою та неперервною функцією, заданою на (У, ||◦||).

Для $y_1, y_2 \in Y, \propto \in [0,1]$ маємо, що $P\big((1-\propto)y_1 + \propto y_2\big) = \|(1-\propto)y_1 + \propto y_2\| \leq \|(1-\propto)y_1\| + \|\propto y_2\| = (1-\propto)\|y_1\| + \propto \|y_2\| = (1-\propto)P(y_1) + \propto P(y_2)$.

З цих співвідношень випливає, що P є опуклою функцією (див., наприклад, $[12, \text{с}. 56]$).

Переконаємося у її неперервності. Нехай $y_0 \in Y, \varepsilon > 0$. Маємо, що

$|P(y) - P(y_0)| = |\|y\| - \|y_0\|| \leq \|y - y_0\|$.

З останньої нерівності випливає, що $(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta = \varepsilon > 0)(\forall y: \|y - y_0\| < \delta = \varepsilon)|(P(y) - P(y_0)| < \varepsilon$.

Це й означає, що функція P є неперервною на (У, ||◦||) тому, що вона неперервна у кожній точці $y_0 \in$ У.

Нехай тепер $f \in$ У* і $\|f\| = \sup\limits_{y \neq 0} \frac{f(y)}{\|y\|} > 1$.

Тоді існує $y_0 \neq 0,$ що $\frac{f(y_0)}{\|y_0\|} > 1, f(y_0) > \|y_0\|$.

Для таких f одержимо, що $+\infty \geq P^*(f) = \underset{y \in Y}{sup}(f(y) - P(y)) = \underset{y \in Y}{sup}(f(y) - \|y\|) \geq \underset{t > 0}{sup}(f(ty_0) - \|ty_0\|) = \underset{t > 0}{sup}\big(t(f(y_0) - \|y_0\|)\big) = +\infty$.

Отже, $P^*(f) = +\infty$ для всіх $f: \|f\| > 1$.

Розглянемо далі $f \in B^* = B_1^*(0)$,тобто, для якого $\|f\| \leq 1$; $\|f\| = \sup\limits_{y \neq 0} \frac{f(y)}{\|y\|} \leq 1$; $\frac{f(y)}{\|y\|} \leq 1, f(y) \leq \|y\|$.

З цих співвідношень одержуємо, що для $f \in$ B* :

$$P^*(f) = \underset{y \in Y}{sup}(f(y) - P(y)) = \underset{y \in Y}{sup}(f(y) - \|y\|) \leq 0.$$

Оскільки при $y = 0: f(y) - \|y\| = f(0) - \|0\| = 0$, то $P^*(f) = 0$ для всіх $f \in$ B$^* = B_1^*(0)$.

Таким чином, функція $P(y) = \|y\|, y \in Y$, є функціоналом повільного зростання, оскільки вона є неперервною на (У, ||◦||), опуклою на У та $domP^* = B^* = B_1^*(0)$ і $P^*(f) = 0 \leq 0, f \in domP^*$.

Зауважимо, що у праці [17,с.227] наведені не повні викладки щодо вияснення структури $domP^*$ та значення P^* на $domP^*$. Не зроблено висновку про те, що P є функціоналом повільного зростання на (У, ‖◦‖).

Приклад 1.4.9. Розглянемо неперервні сублінійні функціонали.

Як відомо (див., наприклад, [18, с.13]), функція P , задана на (У, ‖◦‖), називається сублінійним функціоналом, якщо

1) $p(x+y) \leq p(x)+p(y),\ x,y \in Y$;

2) $p(\propto y) = \propto p(y), \propto > 0; y \in Y$.

З умов 1), 2) випливає, що сублінійний функціонал є опуклою на У функцією. Дійсно, якщо $x, y \in Y, \propto \in [0,1]$, то :

$$P\big((1-\propto)x + \propto y\big) \leq P\big((1-\propto)x\big) + P(\propto y) = (1-\propto)P(x) + \propto P(y).$$

Це й означає (див., наприклад, [12, с.56]), що P є опуклою функцією, заданою на Y.

Легко переконатися, що $P(0) = 0$.

Дійсно, згідно 2) $p(2) = p(0) = 2p(0)$. Якщо б $p(0) \neq 0$, то з цих рівностей одержали б, що 1=2. Ця суперечність дозволяє зробити висновок, що $p(0) = 0$ і, отже, якщо P є сублінійним функціоналом, то $p(0) = 0$; $p(x+y) \leq p(x)+p(y)$; $p(\propto y) = \propto p(y), \propto > 0; y \in Y$.

Будемо надалі розглядати лише неперервні сублінійні функціонали, задані на (У, ‖◦‖).

Для кожного отакого функціонала і $f \in Y^*$ отримаємо, що

$$P^*(f) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } f \in domP^*, \\ +\infty, & \text{якщо} f \notin domP^*. \end{cases}$$

Дійсно, нехай $f \in domP^*$. Це означає, що

$$P^*(f) = \sup_{y \in Y}\big(f(y) - P(y)\big) < +\infty.$$

Звідси випливає, що $f(y) \leq P(y)\ \forall y \in Y$.

У протилежному випадку існував би елемент $y_0 \in Y$, для якого $f(y_0) > P(y_0)$. Тоді б $+\infty \geq P^*(f) = \sup_{y \in Y}\big(f(y) - P(y)\big) \geq \sup_{t>0}\big(f(ty_0) - P(ty_0)\big) = \sup_{t>0} t\big(f(y_0) - P(y_0)\big) = +\infty$. Звідси випливає, що $P^*(f) = +\infty$, що суперечить включенню $f \in domP^*$.

Отже, для всіх $f \in domP^* : f(y) \leq P(y), y \in Y$. Тому $0 = f(0) - P(0) \leq P^*(f) = \sup_{y \in Y}\big(f(y) - P(y)\big) \leq 0$, оскільки $f(y) - P(y) \leq 0$.

Завдяки цьому одержуємо, що $P^*(f) = 0, f \in domP^*$.

Оскільки $P^*(f) = 0, f \in domP^*$, а Р є опуклим і неперервним функціоналом на (У, ||◦||), то Р є функціоналом повного зростання.

1.5. Теорема Фенхеля-Моро

Теорема 1.5 (див., наприклад, [19, с.39]). Нехай Р є власною опуклою та замкненою функцією на (У, ||◦||). Тоді $P = P^{**}$, де

$$P^{**}(y) = \sup_{f \in Y^*}\big(f(y) - P^*(f)\big), y \in Y.$$

Візьмемо до уваги, що функція P називається:

- власною, якщо $domP = \{y \in Y : P(y) < +\infty\} \neq \emptyset$ і $P(y) > -\infty, y \in Y$;
- замкненою, якщо її надграфік

  $$epi\ P = \{(y, \beta) \in Y \times R : P(y) \leq \beta\}$$

  є замкненою множиною в просторі $Y \times R$;

- опуклою, якщо її надграфік $epi\ P$ є опуклою множиною в просторі $Y \times R$.

  Як уже зазначалось, для опуклості власної функції P на (У, ||◦||), необхідно і достатньо, щоб $\forall y_1 y_2 \in Y$ виконувалась нерівність

  $P((1-\propto)y_1 + \propto y_2) \le (1-\propto)(P(y_1) + \propto P(y_2)$,

  (див., наприклад,[12, с.56]).

Переконаємося, що має місце таке твердження.

Твердження 1.5.1. Будь-яка неперервна на (У, ||◦||) функція P є замкненою функцією, заданою на (У, ||◦||).-

Доведення. Для доведення переконаємося насамперед, $epi\,P$ є замкненою множиною в просторі $Y \times R$. Для цього достатньо з'ясувати, що доповнення $(Y \times R) \backslash\ epi\ P$ є відкритою множиною простору $Y \times R$.

Розглянемо довільну точку $(y_0, \beta_0) \in (Y \times R) \backslash epi\ P$. Тоді $\beta_0 < P(y_0)$. Нехай $0 < \varepsilon < P(y_0) - \beta_0,\ \beta_0 + \varepsilon < P(y_0)$.

Розглянемо $O(\beta_0) = (\beta_0 - \varepsilon, \beta_0 + \varepsilon)$.

Оскільки функція P є неперервною в точці y_0, то для

$(\mathcal{E}_1 = P(y_0) - (\beta_0 + \varepsilon) > 0)(\exists O(y_0))(\forall y \in O(y_0))|P(y_0) - P(y)| < \mathcal{E}_1$.

Для $O(y_0, \beta_0) = O(y_0) \times O(\beta_0)$ одержимо, що

$$(y, \beta) \in O(y_0, \beta_0) \Rightarrow y \in O(y_0) \wedge \beta \in O(\beta_0) \Rightarrow P(y_0) - P(y) \le$$
$$|P(y_0) - P(y)| < \varepsilon = P(y_0) - (\beta_0 + \varepsilon).$$

З отриманих співвідношень маємо, що $P(y) > \beta_0 + \varepsilon, \beta < \beta_0 + \varepsilon$ для всіх $(y, \beta) \in O(y_0, \beta_0) = O(y_0) \times O(\beta_0)$.

З попередніх співвідношень

$$\forall(y,\beta) \in O(y_0,\beta_0) = O(y_0) \times O(\beta_0) : \ P(y) > \beta$$

Це означає, що жодні точки $O(y_0,\beta_0)$ не належить $epi\,P$. Тому $O(y_0,\beta_0) \subset Y \times R \backslash epi\ P$.

Тобто, точка (y_0,β_0) входить в $Y \times R \backslash epi\, P$ разом з своїм околом $O(y_0,\beta_0)$. Це означає, що $Y \times R \backslash epi\ P$ є відкритою множиною в $Y \times R$.

Тоді, як відомо, $epi\ P$ є замкненою множиною.

Твердження доведено.

Функції P, які розглядалися в прикладах (1.1.1 – 1.1.9), приймають скінченні значення на Y, тому вони є власними функціями. Всі вони є опуклими та неперервними.

Тому згідно з доведеним твердженням є замкненими. Отже, всі функції P розглядувані в прикладах 1.4.1-1.4.9 є власними опуклими та замкненими функціями. Тому вони задовольняють умови теореми Фенхеля-Моро. Згідно з цією теоремою для всіх цих функцій маємо, що

$$\mathrm{P}(y) = P^{**}(y) = \sup_{f \in Y^*}\big(f(y) - P^*(f)\big), y \in Y.$$

Оскільки для

$$f \notin domP^* : \ P^*(f) = +\infty, -P^*(f) = -\infty, f(y) - P^*(f) = -\infty,$$

$$\text{то} \quad \mathrm{P}(y) = P^{**}(y) = \sup_{f \in domP^*}\big(f(y) - P^*(f)\big), y \in Y \,.$$

Відомо (див., наприклад, [15, с.185]), що спряжена функція P^* до будь-якої функції P на (У, ||◦||) є замкненою в слабкій* топології простору У* і опуклою, а якщо P є власною опуклою замкненою функцією, то P^* є власною функцією.

Отже, в наших прикладах 1.4.1 - 1.4.9 P^* є власною опуклою і замкненою функцією, заданою на У*. Умову замкненості в термінах лебегових множин множна охарактеризувати таким чином: функція Р задана на (У, ||◦||), є замкненою тоді і тільки тоді, коли всі її лебегові множини $\{y \in Y : P(y) \leq \propto, \propto \in R\}$ є замкненими множинами (У, ||◦||) (див., наприклад, [15, с.178]).

Функція P^* є замкненою в слабкій * топології простору У* тоді і тільки тоді, коли всі лебегові множини $\{f \in X^* : P^*(f) \leq \propto, \propto \in R\}$ є замкненими у слабкій * топології простору У* (див., наприклад, [15, с.178]).

Із зауваження до теореми 6.3.9 [4, с.323] випливає, що коли Р є опуклим неперервним функціоналом, заданим на (У, ||◦||), то P^* є компактним знизу у розумінні слабкої * топології функціоналом на У*, тобто для будь-якого $C \in R$ нижні лебегові множини цього функціонала $\{f \in У^* : P^*(f) \leq C\}$ є компактними у слабкій * топології.

Згідно з теоремою 1 [19, с.23] у випадку банахового простору (У, ||◦||) підмножина простору У* є слабко* компактною тоді і тільки тоді, коли вона замкнена у слабкій * топології і обмежена в У*.

Нехай (У, ||◦||) є банаховим простором. Оскільки функціонал повільного зростання є заданим опуклим і неперервним на (У, ||◦||) та існує таке число С, що $dom\, P^* = \{f \in У^* : P^*(f) \leq C\}$, то $dom\, P^*$ є лебеговою множиною функціонала P^*, спряженого до заданого на (У, ||◦||) опуклого та неперервного функціонала Р. Тому $dom\, P^*$ є обмеженою в У* та замкненою у розумінні слабкої* топології множиною, а, отже, слабкою* компактною множиною.

Оскільки для кожного $y \in Y$ відображення $f \in domP^* \to f(y) - P^*(f)$ є неперервним у розумінні слабкої * топології на $domP^*$ (див., наприклад, [12, с.48]), а $domP^*$ є слабко* компактною множиною для функціонала P повільного зростання, то у формулі 1.11) sup можна замінити на max.

Отже, за цих умов для функціонала повільного зростання P можна записати, що

$$P(y) = \max_{f \in Y^*}\big(f(y) - P^*(f)\big), y \in Y, \quad (1.12)$$

тобто для кожного $y \in Y$ існує $f_y \in domP^*$, що

$$P(y) = \max_{f \in domP^*}\big(f(y) - P^*(f)\big) = f_y(y) - P^*(f_y). \quad (1.13)$$

РОЗДІЛ 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ. ВЛАСТИВОСТІ ЦІЛЬОВОЇ ФУНКЦІЇ. ЗАДАЧІ ВІДШУКУВАННЯ ВЕЛИЧИНИ ТА УМОВИ ІСНУВАННЯ ЇЇ АКСІОМАТИЧНОГО ЕЛЕМЕНТА

2.1. Постановка задачі та деякі її часткові випадки

Будемо вважати, що h є невід'ємною опуклою неперервною функцією повільного зростання, заданою на банаховому просторі (У, ||◦||),

$$e_i \in Y, i = \overline{1, m}, A \subset Y$$

Відносною задачею Штейнера в лінійному нормованому просторі (У, ||◦||), в якій міра відхилення між елементами оцінюється з допомогою невід'ємної опуклої неперервної функції h, назвемо задачу відшукання величини

$$\Im_A^h(\{e_i\}_{i=1}^r) = \inf_{y \in A} \sum_{i=1}^r h(y - e_i). \tag{2.1}$$

Якщо існує елемент $y^* \in$ A такий, що

$$\sum_{i=1}^r h(y - e_i) \geq \sum_{i=1}^r h(y^* - e_i)\,, y \in \text{A},$$

тобто, для якого

$$\Im_A^h(\{e_i\}_{i=1}^r) = \inf_{y \in A} \sum_{i=1}^r h(y - e_i) = \sum_{i=1}^r h(y^* - e_i),$$

то цей елемент $y^* \in$ A будемо називати екстремальним елементом для задачі відшукання величини (2.1) (екстремальним елементом для величини (2.1)), оптимальним розв'язком для задачі відшукання величини (2.1) або узагальненою точковою Штейнера в розумінні функції повного зростання h у множині A точок $e_i, \dots, e_r$.

У випадку, коли $h(y) = \|y\|, y \in Y$, задача відшукання величини (2.1) набере вигляду

$$\inf_{y \in A} \sum_{i=1}^{r} \|y - e_i\|. \tag{2.2}$$

Задача (2.2) є частковим випадком задачі відшукання величини (2.1), оскільки $h = || \cdot ||$ є невід'ємною опуклою неперервною функцією повільного зростання (див., приклад 1.4.8 розділу 1).

Задачі (2.2) є класичною задачею Штейнера, яка розглядалась у багатьох працях (див., наприклад, [11, с.34]).

У випадку, коли $h(y) = P(y), y \in Y,$ де P є невід'ємною неперервною сублінійною функцією, задача відшукання величини (2.1) набере вигляду

$$\inf_{y \in A} \sum_{i=1}^{r} P(y - e_i). \tag{2.3}$$

Задача (2.3) є частковим випадком задачі відшукання величини (2.1), оскільки неперервна сублінійна функція є функціоналом повільного зростання (див. приклад 1.4.9 розділу 1).

У випадку, коли

$$h(y) = \max_{1 \le j \le m} \left| f_j(y) - \beta_j \right|, y \in Y, \text{де } f_j \in Y^*, \beta_j \in R, j = \overline{1, m} \ ,$$

задача відшукання величини (2.1) набере вигляду

$$\inf_{y \in A} \sum_{i=1}^{r} \max_{1 \le j \le m} \left| f_j(y - e_i) - \beta_j \right|. \tag{2.4}$$

Задача (2.4) є частковим випадком задачі відшукання величини (2.1), оскільки відображення $y \in Y \to \max_{1\le j\le m} \left| f_j(y-e_i)-\beta_j \right|$ є невід'ємною опуклою неперервною функцією повільного зростання (див., приклад 1.4.4 розділу 1).

При $\beta_j = 0, j = \overline{1,m}$, задача відшукання величини (2.4) набере вигляду

$$\inf_{y\in A} \sum_{i=1}^{r} \max_{1\le j\le m} \left| f_j(y-e_i) \right|. \tag{2.5}$$

Подібні приклади можна продовжити.

Кожна із задач (2.2) – (2.5) та інші задачі, які є частковими випадками задачі (2.1) представляють і самостійний інтерес.

Окремі результати для цих задач можна отримати із загальних результатів дослідження задачі відшукання величини (2.1), в тому числі з тих, які будуть отримані далі в дипломній роботі.

2.2. Властивості цільової функції задачі відшукання величини (2.1)

Відомо, що цільовою функцією екстремальної задачі (задачі відшукання інфімуму або супремуму) називається та функція, інфімум чи супремум якої шукається.

У випадку задачі відшукання величини (2.1) цільовою функцією є функція

$$\varphi(y) = \sum_{i=1}^{r} h(y-e_i), y \in Y, \tag{2.6}$$

Якщо позначати через $\varphi_i(y) = h(y-e_i),\ y \in Y$, то

$$\varphi(y) = \sum_{i=1}^{r} \varphi_i(y), y \in Y.$$

Щодо цільової функції $\varphi(y)$ та її доданків $\varphi_i(y), y \in Y$, має місце таке твердження.

Теорема 2.2.1. Цільова функція $\varphi(y), y \in Y,$ задачі відшукання величини (2.1), (див. (2.6)) та функції $\varphi_i(y), y \in Y,\ i = \overline{1, r},$ (див., (2.7)) є невід'ємними власними опуклими ліпшіцевими неперервними функціями повільного зростання.

Доведення. Оскільки за умовою функція h є невід'ємною, то для будь-якого $y \in Y\ i \in \{1, \ldots, r\}\ h(y - e_i) \geq 0$. Тому і

$$\varphi(y) = \sum_{i=1}^{r} h(y - e_i) \geq 0, y \in Y.$$

Отже, цільова функція (2.6) задачі відшукання величини (2.1) є невід'ємною функцією. Переконаємося у її опуклості. Оскільки $\varphi(y), y \in Y$ є конкретним дійсним числом, а не $\pm\infty$, то $\varphi(y), y \in Y$, є власною функцією. Для встановлення її опуклості потрібно давати, що для будь-яких $y_1, y_2 \in Y, \propto \in [0,1]$ виконується нерівність

$$\varphi(1{-}\propto)y_1{+}\propto y_2) \leq (1{-}\propto)\varphi(y_1) + \varphi(y_2) \tag{2.8}$$

(див., наприклад, [12, с.56]).

Отримаємо, що

$$\varphi((1-\propto)y_1+\propto y_2)$$
$$=\sum_{i=1}^{r} h((1-\propto)y_1+\propto y_2-e_i$$
$$=\sum_{i=1}^{r} h\big((1-\propto)y_1+\propto y_2-((1-\propto)e_i+\propto e_i)\big)$$
$$=\sum_{i=1}^{r} h\big((1-\propto)(y_1-e_i)+\propto (y_2-e_i)\big)$$
$$\leq\sum_{i=1}^{r}\big((1-\propto)h(y_1-e_i)+\propto h(y_2-e_i)\big)$$
$$=(1-\propto)\sum_{i=1}^{r} h(y_1-e_i)+\propto \sum_{i=1}^{r} h(y_2-e_i) \ =(1-\propto)\,\varphi(y_1)+\propto \varphi(y_2).$$

Отже, цільова функція (2.6) задачі (2.1) є опуклою функцією.

Переконаємося в неперервності цієї функції.

Для $i=\{1,\ldots.,r\}$ позначаємо через

$$\varphi_i(y)=h(y-e_i), y\in Y$$

Згідно (2.6)

$$\varphi(y)=\sum_{i=1}^{r} h(y-e_i)=\sum_{i=1}^{r}\varphi_i(y).$$

Для $\varphi_i(y), y_1, y_2 \in Y$ маємо, що

$$\varphi_i(y_1) - \varphi_i(y_2) = h(y_1 - e_i) - h(y_2 - e_i)$$
$$= \max_{f \in dom\, h^*} \big(f(y_1 - e_i) - h^*(f)\big)$$
$$- \max_{f \in dom\, h^*} \big(f(y_2 - e_i) - h^*(f)\big) = f_1(y_1 - e_i) - h^*(f_1)$$
$$- \max_{f \in dom\, h^*} \big(f(y_2 - e_i)\big) - h^*(f)$$
$$\leq f_1(y_1 - e_i) - h^*(f_1) - f_1(y_2 - e_i) + h^*(f_1) = f_1(y_1 - y_2)$$
$$\leq \|f_1\| \|y_1 - y_2\| \leq \mathcal{L} \|y_1 - y_2\|, \text{де } f_1 \in dom\, h^*, \text{а } \mathcal{L}$$
$$= \sup_{f \in dom\, h^*} \|f\|. \qquad (2.10)$$

Оскільки h за умовою є функціоналом повільного зростання, то множина $dom\, h^*$ є обмеженою множиною і, отже, $\sup\limits_{f \in dom\, h^*} \|f\| = \mathcal{L} < +\infty$.

Аналогічно доводиться, що

$$\varphi_i(y_2) - \varphi_i(y_1) \leq \mathcal{L} \|y_2 - y_1\| = \mathcal{L} \|y_1 - y_2\|. \qquad (2.11)$$

Зі співвідношення (2.10), (2.11) одержимо, що

$$|\varphi_i(y_1) - \varphi_i(y_2)| \leq \mathcal{L} \|y_1 - y_2\|. \qquad (2.12)$$

Зі співвідношення (2.12) випливає, що для $i = \{1, \dots, r\}$ функція φ_i задовільняють умови Ліпшиця на (У, ||◦||)

з константною $\mathcal{L} = \sup\limits_{f \in dom\, h^*} \|f\|$.

Але ж, якщо якась функція $\psi(y), y \in Y$, на (У, ||◦||) задовольняє умову Ліпшиця з конкретною $C > 0$, то вона є неперервною на (У, ||◦||). Дійсно, нехай $y \in Y, \varepsilon > 0$. Маємо, що

$|\psi(y) - \psi(y_0)| \leq \mathrm{C}\|y - y_0\|.$

Покладемо $\delta = \frac{\varepsilon}{\mathrm{C}}$. Тоді

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta = \frac{\varepsilon}{\mathrm{C}})(\forall y : \|y - y_0\| < \delta$$

$$|\psi(y) - \psi(y_0)| \leq \mathrm{C}\|y - y_0\| < C\delta = C\frac{\varepsilon}{\mathrm{C}} = \varepsilon.$$

З цих співвідношень одержуємо, що ψ є неперервною в кожній точці $y_0 \in Y$. Тоді ψ є неперервною на (У, ||◦||).

Оскільки функції $\varphi_i, i = \overline{1, r}$, задовольняють умови Ліпшиця на У з конкретною $\mathcal{L}$ (див., (2.12)), то згідно з зауваженням вище, вони є неперервними на У. Зрозуміло, що тоді цільова функція $\varphi(y), y \in Y$ задачі відшукання величини (2.1) є неперервною на (У, ||◦||), оскільки вона є сумою r неперервних на (У, ||◦||) функцій.

Щодо ліпшецевості функції $\varphi(y), y \in Y$, то маємо, що для $y_1, y_2 \in Y$

$$|\varphi(y_1) - \varphi(y_2)| = \left|\sum_{i=1}^{r} \varphi_i(y_1) - \sum_{i=1}^{r} \varphi_i(y_2)\right| = \left|\sum_{i=1}^{r} (\varphi_i(y_1) - \varphi_i(y_2))\right|$$
$$\leq \sum_{i=1}^{r} |\varphi_i(y_1) - \varphi_i(y_2)| \leq \sum_{i=1}^{r} \mathcal{L}\|y_1 - y_2\| = \|y_1 - y_2\| \sum_{i=1}^{r} \mathcal{L}$$
$$= r\mathcal{L}\|y_1 - y_2\|.$$

Отже, цільова функція φ задачі відшукання величини (2.1) є ліпшицевою на (У, ||◦||) з конкретною $r\mathcal{L}$. Тобто

$$|\varphi(y_1) - \varphi(y_2)| \leq r\mathcal{L}\|y_1 - y_2\|. \tag{2.14}$$

Зі співвідношення (2.14) випливає також, що функція $\varphi(y), y \in Y$, є неперервною на У. Отже, ми довели, що цільова функція $\varphi(y), y \in Y$, задачі відшукання величини (2.1) є невід'ємною неперервною опуклою функцією, заданою на (У, ||◦||).

Переконаємося спочатку, що функції $\varphi_i(y), y \in Y, i = \overline{1,r}$ є функціями повільного зростання. З приведених вище міркувань випливає, що вони є опуклими та неперервними на (У, ||◦||).

Для $i \in \{1, \dots, r\}$ знайдемо вираз для $\varphi_i{}^*(f), f \in Y^*$,

$$\varphi_i{}^*(f) = \sup_{y\in Y}\big(f(y) - \varphi_i(f)\big) = \sup_{y\in Y}(f(y) - h(y - e_i)) = \sup_{y\in Y}(f(y - e_i) - h(y - e_i) + f(e_i) = \sup_{z\in Y}\big(f(z) - h(z)) + f(e_i)\big) = h^*(f) + f(e_i).$$

(2.15)

Оскільки h є функцією повільного зростання на (У, ||◦||), то $h^*(f) \le \beta, f \in dom\, h^*, \sup\limits_{f\in dom\, P^*} \|f\| = \mathcal{L} < +\infty$.

З (2.15) одержимо, що при $f \notin dom\, h^* :\ h^*(f) = +\infty$.

Тому і $\varphi_i{}^*(f) = +\infty +\ f(e_i) = +\infty$. Якщо ж $f \in dom\, h^*$, то $\varphi_i{}^*(f) = h^*(f) + f(e_i) < +\infty$. Отже, $dom\, \varphi_i{}^* = dom\, h^*$ і для $f \in dom\ \varphi_i{}^* = dom\, h^*$: $\varphi_i{}^*(f) = h^*(f) + f(e_i) \le \beta + \|f\|\|e_i\| \le \beta + \mathcal{L}\|e_i\|$.

Отже, на $dom\, \varphi_i{}^* = dom\, h^*$ маємо, що $\varphi_i{}^*(f)$ є обмеженою зверху.

Тому кожна функція $\varphi_i(y), y \in Y$, є неперервною опуклою і такою, що її спряжена функція $\varphi_i{}^*(f)$ є обмеженою зверху на $dom\, \varphi_i{}^* = dom\, h^*$.

Це означає, що для $i = \overline{1,r}$ функції $\varphi_i(y), y \in Y$, є функціями повільного зростання , заданими на (У, ||◦||).

Розглянемо далі подібні питання щодо функції $\varphi(y), y \in Y$. Вище встановлено, що ця функція приймає скінченне значення, опукла і неперервна на Y, причому

$$\varphi(y) = \sum_{i=1}^{r} \varphi_i(y)\,, y \in Y.$$

Внаслідок теореми 1 [15 ,с.188, 189] для будь-якого $f \in dom\,\varphi_i = dom\,(\varphi_1 + \cdots .. + \varphi_r)^*$ знайдуться такі $f_i^* \in dom\,\varphi_i^*, i = 1, \dots., r,$ що $f = f_1^* + \cdots + f_r^*$ та $\varphi^*(f) = (\varphi_1 + \cdots + \varphi_r)^*(f) = \varphi_1^*(f_1^*) + \cdots + \varphi_r^*(f_r^*)$.

(2.17)

Але ж $\varphi_i^*(f) \le \beta + \mathcal{L}\|e_i\|$ (див.(2.16)).

Звідси випливає, що $\varphi^*(f) = \varphi_1^*(f_1^*) + \cdots + \varphi_r^*(f_r^*) \le \beta + \mathcal{L}\|e_1\| + \beta + \mathcal{L}\|e_r\| + \cdots + \beta + \mathcal{L}\|e_r\| = r\beta + \mathcal{L}(\|e_1\| + \cdots + \|e_r\|)$.

Таким чином $\varphi^*(f) = +\infty$ для $f \notin dom\,\varphi^*$ та $\varphi^*(f) \le r\beta + \mathcal{L}(\|e_1\| + \cdots + \|e_2\|), f \in dom\,\varphi^*$. Крім того, $\|\,f\| = \|f_1^* + \cdots + f_r^*\| \le \|f_1^*\| + \cdots + \|f_r^*\| \le r\mathcal{L}$

Це й означає, що φ є функціоналом повільного зростання.

Теорему доведено.

З доведеної теореми можна зробити висновок, що цільові функції задач (2.2) – (2.5) є невід'ємними власними опуклими ліпшіцевими неперервними функціями повільного зростання.

Теорема 2.2.2. Нехай φ – цільова функція задачі відшукання величини (2.7) (див. (2.6)),

$$\varphi_i(y) = h(y - e_i), y \in Y, i = \overline{1,r}, \varphi(y) = \sum_{i=1}^{r} \varphi_i(y)\,, y \in Y.$$

Мають місце співвідношення:

1) $dom\,\varphi_i^* = dom\,h^*,\ \varphi_i^*(f) = h^*(f) + f(e_i),\ i = \overline{1,r};$

2) $dom\,\varphi^* = \underbrace{dom\,h^* + \cdots + dom\,h^*}_{r \text{ разів}}$; якщо $f = f_1{}^* + \cdots + f_r{}^*$, де $f \in dom\,\varphi^*, f_i{}^* \in dom\,\varphi_i{}^* = dom\,h^*$, то $\varphi^*(f) = \sum_{i=1}^{r} \varphi_i^*(f_i^*)$;

3) для $f \in dom\,\varphi^*$ існують $f_i{}^* \in dom\,\varphi_i{}^* = dom\,h^*,\ i = \overline{1, r}$, що $f = \sum_{i=1}^{r} f_i^*$, $\varphi^*(f) = \sum_{i=1}^{r} \varphi_i^*(f_i^*) = \sum_{i=1}^{r} h^*(f_i^*) + \sum_{i=1}^{r} f_i^*(e_i^*)$.

Доведення. Зі співвідношення (2.15) маємо, що для всіх $i \in \{1, \dots, r\}, f \in$ У* :

$$\varphi_i{}^*(f) = h^*(f) + f(e_i),$$

З цього співвідношення випливає, що коли $f \notin dom\,h^*$, то $h^*(f) = +\infty$ і, отже, $\varphi_i{}^*(f) = h^*(f) + f(e_i) = +\infty$

Якщо ж $f \in dom\,h^*$, то $h^*(f) \leq \beta$. Тому $h^*(f) + f(e_i) < +\infty$

Звідси зробимо висновок, що $dom\,\varphi_i{}^* = dom\,h^*$ та

$$\varphi_i{}^*(f) = h^*(f) + f(e_i), f \in dom\,\varphi_i{}^* = dom\,h^*. \quad (2.18)$$

Для будь-якого $f \in dom\,\varphi^* = dom\,(\varphi_1 + \cdots .. + \varphi_r)^*$ існують

$f_i{}^* \in dom\,\varphi_i{}^*, i = \overline{1, r}$, що $f = f_1{}^* + \cdots + f_r{}^*$ та $\varphi^* = (\varphi_1 + \cdots + \varphi_r)^*(f) = \varphi_1{}^*(f_1{}^*) + \cdots + \varphi_r{}^*(f_r{}^*) = h^*(f_1{}^*) + f_1{}^*(e_1) + \cdots + h^*(f_2{}^*) + f_2{}^*(e_2)$.

Звідси випливає, що

$$dom\,\varphi^* \subset dom\,\varphi_1{}^* + \cdots + dom\,\varphi_2{}^* = dom\,h^* + \cdots + dom\,h^*. \quad (2.19)$$

Навпаки, нехай $f \in dom\,h^* + \cdots + dom\,h^*$. Тоді $f = f_1 + \cdots + f_r$, де $f_i \in dom\,h^* = dom\,\varphi_i{}^*, i = \overline{1, r}$.

Тому

$$\varphi^*(f) = \sup_{y\in Y}\big(f(y) - \varphi(y)\big) = \sup_{y\in Y}\left(\sum_{i=1}^{r} f_i(y) - \sum_{i=1}^{r}\varphi_i(y)\right)$$

$$= \sup_{y\in Y}\sum_{i=1}^{r}\big(f_i(y) - \varphi_i(y)\big).$$

Оскільки $f_i(y) - \varphi_i(y) \le \sup_{y\in Y}\big(f_i(y) - \varphi_i(y)\big) = \varphi_i{}^*(f_i) = h^*(f_i) + f_i(e_i) < +\infty$, то

$$\sum_{i=1}^{r}(f_i(y) - \varphi_i(y)) \le \sum_{i=1}^{r}\sup_{y\in Y}\big(f_i(y) - \varphi_i(y)\big) = \sum_{i=1}^{r} h^*(f_i) + \sum_{i=1}^{r} f_i(e_i) < +\infty$$

Звідси й випливає, що

$$\varphi^*(f) = \sup_{y\in Y}\sum_{i=1}^{r}(f_i(y) - \varphi_i(y)) \le \sum_{i=1}^{r} h^*(f_i) + \sum_{i=1}^{r} f_i(e_i) < +\infty$$

Тому $f \in dom\ \ \varphi^*$ і, отже,

$$\underbrace{dom\, h^* + \cdots + dom\, h^*}_{r \text{ разів}} \subset\ dom\,\varphi^*$$

Внаслідок цього та співвідношення (2.19) одержуємо рівність

$$dom\ \ \varphi^* = dom\, h^* + \cdots + dom\, h^*$$

Теорему доведено.

2.3. Умови існування екстремального елемента для задачі відшукання величини (2.1).

Важливу роль для позитивної відповіді на питання існування екстремального елемента в екстремальних задачах апроксимаційного характеру відіграє локальна компактність множини, в якій шукається цей екстремальний елемент. Стосовно задачі (2.1) такою множиною є множина А.

Множина А лінійного нормованого простору (У, ||◦||) називається локально компактною, якщо з будь-якої її обмеженої послідовності можна вибрати збіжну послідовність (див., наприклад, [3, с. 21]).

Теорема 2.3.1. Якщо локально компактна множина $A \subset (У, ||°||)$ є замкнутою множиною, то з будь-якої її обмеженої послідовності можна вибрати підпослідовність, яка збігається, до точки цієї множини.

Доведення. Дійсно, якщо А є локально компактною множиною, то з будь-якої її обмеженої послідовності $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}, (y_k \in A, k = 1, 2, \ldots..)$ можна вибрати послідовність $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$, яка збігається, до деякої точки y_0.

Переконаємося, що $y_0 \in A$. Припустимо, що $y_0 \notin A$, де А – замкнена множина. Тоді $y_0 \in Y \backslash A$ – відкрита множина. Тоді існує такий відкритий окіл $O(y_0) \subset Y \backslash A$, тобто в цьому околі $O(y_0)$ точки y_0 немає жодної точки множини А. Але ж $\lim\limits_{e \to \infty} y_{k_e} = y_0$.

На мові околів це означає, що для

$$(\forall O(y_{0)})(\exists e_0 \in N)(\forall e > e_0) y_{k_e} \in O(y_0),$$

причому точки y_{k_e} є точками множини А.

Виходить, що в $O(y_0)$ немає точок множини А, тому що $O(y_0) \subset Y \backslash A$, а з другого боку такі точки є, оскільки $y_{k_e} \in$ А і $y_{k_e} \in O(y_0), e > e_0$.

Одержимо суперечність і доводимо, що $y_0 \in A$.

Твердження доведено.

Згідно з теоремою Больцано - Вейєрштрасса (див., наприклад, [20, с. 73]) з будь-якої обмеженої послідовності точок простору R^m можна вибрати збіжну підпослідовність.

Якщо $A \subset R^m$ і A є обмеженою множиною , то вона є локально компактною множиною.

Дійсно, якщо $, y_k \in A, k = 1, 2, \ldots,$ і A обмежена, то $\{y_k\}_{x=k=1}^{\infty}$ є обмеженою. Тоді за теоремою Больцано - Вейєрштрасса з $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ можна вибрати збіжну підпослідовність.

Отже, з будь-якої обмеженої послідовності точок обмеженої множини A простору R^m можна вибрати збіжну підпослідовність. Тому будь-яка обмежена множина, скінченновимірного простору R^mє локально компактною множиною.

Але ж, якщо простір $(Y, \|\cdot\|)$ не є скінченно вимірним, тобто є нескінченновимірним, то в ньому можуть бути обмежені множини, які не є локально компактними, тобто в яких не з кожної обмеженої послідовності можна вибрати збіжну підпослідовність.

Важливим прикладом для задач апроксимацією характеру є скінченновимірний підпростір простору Y, де $(Y, \|\circ\|)$ є лінійним нормованим простором.

Твердження 2.3.2. Нехай $(Y, \|\circ\|)$ є лінійним нормованим простором, а A є скінченновимірним підпростором простору Y. Тоді A є локально компактною множиною.

Доведення. Оскільки A є скінченновимірним підпростором Y, то існують такі лінійно незалежні вектори $y_1, y_2, \ldots, y_p$, що

$$A = \left\{ \sum_{j=1}^{p} \lambda_j y_j \,:\, \lambda_j \in R, j = \overline{1,p} \right\}.$$

Нехай $\{y^k\}_{k=1}^{\infty}$ є обмеженою послідовністю A, де

$$y^k = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j\, y_j, \lambda_j{}^k \in R, j = \overline{1,p}, k = 1,2, \ldots$$

Тобто існує число $C > 0$ що

$$\|y^k\| = \left\| \sum_{j=1}^{p} \lambda_j{}^k y_j \right\| \leq C, k = 1,2, \ldots \quad (2.20)$$

На сфері

$$S = \left\{ \lambda = (\lambda_1, \ldots \lambda_p) : \sum_{j=1}^{p} \lambda_j{}^2 = 1 \right\}$$

розглянемо функцію $\psi(\lambda_1, \ldots \lambda_p) = \|\lambda_1 y_1 + \cdots \lambda_p y_p\|$. Ясно, що для всіх $\lambda = (\lambda_1, \ldots \lambda_p) \in R^p$.

$\psi(\lambda_1, \ldots \lambda_p) \geq 0$, тому, що $\|y\| \geq 0$ для всіх $y \in Y$. Якщо ж

$$\lambda = (\lambda_1, \ldots \lambda_p) \in S, \text{то} \sum_{\delta=1}^{p} \lambda_j{}^2 = 1$$

Тому серед чисел λ_j є $\neq 0$.

Звідси випливає, що $\psi(\lambda_1, \ldots \lambda_p) > 0$ для всіх $(\lambda_1, \ldots \lambda_p) \in S$. Якщо б для якогось $(\lambda_1, \ldots \lambda_p)$ із $S :\ \psi(\lambda_1, \ldots \lambda_p) = \|\lambda_1 y_1 + \cdots \lambda_p y_p\| = 0$, то тоді б і $\lambda_1 y_1 + \cdots + \lambda_p y_p = 0$. Оскільки $y_1, \ldots, y_p$ є лінійно незалежними, то тоді б $\lambda_1, \ldots, \lambda_p = 0$.

Звідси $1 = {\lambda_1}^2 + \cdots + {\lambda_p}^2 = 0^2 + \cdots + 0^2 = 0, 1 = 0$. Одержана суперечність доводить , що $\psi(\lambda_1, \dots \lambda_p) = \|\lambda_1 y_1 + \cdots \lambda_p y_p\| > 0$, якщо $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in S$. Ясно, що S є обмеженою та замкненою (компактом) простору R^p. Переконаємося у неперервності функції ψ на R^p. Візьмемо $\lambda^0 = ({\lambda_1}^0, \dots, {\lambda_p}^0)$ і $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_p)$. Розглянемо

$$|\psi(\lambda) - \psi(\lambda^0)| = \left|\left\|\sum_{j=1}^{p} \lambda_j y_j\right\| - \left\|\sum_{j=1}^{p} {\lambda_j}^0 y_j\right\|\right| \leq \left\|\sum_{j=1}^{p} \left(\lambda_j y_j - {\lambda_j}^0 y_j\right)\right\|$$

$$= \left\|\sum_{j=1}^{p} \left(\lambda_j - {\lambda_j}^0\right) y_j\right\| \leq$$

$$\leq \sum_{j=1}^{p} \left\|(\lambda_j - {\lambda_j}^0) y_j\right\| \leq$$

$$\leq \sum_{j=1}^{p} \left|\lambda_j - {\lambda_j}^0\right| \left\|y_j\right\| \leq \sqrt{\sum_{j=1}^{p} (\lambda_j - {\lambda_j}^0)^2} \sqrt{\sum_{j=1}^{p} \left\|y_j\right\|^2}$$

$$= \|\lambda - \lambda^0\| \sqrt{\sum_{j=1}^{p} \left\|y_j\right\|^2}.$$

З одержаних співвідношень одержимо, що

$$(\forall \varepsilon > 0)\left(\exists \delta = \frac{\mathcal{E}}{\sqrt{\sum_{j=1}^{p} \left\|y_j\right\|^2}} > 0\right)(\forall \lambda : \ \|\lambda - \lambda^0\| < \delta) |\psi(\lambda) - \psi(\lambda^0)| < \mathcal{E}$$

Це й означає, що функція ψ є неперервною в будь-якій точці $\lambda^0 \in R^p$ і, отже, є неперервною на R^p.

Оскільки S – компакт простору R^p, а ψ є неперервною функцією на просторі R^p, то $\min\limits_{\lambda \in S} \psi(\lambda) = \psi(\lambda^0)$, де $\lambda^0 \in S$, причому, як встановлено вище, $\psi(\lambda^0) > 0$.

Отже,

$$\min\left\{\left\|\sum_{j=1}^{p} \lambda_j y_j\right\| : \sum_{j=1}^{p} \lambda_j{}^2 = 1\right\} = \psi(\lambda^0) = m = \left\|\sum_{j=1}^{p} \lambda_j{}^0 y_j\right\|$$

$$> 0 \qquad (2.21)$$

Звідси із (2.20) одержимо, що

$$C \geq \left\|\sum_{j=1}^{p} \lambda_j{}^k y_j\right\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{p} (\lambda_j{}^k)^2} \left\|\sum_{j=1}^{p} \frac{(\lambda_j{}^k)}{\sum_{j=1}^{p} (\lambda_j{}^k)^2} y_j\right\| \geq \sqrt{\sum_{\delta=1}^{p} (\lambda_j{}^k)^2}\, m = \|\lambda^k\| m,$$

оскільки

$$\left(\sum_{j=1}^{p} \left(\frac{(\lambda_j{}^k)}{\sqrt{\sum_{j=1}^{p} (\lambda_j{}^k)^2}}\right)^2 = 1\right)$$

зі співвідношення (2.22) одержимо, що

$$\|\lambda^k\| = \|\lambda_1^k, \ldots .\lambda_p^k\| \leq \frac{c}{m}, k = 1,2 \ldots .$$

(2.23)

З (2.23) випливає, що $\lambda^k = (\lambda_1^k, \ldots .\lambda_p^k)$ є обмеженою послідовністю. Згідно з теоремою Вейєршарсса для R^p з цієї послідовності маємо збіжну підпослідовність $\lambda^{k_e} = (\lambda_1^{k_e}, \ldots .\lambda_p^{k_e})$. Позначимо

$$\lim_{e\to\infty} \lambda^{k_e} = \lim_{e\to\infty} \left(\lambda_1^{k_e}, \dots .\lambda_p^{k}\right) = \left(\lambda_1^{k}, \dots .\lambda_p^{k}\right) \in R^p.$$

(2.24)

Зі співвідношення(2.24) випливає, що

$$\lim_{e\to\infty} \lambda_1^{k_e} = \lambda_1^*;\ \lim_{e\to\infty} \lambda_2^{k_e} = \lambda_2^*, \dots, \lim_{e\to\infty} \lambda_p^{k_e} = \lambda_p{}^*$$

(2.26)

Маємо, крім того, що

$$0 \le \left\| \sum_{j=1}^{p} \lambda_j^{k_e} y_j - \sum_{j=1}^{p} \lambda_j^* y_j \right\| = \left\| \sum_{j=1}^{p} (\lambda_j^{k_e} - \lambda_j^*) y_j \right\| \le \sum_{j=1}^{p} \lambda_j^{k_e} - \lambda_j^* \|y_j\| \xrightarrow{e\to\infty} 0,$$

оскільки мають місце співвідношення (2.26).

Звідки, одержуємо, що

$$\lim_{e\to\infty} \sum_{j=1}^{p} \lambda_j^{k_e} y_j = \lim_{e\to\infty} y^{k_e} = y^* = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j^* y_j .$$

Отже, доведено, що з обмеженої послідовності $\{y^k\}_{k=1}^{\infty}$ скінченновимірного підпростору А простору Y можна вибрати збіжну підпослідовність $\{y^k\}_{k=1}^{\infty}$, яка збігається до точки $y^* = \sum_{\delta=1}^{j} \lambda_j^* y_j$, цього ж підпростору.

Це означає, що скінченновимірний підпростір лінійного нормованого простору $(Y, \|\circ\|)$ є локально компактною множиною.

Переконаємося у його замкненості.

Припустимо, що y^* є граничною точкою А. Тоді існує послідовність $y^k \in$ А, $k = 1,2 \dots .$, така, що $\lim_{e\to\infty} y^k = y^*$. Оскільки $\{y^k\}_{k=1}^{\infty}$ є збіжною послідовністю, то вона є обмеженою послідовністю А.

За доведеним вище з $\{y^k\}_{k=1}^{\infty}$ можна виділити послідовність $\{y^{k_e}\}$, яка збігається до $y^0 \in$ A : $\lim_{e\to\infty} y^{k_e} = y^0 \in$ A.

Але ж $\lim_{e\to\infty} y^{k_e} = \lim_{e\to\infty} y^k = y^0 = y^*$. Отже $y^* \in$ A.

Будь-яка гранична точка A належить A. Це означає, що A є замкненою множиною.

Отже, доведено, що будь-який скінченновимірний простір лінійного нормованого простору Y є локально компактною та замкненою множиною, що й потрібно було довести.

Твердження доведено.

Перед тим як сформулювати та довести теореми існування узагальненої точки Штейнера в розумінні функції повільного зростання h у множинні A точок $e_1, \dots, e_r$ (екстремального елемента для величини (2.1)) введемо поняття асимптотичного функціонала для h. Таким функціоналом будемо називати функціонал P_∞, який задається таким чином

$$P_\infty(y) = \max_{f \in dom\, h^*} f(y), y \in Y. \tag{2.27}$$

Оскільки $dom\, h^*$ є слабко * компактною множиною , а відображення $f \in Y^* \to f(y)$, де $y \in Y$, є слабко * неперервним на Y^* (див., наприклад, [с.48]), то для кожного $y \in Y$ існує $f_y \in dom\, h^*$ такий, що $f(y) \le f_y(y) \forall f \in dom\, h^*$, тобто максимум у (2.27) реалізується.

Твердження 2.3.3. Функціонал $P_\infty(y), y \in Y$, заданий формулою (2.27), є неперервним сублінійним функціоналом. Функціонал $P_\infty(y), y \in Y$, є неперервним опуклим функціоналом.

Доведення. Нехай y, $y_0 \in Y$. Маємо, що

$$|P_\infty(y) - P_\infty(y_0)| = \left|\max_{f\in dom\, h^*} f(y) - \max_{f\in dom\, h^*} f(y_0)\right| \leq \max_{f\in dom\, h^*} |f(y) - f(y_0)|$$
$$\leq \max_{f\in dom\, h^*} \|f\| \|y - y_0\| \leq \mathcal{L}\|y - y_0\|, \text{де } \mathcal{L} = \sup_{f\in dom\, h^*} \|f\|$$

З останніх співвідношень випливає, що

$$(\forall \varepsilon > 0)\left(\exists \delta = \frac{\mathcal{E}}{\mathcal{L}} > 0\right)\left(\forall y : \ \|y - y_0\| < \delta = \frac{\mathcal{E}}{\mathcal{L}}\right)|P_\infty(y) - P_\infty(y_0)| < \mathcal{L}\frac{\mathcal{E}}{\mathcal{L}} = \mathcal{E}$$

Це й означає, що функціонал P_∞ є неперервним у будь-які точці $y_0 \in Y$ і, отже є неперервним на Y.

Переконаємося, що функціонал P_∞ є півадитивним на Y. Нехай $y_1, y_2 \in$ Y. Маємо, що

$$P_\infty(y_1 + y_2) = \max_{f\in dom\, h^*} f(y_1 + y_2) = \max_{f\in dom\, h^*}\big(f(y_1) + f(y_2)\big)$$
$$\leq \max_{f\in dom\, h^*} f(y_1) + \max_{f\in dom\, h^*} f(y_2) = P_\infty(y_1) + P_\infty(y_2).$$

Півадитивність функції P_∞ доведено.

Переконаємося у його додатній однорідності. Для $y \in Y$ та $t > 0$ одержимо, що

$$P_\infty(ty) = \max_{f\in dom\, h^*} f(ty) = t \max_{f\in dom\, h^*} f(y) = t\, P_\infty(y).$$

Отже, P_∞ є додатно однорідним.

Таким чином P_∞ є неперервним сублінійним функціоналом, заданим на Y.

Переконаємося, що P_∞ є опуклим функціоналом. Нехай $y_1, y_2 \in$ Y, $\propto \in [0,1]$. Тоді

$P_\infty\big((1-\propto)y_1+\propto y_2\big) \le P_\infty\big((1-\propto)y_1 + P_\infty(\propto y_2)\big) = (1-\propto)P_\infty(y_1)+\propto P_\infty(y_2)$, звідси випливає, що P_∞ є опуклим функціоналом (див., наприклад, [12, с.56]).

Твердження доведено.

Теорема 2.3.1. Будемо припускати, що множина, А допустимих розв'язків задачі відшукання величини (2.1) є локально компактною та замкненою множиною. Якщо для будь-якої її необмеженої послідовності $\{\gamma_k\}_{k=1}^{\infty}$ (якщо така послідовність існує) можна вибрати послідовність $\{\gamma_{k_e}\}_{k=1}^{\infty}$, для якої $\lim_{l\to\infty}\|y_{k_e}\| = +\infty$ та $\lim_{l\to\infty} P_\infty(y_{k_e}) = +\infty$, то екстремальний елемент для величини (2.1) існує. Якщо множина А є обмеженою, то екстремальний елемент для величини (2.1) існує.

Доведення. Маємо згідно з (2.1), що для $k = 1,2 \ldots$

$$\Im_A^h(\{e_i\}_{i=1}^r) = \inf_{y\in A}\sum_{i=1}^{r} h(y-e_i) < \Im_A^h(\{e_i\}_{i=1}^r) + \frac{1}{k}.$$

Згідно з означенням інфінімуму звідси випливає, що для кожного $k = 1,2 \ldots$ існує $y_k \in A$,таке що

$$\Im_A^h(\{e_i\}_{i=1}^r) \le \sum_{i=1}^{r} h(y_k-e_i) < \Im_A^h(\{e_i\}_{i=1}^r) + \frac{1}{k} \tag{2.28}$$

Маємо, що

$$\sum_{i=1}^{r} h(y_k - e_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{r} \max_{f \in dom\, h^*} (f(y_k - e_i) - h^*(f))$$

$$\geq \sum_{i=1}^{r} \max_{f \in dom\, h^*} (f(y_k) - f(e_i) - \beta)$$

$$= \sum_{i=1}^{r} \max_{f \in dom\, h^*} \big(f(y_k) - f(e_i)\big) - r\beta \geq \sum_{i=1}^{r} \max_{f \in dom\, h^*} f(y_k)$$

$$- \mathcal{L} \sum_{i=1}^{r} \|e_i\| - r\beta = \sum_{i=1}^{r} P_\infty(y_k) - \mathcal{L} \sum_{i=1}^{r} \|e_i\| - r\beta$$

$$= rP_\infty(y_k) - \mathcal{L} \sum_{i=1}^{r} \|e_i\| - r\beta,$$

оскільки для $f \in dom\, h^*, h^*(f) \leq \beta; f(e_i) \leq \|f\|\|e_i\| \leq L \quad \|e_i\|$,

З урахуванням цього та (2.28) одержимо, що

$$rP_\infty(y_k) < \mathfrak{I}_A^h(\{e_i\}_{i=1}^r) + \mathcal{L} \sum_{i=1}^{r} \|e_i\| + r\beta + 1, P_\infty(y_k)$$

$$< \frac{1}{r}\left(\mathfrak{I}_A^h(\{e_i\}_{i=1}^r) + \mathcal{L} \sum_{i=1}^{r} \|e_i\| + r\beta + 1\right) = \delta^*,$$

Отже, для всіх $k = 1,2 \ldots$, $P_\infty(y_k) < \delta^*$, $k = 1,2 \ldots$. (2.29)

З іншого боку маємо, що

$$h(y) = \max_{f \in dom\, h^*} (f(y) - h^*(f)), y \in Y.$$

При $y = 0$ звідси одержимо, що

$$h(0) = \max_{f \in dom\, h^*}(f(0) - h^*(f)) = \max_{f \in dom\, h^*}(-h^*(f))$$

Тому

$$-h^*(f) \le h(0), f \in dom\, h^*.$$

Тоді за умовою

$$0 \le h(y) = \max_{f \in dom\, h^*}\big(f(y) - h^*(f)\big) \le \max_{f \in dom\, h^*} f(y) + h(0)$$
$$= P_\infty(y) + h(0).$$

Звідси одержуємо, що

$$P_\infty(y) \ge -h(0), y \in Y.$$

Зі співвідношень (2.29) та (2.30) робимо висновок, що

$$-h(0) \le P_\infty(y_k) < \delta^*, k = 1,2 \ldots$$

Отже, $\{P_\infty(y_k)\}_{k=1}^{\infty}$, є обмеженою послідовністю.

Припустимо, що $\{k_x\}_{k=1}^{\infty}$ є необмеженою послідовністю.

За умовою з неї можна вибрати послідовність $\{y_{k_e}\}_{k=1}^{\infty}$ таку, що $\|k_{x_e}\| \to +\infty$ при $e \to \infty$ та $P_\infty(y_{k_e}) \to \infty$. Але ж згідно (2.31)

$$-h(0) \le P_\infty(y_{k_e}) < \delta^*, e = 1,2 \ldots$$

Одержана суперечність доводить, що тоді послідовність $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ є обмеженою. Тоді з неї можна вибрати збіжну до y^* послідовність $\{y_k\}_{e=1}^{\infty}$. Оскільки А є за умовою замкненою множиною, то $\lim\limits_{e\to\infty} y_{k_e} = y^* \in A$.

Переконаємося, що y^* і є екстремальним елементом для величини (2.1). З нерівності (2.28) одержимо, що

$$\Im_A^h(\{e_i\}_{i=1}^r) \le \sum_{i=1}^{r} h\big(y_{k_e} - e_i\big) = \varphi(y_{k_e}) < \Im_A^h(\{e_i\}_{i=1}^r) + \frac{1}{k_e}.$$

Перейшовши в цій нерівності до границі при $e \to \infty$ та врахувавши, що $\lim_{e\to\infty} \varphi(y_{k_e}) = \varphi(y^*)$, оскільки цільова функція φ задачі відшукання величини (2.1) є неперервною (див., теорему 2.2.1), одержимо, що

$$\Im_A^h(\{e_i\}_{i=1}^r) \le \varphi(y^*) = \sum_{i=1}^{r} h(y^* - e_i) \le \Im_A^h(\{e_i\}_{i=1}^r),$$

$$\sum_{i=1}^{r} h(y^* - e_i) = \Im_A^h(\{e_i\}_{i=1}^r) = \inf_{y\in A} \sum_{i=1}^{r} h(y - e_i).$$

Це й означає, що y^* є екстремальним елементом для величини (2.1). В цьому випадку теорему доведено.

Якщо ж множина A є обмеженою локально компактною та замкненою, то послідовність $\Im_A^h(\{y_k\}_{i=1}^r)$ є обмеженою. Як вище доводилось будь-яка її часткова границя є екстремальним елементом для величини (2.1)

Теорему доведено.

Наслідок 2.3.1. Нехай в задачі відшукання величини (2.1) A є локально компактною та замкненою множиною $dom\, R^* \supset B_1^*(0) = \{f \in Y^* : \|f\| \le 1\}$.

Тоді екстремальний елемент для величини (2.1) існує. Зокрема, якщо $h(y) = \|y\|, y \in Y$, то в цьому випадку екстремальний елемент для величини (2.1) існує.

Доведення. Нехай A є локально компактною та замкненою множиною. Якщо вона обмежена, то згідно з теоремою 2.3.1 ця множина є множиною існування екстремального елемента.

Якщо ж А є необмеженою множиною, та $\{y_x\}_{i=1}^r$ її необмежена послідовність, то існує послідовність $\{y_{k_e}\}_{i=1}^r$, таке, що $\lim_{e\to\infty} y_{k_e} = +\infty$.

Маємо, що $P_\infty(y_{k_e}) = \max_{f\in dom h^*}(y_{k_e}) \geq \max_{f\in B_1^*(0)}(y_{k_e}) = \max_{\|f\|\leq 1} f(y_{k_e}) = \|y_{k_e}\|$.

Тому $\lim_{e\to\infty} y_{k_e} \geq \lim_{e\to\infty}\|y_{k_e}\| = +\infty$. Отже, $\lim_{e\to\infty} y_{k_e} = +\infty$. Згідно з теоремою 2.3.1 екстремальний елемент для задачі відшукання величини (2.1) існує.

Наслідок 2.3.2. Якщо ж А є локально компактною та замкненою множиною, то екстремальний елемент для задачі відшукання величини (2.2) існує.

Доведення. У випадку задачі (2.2) $h(y) = \|y\|$.

Згідно з прикладом 1.4 розділу 1 $dom\, h^* = B_1^*(0) = \{f \in X^* : \|f\| \leq 1\}$. Отже, в цьому випадку $dom\, h^* \supset B_1^*(0)$. Згідно з наслідком 2.3.1 екстремальний елемент для величини (2.1) існує.

Теорема 2.3.2. Якщо в задачі відшукання величини (2.1) А є скінченновимірним підпростором $P_\infty(y) \geq 0$ для всіх $y \in A$ та підпростір А лінійно нормована множина $B = \{y \in A : P_\infty(y) = 0\}$ є підпростором , то екстремальний елемент для величини (2.1) існує.

Доведення. Як і при доведенні твердження 2.3.2 будемо вважати, що

$$A = \left\{\sum_{j=1}^{p} \lambda_j y_0 : \lambda_j \in R, j = \overline{1,p}\right\}.$$

Нехай $\{y^k\}_{k=1}^\infty$, є необмеженою послідовністю підпростору А. Тоді з неї можна вибрати послідовність $\{y^{k_e}\}_{k=1}^\infty$ таку, що

$$\lim_{e\to\infty}\|y^{k_e}\| = +\infty.$$

Отже, маємо, що

$$\lim_{e\to\infty}\|y^{k_e}\| = \lim_{e\to\infty}\left\|\sum_{j=1}^{p}\lambda_j{}^{k_e}y_j\right\|$$
$$= +\infty. \qquad (2.32)$$

Переконаємося, що послідовність $\{\lambda^{k^e}\}_{e=1}^{\infty}$, де $\lambda^{k^e} = (\lambda_1^{k^e}, \lambda_2^{k^e} \dots \lambda_p^{k^e})$, є необмеженою послідовністю. Дійсно, якщо припустити, що $\{\lambda^{k^e}\}_{e=1}^{\infty}$ є обмеженою, тобто, що $\|\lambda^{k^e}\| \le e, e = 1{,}2 \dots$, то отримаємо, що

$$\|y^{x_e}\| = \left\|\sum_{j=1}^{p}\lambda_j{}^{k_e}y_j\right\| \le \sum_{j=1}^{p}|\lambda_j{}^{k_e}|\|y_j\| \le \sqrt{\sum_{j=1}^{p}(\lambda_j{}^{k_e})^2}\sqrt{\sum_{j=1}^{p}\|y_j\|^2}$$
$$= \|\lambda_j{}^{k_e}\|\sqrt{\sum_{j=1}^{p}\|y_j\|^2} \le \mathrm{C}\sqrt{\sum_{j=1}^{p}\|y_j\|^2},$$

що суперечить рівності (2.32).

Одержана суперечність доводить, що послідовність $\{\lambda^{k}\}_{e=1}^{\infty}$ є необмеженою послідовністю. Тоді з цієї послідовності можна вибрати послідовність $\{\lambda^{k^e}\}_{e=1}^{\infty}$, таку, що $\left\|\{\lambda^{k^e}\}_{e=1}^{\infty}\right\| \to +\infty$ при $\nu \to \infty$.

Отже звідси і (2.32) одержимо, що

$$\lim_{\nu\to\infty}\|y^{k_{e_\nu}}\| = \lim_{\nu\to\infty}\left\|\sum_{j=1}^{p}\lambda_j{}^{k_{e_\nu}}y_j\right\| + \infty \text{ і } \lim_{\nu\to\infty}\|\lambda_j{}^{k_{e_\nu}}\|$$
$$= +\infty. \qquad (2.33)$$

Припустимо, що $P_\infty(y) > 0$ для всіх $y \in A, y \neq 0$

Маємо, що

$$P_\infty(y) = P_\infty(y)\left(\sum_{j=1}^{p} \lambda_j y_j\right) = P_\infty\left(\lambda_1 y_1 + \cdots + \lambda_p y_p\right) = \psi\left(\lambda_1 \dots \lambda_p\right).$$

Маємо, що для $\lambda = \left(\lambda_1 \dots \lambda_p\right), \lambda^0\left({\lambda_1}^0 \dots {\lambda_p}^0\right)$:

$$|\psi(\lambda) - \psi(\lambda^0)| = \left|\psi\left(\lambda_1 \dots \lambda_p\right) - \psi\left({\lambda_1}^0 \dots {\lambda_p}^0\right)\right| =$$

$$= \left|P(\lambda_1 y_1 + \cdots + \cdots \lambda_p y_p) - P\left({\lambda_1}^0 y_1 + \cdots + {\lambda_p}^0 y_p\right)\right| =$$

$$= \left|\max_{f \in domh^*} f\left(\sum_{j=1}^{p} \lambda_j y_j\right) - \max_{f \in domh^*} f\left(\sum_{j=1}^{p} {\lambda_j}^0 y_j\right)\right| \leq$$

$$\leq \max_{f \in domh^*}\left|f\left(\sum_{j=1}^{p} (\lambda_j - {\lambda_j}^0) y_j\right)\right| \leq$$

$$\leq \max_{f \in domh^*} \|f\| \sum_{j=1}^{p} \left|(\lambda_j - {\lambda_j}^0)\right| \|y_j\| \leq \mathcal{L} \sqrt{\sum_{j=1}^{p} \left(\lambda_j - {\lambda_j}^0\right)^2} \sqrt{\sum_{j=1}^{p} \|y_j\|^2}$$

$$== \mathcal{L} \sqrt{\sum_{j=1}^{p} \|y_j\|^2} \|\lambda - \lambda^0\|.$$

З цих нерівностей випливає, що

$$(\forall \varepsilon > 0)\left(\exists \delta = \frac{\mathcal{E}}{\mathcal{L}\sqrt{\sum_{j=1}^{p} \|y_j\|^2}} > 0\right)(\forall \lambda :\ \|\lambda - \lambda^0\| < \delta)|\psi(\lambda) - \psi(\lambda^0)| < \mathcal{E}.$$

Це означає, функція $\psi(\lambda) = \psi(\lambda_1 \dots \lambda_p)$ є неперервною в кожній точці $\lambda^0 \in R^p$ і, отже є неперервною на R^p.

У

$$S = \left\{ \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_p) : \sum_{j=1}^{p} \lambda_j^{\ 2} = 1 \right\}$$

ця функція досягає свого найменшого значення в точці

$$\lambda^0 = (\lambda_1^{\ 0}, \dots, \lambda_p^{\ 0}) \in S : \min_{\lambda \in S} \varphi(\lambda^0) = \varphi(\lambda_1^{\ 0}, \dots, \lambda_p^{\ 0}) = P_\infty(\lambda_1^{\ 0} y_{1,} \dots, \lambda_p^{\ 0} y_p)$$
$$= m > 0, \qquad (2.34)$$

Оскільки $\lambda_1^{\ 0} y_1 \dots \lambda_p^{\ 0} y_p \in$ A і $\lambda_1^{\ 0} y_1 + \dots + \lambda_p^{\ 0} y_p \neq 0$, оскільки внаслідок лінійної незалежності $y_1, \dots, y_p$ при $\lambda_1^{\ 0} y_1 + \dots + \lambda_p^{\ 0} y_p = 0$ мали б : $\lambda_1^{\ 0} = \dots = \lambda_p^{\ 0} = 0$, що суперечність рівності $(\lambda_1^{\ 0})^2 + \dots + (\lambda_p^{\ 0})^2 = 1$.

З урахуванням (2.39) та (2.34) одержимо, що

$$P_\infty(y^{k_{e_\nu}}) = P_\infty\left(\sum_{j=1}^{p} \lambda_j^{\ k_{e_\nu}} y_j\right) = \sqrt{\sum_{j=1}^{p} \left(\lambda_j^{\ k_{e_\nu}}\right)^2}\, P_\infty\left(\sum_{j=1}^{p} \frac{\lambda_j^{\ k_{e_\nu}}}{\sqrt{\sum_{j=1}^{p} \left(\lambda_j^{\ k_{e_\nu}}\right)^2}} y_j\right)$$

$$\geq m \sqrt{\sum_{j=1}^{p} \left(\lambda_j^{\ k_{e_\nu}}\right)^2} = m \left\| \lambda_j^{\ k_{e_\nu}} \right\|.$$

Оскільки $\lim\limits_{\nu \to \infty} \left\| \lambda_j^{\ k_{e_\nu}} \right\| = +\infty$ (див.( )), то звідси випливає, що

$$\lim_{\nu \to \infty} P_\infty\left(\lambda_j^{\ k_{e_\nu}}\right) = +\infty.$$

Отже, доведено, що коли $P_\infty(y) > 0$ для всіх $y \in$ A, $y \neq 0$, то для будь-якої необмеженої послідовності $\{y^k\}_{k=1}^{\infty}$ із A можна вибрати таку послідовність $\left\{y^{k_{e_\nu}}\right\}_{\nu=1}^{\infty}$, що $\lim_{\nu\to\infty}\left\|\lambda_j{}^{k_{e_\nu}}\right\| = +\infty$ та $\lim_{\nu\to\infty} P_\infty\left(\lambda_j{}^{k_{e_\nu}}\right) = +\infty$.

Згідно з теоремою 2.3.1 екстремальний елемент для величини (2.1) існує, оскільки, скінченновимірний простір A згідно з твердженням 2.3.2 є локально компактною та замкненою множиною.

Розглянемо далі випадок, коли в просторі A існують такі елементи y, що $y \neq 0$ та $P_\infty(y) > 0$. Позначимо через $B = \{y \in A : P_\infty(y) = 0\}$.

За умовою B є підпростором скінченновимірного підпростору A. Тому B є скінченновимірним підпростором A. Внаслідок цього існують лінійно незалежні вектори $u_1, u_{,2} \dots, u_k$ із A, такі, що

$$B = \left\{\sum_{j=1}^{k} \gamma_j u_j : \gamma_j \in R, j = \overline{1,k}\,.\right\}$$

Нехай $u_{k+1}, \dots, u_p$ є доповнення системи векторів $u_1, u_{,2} \dots, u_k$ до базису підпростору A. Тоді будь-який вектор $y \in A$ подається у вигляді:

$$y = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j y_j = \sum_{j=1}^{k} \gamma_j u_j.$$

Оскільки $u_j \in B, j = \overline{1,k}$, а B за умовою є підпростором, то $-u_j \in B, j = \overline{1,k}$. Це означає, що $P_\infty(u_j) = P_\infty(-u_j) = 0$. Звідси випливає, що для $f \in dom\, h^* : f(u_j) \leq \max_{f \in dom h^*} f(u_j) = P_\infty(u_j) = 0$. Аналогічно $f \in dom\, h^* :$ $f(-u_j) \leq \max_{f \in dom h^*} f(-u_j) = P_\infty(-u_j) = 0$

Отже, для всіх $u_j \in B, j = \overline{1,k}$: $f(u_j) \leq 0$ і $f(-u_j) = -f(u_j) \leq 0$; $f(u_j) \leq 0$ і $f(u_j) \geq 0$. Тому для $j = \overline{1,k}, f \in dom\, h^*$ отримаємо, що $f(u_j) = 0$.

З урахуванням зазначеного вище одержимо для $y \in A$, що

$$y = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j y_j = \sum_{j=1}^{p} \gamma_j u_j = \sum_{j=1}^{k} \gamma_j u_j + \sum_{j=k+1}^{p} \gamma_j u_j$$

та

$$\sum_{i=1}^{r} h(y - e_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{r} h\left(\sum_{j=1}^{p} \gamma_j u_j - e_i\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{r} h\left(\sum_{j=1}^{k} \gamma_j u_j + \sum_{j=k+1}^{p} \gamma_j u_j - e_i\right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{r} \max_{f \in dom h^*}\left(f\left(\sum_{j=1}^{k} \gamma_j u_j + \sum_{j=k+1}^{p} \gamma_j u_j - e_i\right) - h^*(f)\right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{r} \max_{f \in dom h^*}\left(\sum_{j=1}^{k} \gamma_j f(u_j) + f\left(\sum_{j=k+1}^{p} \gamma_j u_j - e_i\right) - h^*(f)\right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{r} \max_{f \in dom h^*}\left(f\left(\sum_{j=k+1}^{p} \gamma_j u_j - e_i\right) - h^*(f)\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{r} h\left(\sum_{j=k+1}^{p} \gamma_j u_j - e_i\right).$$

Отже, для всіх $y \in$ A, маємо, що

$$\sum_{i=1}^{r} h(y-e_i)$$
$$=\sum_{i=1}^{r} h\left(\sum_{j=1}^{p} \gamma_j u_j - e_i\right)$$
$$=\sum_{i=1}^{r} h\left(\sum_{j=k+1}^{p} \gamma_j u_j - e_i\right). \qquad (2.35)$$

Розглянемо

$$D=\left\{z=\sum_{j=k+1}^{p} \gamma_j u_j \,:\, \gamma_j \in R, j=\overline{k+1,p}\right\}.$$

Маємо, що D є скінченновимірним підпростором простору Y. Для всіх $z \in D, z \neq 0$ має місце співвідношення : $P_\infty(z) > 0$.

Дійсно,

$$z=\sum_{j=k+1}^{p} \gamma_j u_j = \mathrm{o}u_1 + \mathrm{o}u_2 + \cdots + \mathrm{o}u_k + \gamma_{k+1}u_{k+1} + \cdots + \gamma_p u_p \in A.$$

Тобто $\forall$z $\in$ D, в тому числі $z \neq 0$, також належать A.

За умовою $P_\infty(y) \geq 0$ для всіх $y \in$ A, в тому числі $P_\infty(z) \geq 0$ для всіх $z \in D$. Але ж коли $z \neq 0$, то $P_\infty(z) > 0$.

Дійсно, якщо б $P_\infty(z) = 0$ для $z \neq 0$ і $z \in D$, то отримали б, що

$$z \in \mathrm{B} = \left\{\sum_{j=1}^{k} \gamma_j u_j \,:\, \gamma_j \in R, j=\overline{1,k}\right\}.$$

Оскільки $z \neq 0$, то

$$z = \sum_{j=1}^{k} \gamma_j u_j$$

і серед чисел $\gamma_1, \dots, \gamma_k \in\neq 0$, наприклад, $\gamma_k \neq 0$. З іншого боку $z \in D$. Тому

$$z = \sum_{j=k+1}^{p} \gamma_j u_j.$$

Отже,

$$\sum_{j=1}^{k} \gamma_j u_j = \sum_{j=k+1}^{p} \gamma_j u_j.$$

Звідки

$$\sum_{j=1}^{k-1} \gamma_j u_j + \gamma_k u_k + \sum_{j=k+1}^{p} (-\gamma_j) u_j = 0,$$

причому $\gamma_k \neq 0$. Це означає, що система векторів $u_1, \dots u_{k-1}, u_k, u_{k+1}, \dots, u_p$ є лінійно залежною, що суперечить припущенню про те, що ця система утворює базис простору А.

Одержана суперечність доводить, що $P_\infty(z) > 0$, якщо $z \in D$ і $z \neq 0$. Згідно з доведеним вище тоді існує вектор

$$z^* = \sum_{j=k+1}^{p} \gamma_j{}^* u_j \in D$$

такий, що

$$\sum_{i=1}^{r} h\big(z \quad - e_i\big) = \sum_{i=1}^{r} h\left(\sum_{j=k+1}^{p} \gamma_j \quad u_j - e_i\right)$$

$$= \min_{z\in D} \sum_{i=1}^{r} h(z^* - e_i) = \min_{\gamma_j \in R, j=\overline{k+1,p}} \sum_{i=1}^{r} h\left(\sum_{j=k+1}^{p} \gamma_j{}^* u_j - e_i\right).$$

Переконаємося, що $y^* = z^* = ou_1 + \cdots + ou_k + \gamma_{k+1}{}^* u_{k+1} + \cdots + \gamma_p{}^* u_p$ є екстремальним елементом для величини (2.1).

Дійсно $y^* = z^* \in D \subset A$. Тому $y^* \in A$.

Для $y^* \in A$ матимемо, що

$$\sum_{i=1}^{r} h(y^* - e_i) = \sum_{i=1}^{r} h\big(ou_1 + \cdots + ou_k + \gamma_{k+1}{}^* u_{k+1} + \cdots + \gamma_p{}^* u_p - e_i\big)$$

$$= \sum_{i=1}^{r} h\big(\gamma_{k+1}{}^* u_{k+1} + \cdots + \gamma_p{}^* u_p - e_i\big)$$

$$= \sum_{i=1}^{r} h(z^* - e_i) = \min_{z\in D} \sum_{i=1}^{r} h(z^* - e_i). \tag{2.36}$$

Припустимо, що y^* не є екстремальним елементом для задачі (2.1) в розглядованому випадку.

Тоді існує вектор $y' = \gamma_1{}' u_1 + \cdots + \gamma_k{}' u_k + \gamma_{k+1}{}' u_{k+1} + \cdots + \gamma_p{}' u_p \in$ A, такий, що

$$\sum_{i=1}^{r} h\left(\gamma_1{}'u_1 + \cdots + \gamma_k{}'u_k + \gamma_{k+1}{}'u_{k+1} + \cdots + \gamma_p{}'u_p - e_i\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{r} h\left(\sum_{j=1}^{k} \gamma_j{}'u_j + \sum_{j=k+1}^{p} \gamma_j{}'u_j - e_i\right)$$

$$< \sum_{i=1}^{r} h(y^* - e_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{r} h(z^* - e_i) = \min_{z\in D} \sum_{i=1}^{r} h\left(z \quad - e_i\right). \qquad (2.37)$$

Але ж згідно (2.35)

$$\sum_{i=1}^{r} h\left(\sum_{j=1}^{k} \gamma_j{}'u_j - e_i\right) = \sum_{i=1}^{r} h\left(\sum_{j=k+1}^{p} \gamma_j{}'u_j - e_i\right) = \sum_{i=1}^{r} h(z' - e_i)\,,\text{де } z'$$

$$= \sum_{j=k+1}^{p} \gamma_j{}'u_j \in D.$$

Звідси та (2.37) одержуємо, що для $z' \in D$:

$$\sum_{i=1}^{r} h(z' - e_i) < \min_{z\in D} \sum_{i=1}^{r} h(z - e_i).$$

Одержана суперечність доводить, що вектор $y^* = ou_1 + \cdots + ou_k + \gamma_{k+1}{}^*u_{k+1} + \cdots + \gamma_p{}^*u_p = z^*$ і є екстремальним елементом для величини (2.31)

Теорему доведено.

Наслідок 2.3.3. Якщо в задачі відшукання величини (2.1) A є скінченновимірним підпростором простору Y, $dom\, h^*$є симетричною множиною простору Y^*,то екстремальний елемент для цієї задачі існує.

Доведення. Маємо, що

$$P_\infty(y) = \max_{f \in dom\, h^*} f(y) = f_y(y), \text{де } f_y \in dom\, h^*.$$

Оскільки $(-f_y \in dom\, h^*$ (за умовою $dom\, h^*$ є симетричною множиною), то

$$P_\infty(y) = \max_{f \in dom\, h^*} f(y) \geq \max\{f_y(y), (-f_y)(y)\} = \max\{f_y(y), -f_y(y)\}$$
$$= |f_y(y)| \geq 0.$$

Отже, за виконання умов наслідку маємо, що $P_\infty(y) \geq 0$ для всіх $y \in Y$, в тому числі $P_\infty(y) \geq 0$ для всіх $y \in$ A.

Нехай $B = \{y \in \text{A} : P_\infty(y = 0\}$. Переконаємося, що за умов наслідку B є підпростором простору Y, в тому числі підпростором простору A, оскільки $B \subset A$.

Нехай $y_1, y_2 \in$ B. Це означає, що $P_\infty(y_1) = P_\infty(y_2) = 0$.

Маємо, що $y_1 + y_2 \in$ A, оскільки A є підпростором Y, а $y_1 \in B \subset A, y_2 \in B \subset A$. Вище встановлено, що $P_\infty(y) \geq 0, \forall y \in Y$. Тоді

$$0 \leq P_\infty(y_1 + y_2) \leq P_\infty(y_1) + P_\infty(y_2) = 0 + 0 = 0.$$

Звідси випливає, що $0 \leq P_\infty(y_1 + y_2) \leq 0 + 0 = 0$. Тоді $0 \leq P_\infty(y_1 + y_2) \leq 0, P_\infty(y_1 + y_2) = 0$. Тому $y_1 + y_2 \in$ B, якщо $y_1 \in$ B, $y_2 \in$ B.

Маємо далі, що $P_\infty(-y) = \max_{f \in dom\, h^*} f(-y) = \max_{-f \in dom\, h^*} (-f)(y) = \max_{\varphi \in dom\, h^*} \varphi(y) = P_\infty(y)$, де $y \in Y$.

Нехай тепер $y \in Y, t \geq 0$. Тоді $P_\infty(ty) = tP_\infty(y) = |t|P_\infty(y)$. Припустимо, що $y \in Y, t < 0$. Тоді

$$P_\infty(ty) = P_\infty(-t)(-y) = (-t)P_\infty(-y) = |t|P_\infty(y).$$

Отже, встановлено, що $P_\infty(ty) = |t|P_\infty(y), y \in Y, t \in R$.

Припустимо тепер, що $y \in$ B, тобто $P_\infty(y) = 0$ і $y \in A$. Згідно з установленим вище $P_\infty(ty) = |t|P_\infty(y) = |t| \cdot 0$ для всіх $t \in R$. Маємо, що $ty \in B \subset A$.

Згідно з теоремою 2.3.2 екстремальний елемент для величини (2.1) існує.

Наслідок 2.3.4.Якщо в задачі відшукання величини (2.1) А є скінченновимірним підпростором простору Y, а

$$h(y) = \max_{1 \le i \le m} |f_i(y) - \beta_i|, y \in Y, \text{де } f_i \in Y^*, \beta_i \in R, i = \overline{1,m}.$$

Тоді екстремальний елемент для величини (2.1) існує.

Доведення. При розгляді приклада 1.4.4 розділу 1 було встановлено, що в розглядуваному випадку $dom\ h^* = CO\{f_1, \dots, f_m, -f_1, \dots, -f_m\}$.

Переконаємося, що $dom\ h^*$ є симетричною множиною.

Дійсно, нехай $f \in dom\ h^*$. Тоді існують $\propto_i \ge 0, i = \overline{1,m}$; $\beta_i \ge 0, i = \overline{1,m}$, такі, що

$$\sum_{i=1}^{m} \propto_i + \sum_{i=1}^{m} \beta_i = 1$$

та

$$f = \sum_{i=1}^{m} \propto_i f_i + \sum_{i=1}^{m} \beta_i(-f_i).$$

Для

$$-f = \sum_{i=1}^{m} \propto_i (-f_i) + \sum_{i=1}^{m} \beta_i f_i \in \mathrm{C}O\{f_1, \dots, f_m, -f_1, \dots, -f_m\} = dom\ h^*.$$

Оскільки

$-f_1, \dots, -f_m, f_1, \dots, f_m \in \{f_1, \dots, f_m, -f_1, \dots, -f_m\}, \propto_i \geq 0, i = \overline{1, m};\ \beta_i \geq 0, i = \overline{1, m}; \sum_{i=1}^{m} \propto_i + \sum_{i=1}^{m} \beta_i = 1.$

Тому $-f \in dom\ h^*$, якщо $f \in dom\ h^*$. Це означає, що $dom\ h^*$ є симетричною множиною.

Згідно з наслідком (2.3.3.) екстремальний елемент для величини (2.1) існує.

РОЗДІЛ 3. ДВОЇСТЕ ПОДАННЯ ПОХІДНОЇ ЗА НАПРЯМКОМ ЦІЛЬОВОЇ ФУНКЦІЇ ЗАДАЧІ ВІДШУКАННЯ ВЕЛИЧИНИ (2.1) ТА УМОВИ ЕКСТРЕМАЛЬНОСТІ ДОПУСТИМОГО ЕЛЕМЕНТА ДЛЯ ЦІЄЇ ЗАДАЧІ.

3.1. Двоїсте подання похідної за будь-яким напрямком цільової функції задачі відшукання величини (2.1) у будь-якій точці лінійного нормованого простору $(\boldsymbol{Y}, \|\cdot\|)$

В цьому розділі встановимо умови екстремальності елемента для задачі відшукання величини (2.1) у випадку, коли простір $(Y, \|\cdot\|)$ є банаховим, а h є неперервним сублінійним функціоналом, заданим на $(Y, \|\cdot\|)$.

При розгляді прикладу 1.4.9 встановлено, що в цьому випадку $h^*(f) = 0$ для всіх $f \in dom\, h^*$, а внаслідок результатів, наведених у підрозділі 1.5, можна зробити висновок, $dom\, h^*$ є обмеженою множиною простору Y^* та замкненою у розумінні слабкої * топології цього простору. Тоді $dom\, h^*$ є слабко * компактною множиною простору Y^* (див., наприклад, [19, с. 23]).

Відповідно до теореми Фенхеля-Моро (див., наприклад, [15, с. 186])

$$h(y) = h^{**}(y) = \sup_{f \in Y}(f(y) - h^*(f)) = \sup_{f \in dom\, h^*} f(y) = \max_{f \in dom\, h^*} f(y). \quad (3.1)$$

В подальшому будемо також використовувати поняття субдиференціала та субградієнта опуклої функції P, заданої на $(Y, \|\cdot\|)$, в точці $y^* \in Y$, а також поняття її похідної за напрямком $y \in Y$ в цій точці.

Означення 3.1.1 (див., наприклад, [15с. 207]). Субдиференціалом опуклої функції P, заданої на $(Y, \|\cdot\|)$, в точці $y^* \in Y$ будемо називати множину

$$\partial P(y^*) = \{f \in Y^* : P(y) - P(y^*) \geq f(y) - f(y^*), y \in Y\}. \quad (3.2)$$

Кожен елемент $f \in \eth P(y^*)$ називають субградієнтом функції P в точці y^*.

Означення 3.1.2 (див., наприклад, [4, с. 328]). Нехай P є опуклою функцією, заданою на $(Y, \|\cdot\|)$, $y^* \in Y, y \in Y$. Похідною функцією P в точці y^* за напрямком y будемо називати величину

$$P^{`}(y^*, y) = \lim_{\substack{\propto>0,\\ \propto\to 0}} \underbrace{P(y^*+\propto y) - P(y^*)}_{\propto} = \inf_{\propto>0} \underbrace{P(y^*+\propto y) - P(y^*)}_{\propto}. \qquad (3.3)$$

Має місце таке твердження.

Теорема 3.1.1 (див., наприклад, [4, с. 328,329]). Якщо функція P є опуклою на $(Y, \|\cdot\|)$ та неперервною в точці $y^* \in Y$, то має місце рівність

$$P'(y^*, y) = \max_{f \in \eth P(y^*)} f(y), y \in Y.$$

Для $i \in \{1, \dots, r\}$ будемо, як і вище, позначати через $\varphi_i(y) = h(y - e_i), y \in Y$. Тоді цільова функція $\varphi(y), y \in Y$, задачі відшукання величини (2.1) подається таким чином:

$$\varphi(y) = \sum_{i=1}^{r} h(y - e_i) = \sum_{i=1}^{r} \varphi_i(y)\,, y \in Y.$$

Згідно з теоремою 2.2.1 функції $\varphi_i(y), i = \overline{1, r}, \varphi(y), y \in Y$, є власними, опуклими, ліпшніцевими і, отже, неперервними на $(Y, \|\cdot\|)$ функціями.

Тоді похідні цих функцій у будь-якій точці $y^* \in Y$ за будь-яким напрямком $y \in Y$ існують (див., наприклад, [19, с. 43]) і справедлива рівність

$$\varphi'(y^*, y) = \sum_{i=1}^{r} \varphi_i(y^*, y)\,, y \in Y. \qquad (3.3)$$

В цьому підрозділі отримаємо двоїсте подання похідних $\varphi_i{}'(y^*, y), i = \overline{1, r}, \varphi'(y^*, y)$, де $y^* \in Y, y \in Y$.

Попередньо доведено таку теорему.

Теорема 3.1.2. Нехай $y^* \in Y, i \in \{1, \dots, r\}$. Тоді має місце рівність

$$\eth\varphi_i(y^*) = \left\{f \in dom\, h^* : h(y^* - e_i) = \max_{f \in dom\, h^*} f(y^* - e_i) = f(y^* - e_i)\right\}.$$

(3.4)

Доведення. Нехай $y^* \in Y$. Позначимо

$$f \in dom\, h^*_{y^* - e_i} = \left\{f \in dom\, h^* : h(y^* - e_i) = \max_{f \in dom\, h^*} f(y^* - e_i) = f(y^* - e_i)\right\}. \quad (3.5)$$

Відповідно до (3.4) – (3.5) потрібно довести, що має місце рівність

$$\eth P(y^*) = dom\, h^*_{y^* - e_i}. \quad (3.6)$$

Нехай $f \in d\eth P(y^*)$. Це означає, що (див. (3.3)

$$\varphi_i(y) - \varphi_i(y^*) = h(y - e_i) - h(y^* - e_i) \geq f(y - y^*)$$
$$= f(y - e_i) - f(y^* - e_i), y \in Y.$$

З одержаних співвідношень випливає, що

$$f(y - e_i) - h(y - e_i) \leq f(y^* - e_i) - h(y^* - e_i), y \in Y. \quad (3.7)$$

Для кожного $x \in Y$ покладемо в (3.7) $y = x + e_i, y^* = x^* + e_i, (x^* = y^* - e_i)$. Згідно (3.7) отримаємо, що

$$f(x) - h(x) \leq f(x^*) - h(x^*), x \in Y.$$

З останньої нерівності випливає, що

$$h^*(f) = \sup_{x\in Y}(f(x) - h(x)) \le f(x^*) - h(x^*) \le \sup_{x\in Y}\big(f(x) - h(x)\big) = h^*(f).$$

Тому $f \in dom\, h^*$ то $f(x^*) - h(x^*) = h^*(f) = 0$.

Отже, $f(x^*) = h(x^*), f(y^* - e_i) = h(y^* - e_i)$.

Таким чином ми одержали, що для будь-якого $f \in d\mathfrak{d}P(y^*)$ випливає, що $f \in dom\, h^*$ та $h(y^* - e_i) = \max_{f\in dom\, h^*} f(y^* - e_i) = f(y^* - e_i)$.

Це й означає, що $f \in dom\, h^*_{y^*-e_i}$. Внаслідок цього і довільності вибору елемента f із $d\mathfrak{d}P(y^*)$ робимо висновок, що

$$d\mathfrak{d}P(y^*) \subset dom\, h^*_{y^*-e_i}. \tag{3.8}$$

Нехай тепер $f \in dom\, h^*_{y^*-e_i}$. Тоді для $y \in Y$ одержимо, що

$$\begin{aligned}\varphi_i(y) - \varphi_i(y^*) &= h(y - e_i) - h(y^* - e_i)\\ &= \max_{f\in dom\, h^*} f(y - e_i) - \max_{f\in dom\, h^*} f(y^* - e_i)\\ &= \max_{f\in dom\, h^*} f(y - e_i) - f(y^* - e_i) \ge f(y - e_i) - f(y^* - e_i)\\ &= f(y - y^*), y \in Y.\end{aligned}$$

Це й означає, що $f \in \mathfrak{d}\varphi_i(y^*)$. Тому

$$dom\, h^*_{y^*-e_i} \subset \partial\varphi_i(y^*). \tag{3.9}$$

Зі співвідношення (3.8) та (3.9)робимо висновок, що має місце (3.6) і, отже, (3.4).

Теорему доведено.

Теорема 3.1.3. Для будь-яких $y^* \in Y, y \in Y$ мають місце рівності

$$\varphi_i{}'(y^*, y) = \max_{f\in dom\, h^*_{y^*-e_i}} f(y), \tag{3.10}$$

$$\varphi'(y^*, y) = \sum_{i=1}^{r} \max_{f \in dom\, h^*_{y^*-e_i}} f(y). \tag{3.11}$$

Доведення. Нехай $i \in \{1, \ldots, r\}$. Оскільки функція $\varphi_i(y), y \in Y$, є опуклою та неперервною на $(Y, \|\cdot\|)$, то для будь-яких $y^*, y \in Y$ згідно з теоремою 3.1.1

$$\varphi_i{}'(y^*, y) = \max_{f \in \partial\varphi_i(y^*)} f(y). \tag{3.12}$$

Зі співвідношень (3.6) та (3.12) випливає рівність (3.10).

З рівностей (3.3) та (3.6) випливає рівність (3.11).

Теорему доведено.

3.2. Двоїсте подання конуса внутрішніх напрямків для лебегової множини цільової функції задачі відшукання величини (2.1) з деякої точки замикання цієї множини

Нехай $y^* \in$ A, A – множина допустимих розв'язків задачі відшукання величини (2.1)

$$\varphi(y) = \sum_{i=1}^{r} h(y - e_i, y \in Y, -$$

цільова функція цієї задачі,

$G(y^*) = \{y \in Y : \varphi(y) < \varphi(y^*)\} -$

лебегова множина функції $\varphi(y), y \in Y$, а

$\Gamma(G(y^*), y^*)$ – конус внутрішніх напрямків для множини $G(y^*)$ з точки y^*.

Згідно [4, с. 12]

$\Gamma(G(y^*), y^*)$ – це множина тих $y \in Y$, для яких існує окіл $O(y)$ точки у в просторі $(Y, \|\cdot\|)$ та існує $\varepsilon > 0$ такі, що $y^* + (0, \varepsilon)O(y) \in G(y^*)$, тобто $y^* + \propto z \in G(y^*)$ для всіх $\propto \in (0, \varepsilon)$ та $z \in O(y)$.

Отримуємо двоїсте подання конуса внутрішніх напрямків для лебегової множини $G(y^*)$ з точки y^*.

Теорема 3.2.1. Нехай для $y^* \in$ А $G(y^*) \neq 0$.

Тоді $\Gamma(G(y^*), y^*) \neq 0$ і має місце рівність

$$\Gamma(G(y^*), y^*) = \left\{ y \in Y : \sum_{i=1}^{r} \max_{f \in dom\, h^*_{y^* - e_i}} f(y) < 0 \right\}. \tag{3.13}$$

Доведення.

За умовою $G(y^*) \neq \emptyset$, а $G(y^*) = \{y \in Y : \varphi(y) < \varphi(y^*)\}$. Звідси випливає, що існує $\bar{y} \in Y$, для якого $\varphi(\bar{y}) < \varphi(y^*)$. Оскільки функція φ є неперервною на $(Y, \|\cdot\|)$ (див., теорему, 2.2.1), то існує $O(\bar{y})$ – окіл точки $\bar{y}$, такий, що $\varphi(z) < \varphi(y^*)$ $\forall z \in O(\bar{y})$. Звідси випливає, що $O(\bar{y}) \subset G(y^*)$ разом з точкою $\bar{y}$. Це означає, що $G(y^*)$ є відкритою множиною простору $(Y, \|\cdot\|)$.

Переконаємося, що ця множина є опуклою множиною простору Y. Нехай $y_1, y_2 \in G(y^*), \propto \in [0,1]$. Врахувавши опуклість функції φ (див. теорему, 2.2.1) та те, що $\varphi(y_1) < \varphi(y^*), \varphi(y_2) < \varphi(y^*)$, одержимо, що

$$\varphi\big((1-\propto)y_1 + \propto y_2\big) \leq (1-\propto)\big(\varphi(y_1) + \varphi(y_2)\big) < (1-\propto)\varphi(y^*) + \propto \varphi(y^*) = \varphi(y^*).$$

Це означає, що $(1-\propto)y_1 + \propto y_2 \in G(y^*)$, тобто $G(y^*)$ є опуклою множиною.

Переконаємося, що $y^* \in \overline{G(y^*)}$ - замикання множини $G(y^*)$. Для цього розглянемо відрізок $[\bar{y}, y^*)$, де $\varphi(\bar{y}) < \varphi(y^*)$, тобто $\bar{y} \in G(y^*)$.

Оскільки функція φ є опуклою, то згідно з критерієм власної опуклої функції (див., наприклад, [12, с. 56]):

$$\varphi\big((1-\propto)\,\bar{y}+\propto y^*\big) \leq (1-\propto)\varphi(\bar{y})+\propto \varphi(y^*) < (1-\propto)\varphi(y^*)+\propto \varphi(y^*) =$$
$$= \varphi(y^*)$$

для всіх $\propto\in [0,1)$. Отже, точки $y(\propto) = (1-\propto)\bar{y}+\propto y^* \in G(y^*)$ для всіх $\propto\in$ $[0,1)$.

Нехай $\propto_k\in [0,1)$ та $\propto_k\to 1$. Тоді $y(\propto_k) = (1-\propto_k)\bar{y} +\propto_k y^* \in G(y^*)$ та $\|y(\propto_k) - y^*\| = \|(1-\propto_k)\bar{y} +\propto_k y^* - y^*\| = \|(1-\propto_k)(\bar{y} - y^*)\| =$
$= (1- \propto_k)\|\bar{y} - y^*\| \to 0$ при $k \to \infty$, оскільки $\propto_k\to 1$ при $k \to \infty$.

Це означає, що $\lim\limits_{k\to\infty} y(\propto_k) = y^*$, причому $\propto_k \in G(y^*)$.

Таким чином доведено, що існує послідовність точок $\{y(\propto_k)\}_{k=1}^{\infty}$ із $G(y^*)$, яка збігається до y^*. Тому $y^* \in \overline{G(y^*)}$, що й потрібно було встановити. Отже, $G(y^*)$ є відкрита опукла множина, для якої $y^* \in G(y^*)$. Тоді (див. теорему 1.3.4 [4,с. 19])

$$\Gamma(G(y^*), y^*) = \{y = \lambda(y_1 - y^*), \lambda > 0, y_1 \in G(y^*)\} = \Big\{y :\ y^* + \frac{1}{\lambda} y \in$$
$$G(y^*), \lambda > 0\Big\} = \{y :\ y^* + ty \in G(y^*), t > 0\}. \tag{3.14}$$

Переконаємося тепер, що

$$\Gamma(G(y^*), y^*) = \{y \in Y :\ \varphi'(y^*), y^* < 0\}. \tag{3.15}$$

Нехай $y \in\ \Gamma(G(y^*), y^*)$. Згідно з (3.14) $y^* + ty \in G(y^*), t > 0$, тобто

$$\varphi(y^* + ty) < \varphi(y^*), \varphi(y^* + ty) - \varphi(y^*) < 0,\ t > 0.$$

З урахуванням цього одержимо, що (див., наприклад, [4, с. 328])

$$\varphi'(y^*, y) = \inf_{t>0} \frac{\varphi^*(y^* + ty) - \varphi(y^*)}{t} \leq \varphi^*(y^* + 1y) - \varphi(y^*) < 0.$$

Отже, для всіх $y \in \Gamma(G(y^*), y^*) :\ \varphi'(y^*, y) < 0$.

Тому

$$\Gamma(G(y^*), y^*) \subset \{y \in Y \ : \ \varphi'(y^*, y) < 0\}. \tag{3.16}$$

Нехай тепер $y \in \{y \in Y \ : \ \varphi'(y^*, y) < 0\}$, тобто $\varphi'(y^*, y) < 0$.

Маємо, що

$$\varphi'(y^*, y) = \inf_{t>0} \frac{\varphi^*(y^* + ty) - \varphi(y^*)}{t} < 0.$$

Тому існує $\bar{t} > 0$, що

$$\frac{\varphi^*(y^* + \bar{t}y) - \varphi(y^*)}{\bar{t}} < 0, \varphi^*(y^* + \bar{t}y) < \varphi(y^*).$$

Звідси випливає, що $y^* + \bar{t}y \in G(y^*)$**.** Згідно з (3.14) тоді $y \in \Gamma(G(y^*), y^*)$ для всіх $\{y \in Y \ : \ \varphi'(y^*, y) < 0\}$.

Це означає, що

$$\{y \in Y \ : \ \varphi'(y^*, y) < 0\} \subset \Gamma(G(y^*), y^*). \tag{3.17}$$

Зі співвідношень (3.16), (3.17) одержуємо, що має місце (3.15).

З рівності (3.15) та (3.11) отримуємо рівність (3.13).

Теорему доведено.

Теорема 3.2.2. Нехай для $y^* \in$ А $G(y^*) = \emptyset$.

Тоді для всіх $y \in Y$

$$\sum_{i=1}^{r} \max_{f \in dom\, h^*_{y^*-e_i}} f(y)\, f(y^* - e_i) \geq 0. \tag{3.18}$$

Доведення. Нехай для $y^* \in$ А $(y^*), y^* = \emptyset$.

Тоді $\varphi(y) \geq \varphi(y^*)$ для всіх $y \in Y$.

Отже, для всіх $y \in Y, t > 0 \, : \, \varphi(y^* + ty) \geq \varphi(y^*)$.

Тому

$$\varphi'(y^*,y)=\inf_{t>0}\frac{\varphi^*(y^*+ty)-\varphi(y^*)}{t}\geq 0.$$

З урахуванням цієї нерівності та рівності (3.11) отримуємо нерівність (3.18).

Теорему доведено.

3.3. Необхідна умова екстремальності допустимого елемента для задачі відшукання величини (2.1)

Теорема 3.3.1. (необхідна умова екстремальності допустимого елемента для задачі відшукання величини (2.1)). Якщо $y^*\in A$ є екстремальним елементом для величини (2.1), то для кожного $y\in\Gamma(A,y^*)$ існують функціонали $f_i^y\in dom\,h^*, i=\overline{1,r}$, для яких:

$$h(y^*-e_i)=\max_{f\in dom\,h^*}f(y^*-e_i)=f_i^y(y^*-e_i), \qquad (3.19)$$

$$\sum_{i=1}^{r}f_i^y(y)\geq 0. \qquad (3.20)$$

Доведення. Нехай $G(y^*)\neq 0$. Згідно з теоремою 3.2.1, тоді $\Gamma(G(y^*),y^*)\neq 0$. За умовою $y^*\in A$ є екстремальним елементом для величини (2.1), тобто y^* є точкою мінімуму функції $\varphi(y)$ на множині А, тобто y^* є оптимальним розв'язком такої екстремальної задачі:

$$\inf_{y\in A}\varphi(y). \qquad (3.21)$$

Згідно з теоремою 1.4.1 [4, с. 22] $\Gamma(G(y^*),y^*)\cap\Gamma^*(\mathrm{A},y^*)\neq\emptyset)$.

Тому для кожного $y\in\Gamma^*(\mathrm{A},y^*):\ y\notin\Gamma(G(y^*),y^*)$.

Згідно з рівністю (3.13) (теоремою 3.3.1)

$$\sum_{i=1}^{r} \max_{f \in dom\, h^*_{y^*-e_i}} f(y) = \sum_{i=1}^{r} f_i^y(y) \geq 0,$$

де $f_i^y \in dom\, h^*_{y^*-e_i}$.

Оскільки $f_i^y \in dom\, h^*_{y^*-e_i}$, то це означає, що $f_i^y \in dom\, h^*$, $i = \overline{1,r},$ та

$$h(y^* - e_i) = \max_{f \in dom\, h^*} f(y^* - e_i) = f_i^y(y^* - e_i).$$

Теорему доведено.

3.4. Достатня умова екстремальності допустимих елементів для задачі відшукання величини (2.1)

Теорема 3.4.1. (достатня умова екстремальності елемента $y^* \in A$ для задачі відшукання величини (2.1)). Нехай в задачі відшукання величини (2.1) для $y^* \in A$ та кожного $y \in A$ існують функціонали $f_i^y \in dom\, h^*, i = \overline{1,r}$, такі, що

$$h(y^* - e_i) = \max_{f \in dom\, h^*} f(y^* - e_i) = f_i^y(y^* - e_i), \tag{3.22}$$

$$\sum_{i=1}^{r} f_i^y(y - y^*) \geq 0, \tag{3.23}$$

то y^* є екстремальним елементом для величини (2.1).

Доведення. Оскільки має місце співвідношення (3.22) та $f_i^y \in dom\, h^*$, то $f_i^y \in dom\, h^*_{y^*-e_i}, i = \overline{1,m}$.

З урахуванням цього та (3.23) для кожного $y \in A$ будемо мати , що (див. (3.11))

$$\sum_{i=1}^{r} \max_{f \in dom\, h^*_{y^*-e_i}} f(y - y^*) = \varphi'(y^*, y - y^*) \geq \sum_{i=1}^{r} f_i^y(y - y^*) \geq 0.$$

Звідси випливає, що для кожного $y \in A$

$$0 \le \varphi'(y^*, y - y^*) =$$

$$= \inf_{t>0} \frac{\varphi\left(y^* + t\left(y - y^* - \varphi(y^*)\right)\right)}{t} \le$$

$$\le \frac{\varphi\left(y^* + 1\left(y - y^* - \varphi(y^*)\right)\right) - \varphi(y^*)}{1} = \varphi(y) - \varphi(y^*).$$

Тому $\varphi(y^*) \le \varphi(y)$ для всіх $y \in A$.

Отже,

$$\min_{y \in A} \sum_{i=1}^{r} h(\,y - e_i) = \sum_{i=1}^{r} h(\,y^* - e_i).$$

Це й означає, що y^* є екстремальним елементом для величини (2.1).

Теорему доведено.

3.5. Критерії екстремальності допустимого елемента для задачі відшукання величини (2.1)

Терема 3.5.1. (критерій екстремальності елемента $y^* \in A$ для задачі відшукання величини (2.1)). Нехай в задачі відшукання величини (2.1) $y^* \in A$ і множина А є опуклою множиною. Для того щоб точка $y^* \in A$ була екстремальним елементом для величини (2.1), необхідно і достатньо, щоб для кожного $y \in A$ існували функціонали $f_i^y \in dom\, h^*, i = \overline{1,r}$, для яких виконуються умови (3.22), (3.23) теореми 3.4.1.

Доведення. Необхідність. Нехай y^* є екстремальним елементом для величини (2.1) і множина А є опуклою множиною. Тоді

$$y - y^* \in \Gamma^*(\mathrm{A}, y^*).$$

Згідно з теоремою 3.3.1 тоді для $y - y^* \in \Gamma^*(A, y^*)$ існують функціонали $f_i^{y-y^*} = f_i^y \in dom\, h^*, i = \overline{1,r}$, для яких:

$$h(y^* - e_i) = \max_{f \in dom\, h^*} f(y^* - e_i) = f_i^{y-y^*}(y^* - e_i) = f_i^y(y^* - e_i),$$

$$\sum_{i=1}^{r} f_i^{y-y^*}(y - y^*) = \sum_{i=1}^{r} f_i^y(y - y^*) \geq 0.$$

Отже, для кожного $y \in A$ існують функціонали $f_i^y \in dom\, h^*, i = \overline{1,r}$, для яких виконуються умови (3.22), (3.23), теореми 3.4.1. Необхідність встановлено.

Достатність. Якщо для кожного $y \in A$ існують функціонали $f_i^y \in dom\, h^*$, для яких виконуються умови (3.22), (3.23), то, як встановлено, при доведенні теореми 3.4.1, y^* є екстремальним елементом для величини (2.1).

Теорему доведено.

Встановлені вище результати можна конкретизувати на випадок, коли $h(y) = \|y\|, y \in (Y, \|\cdot\|)$.

В цьому випадку задача (2.1)набере вигляду задачі (2.2): потрібно знайти величину

$$\mathfrak{I}_A^{\|\cdot\|}(\{e_i\}_{i=1}^r) = \inf_{y \in A} \sum_{i=1}^{r} \|y - e_i\| \qquad (2.2)$$

та її екстремальний елемент.

Як зазначалося при розгляді прикладу 1.4.8 в цьому випадку

$$dom\, h^* = dom\, \|\cdot\|^* = B_1^*(0) = B^* = \{f \in X^* : \|f\| \leq 1\},$$

$$h^*(f) = \|\cdot\|^*(f) = \begin{cases} 0, \text{якщо } f \in B^* \\ +\infty, \text{якщо } f \notin B^* \end{cases}.$$

Отже, в розглядуваному випадку маємо, що

$$h(y) = \|y\| = \max_{f \in B^*} f(y) = \max_{\|f\| \leq 1} f(y).$$

Для $y^* \in Y$:

$$dom\, h^*_{y^*-e_i} = dom\, \|\cdot\|^*_{y^*-e_i}$$
$$= \Big\{ f \in B^* : \|y^* - e_i\| = \max_{f \in B^*} f(y^* - e_i) = \max_{\|f\| \leq 1} f(y^* - e_i)$$
$$= f_i^y(y^* - e_i) \Big\}.$$

З урахуванням зазначеного вище теорема 3.5.1 конкретизується на випадок задачі відшукання величини (2.2) в такий наслідок.

Наслідок 3.5.1. Нехай в задачі відшукання величини (2.2) A є опуклою множиною.

Для того щоб елемент $y^* \in A$ був екстремальним елементом для величини (2.2), необхідно і достатньо, щоб для кожного $y \in A$ існували функціонали $f_i^y \in dom\, h^*,\ i = \overline{1, r}$. Для яких виконуються умови :

$$\|y^* - e_i\| = \max_{f \in B^*} f(y^* - e_i) = f_i^y(y^* - e_i), \sum_{i=1}^{r} f_i^y\,(y - y^*) \geq 0.$$

Аналогічно можна конкретизувати й інші доведені в роботі твердження на випадок задачі відшукання величини (2.2). Результати роботи можна конкретизувати й на інші задачі, які вкладаються у схему постановки задачі (2.1), зокрема, на задачі, в яких множина A є підпростором простору Y, в тому числі й скінченновимірним підпростором простору Y.

Наслідок 3.5.2. Нехай в задачі відшукання величини (2.1) А є підпростором простору Y. Для того щоб елемент $y^* \in A$ був екстремальним елементом для величини (2.1) в цьому випадку, необхідно і достатньо, щоб для кожного $y \in A$ існували функціонали $f_i^y \in dom\, h^*,\ i = \overline{1,r}$, для яких виконуються умови :

$$h(y^* - e_i) = \max_{f \in B^*} f(y^* - e_i) =$$

$$= f_i^y(y^* - e_i), \sum_{i=1}^{r} f_i^y(y) \geq 0 \qquad (3.24)$$

Доведення. Необхідність. Нехай А є підпростором Y.Легко переконатися, що А є опуклою множиною Y. Припустимо, що $y^* \in A,\ y^*$ є екстремальним елементом для величини (2.1), $y \in A$. Оскільки за умовою А є підпростором простору Y, то $y + y^* \in A$. Згідно з теоремою 3.5.1 існують функціонали $f_i^y \in dom\, h^*,\ i = \overline{1,r}$, для яких виконуються умови (3.22), (3.23), тобто

$$h(y^* - e_i) = \max_{f \in B^*} f(y^* - e_i) = f_i^{y+y^*}(y^* - e_i) =$$

$$= f_i^y(y^* - e_i), \sum_{i=1}^{r} f_i^{y+y^*}(y + y^* - y^*) = \sum_{i=1}^{r} f_i^y(y) \geq 0.$$

Отже, для будь-якого $y \in A$ існують функціонали $f_i^y \in dom\, h^*,\ i = \overline{1,r}$, для яких виконуються умови (3.24). Нехай тепер для кожного $y \in A$ існують функціонали $f_i^y \in dom\, h^*,\ i = \overline{1,r}$, для яких виконуються умови (3.24), (3.25). Переконаємося, що тоді y^* є екстремальним елементом для величини (2.1). Для довільного $y \in A$ розглянемо вектор $y - y^*$. Маємо, що $y - y^* \in A$. За умовою для $y - y^* \in A$ існують функціонали $f_i^{y-y^*} = f_i^y \in dom\, h^*,\ i = \overline{1,r}$, для яких

$$h(y^* - e_i) = \max_{f \in B^*} f(y^* - e_i) = f_i^{y-y^*}(y^* - e_i)$$

$$= f_i^{y}(y^* - e_i), \sum_{i=1}^{r} f_i^{y-y^*}(y - y^*) = \sum_{i=1}^{r} f_i^{y}(y - y^*) \geq 0.$$

Згідно з теоремою 3.4.1 y^* є екстремальним елементом для величини (2.1).

Наслідок доведено.

ВИСНОВКИ

У дипломній роботі «Відносна задача Штейнера в лінійному нормованому просторі, в якій міра відхилення між елементами оцінюється з допомогою невід’ємної опуклої функції повільного зростання, та деякі її часткові випадки»:

6. Розглянуто низку прикладів функцій повільного зростання , заданих на лінійному нормованому просторі. Наведено відповідні обґрунтування.
7. Встановлено властивості цільової функції задачі відшукання величини (0.6) та властивості спряженої до неї функції.
8. Сформульовано та доведено теореми існування екстремального елемента для задачі відшукання величини (0.6) та наслідки з цих теорем, які стосуються часткових випадків задачі (0.6).
9. Отримано двоїсте подання похідної за напрямками цільової функції задачі відшукання величини (0.6) та двоїсте подання конуса внутрішніх напрямків для деякої лебегової множини цільової функції задачі (0.6) у випадку, коли h є невід’ємним неперервним сублінійним функціоналом.
10. Встановлено необхідні, достатні умови та критерії екстремальності допустимого елемента для задачі відшукання величини (0.6) у випадку, коли h є невід’ємним неперервним сублінійним функціоналом та конкретизовано ці умови і критерії на важливі часткові випадки.

Результати дипломної роботи можна використати при дослідженні та розв’язуванні й інших екстремальних задач, які вкладаються у схему постановки задачі (2.1).

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Ахиезер Н.И. Лекции по теории аппроксимации / Н.И. Ахиезер. – М.: Наука, 1965. – 407 с.

2. Дзядык В.К. Введение в теорию равномерного приближения функций / В.К. Дзядык. – М.: Наука, 1977. – 510 с.

3. Корнейчук Н.П. Экстремальные задачи теории приближения / Н.П. Корнейчук. – М.: Наука, 1976. – 320 с.

4. Лоран П.-Ж. Аппроксимация и оптимизация / П.-Ж. Лоран. – М.: Мир, 1975. – 496 с.

5. Степанец А.И. Методы теории приближений / А.И. Степанец. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. – Ч.I. – 427 с.

6. Степанец А.И. Методы теории приближений / А.И. Степанец. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. – Ч.II. – 468 с.

7. Гнатюк В. А. Общие свойства наилучшего приближения по выпуклой непрерывной функции / В. А. Гнатюк, В. С. Щирба // Укр. мат. журн. – 1982. – 4, №5. – С.608-613.

8. Гнатюк Ю.В. Двоїсті співвідношення для задачі найкращого за дробово-опуклою функцією наближення кількох елементів та критерії елемента найкращого наближення / Ю.В. Гнатюк // Доп. НАН України. – 1995. - №6. – С. 23-26.

9. Гнатюк Ю.В. Основні властивості задачі лінійного одночасного наближення кількох елементів / Ю.В. Гнатюк // Укр. мат. – 1996.-48, №9. – С. 1183-1193.

10. Крейн М.Г. Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи / М.Г. Крейн, А.А. Нудельман. – М.: Наука, 1973. – 552 с.

11. Зуховицкий С.И. Линейное и выпуклое програмирование /С.И. Зуховицкий, Л.И. Авдеева. – М.: Наука, 19.

12. Гудима У.В. Опуклий аналіз: навчальний посібник / У.В. Гудима, В.О. Гнатюк. – Кам’янець-Подільський: – Кам’янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2019. – 112 с.

13. Ус С.А Функціональний аналіз: навч. посібник / С.А. Ус. – Д.: Національний гірничий університет, 2013. – 236 с.

14. Люстерник Л.А. Краткий курс функционального анализа / Л.А. Люстерник, В.И.Соболев. – М.: Высшая школа, 1982. – 271 с.

15. Йоффе А.Д. Теория экстремальных задач / А.Д. Йоффе, В.М. Тихомиров. – М.: Наука, 1974.-480с.

16. Гнатюк В.А. О некоторых свойствах функционалов медленного роста / В.А. Гнатюк, В.В. Мойко // Укр. мат. журн. – 1977. – Вып. 29, №1. – С. 39-49.

17. Алексеев В.М. Оптимальное управление / В.М. Алексеев, В.М. Тихомиров, С.И. Фомин. – М.: Наука, 1979. – 429с.

18. Демьянов В.Ф. Приблеженные методы решения экстремальных задач / В.Ф. Демьянов, А.И. Рубинов. – Л.: Изд.-во ЛГУ, 1968.-178с.

19. Пшеничный Б.Н. Необходимые условия экстремума / Н.Б. Пшеничный. – М.: Наука, 1982. – 143с.

20. Жалдак М.І. Основи теорії і методів оптимізації: Навчальний посібник / М.І. Жалдак, Ю.В. Триус. – Черкаси: Брама-Україна, 2005. – 608 с.